Л.Э. Генденштейн, А.П. Ершова, А.С. Ершова

НАГЛЯДНЫЙ СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ

с примерами

**для абитуриентов,
школьников,
учителей**

ИЛЕКСА
Москва
2009

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

Рецензент
Ю.В. Гандель, доктор физико-математических наук,
профессор Харьковского государственного университета

Генденштейн Л.Э., Ершова А.П., Ершова А.С.
Наглядный справочник по математике с примерами. Для абитуриентов, школьников, учителей.— М.: Илекса, 2009,— 192 с.
ISBN 978-5-89237-108-7

Справочник отличается ***максимальной наглядностью:*** каждая тема школьного курса математики иллюстрируется «говорящими» графиками и рисунками.

Книга поможет учащимся школ, лицеев и гимназий, *независимо от того, по каким учебникам и по какой программе изучается курс математики,* наглядно представить изучаемый материал и быстро найти необходимые сведения. Такой справочник на столах учеников позволит учителю освободить время урока для решения задач.

Выпускникам и абитуриентам справочник даст возможность увидеть предмет в целом и систематизировать свои знания.

ISBN 978-5-89237-108-7

© Генденштейн Л.Э.,
Ершова А.П.,
Ершова А.С., 2003
© ИЛЕКСА, 2003

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

СОДЕРЖАНИЕ

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

ФУНКЦИИ 10

Основные свойства функций 11

Четность и нечетность 11

Периодичность 12

Нули функции 12

Монотонность (возрастание, убывание) 13

Экстремумы (максимумы и минимумы) 13

Асимптоты 14

Обратные функции 15

Нахождение формулы для функции, обратной данной 15

Преобразования графиков функций 16

Преобразование симметрии относительно оси x 16

Преобразование симметрии относительно оси y 17

Параллельный перенос вдоль оси x 18

Параллельный перенос вдоль оси y 19

Сжатие и растяжение вдоль оси x 20

Сжатие и растяжение вдоль оси y 21

Построение графика функции $y = |f(x)|$ 22

Построение графика функции $y = f(|x|)$ 22

Построение графика обратной функции 23

Построение графиков сложных функций с помощью последовательных преобразований графиков элементарных функций 24

Линейная функция 26

Частные случаи линейной функции (прямая пропорциональность и постоянная функция) 26

Взаимное расположение графиков линейных функций 26

Свойства линейной функции 27

Построение графика линейной функции по двум точкам 28

Построение графика линейной функции $y = kx + b$ с помощью элементарных преобразований графика функции $y = x$ 29

Квадратичная функция 30

Различные представления квадратичной функции 30

Выделение полного квадрата 30

Разложение на линейные множители 30

Свойства квадратичной функции и ее графика 31

Направление ветвей, характерные точки и ось симметрии параболы 32

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

Построение графика квадратичной функции по направлению ветвей, характерным точкам и оси симметрии параболы (примеры) 33
Построение графика квадратичной функции с помощью элементарных преобразований графика функции $y = x^2$ 34
Степенные функции с натуральными показателями степени 36
Степенные функции с целыми отрицательными показателями степени 37
Функции $y = \sqrt[n]{x}$ 38
Степенные функции с действительными показателями степени 39
Показательная функция 40
Логарифмическая функция 41
Тригонометрические функции 42
Обратные тригонометрические функции 46

УРАВНЕНИЯ 48
Линейные уравнения 49
Квадратные уравнения 50
Неполные квадратные уравнения 51
Теоремы Виета 52
Формулы Виета для корней приведенного квадратного уравнения 52
Уравнения, сводящиеся к квадратным 53
Иррациональные уравнения 54
Простейшие показательные уравнения 55
Простейшие логарифмические уравнения 55
Простейшие тригонометрические уравнения 56
Уравнение с двумя переменными и его график 59

НЕРАВЕНСТВА 61
Линейные неравенства 62
Квадратные неравенства 63
Метод интервалов для неравенств вида $(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2}\ldots(x - a_n)^{k_n} > 0$ 64
Применение метода интервалов для решения дробно-рациональных неравенств 65
Иррациональные неравенства 66
Показательные неравенства 67
Логарифмические неравенства 67
Простейшие тригонометрические неравенства 68

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ 71

Основные методы решения систем уравнений 72

Метод подстановки **72**

Метод сложения 73

Графический метод решения системы двух уравнений с двумя неизвестными 74

Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными 75

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ 76

Производная 76

Геометрический смысл производной 76

Уравнение касательной 76

Вторая производная 77

Физический смысл производной 77

Правила дифференцирования 77

Производная сложной функции 77

Применение производной к исследованию функций 78

Монотонность 78

Экстремумы 79

Схема применения производной для нахождения интервалов монотонности и экстремумов 80

Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке 81

Схема нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке 81

ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ 82

Первообразная 82

Основное свойство первообразных **82**

Неопределенный интеграл 82

Правила интегрирования 82

Определенный интеграл 83

Связь между определенным интегралом и первообразной (формула Ньютона-Лейбница) **83**

Основные свойства определенного интеграла 83

Геометрический смысл определенного интеграла 84

Физический смысл определенного интеграла 84

Вычисление площадей и объемов с помощью определенного интеграла 85

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ГЕОМЕТРИЯ

ПЛАНИМЕТРИЯ 86

Прямые и углы на плоскости 86

Виды углов 86

Углы с соответственно параллельными сторонами 86

Углы с соответственно перпендикулярными сторонами 86

Параллельные прямые 87

Признаки и свойства параллельных прямых 87

Перпендикуляр и наклонные 88

Треугольники 89

Произвольный треугольник 89

Соотношения между сторонами и углами 89

Признаки равенства треугольников 90

Признаки подобия треугольников 90

Свойство прямой, параллельной стороне треугольника 90

Замечательные линии треугольника 91

Свойства медиан 92

Свойства биссектрис 93

Свойства высот 94

Свойства серединных перпендикуляров 95

Свойства средней линии 96

Вписанная и описанная окружности 96

Площадь треугольника 97

Равнобедренный треугольник 98

Свойства и признаки равнобедренного треугольника 98

Равносторонний треугольник 99

Свойства и признаки равностороннего треугольника 99

Высота и площадь равностороннего треугольника 99

Прямоугольный треугольник 100

Признаки равенства прямоугольных треугольников 100

Признаки подобия прямоугольных треугольников 101

Теорема Пифагора 101

Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике 102

Свойства проекций катетов 102

Частные случаи прямоугольных треугольников 102

Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник 103

Окружность, описанная около прямоугольного треугольника 103

Площадь прямоугольного треугольника 103

Четырехугольники 104

Виды четырехугольников 104

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

Произвольный четырехугольник 104
Четырехугольник, описанный около окружности 105
Четырехугольник, вписанный в окружность 105
Параллелограмм 106
Свойства и признаки параллелограмма 106
Площадь параллелограмма 108
Свойство произвольного четырехугольника, связанное с параллелограммом 108
Ромб 109
Свойства и признаки ромба 109
Окружность, вписанная в ромб 110
Площадь ромба 110
Прямоугольник 111
Свойства и признаки прямоугольника 111
Окружность, описанная около прямоугольника 112
Площадь прямоугольника 112
Связь между прямоугольником и ромбом 112
Квадрат 113
Свойства и признаки квадрата 113
Окружность, описанная около квадрата 114
Окружность, вписанная в квадрат 114
Площадь квадрата 114
Трапеция 115
Элементы трапеции 115
Площадь трапеции 115
Свойства трапеции 116
Окружность 118
Прямые и отрезки, связанные с окружностью 118
Углы, связанные с окружностью. Угловая мера дуги окружности 118
Радианная мера угла 118
Свойства вписанных углов 119
Углы между хордами, касательными и секущими 120
Свойства хорд 121
Соотношения между длинами хорд, отрезков касательных и секущих 122
Свойства дуг и хорд 123
Длина дуги и окружности 123
Площадь круга и его частей 123
Взаимное расположение двух окружностей. Общие касательные 124
Многоугольники 126
Произвольный многоугольник 126
Правильные многоугольники 127

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

Геометрические места точек 128
Некоторые геометрические места точек на плоскости 128
Преобразования фигур. Виды симметрии 130
Преобразования фигур 130
Виды симметрии фигур 132
Декартовы координаты 133
Уравнение прямой 134
Общее уравнение прямой 134
Уравнение прямой с угловым коэффициентом 135
Взаимное расположение двух прямых, заданных общим уравнением прямой 136
Взаимное расположение двух прямых, заданных уравнением прямой с угловым коэффициентом 137
Уравнение окружности 138

ВЕКТОРЫ 139
Обозначения векторов 139
Нулевой вектор 139
Коллинеарные векторы 139
Виды коллинеарных векторов 139
Действия над векторами 140
Сложение двух векторов 140
Сложение нескольких векторов 140
Вычитание векторов 140
Умножение вектора на число 141
Скалярное умножение векторов 141
Координаты вектора на плоскости и в пространстве 142
Действия над векторами в координатном представлении 143
Взаимное расположение векторов 144
Разложение вектора на плоскости по двум неколлинеарным векторам 145
Разложение вектора в пространстве по трем некомпланарным векторам 145
Разложение вектора по координатным векторам 146

СТЕРЕОМЕТРИЯ 147
Прямые и плоскости в пространстве 147
Способы задания точки 147
Способы задания прямой 147
Способы задания плоскости 148
Параллельность прямых и плоскостей 149
Параллельные прямые 149
Параллельные прямая и плоскость 149
Параллельные плоскости 150
Перпендикулярность прямых и плоскостей 151
Перпендикулярность плоскостей 152

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

Перпендикуляр и наклонные 153
Скрещивающиеся прямые 154
Углы в пространстве 155
Призма 156
Площадь поверхности и объем призмы 156
Параллелепипед 157
Пирамида 158
Правильная пирамида 158
Площадь поверхности и объем произвольной пирамиды 159
Площадь поверхности и объем правильной пирамиды 159
Тела вращения 160
Цилиндр 160
Конус 160
Площадь поверхности и объем цилиндра 160
Площадь поверхности и объем конуса 160
Сфера. Шар 161
Вписанные и описанные тела 162
Цилиндр, описанный около призмы 162
Цилиндр, вписанный в призму 162
Конус, описанный около пирамиды 163
Конус, вписанный в пирамиду 163
Шар, описанный около цилиндра 164
Шар, вписанный в цилиндр 165
Шар, описанный около конуса 166
Шар, вписанный в конус 167
Шар, описанный около призмы 168
Шар, вписанный в прямую призму 169
Шар, описанный около правильной пирамиды 170
Шар, вписанный в правильную пирамиду 171
Декартовы координаты 172
Уравнение плоскости 173
Взаимное расположение двух плоскостей 175
Уравнение сферы 176

СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ 177

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

ФУНКЦИИ*)

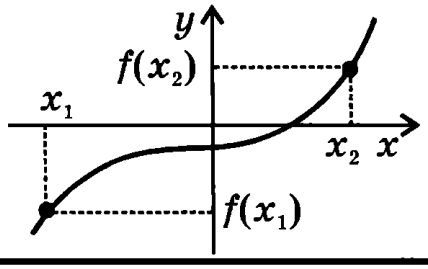
Числовой **функцией** называется соответствие, которое каждому числу x из некоторого заданного множества сопоставляет единственное число y.

Обозначение: $y = f(x)$, где x — независимая переменная (аргумент функции), y — зависимая переменная (функция).

Множество значений x называется **областью определения** функции (обычно обозначается D).

Множество значений y называется **областью значений** функции (обычно обозначается E).

Графиком функции называется множество точек плоскости с координатами $(x,\ f(x))$.



СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИЙ

- ***Аналитический способ:*** функция задается с помощью математической формулы.

  Примеры: $y = x^2$, $y = \ln x$

- ***Табличный способ:*** функция задается с помощью таблицы.

  Пример.

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

- ***Описательный способ:*** функция задается словесным описанием.

  Пример: функция Дирихле $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ для рациональных } x, \\ 0 \text{ для иррациональных } x. \end{cases}$

- ***Графический способ:*** функция задается с помощью графика.

*)Все параметры функций, в том числе коэффициенты многочленов, считаются действительными.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

ЧЕТНОСТЬ И НЕЧЕТНОСТЬ

Функция называется **четной**, если:

- область определения функции симметрична относительно нуля,
- для любого x из области определения

$$f(-x) = f(x).$$

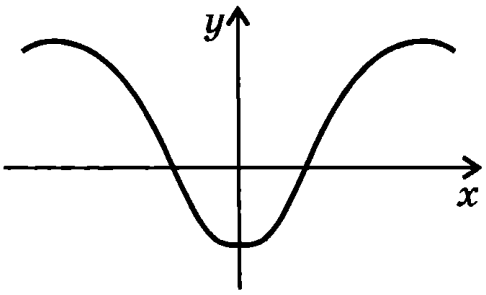


График четной функции симметричен относительно оси y.

Функция называется **нечетной**, если:

- область определения функции симметрична относительно нуля,
- для любого x из области определения

$$f(-x) = -f(x).$$

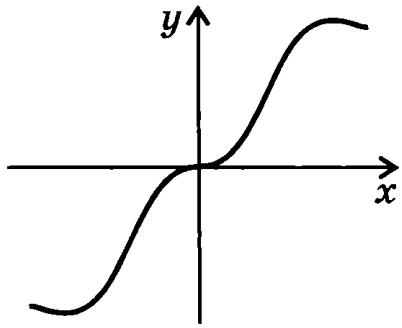
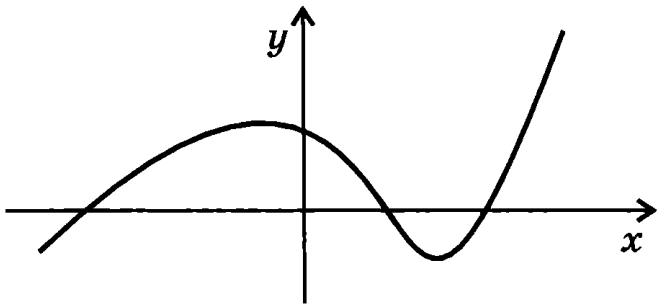


График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Многие функции не являются ни четными, ни нечетными.

Пример графика функции, не являющейся ни четной, ни нечетной:



Примеры четных функций: $y = x^{2n}$, $n \in Z$; $y = \cos x$

Примеры нечетных функций: $y = x^{2n+1}$, $n \in Z$; $y = \sin x$

Примеры функций, не являющихся ни четными, ни нечетными:

$y = e^x$, $y = \ln x$, $y = x - 2$, $y = (x + 1)^2$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПЕРИОДИЧНОСТЬ

Функция $f(x)$ называется **периодической** с периодом $T > 0$, если для любого x из области определения значения $x + T$ и $x - T$ также принадлежат области определения и

$$f(x) = f(x + T) = f(x - T).$$

При этом любое число вида Tn, где $n \in N$, также является периодом этой функции.

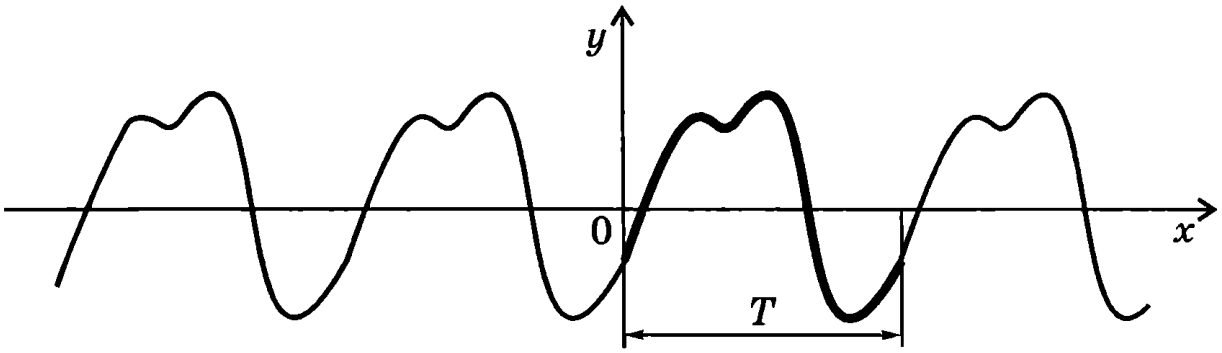


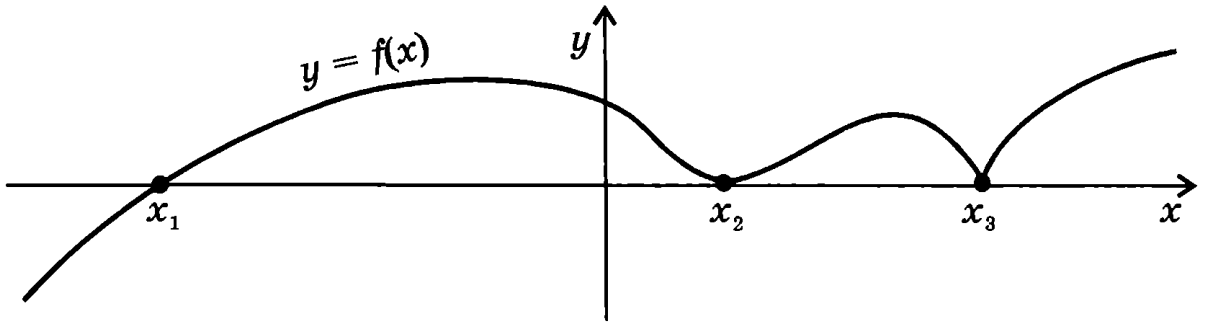
График периодической функции состоит из неограниченно повторяющихся одинаковых фрагментов. Чтобы построить график периодической функции, строят фрагмент графика на любом отрезке длиной T (например, $[0; T]$), а затем производят последовательные параллельные переносы фрагмента графика на T, $2T$, $3T$ и т.д. вдоль оси x (вправо и влево).

НУЛИ ФУНКЦИИ

Нулем функции $y = f(x)$ называется такое значение аргумента x_0, при котором функция обращается в нуль:

$$f(x_0) = 0.$$

В нуле функции ее график имеет общую точку с осью x.



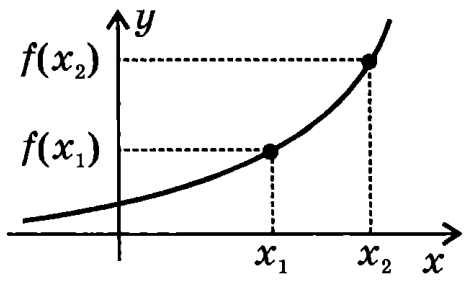
x_1, x_2, x_3 — нули функции $y = f(x)$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

МОНОТОННОСТЬ (ВОЗРАСТАНИЕ, УБЫВАНИЕ)

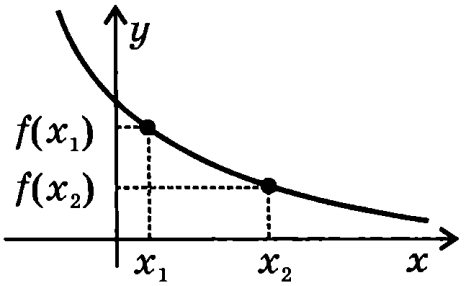
Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на интервале $(a;\ b)$, если для любых x_1 и x_2 из этого интервала таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство

$$f(x_1) < f(x_2).$$



Функция $y = f(x)$ называется **убывающей** на интервале $(a;\ b)$, если для любых x_1 и x_2 из этого интервала таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство

$$f(x_1) > f(x_2).$$

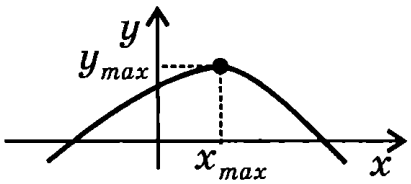


ЭКСТРЕМУМЫ (МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ)

Внутренняя точка x_{max} области определения называется **точкой максимума**, если для всех x из некоторой окрестности этой точки справедливо неравенство:

$$f(x) < f(x_{max}).$$

Значение $y_{max} = f(x_{max})$ называется **максимумом** этой функции.



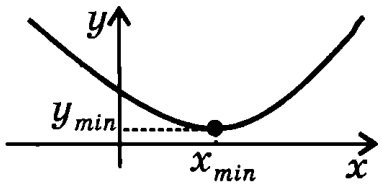
x_{max} — точка максимума

y_{max} — максимум

Внутренняя точка x_{min} области определения называется **точкой минимума**, если для всех x из некоторой окрестности этой точки справедливо неравенство:

$$f(x) > f(x_{min}).$$

Значение $y_{min} = f(x_{min})$ называется **минимумом** этой функции.



x_{min} — точка минимума

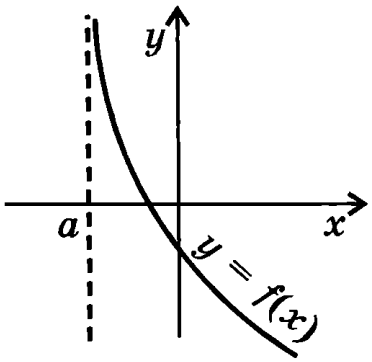
y_{min} — минимум

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

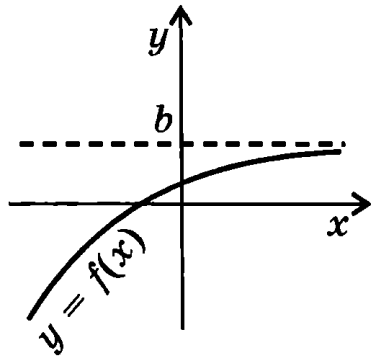
АСИМПТОТЫ

Если график функции $y = f(x)$ имеет бесконечную ветвь (ветви), у графика могут быть асимптоты.

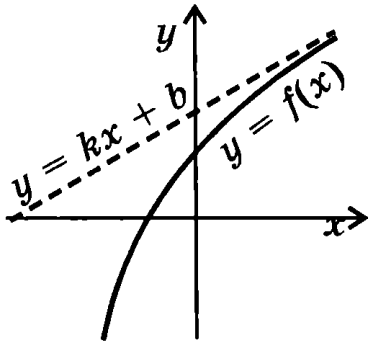
Асимптотой графика называется прямая, к которой неограниченно приближается точка графика при удалении этой точки по бесконечной ветви.



Вертикальная асимптота
$x = a$



Горизонтальная асимптота
$y = b$



Наклонная асимптота
$y = kx + b$

Прямая $x = a$ является **вертикальной асимптотой**, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ (предел справа) или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ (предел слева) равен бесконечности.

Прямая $y = b$ является **горизонтальной асимптотой**, если существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \text{ или } \lim_{x \to -\infty} f(x) = b .$$

Прямая $y = kx + b$ является **наклонной асимптотой**, если существуют конечные пределы

$$k = \lim \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim(f(x) - kx)$$

либо при $x \to \infty$, либо при $x \to -\infty$.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ОБРАТНЫЕ ФУНКЦИИ

Понятие обратной функции применимо к функциям, обладающим следующим свойством: *каждому* значению y из области значений функции соответствует *единственное* значение x из области определения этой функции.

Замечание. Для многих функций это свойство выполняется лишь на части области определения, в частности, на любом промежутке монотонности (для функции $y = x^2$ таким промежутком является, например, луч $[0; \infty)$, для функции $y = \sin x$ — отрезок $[-\pi/2; \pi/2]$).

Функция g называется **обратной** для функции f, если каждому y из области значений функции f функция g ставит в соответствие такое x из области определения функции f, что $y = f(x)$. Таким образом, если $y = f(x)$, то $x = g(y)$.

Функции f и g являются **взаимно обратными.**

- Область определения функции f является областью значений функции g, а область значений функции f является областью определения функции g.
- Графики взаимно обратных функций симметричны друг другу относительно прямой $y = x$ (построение графика обратной функции см. на стр. 23).

Примеры взаимно обратных функций:

$y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$

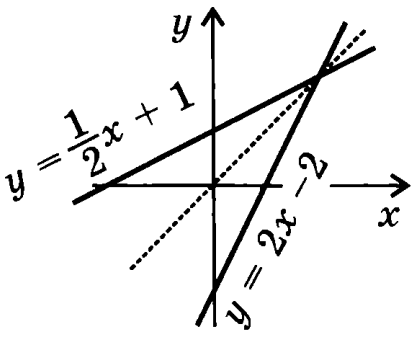
НАХОЖДЕНИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНКЦИИ, ОБРАТНОЙ ДАННОЙ

- Пользуясь формулой $y = f(x)$, следует выразить x через y, а в полученной формуле $x = g(y)$ заменить x на y, а y на x.

Пример. Найти формулу для функции, обратной функции

$$y = \frac{1}{2}x + 1.$$

Выражение x через y: $x = 2y - 2$.
Замена x на y, y на x дает: $y = 2x - 2$.
Результат: функция $y = 2x - 2$ является обратной для функции $y = \frac{1}{2}x + 1$.



PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИММЕТРИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ x

$f(x) \to -f(x)$

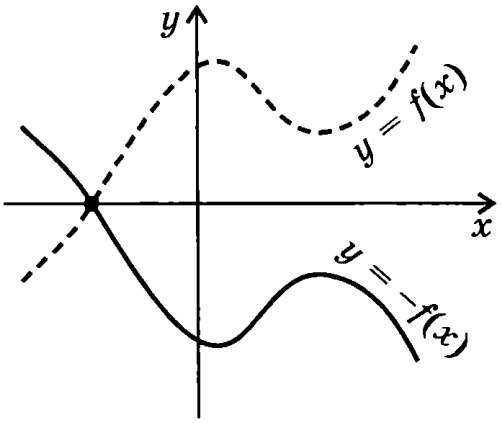
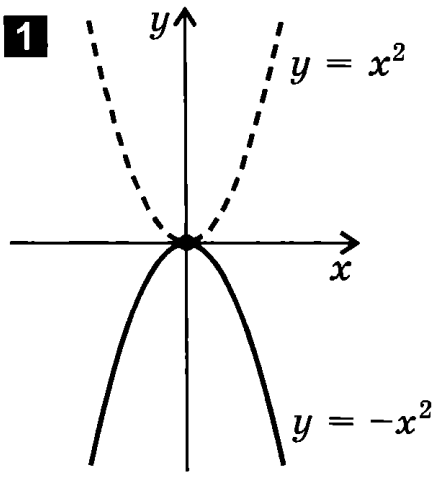


График функции $y = -f(x)$ получается преобразованием симметрии графика функции $y = f(x)$ относительно оси x.

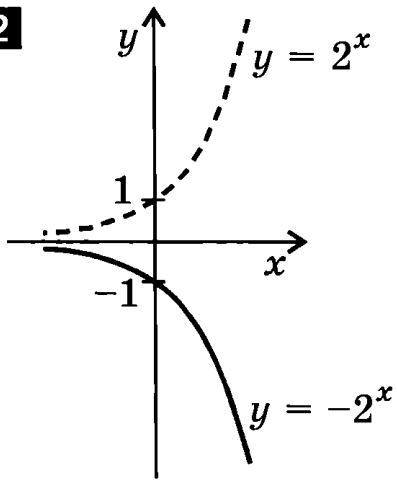
Замечание. Точки пересечения графика с осью x остаются неизменными.

Примеры:

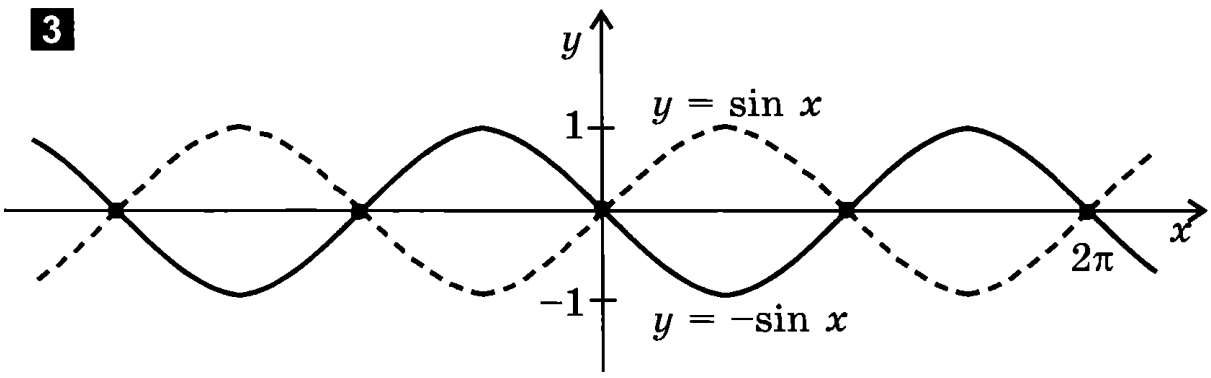
1



2



3



PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИММЕТРИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ y

$f(x) \to f(-x)$

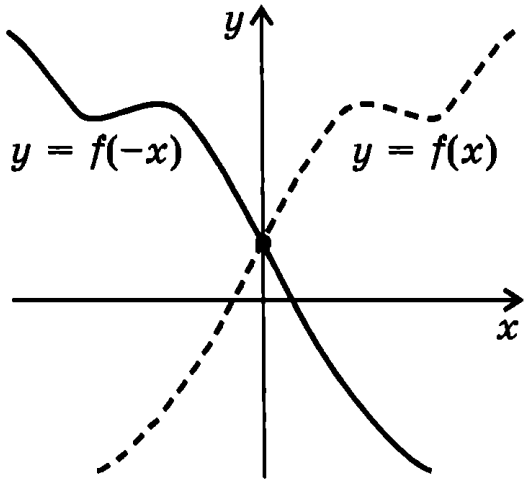
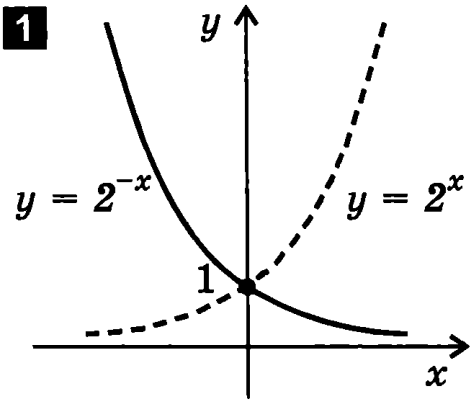


График функции $y = f(-x)$ получается преобразованием симметрии графика функции $y = f(x)$ относительно оси y.

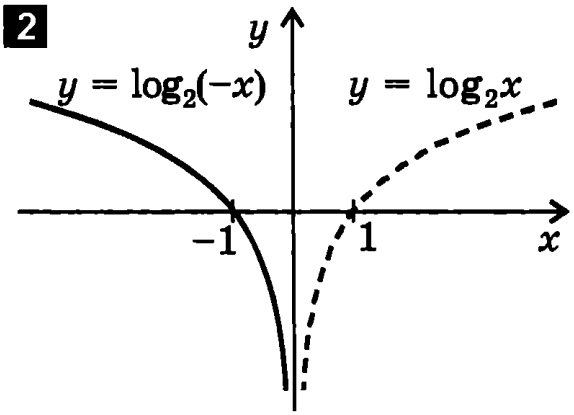
Замечание. Точка пересечения графика с осью y остается неизменной.

Примеры:

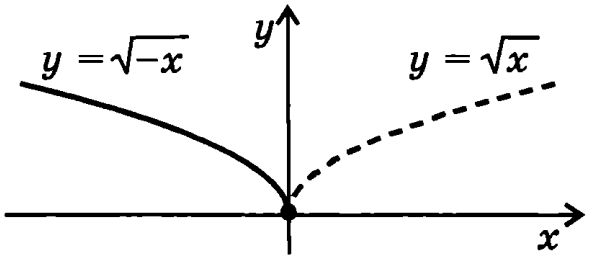
1



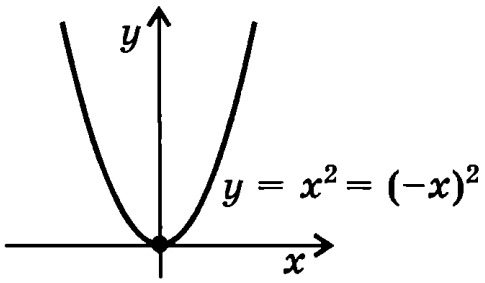
2



3



4



Замечание 1. График четной функции (см. стр. 11) не изменяется при отражении относительно оси y, поскольку для четной функции $f(-x) = f(x)$. ***Пример***: $(-x)^2 = x^2$.

Замечание 2. График нечетной функции (см. стр. 11) изменяется одинаково как при отражении относительно оси x, так и при отражении относительно оси y, поскольку для нечетной функции $f(-x) = -f(x)$. ***Пример***: $\sin(-x) = -\sin x$.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ВДОЛЬ ОСИ x

$f(x) \to f(x - a)$

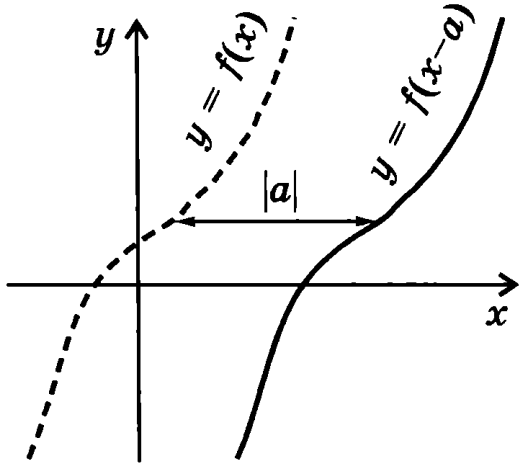
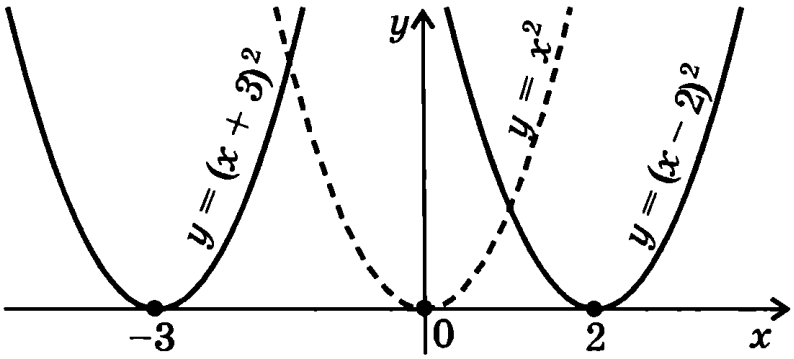


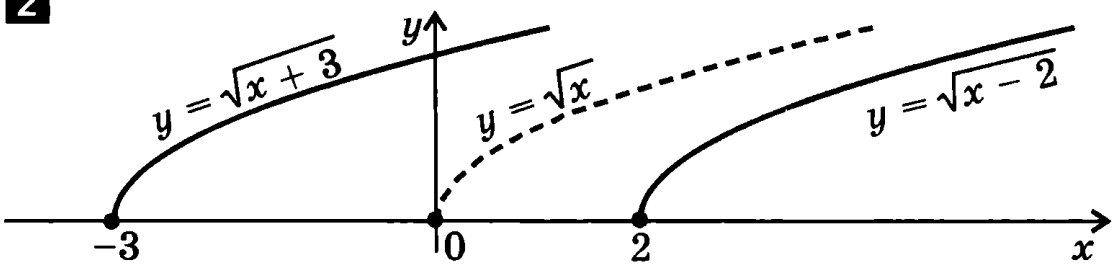
График функции $y = f(x - a)$ получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси x на $|a|$ вправо при $a > 0$ и влево при $a < 0$.

Примеры:

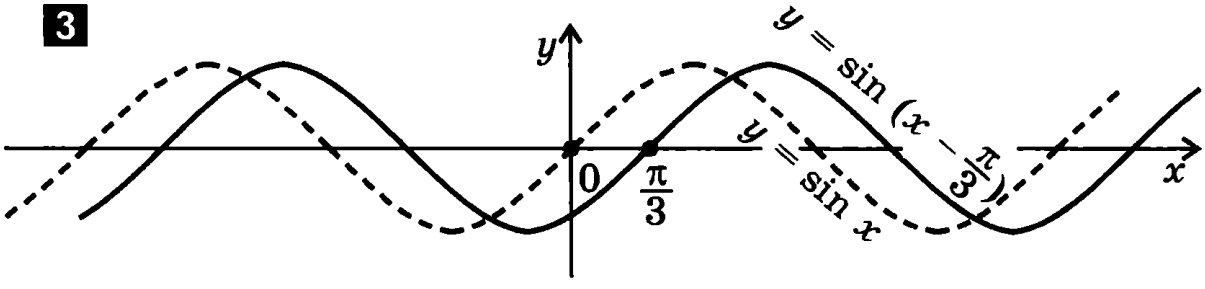
1



2



3



Замечание. График периодической функции (см. стр. 12) с периодом T не изменяется при параллельных переносах вдоль оси x на nT, $n \in Z$.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ВДОЛЬ ОСИ y

$f(x) \to f(x) + b$

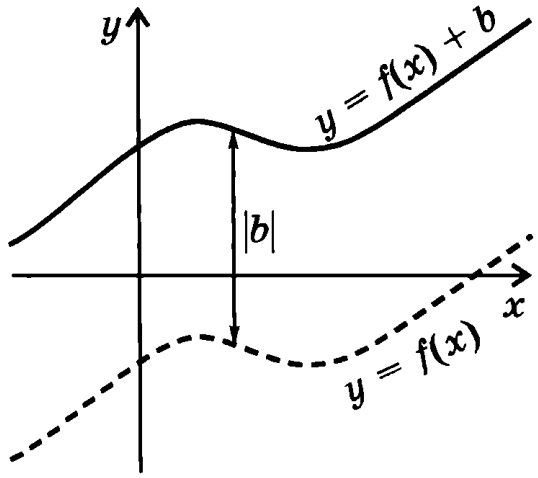
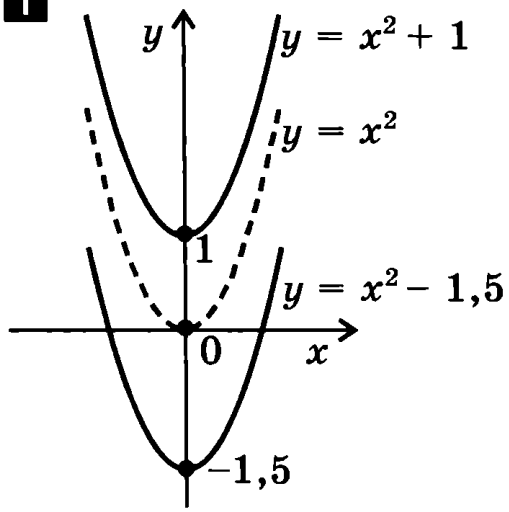


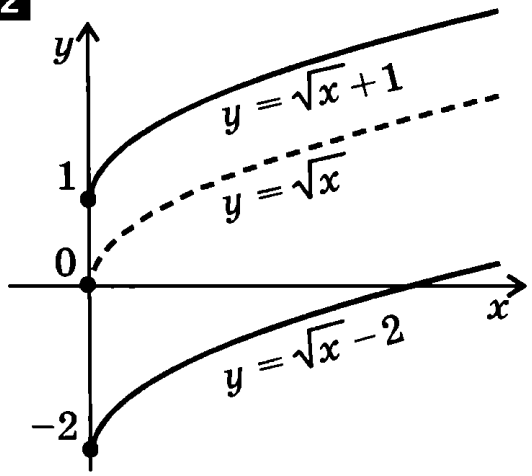
График функции $y = f(x) + b$ получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси y на $|b|$ вверх при $b > 0$ и вниз при $b < 0$.

Примеры:

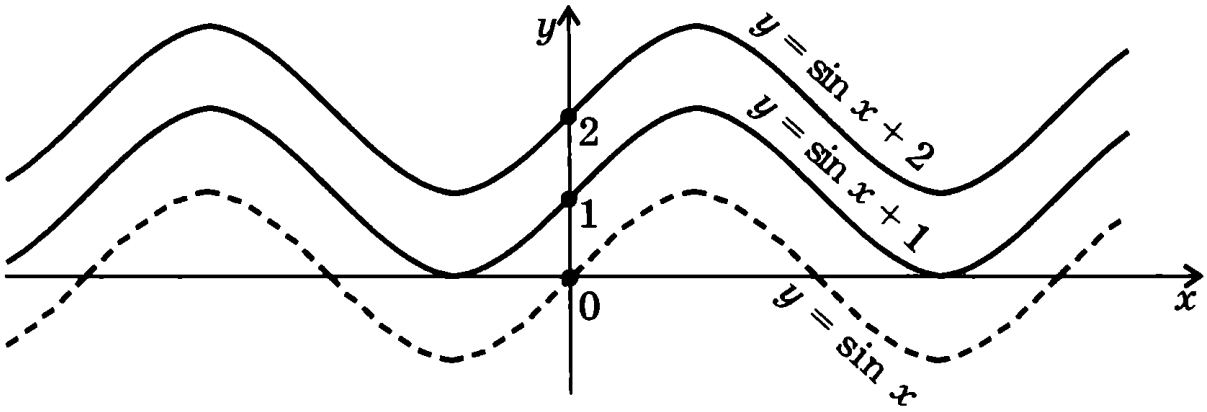
1



2



3



PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

СЖАТИЕ И РАСТЯЖЕНИЕ ВДОЛЬ ОСИ x

$f(x) \to f(\alpha x)$, где $\alpha > 0$

$\alpha > 1$

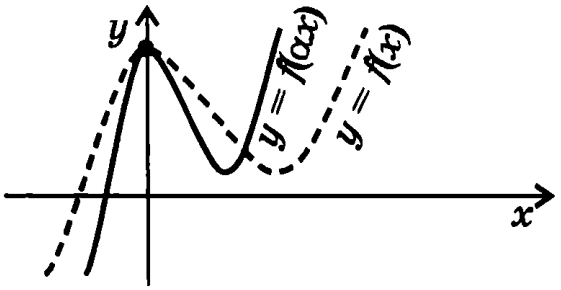


График функции $y = f(\alpha x)$ получается сжатием графика функции $y = f(x)$ вдоль оси x в α раз.

$0 < \alpha < 1$

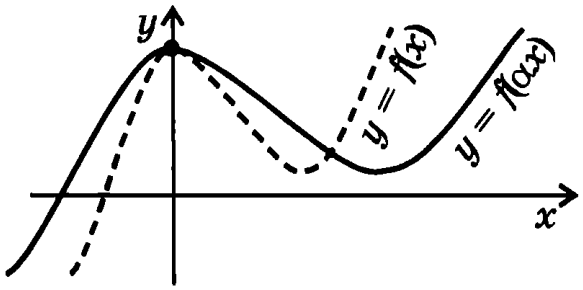
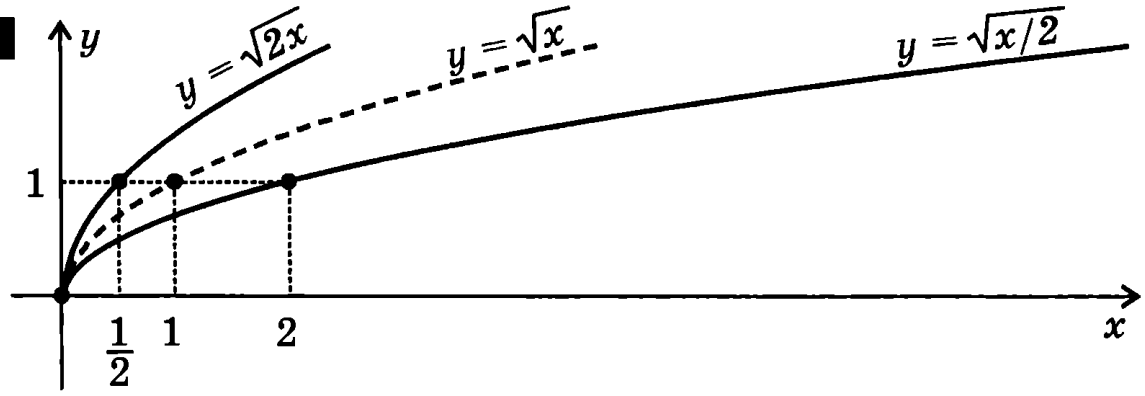


График функции $y = f(\alpha x)$ получается растяжением графика функции $y = f(x)$ вдоль оси x в $1/\alpha$ раз.

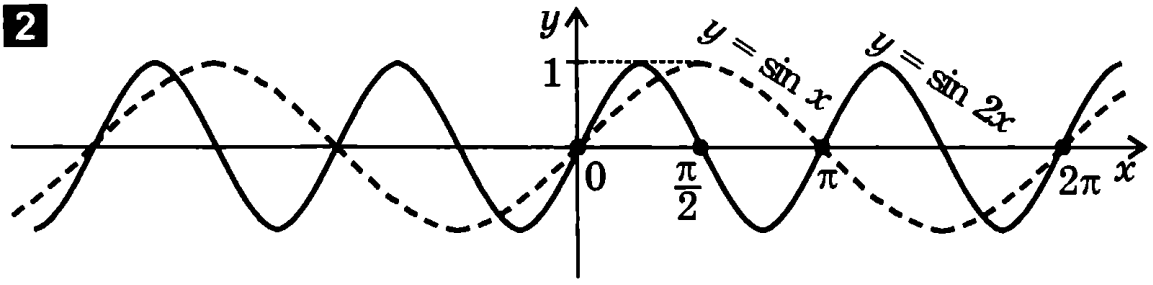
Замечание. Точки пересечения графика с осью y остаются неизменными.

Примеры:

1



2



PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

СЖАТИЕ И РАСТЯЖЕНИЕ ВДОЛЬ ОСИ y

$f(x) \to kf(x)$, где $k > 0$

$k > 1$

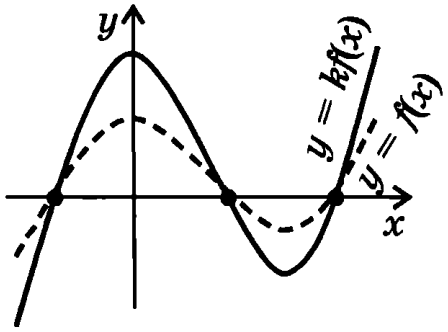


График функции $y = kf(x)$ получается растяжением графика функции $y = f(x)$ вдоль оси y в k раз.

$0 < k < 1$

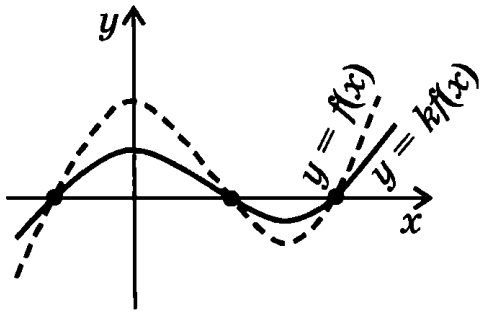
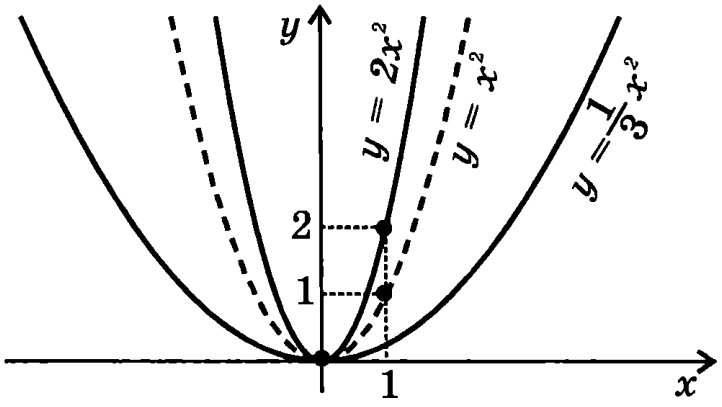


График функции $y = kf(x)$ получается сжатием графика функции $y = f(x)$ вдоль оси y в $1/k$ раз.

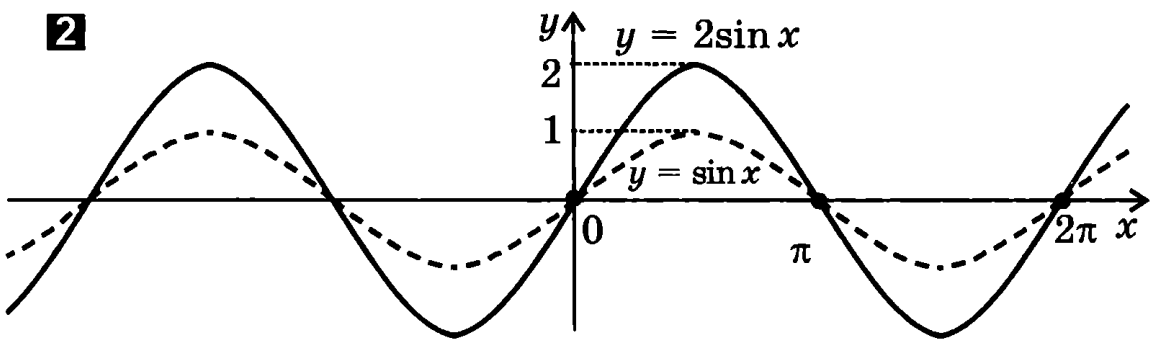
Замечание. Точки пересечения графика с осью x остаются неизменными.

Примеры:

1



2



PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

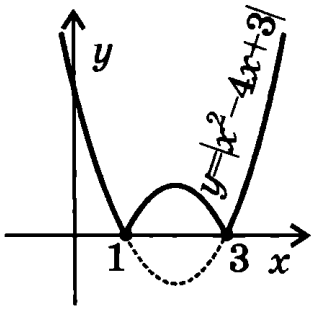
ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = |f(x)|$

Части графика функции $y = f(x)$, лежащие выше оси x и на оси x, остаются без изменения, а лежащие ниже оси x — симметрично отражаются относительно этой оси (вверх).

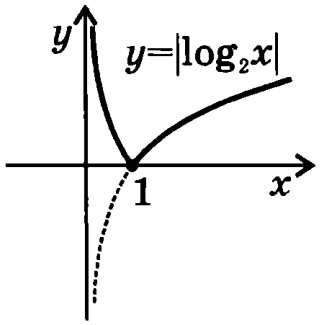
Замечание. Функция $y = |f(x)|$ неотрицательна (ее график расположен в верхней полуплоскости).

Примеры:

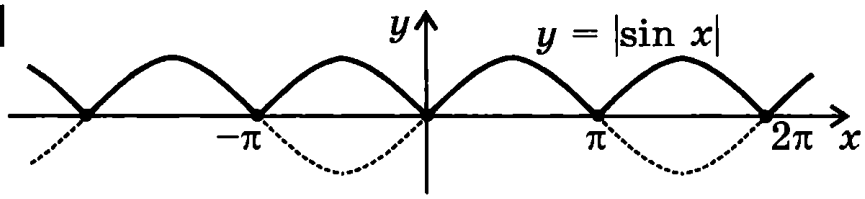
1



2



3



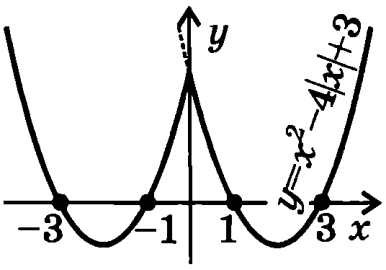
ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = f(|x|)$

Часть графика функции $y = f(x)$, лежащая левее оси y, удаляется, а часть, лежащая правее оси y — остается без изменения и, кроме того, симметрично отражается относительно оси y (влево). Точка графика, лежащая на оси y, остается неизменной.

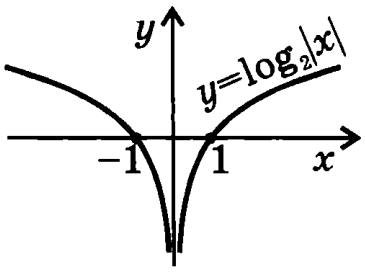
Замечание. Функция $y = f(|x|)$ четная (ее график симметричен относительно оси y).

Примеры:

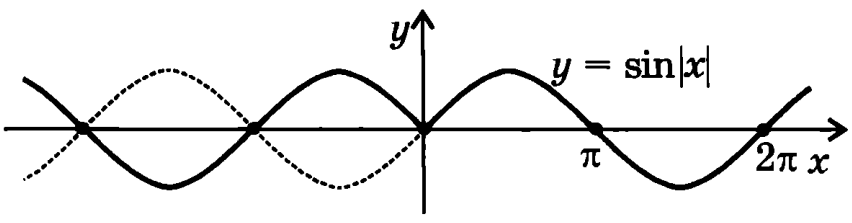
1



2



3



PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

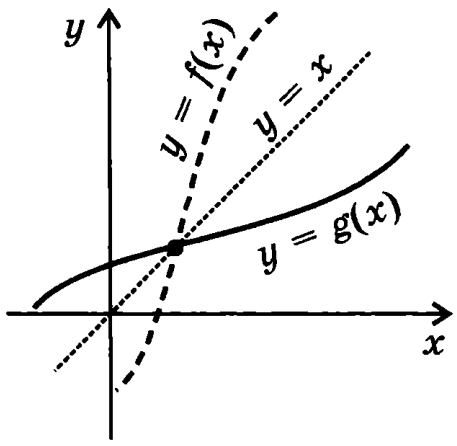
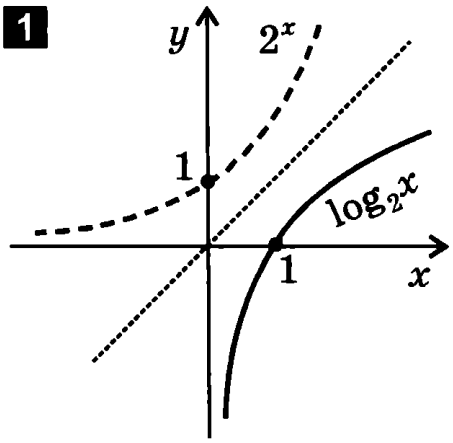


График функции $y = g(x)$, обратной для функции $y = f(x)$, можно получить преобразованием симметрии графика функции $y = f(x)$ относительно прямой $y = x$.

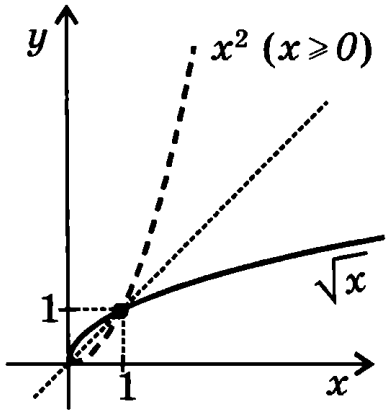
Замечание. Описанное построение можно производить только для функции, имеющей обратную (см. стр. 15).

Примеры графиков взаимно обратных функций.

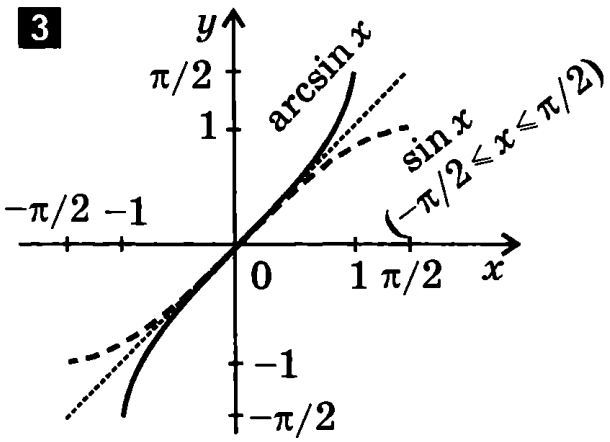
1



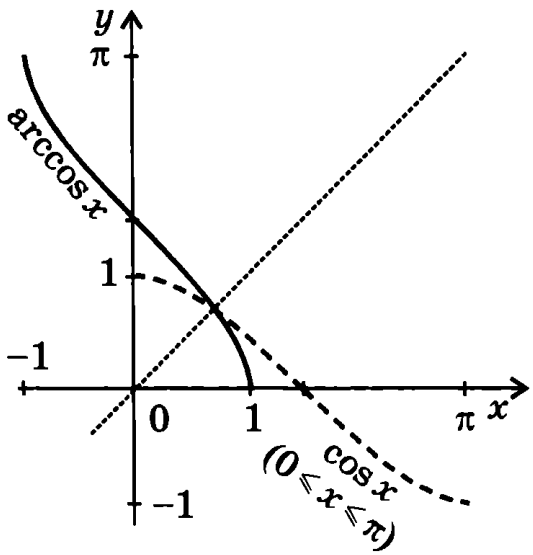
2



3



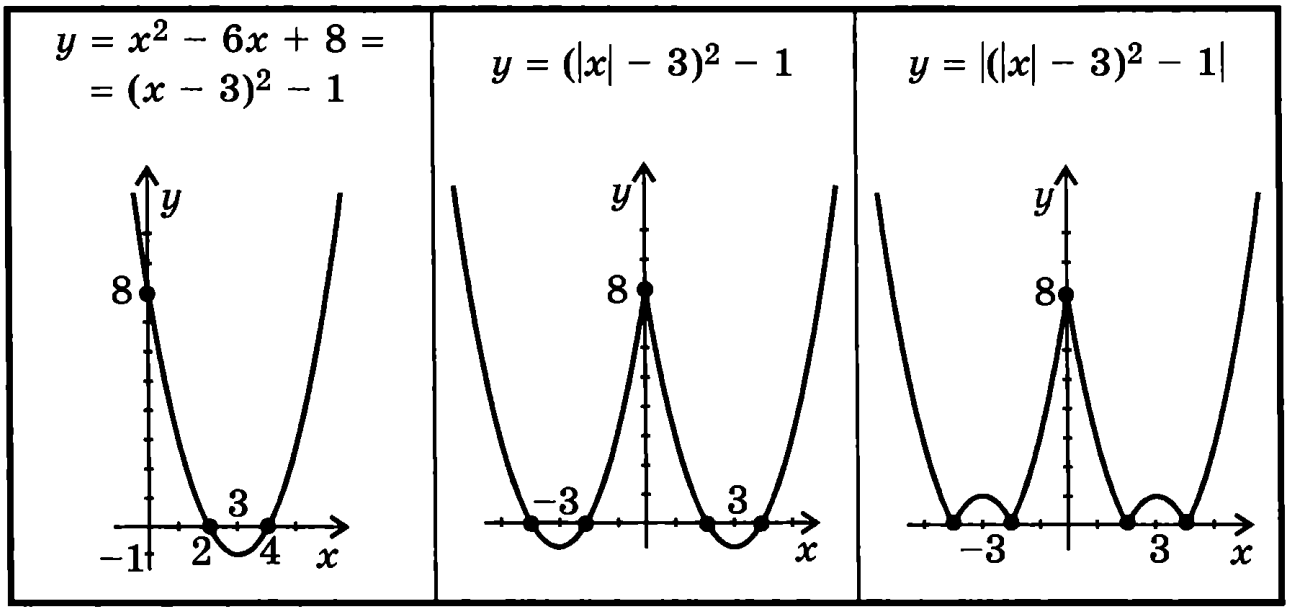
4



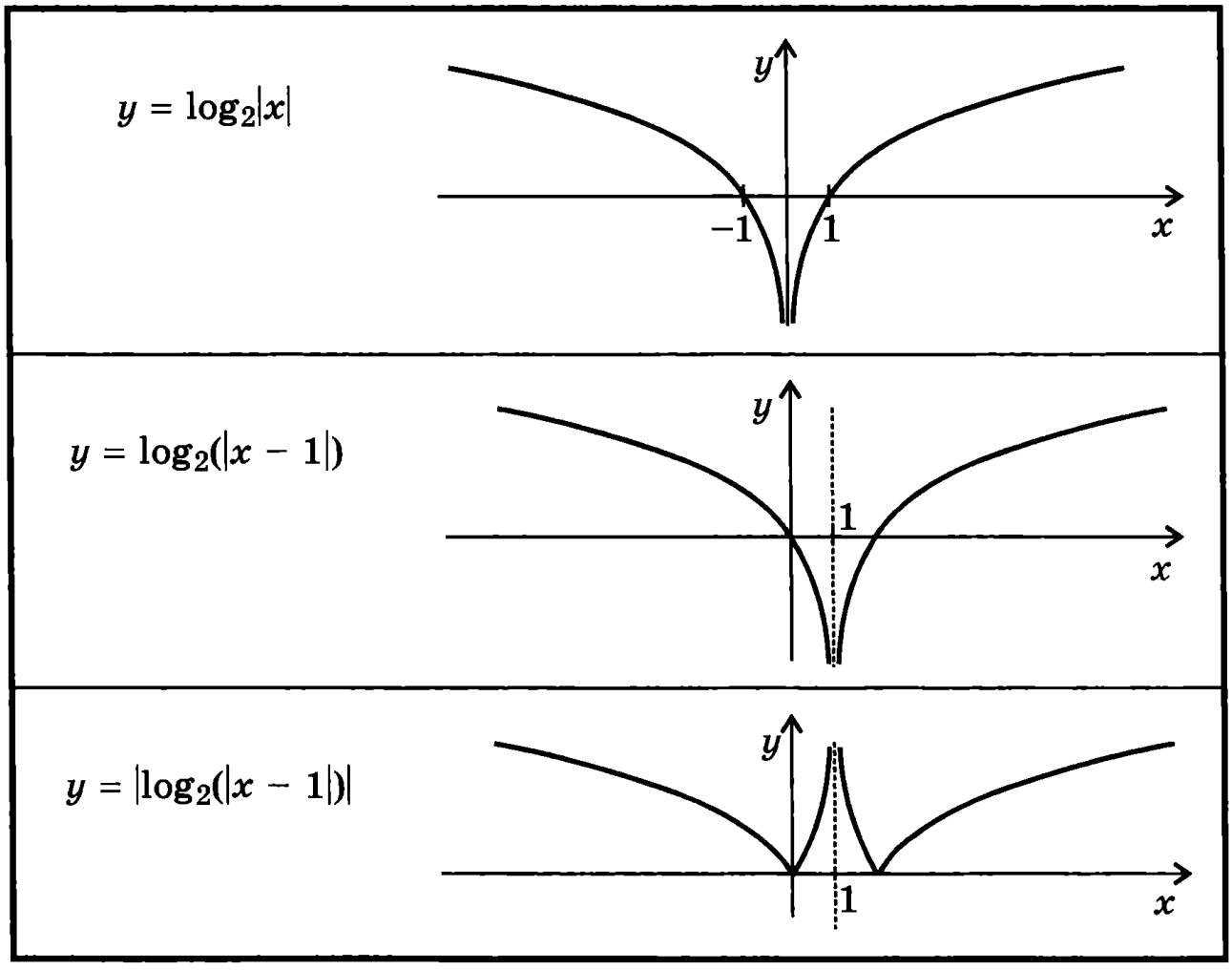
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ с помощью последовательных преобразований графиков элементарных функций (на примерах)

$$y = |x^2 - 6|x| + 8| = ||x|^2 - 6|x| + 8| = |(|x| - 3)^2 - 1|$$



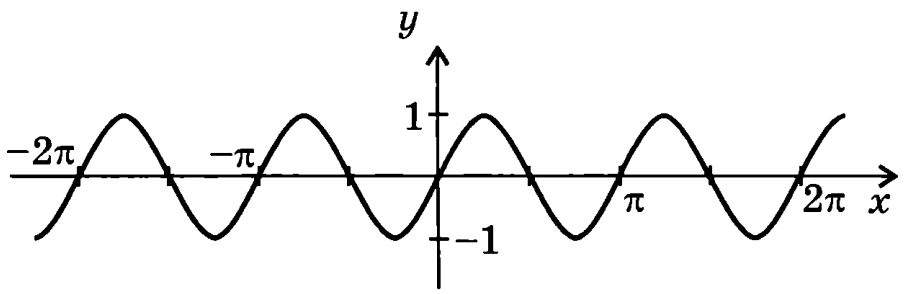
$$y = |\log_2(|x - 1|)|$$



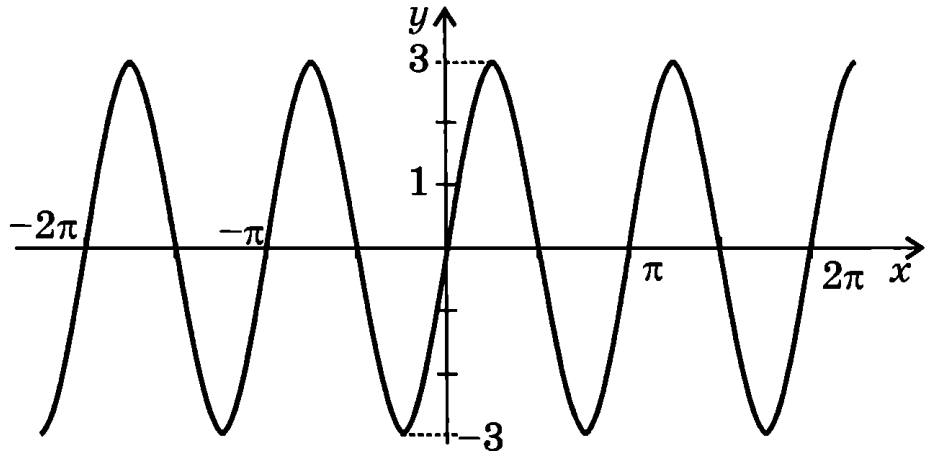
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

$y = |3\sin 2x| - 1$

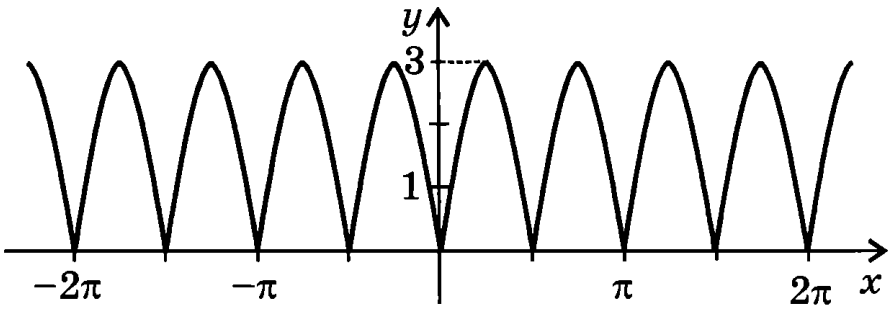
$y = \sin 2x$



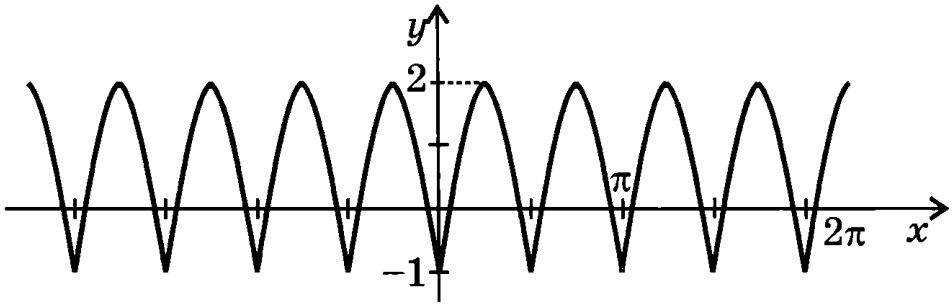
$y = 3\sin 2x$



$y = |3\sin 2x|$



$y = |3\sin 2x| - 1$



PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

$y = kx + b$, где k, b — действительные числа.

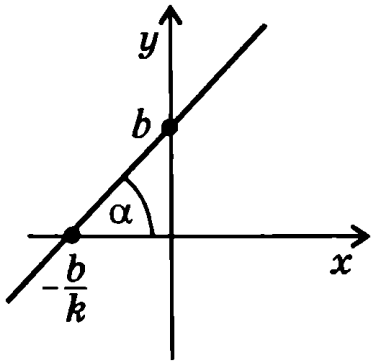


График — **прямая**.

Угловой коэффициент

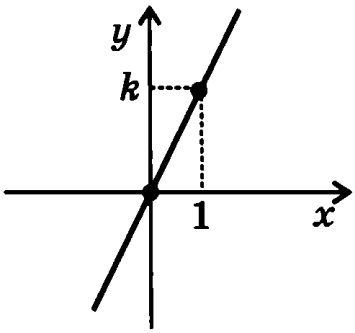
$k = \operatorname{tg} \alpha$

b — ордината точки пересечения графика с осью y.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

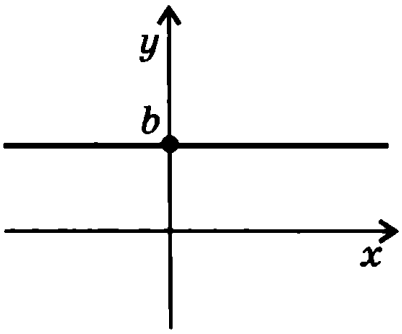
Прямая пропорциональность

$y = kx$



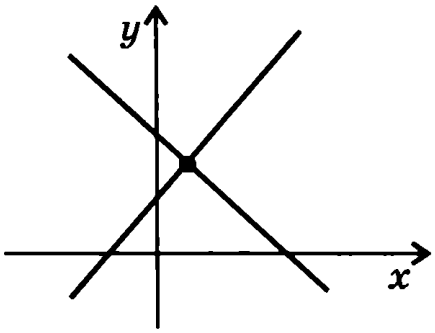
Постоянная функция

$y = b$

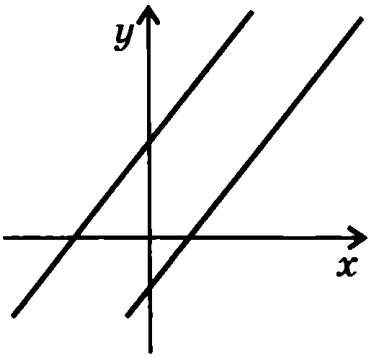


ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ГРАФИКОВ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Если $k_1 \neq k_2$, графики функций $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ пересекаются в одной точке.



Если $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$, графики функций $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ являются параллельными прямыми.



PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

СВОЙСТВА ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ $y = kx + b$

- *Область определения:* R

- *Область значений:*

  при $k \neq 0$ $\quad R$

  при $k = 0$ $\quad \{b\}$

- *Четность, нечетность:*

  если $k \neq 0$, $b \neq 0$, то функция не является ни четной, ни нечетной

  если $k \neq 0$, $b = 0$, то функция нечетная

  если $k = 0$, $b \neq 0$, то функция четная

  если $k = 0$, $b = 0$, то функция тождественно равна нулю, то есть является одновременно четной и нечетной

- *Нули:*

  если $k \neq 0$, то $\quad y = 0$ при $x = -b/k$

  если $k = 0$, $b \neq 0$, то $\quad$ нулей нет

  если $k = 0$, $b = 0$, то $\quad y = 0$ при $x \in R$

- *Промежутки знакопостоянства:*

  если $k > 0$, то $\quad \begin{cases} y > 0 \text{ при } x \in (-b/k;\ \infty) \\ y < 0 \text{ при } x \in (-\infty;\ -b/k) \end{cases}$

  если $k < 0$, то $\quad \begin{cases} y > 0 \text{ при } x \in (-\infty;\ -b/k) \\ y < 0 \text{ при } x \in (-b/k;\ \infty) \end{cases}$

  если $k = 0$, $b > 0$, то $\quad y > 0$ при $x \in R$

  если $k = 0$, $b < 0$, то $\quad y < 0$ при $x \in R$

  если $k = 0$, $b = 0$, то $\quad y = 0$ при $x \in R$

- *Промежутки монотонности:*

  если $k > 0$, то функция возрастает при $x \in R$

  если $k < 0$, то функция убывает при $x \in R$

  если $k = 0$, то функция постоянна при $x \in R$

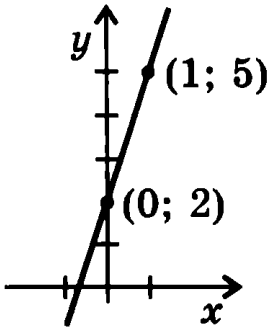
- *Экстремумов* нет

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ ПО ДВУМ ТОЧКАМ

Часто удобно выбирать $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Соответствующие точки прямой $(0;\ b)$ и $(1;\ b + k)$.

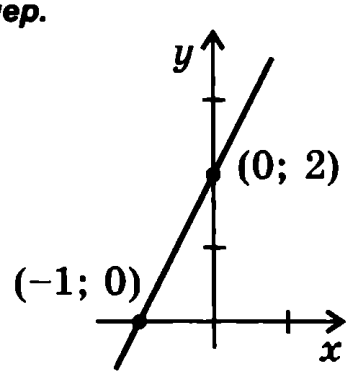
Пример.



$y = 3x + 2$
Если $x_1 = 0$, то $y_1 = 2$;
если $x_2 = 1$, то $y_2 = 5$.
Через точки (0; 2) и (1; 5) провести прямую.

Если $k \neq 0$, $b \neq 0$, можно выбирать точки $(0;\ b)$ и $(-b/k;\ 0)$ на осях координат.

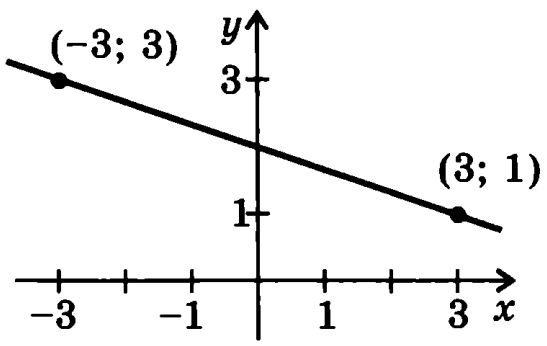
Пример.



$y = 2x + 2$
Если $x_1 = 0$, то $y_1 = 2$;
если $y_2 = 0$, то $x_2 = -1$.
Через точки (0; 2) и (−1; 0) провести прямую.

Если коэффициент перед x дробный, удобно выбирать x_1 и x_2 так, чтобы y_1 и y_2 были целыми.

Пример.

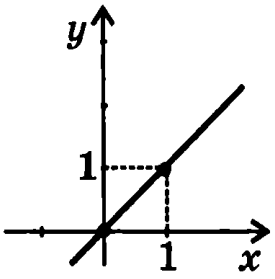
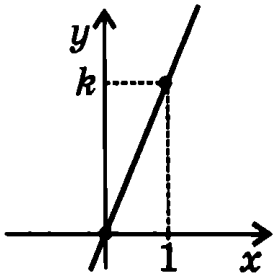
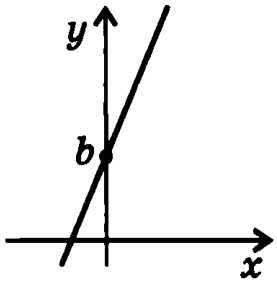


$y = -\frac{1}{3}x + 2$
Если $x_1 = 3$, то $y_1 = 1$;
если $x_2 = -3$, то $y_2 = 3$.
Через точки (3; 1) и (−3; 3) провести прямую.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

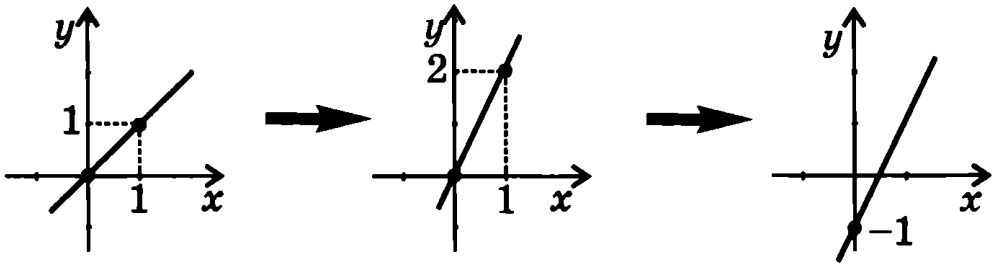
ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ $y = kx + b$ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = x$

Этапы преобразования графика

1. $y = x$	2. $y = kx$	3. $y = kx + b$
		
Построить график функции $y = x$.	Произвести растяжение (при $\|k\| > 1$) или сжатие (при $\|k\| < 1$) графика вдоль оси y (если $k < 0$, произвести, кроме того, зеркальное отражение относительно любой из координатных осей).	Произвести параллельный перенос графика вдоль оси y на $\|b\|$ (вверх при $b > 0$, вниз при $b < 0$).

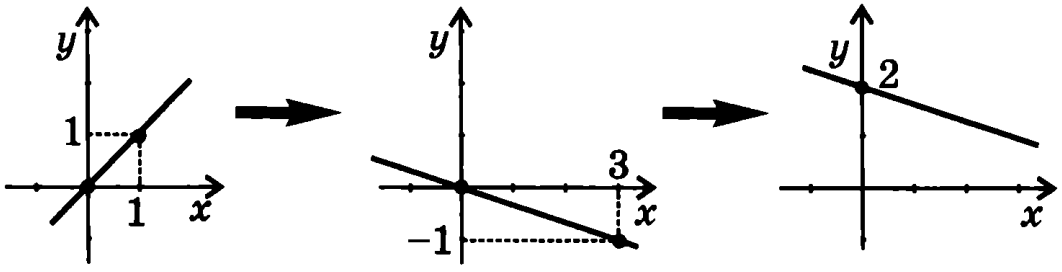
Примеры:

1. $y = 2x - 1$



$y = x$ $\qquad$ $y = 2x$ $\qquad$ $y = 2x - 1$

2. $y = -x/3 + 2$



$y = x$ $\qquad$ $y = -x/3$ $\qquad$ $y = -x/3 + 2$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

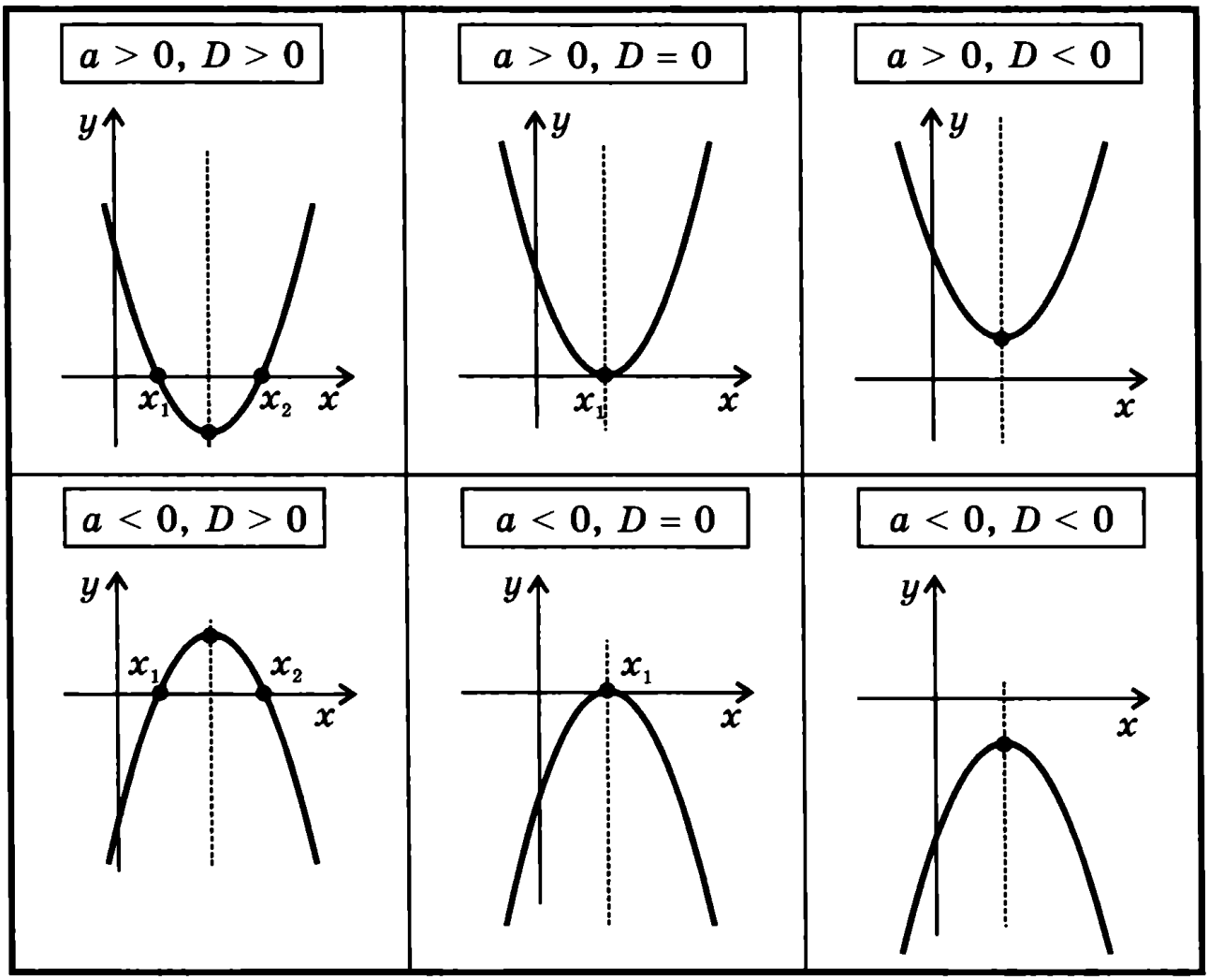
КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

$y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$.

График — **парабола**.

Свойства функции и вид ее графика определяются, в основном, значениями коэффициента a и *дискриминанта*

$$D = b^2 - 4ac.$$



РАЗЛИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ

1. ВЫДЕЛЕНИЕ ПОЛНОГО КВАДРАТА

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

2. РАЗЛОЖЕНИЕ НА ЛИНЕЙНЫЕ МНОЖИТЕЛИ

при $D > 0$ $\quad y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

при $D = 0$ $\quad y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

при $D < 0$ $\quad$ разложить на множители нельзя

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

СВОЙСТВА КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ $y = ax^2 + bx + c$

- *Область определения:* R
- *Область значений:*

  при $a > 0$ $\quad [-D/(4a); \infty)$

  при $a < 0$ $\quad (-\infty; -D/(4a)]$

- *Четность, нечетность:*

  при $b = 0$ функция четная

  при $b \neq 0$ функция не является ни четной, ни нечетной

- *Нули:*

  при $D > 0$ два нуля: $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$

  при $D = 0$ один нуль: $x_1 = -b/(2a)$

  при $D < 0$ нулей нет

- *Промежутки знакопостоянства:*

  если $a > 0$, $D > 0$, то $\begin{cases} y > 0 \text{ при } x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty) \\ y < 0 \text{ при } x \in (x_1; x_2) \end{cases}$

  если $a > 0$, $D = 0$, то $y > 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; \infty)$

  если $a > 0$, $D < 0$, то $y > 0$ при $x \in R$

  если $a < 0$, $D > 0$, то $\begin{cases} y > 0 \text{ при } x \in (x_1; x_2) \\ y < 0 \text{ при } x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty) \end{cases}$

  если $a < 0$, $D = 0$, то $y < 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; \infty)$

  если $a < 0$, $D < 0$, то $y < 0$ при $x \in R$

- *Промежутки монотонности:*

  при $a > 0$ $\begin{cases} \text{функция возрастает при } x \in [-b/(2a); \infty) \\ \text{функция убывает при } x \in (-\infty; -b/(2a)] \end{cases}$

  при $a < 0$ $\begin{cases} \text{функция возрастает при } x \in (-\infty; -b/(2a)] \\ \text{функция убывает при } x \in [-b/(2a); \infty) \end{cases}$

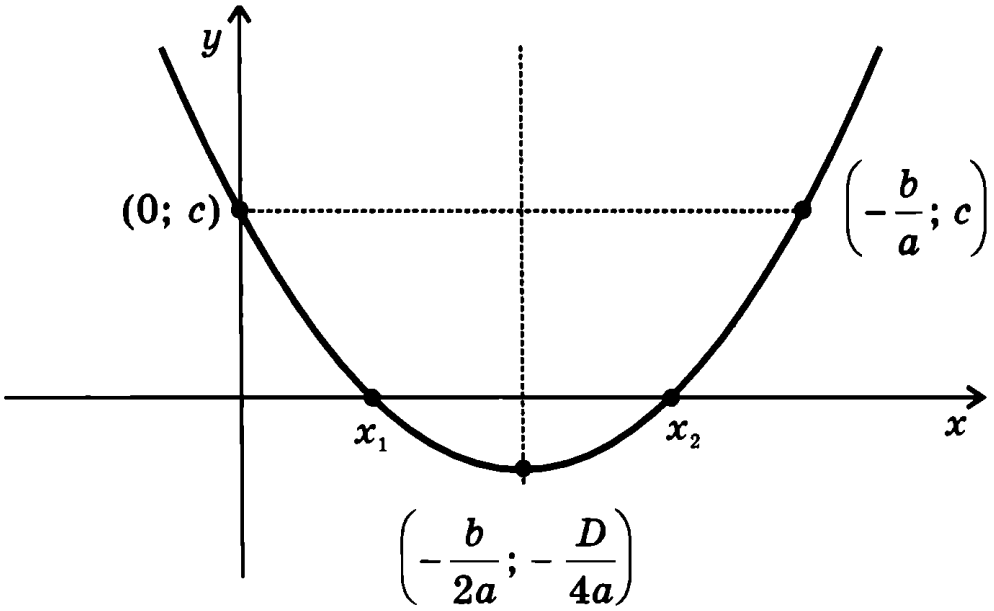
- *Экстремумы:*

  при $a > 0$ $\quad x_{min} = -b/(2a)$; $\quad y_{min} = -D/(4a)$

  при $a < 0$ $\quad x_{max} = -b/(2a)$; $\quad y_{max} = -D/(4a)$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

НАПРАВЛЕНИЕ ВЕТВЕЙ, ХАРАКТЕРНЫЕ ТОЧКИ И ОСЬ СИММЕТРИИ ПАРАБОЛЫ, являющейся графиком функции $y = ax^2 + bx + c$



- *Направление ветвей параболы:*
  при $a > 0$ ветви направлены вверх
  при $a < 0$ ветви направлены вниз
- *Координаты вершины параболы:* $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$
- *Ось симметрии параболы* — прямая $x = -\frac{b}{2a}$
- *Точки пересечения (касания) графика с осью x:*

  $D > 0$: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ (точки пересечения)

  $D = 0$: $x_1 = -b/(2a)$ (точка касания)

  $D < 0$: общих точек у графика с осью x нет
- *Точка пересечения графика с осью y:* $(0; c)$, симметричная ей точка относительно оси параболы $(-b/a; c)$

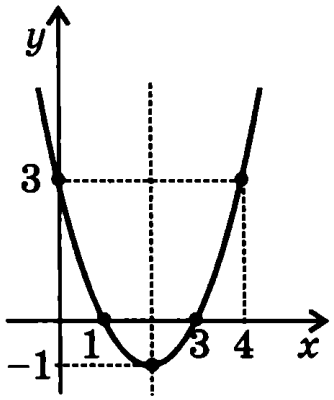
Для построения графика квадратичной функции используют некоторые из указанных характеристик. Например, если уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня, удобно использовать координаты вершины параболы и координаты двух точек пересечения параболы с осью x.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ПО НАПРАВЛЕНИЮ ВЕТВЕЙ, ХАРАКТЕРНЫМ ТОЧКАМ И ОСИ СИММЕТРИИ ПАРАБОЛЫ

Примеры:

$y = x^2 - 4x + 3$



1. *Ветви направлены вверх*, т.к. $a = 1 > 0$.
2. *Координаты вершины* $(2; -1)$, т.к.

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2;$$

$$y(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1.$$

3. *Ось симметрии* параболы

$$x = -\frac{b}{2a} = 2.$$

4. *Координаты точек пересечения с осью x:*

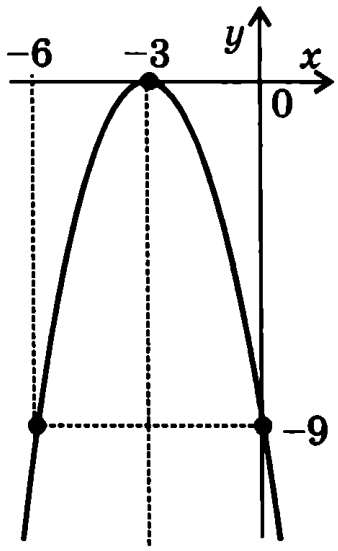
$$(x_1; 0) = (1; 0) \text{ и } (x_2; 0) = (3; 0).$$

5. *Координаты точки пересечения с осью y:*

$$(0; c) = (0; 3);$$

симметричная ей точка относительно оси параболы: $\left(-\frac{b}{a}; c\right) = (4; 3)$.

$y = -x^2 - 6x - 9$



1. *Ветви* направлены *вниз*, т.к. $a = -1 < 0$.
2. *Координаты вершины* $(-3; 0)$, т.к.

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{-2} = -3;$$

$$y(3) = -(-3)^2 - 6 \cdot (-3) - 9 = 0.$$

3. *Ось симметрии* параболы $x = -\frac{b}{2a} = -3$.
4. *Координаты точки касания с осью x:*

$$(x_1; 0) = (-3; 0).$$

5. *Координаты точки пересечения с осью y:*

$$(0; c) = (0; -9);$$

симметричная ей точка относительно оси параболы: $\left(-\frac{b}{a}; c\right) = (-6; -9)$.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = x^2$

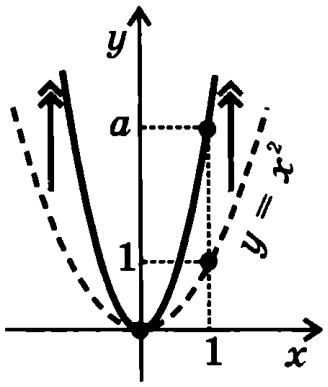
С помощью выделения полного квадрата (см. стр. 30) любую квадратичную функцию можно представить в виде:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a(x - m)^2 + n,$$

$$\text{где } m = -\frac{b}{2a},\ n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

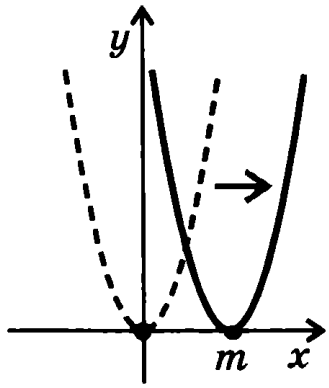
Это позволяет построить график квадратичной функции с помощью элементарных преобразований графика функции $y = x^2$.

Этапы построения графика функции $y = a(x - m)^2 + n$:



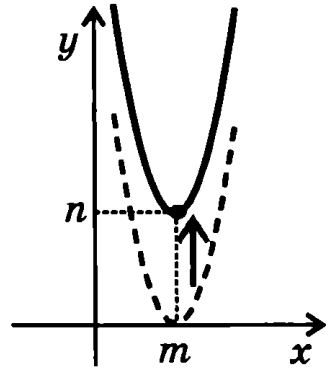
1. *Растяжение* графика $y = x^2$ вдоль оси y в $|a|$ раз (при $|a| < 1$ — это сжатие в $1/|a|$ раз).
   Если $a < 0$, произвести, кроме того, зеркальное отражение графика относительно оси x (ветви параболы будут направлены вниз).

Результат: график функции $y = ax^2$.



2. *Параллельный перенос* графика функции $y = ax^2$ вдоль оси x на $|m|$ (вправо при $m > 0$ и влево при $m < 0$).

Результат:
график функции $y = a(x - m)^2$.



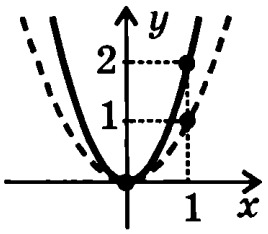
3. *Параллельный перенос* графика функции $y = a(x - m)^2$ вдоль оси y на $|n|$ (вверх при $n > 0$ и вниз при $n < 0$).

Результат:
график функции $y = a(x - m)^2 + n$.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

Примеры:

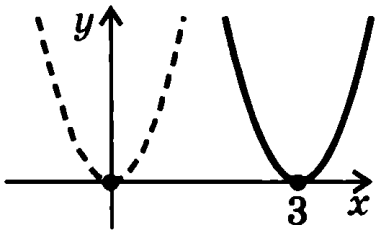
$$y = 2x^2 - 12x + 19 = 2(x-3)^2 + 1$$



$y = x^2$

$y = 2x^2$

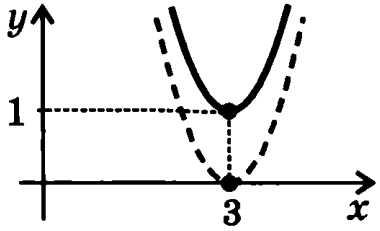
1. Растяжение графика функции $y = x^2$ вдоль оси y в 2 раза.



$y = 2x^2$

$y = 2(x-3)^2$

2. Параллельный перенос графика функции $y = 2x^2$ вдоль оси x на 3 вправо.

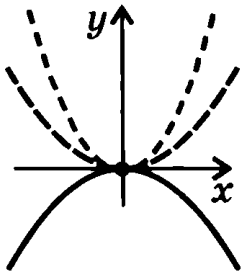


$y = 2(x-3)^2$

$y = 2(x-3)^2+1$

3. Параллельный перенос графика функции $y = 2(x-3)^2$ вдоль оси y на 1 вверх.

$$y = -\frac{x^2}{2} - 2x - 3 = -\frac{1}{2}(x+2)^2 - 1$$

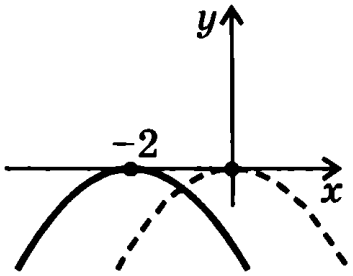


$y = x^2$

$y = x^2/2$

$y = -x^2/2$

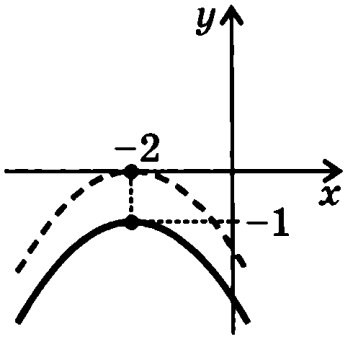
1. Сжатие графика функции $y = x^2$ вдоль оси y в 2 раза и преобразование симметрии относительно оси x.



$y = -x^2/2$

$y = -(x+2)^2/2$

2. Параллельный перенос графика функции $y = -x^2/2$ вдоль оси x на 2 влево.



$y = -(x+2)^2/2$

$y = -(x+2)^2/2 - 1$

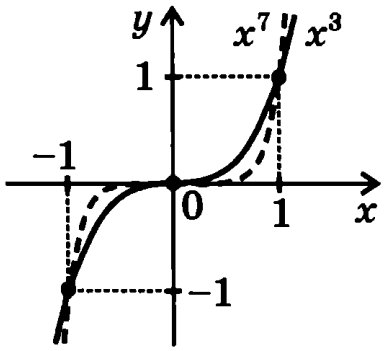
3. Параллельный перенос графика функции $y = -(x+2)^2/2$ вдоль оси y на 1 вниз.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

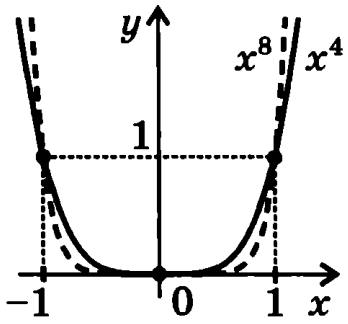
СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ
с натуральными показателями степени
$y = x^n$, где $n \in N$

Примеры графиков

n нечетное



n четное



СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

- *Область определения:* R
- *Область значений:*
  при n нечетном R
  при n четном $[0; \infty)$
- *Четность, нечетность:*
  при n нечетном функция нечетная
  при n четном функция четная
- *Нули:* $y = 0$ при $x = 0$
- *Промежутки знакопостоянства:*
  если n нечетное, то $\begin{cases} y > 0 \text{ при } x \in (0; \infty) \\ y < 0 \text{ при } x \in (-\infty; 0) \end{cases}$
  если n четное, то $y > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$
- *Промежутки монотонности:*
  если n нечетное, то функция возрастает при $x \in R$
  если n четное, то $\begin{cases} \text{функция возрастает при } x \in [0; \infty) \\ \text{функция убывает при } x \in (-\infty; 0] \end{cases}$
- *Экстремумы:*
  если n нечетное, экстремумов нет
  если n четное, $y_{min} = 0$ при $x_{min} = 0$
- *Графики функций проходят через точки:*
  при n нечетном $(-1; -1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$
  при n четном $(-1; 1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$

Замечание. При $n = 0$ функция $y = x^n$ определяется так:
$x^0 = 1$ при $x \neq 0$; при $x = 0$ функция не определена.

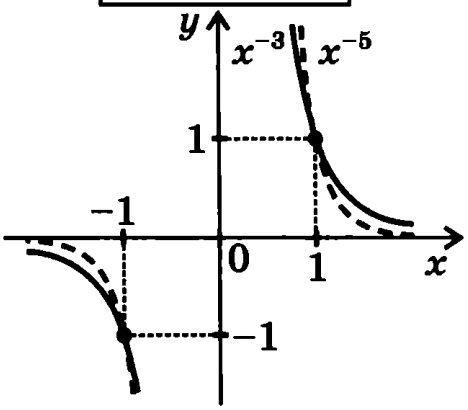
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ
с целыми отрицательными показателями степени

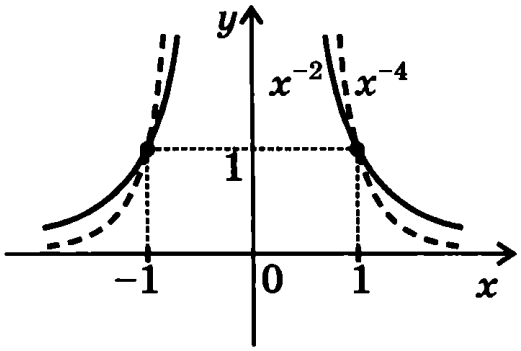
$y = x^{-n}$, где $n \in N$

Примеры графиков

n нечетное



n четное



СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

- *Область определения:* $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$
- *Область значений:*
  при n нечетном $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$
  при n четном $(0; \infty)$
- *Четность, нечетность:*
  при n нечетном функция нечетная
  при n четном функция четная
- *Нулей* нет.
- *Промежутки знакопостоянства:*
  если n нечетное, то $\begin{cases} y > 0 \text{ при } x \in (0; \infty) \\ y < 0 \text{ при } x \in (-\infty; 0) \end{cases}$
  если n четное, то $y > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$
- *Промежутки монотонности:*
  если n нечетное, то функция убывает при $x \in (-\infty; 0)$ и при $x \in (0; \infty)$
  если n четное, то $\begin{cases} \text{функция возрастает при } x \in (-\infty; 0) \\ \text{функция убывает при } x \in (0; \infty) \end{cases}$
- *Экстремумов* нет
- *Графики функций проходят через точки:*
  при n нечетном $(-1; -1), (1; 1)$
  при n четном $(-1; 1), (1; 1)$
- *Асимптоты:* $x = 0$, $y = 0$

Замечание. При $n = 1$ функция $y = x^{-n}$ имеет вид $y = 1/x$ и называется *обратной пропорциональностью.*

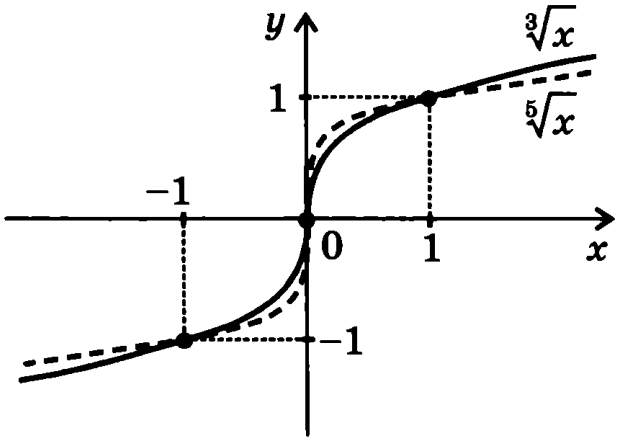
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ФУНКЦИИ

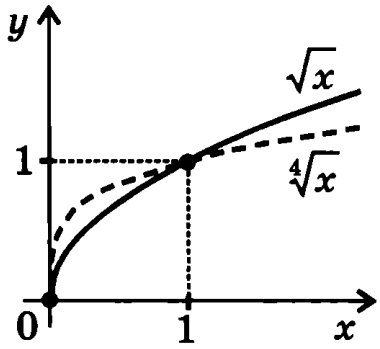
$y = \sqrt[n]{x}$, где $n \in N$

Примеры графиков

n нечетное



n четное



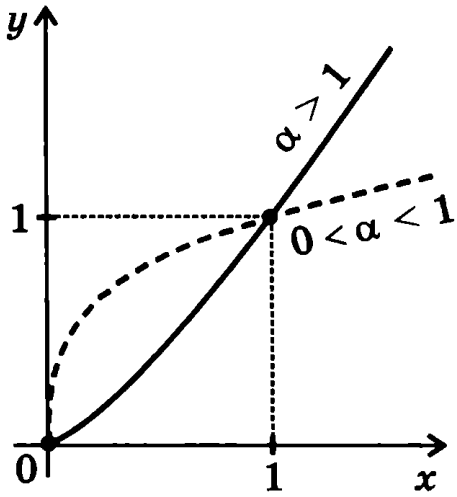
СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

- *Область определения:*
  при n нечетном R
  при n четном $[0; \infty)$
- *Область значений:*
  при n нечетном R
  при n четном $[0; \infty)$
- *Четность, нечетность:*
  при n нечетном функция нечетная
  при n четном функция не является ни четной, ни нечетной
- *Нули:* $y = 0$ при $x = 0$
- *Промежутки знакопостоянства:*
  если n нечетное, то $\begin{cases} y > 0 \text{ при } x \in (0; \infty) \\ y < 0 \text{ при } x \in (-\infty; 0) \end{cases}$
  если n четное, то $y > 0$ при $x \in (0; \infty)$
- *Промежутки монотонности:*
  функция возрастает при всех x из области определения
- *Экстремумов* нет
- *Графики функций проходят через точки:*
  при n нечетном $(-1; -1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$
  при n четном $(0; 0)$, $(1; 1)$

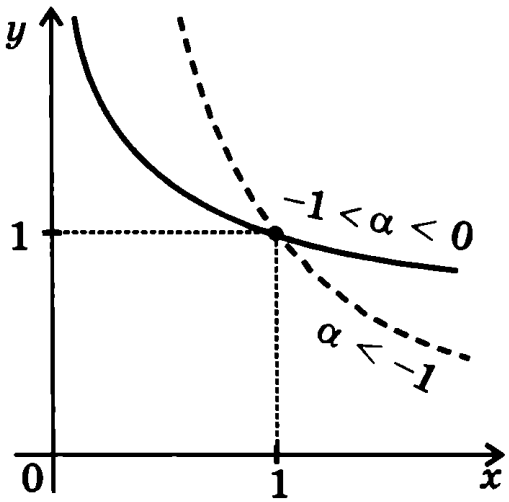
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ
с действительными показателями степени
$y = x^{\alpha}$, где $\alpha \in R$

$\alpha > 0$



$\alpha < 0$



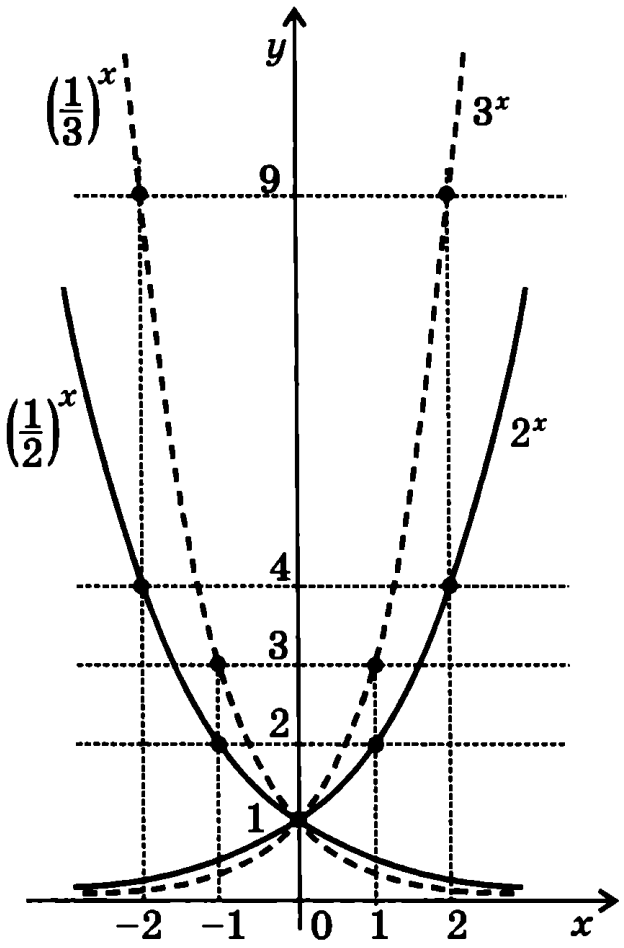
СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

- *Область определения:*
  если $\alpha > 0$, $[0; \infty)$
  если $\alpha < 0$, $(0; \infty)$
- *Область значений:*
  если $\alpha > 0$, $[0; \infty)$
  если $\alpha < 0$, $(0; \infty)$
- *Четность, нечетность:*
  функция не является ни четной, ни нечетной
- *Нули:*
  если $\alpha > 0$, $y = 0$ при $x = 0$
  если $\alpha < 0$, нулей нет
- *Промежутки знакопостоянства:*
  $y > 0$ при $x \in (0; \infty)$
- *Промежутки монотонности:*
  при $\alpha > 0$ функция возрастает при $x \in [0; \infty)$
  при $\alpha < 0$ функция убывает при $x \in (0; \infty)$
- *Экстремумов* нет
- *Графики функций проходят через точки:*
  при $\alpha > 0$ (0; 0), (1; 1)
  при $\alpha < 0$ (1; 1)
- *Асимптоты:* при $\alpha < 0$ $x = 0$ и $y = 0$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

$y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$*)



СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

- *Область определения:* R
- *Область значений:* $(0; \infty)$
- *Четность, нечетность:*

  функция не является ни четной, ни нечетной
- *Нулей* нет
- *Промежутки знакопостоянства:* $y > 0$ при $x \in R$
- *Промежутки монотонности:*

  при $0 < a < 1$ функция убывает при $x \in R$

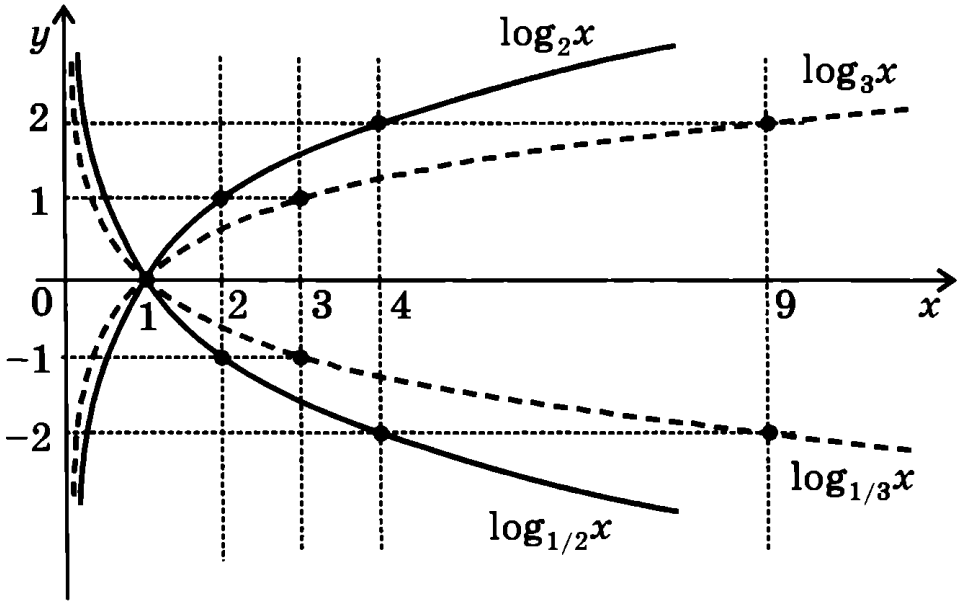
  при $a > 1$ функция возрастает при $x \in R$
- *Экстремумов* нет
- *График функции проходит через точку* $(0; 1)$
- *Асимптота:* $y = 0$

*) При $a = 1$ функция $y = a^x$ является постоянной: $1^x = 1$ при $x \in R$.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

$y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$



СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

- *Область определения:* $(0; \infty)$
- *Область значений:* R
- *Четность, нечетность:*

  функция не является ни четной, ни нечетной
- *Нули:* $y = 0$ при $x = 1$
- *Промежутки знакопостоянства:*

  если $0 < a < 1$, то $y > 0$ при $x \in (0; 1)$, $y < 0$ при $x \in (1; \infty)$

  если $a > 1$, то $y > 0$ при $x \in (1; \infty)$, $y < 0$ при $x \in (0; 1)$
- *Промежутки монотонности:*

  при $0 < a < 1$ функция убывает при $x \in (0; \infty)$

  при $a > 1$ функция возрастает при $x \in (0; \infty)$
- *Экстремумов* нет
- *График функции проходит через точку* $(1; 0)$
- *Асимптота:* $x = 0$

Замечание. Логарифмическая и показательная функции с одним и тем же основанием a являются взаимно обратными функциями (см. стр. 15).

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ*)

$$y = \sin x$$

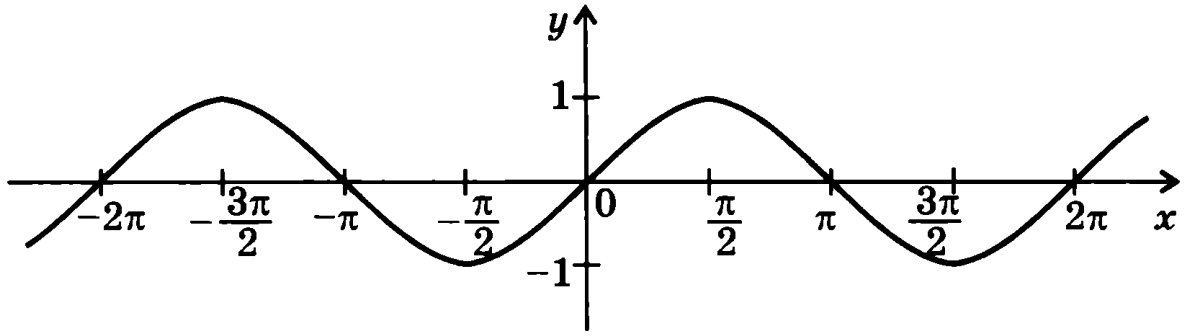


график — синусоида

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

- *Область определения:* R
- *Область значений:* $[-1; 1]$
- *Четность, нечетность:* функция нечетная
- *Период:* 2π
- *Нули:* $\sin x = 0$ при $x = \pi n, \quad n \in Z$
- *Промежутки знакопостоянства:*

  $\sin x > 0$ при $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n), \quad n \in Z$

  $\sin x < 0$ при $x \in (-\pi + 2\pi n; 2\pi n), \quad n \in Z$
- *Экстремумы:*

  $x_{min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z; \quad y_{min} = -1$

  $x_{max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z; \quad y_{max} = 1$
- *Промежутки монотонности:*

  функция возрастает при $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right], \quad n \in Z$

  функция убывает при $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right], \quad n \in Z$

*) Основные формулы тригонометрии см. на стр. 184-187. Далее в качестве периода функции рассматривается ее наименьший положительный период.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

$y = \cos x$

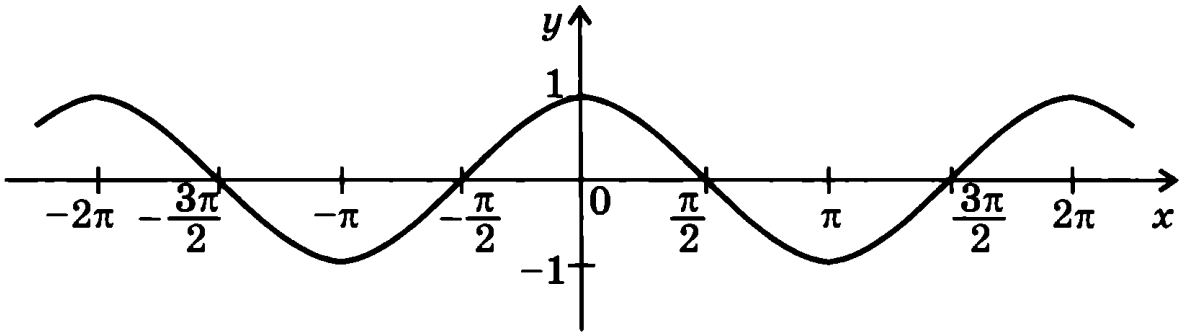


график — косинусоида

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

- *Область определения:* R
- *Область значений:* $[-1;\ 1]$
- *Четность, нечетность:* функция четная
- *Период:* 2π
- *Нули:* $y = 0$ при $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$
- *Промежутки знакопостоянства:*

  $\cos x > 0 \quad$ при $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right), \quad n \in Z$

  $\cos x < 0 \quad$ при $x \in \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), \quad n \in Z$

- *Экстремумы:*

  $x_{min} = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z; \quad y_{min} = -1$

  $x_{max} = 2\pi n, \quad n \in Z; \quad y_{max} = 1$

- *Промежутки монотонности:*

  функция возрастает при $x \in [-\pi + 2\pi n;\ 2\pi n], \quad n \in Z$

  функция убывает при $x \in [2\pi n;\ \pi + 2\pi n], \quad n \in Z$

Замечание. Графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ получаются друг из друга с помощью параллельных переносов вдоль оси x на $\pi/2$: $\cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$; $\sin x = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

$$y = \operatorname{tg} x$$

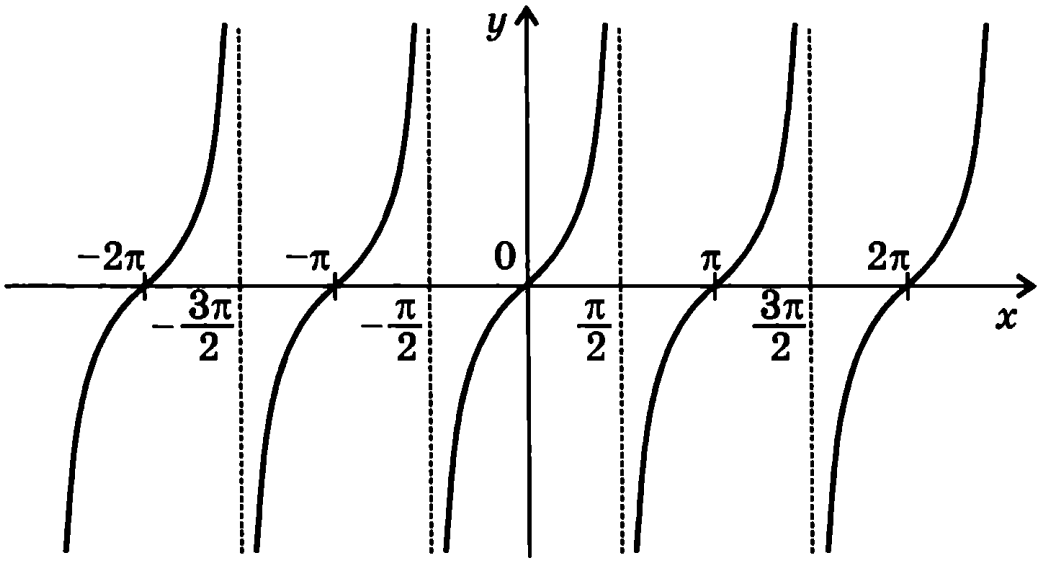


график — тангенсоида

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

- *Область определения:* объединение интервалов
$$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right),\quad n\in Z$$
- *Область значений:* R
- *Четность, нечетность:* функция нечетная
- *Период:* π
- *Нули:* $y = 0$ при $x = \pi n,\quad n \in Z$
- *Промежутки знакопостоянства:*

  $\operatorname{tg} x > 0$ при $x \in \left(\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right),\quad n\in Z$

  $\operatorname{tg} x < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\pi n\right),\quad n\in Z$
- *Экстремумов* нет
- *Промежутки монотонности:*

  функция возрастает на каждом интервале области определения
- *Асимптоты:* $x = \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

$y = \operatorname{ctg} x$

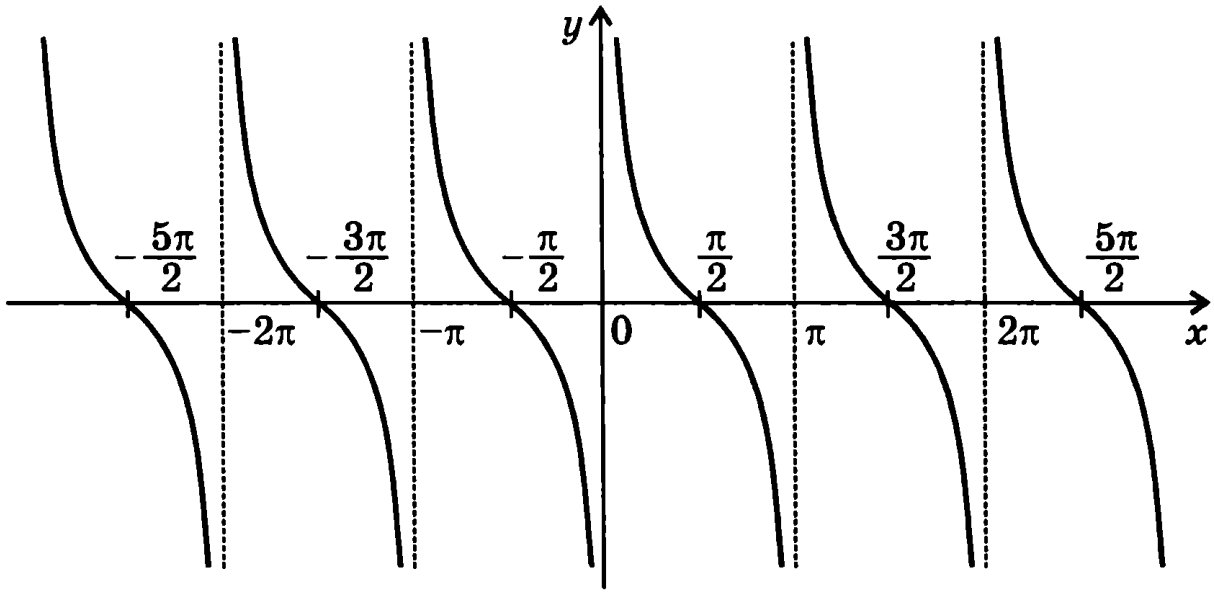


график — котангенсоида

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

- *Область определения:* объединение интервалов $(\pi n;\ \pi + \pi n)$, $n \in Z$
- *Область значений:* R
- *Четность, нечетность:* функция нечетная
- *Период:* π
- *Нули:* $y = 0$ при $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$
- *Промежутки знакопостоянства:*

  $\operatorname{ctg} x > 0$ при $x \in \left(\pi n;\ \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right), \quad n \in Z$

  $\operatorname{ctg} x < 0$ при $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi n\right), \quad n \in Z$
- *Экстремумов* нет
- *Промежутки монотонности:*

  функция убывает на каждом интервале области определения
- *Асимптоты:* $x = \pi n$, $n \in Z$

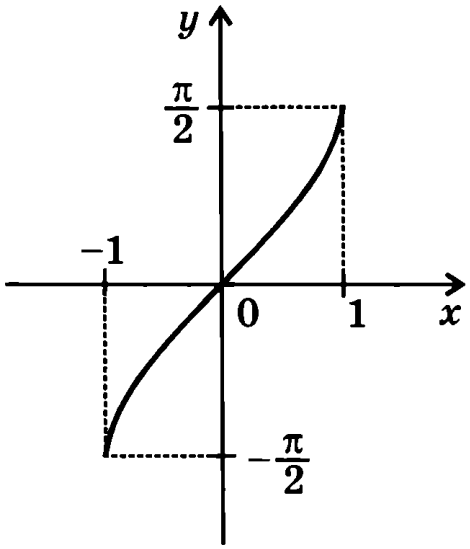
Замечание. График функции $y = \operatorname{ctg} x$ получается из графика функции $y = \operatorname{tg} x$ отражением относительно любой из координатных осей и последующим параллельным переносом вдоль оси x на $\pi/2$.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

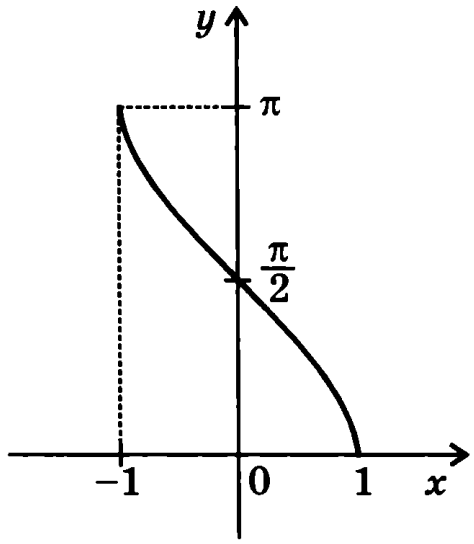
$y = \arcsin x$

функция, обратная функции
$y = \sin x$, $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$



$y = \arccos x$

функция, обратная функции
$y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$



СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ*)

	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$
• *Область определения:*	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
• *Область значений:*	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$[0; \pi]$
• *Четность, нечетность:*	нечетная	ни четная, ни нечетная
• *Нули:*	$y = 0$ при $x = 0$	$y = 0$ при $x = 1$
• *Промежутки знакопостоянства:*	$y > 0$ при $x \in (0; 1]$ $y < 0$ при $x \in [-1; 0)$	$y > 0$ при $x \in [-1; 1)$
• *Экстремумы:*	нет	нет
• *Промежутки монотонности:*	возрастает на всей области определения	убывает на всей области определения

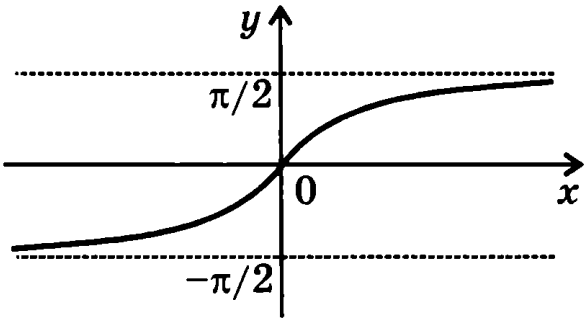
$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2$$

*) См. также стр. 187.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

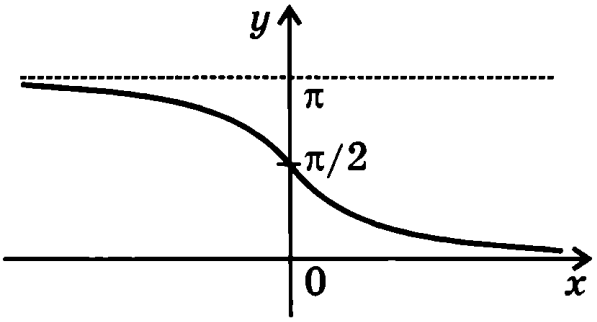
$y = \operatorname{arctg} x$

функция, обратная функции
$y = \operatorname{tg} x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$



$y = \operatorname{arcctg} x$

функция, обратная функции
$y = \operatorname{ctg} x$, $0 < x < \pi$



СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

	$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \operatorname{arcctg} x$
• *Область определения:*	R	R
• *Область значений:*	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$(0; \pi)$
• *Четность, нечетность:*	нечетная	ни четная, ни нечетная
• *Нули:*	$y = 0$ при $x = 0$	нулей нет
• *Промежутки знакопостоянства:*	$y > 0$ при $x \in (0; \infty)$ $y < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$	$y > 0$ при $x \in R$
• *Экстремумы:*	нет	нет
• *Промежутки монотонности:*	возрастает при $x \in R$	убывает при $x \in R$
• *Асимптоты:*	$y = -\frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2}$	$y = 0$ и $y = \pi$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

УРАВНЕНИЯ*)

Уравнением называется равенство, содержащее одно или несколько неизвестных.

Общий вид уравнения

с одним неизвестным:

$$f_1(x) = f_2(x),$$

с n неизвестными:

$$f_1(x_1,\ldots,x_n) = f_2(x_1,\ldots,x_n).$$

Часто все функции переносят в одну часть уравнения, и тогда уравнения принимают вид:

$$f(x) = 0;$$

$$f(x_1,\ldots,x_n) = 0.$$

Областью допустимых значений уравнения называется область определения функций $f(x)$ или $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Пример. Областью допустимых значений уравнения $\sqrt{x-2} = \sqrt{3-x}$ является $x \in [2; 3]$.

Решением уравнения с одним неизвестным (корнем уравнения) называется такое значение неизвестного, при подстановке которого уравнение обращается в верное числовое равенство.

Решить уравнение — значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

Примеры. Решить уравнение $x^2 - 4 = 0$ — значит найти его корни $x_1 = -2$; $x_2 = 2$; решить уравнение $x^2 + 4 = 0$ — значит доказать, что корней нет.

Равносильными называются уравнения, множества корней которых совпадают.

В частности, равносильны все уравнения, не имеющие корней.

Примеры равносильных уравнений:

1. $x - 2 = 0$ и $2^x = 4$,
2. $\sin x = 2$ и $\sqrt{x} = -1$.

*) Решения всех уравнений, неравенств и систем рассматриваются только на множестве действительных чисел.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

$$ax + b = 0,$$

где a и b —действительные числа

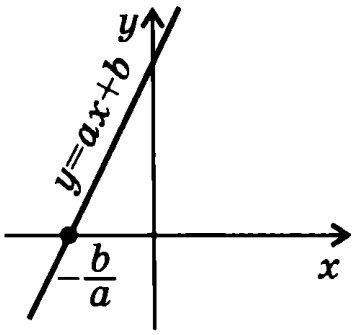
Наличие корней и их число зависит от значений a и b.

$a \neq 0$, b — любое число

Уравнение $ax + b = 0$ имеет один корень:

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Прямая $y = ax + b$ пересекает ось x в одной точке.

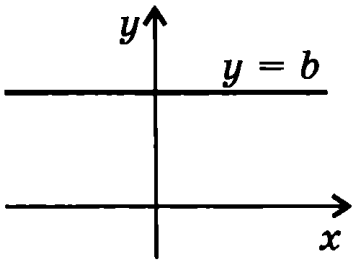


Пример: $2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1{,}5$

$a = 0$, $b \neq 0$

Уравнение $0 \cdot x + b = 0$ не имеет корней.

Прямая $y = 0 \cdot x + b$ не пересекает ось x.

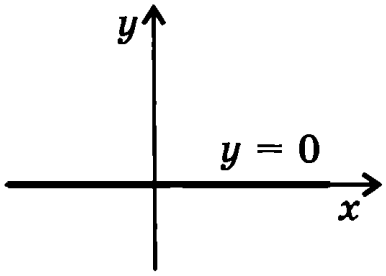


Пример: $0 \cdot x + 2 = 0$ — уравнение не имеет корней.

$a = 0$, $b = 0$

Уравнение $0 \cdot x + 0 = 0$ имеет бесконечно много корней: корнем является любое число.

Прямая $y = 0 \cdot x + 0$ совпадает с осью x.



Пример: $0 \cdot x + 2 = 2 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0$ — корнем является любое число.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

$ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$

Уравнение в общем виде можно решить с помощью *выделения полного квадрата* (см. стр. 30). Число корней зависит от значения *дискриминанта* $D = b^2 - 4ac$.

Замечание. Если $a < 0$, удобно умножить уравнение на -1, чтобы получить уравнение с положительным коэффициентом при x^2.

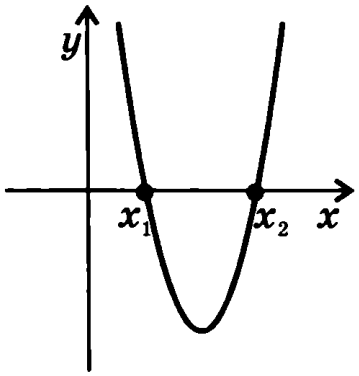
Пример: $-2x^2 + 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0$

$D > 0$

Уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Парабола пересекает ось x в двух точках.



Замечание. Если b — четное число, для нахождения корней обычно используется формула

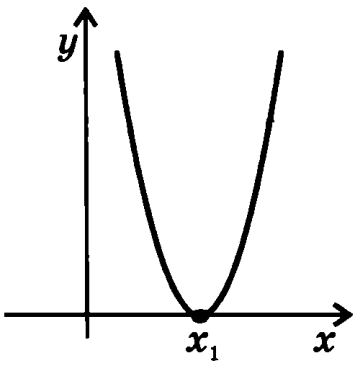
$$x_{1,2} = \frac{-b/2 \mp \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a}$$

$D = 0$

Уравнение имеет один (двукратный) корень:

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

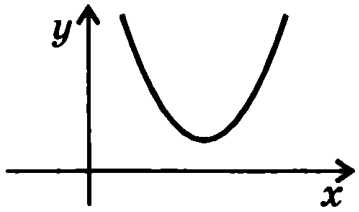
Парабола касается оси x.



$D < 0$

Уравнение не имеет корней.

Парабола не имеет общих точек с осью x.



PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

НЕПОЛНЫЕ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

$$ax^2 + bx = 0,\ ax^2 + c = 0,\ ax^2 = 0$$

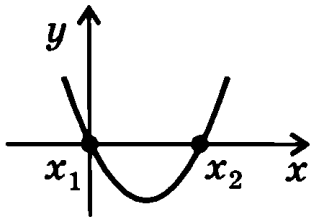
Такие уравнения решают обычно без применения общей формулы для корней квадратного уравнения.

$ax^2 + bx = 0,\ b \neq 0$

Уравнение всегда имеет два корня. Решается с помощью разложения левой части уравнения на множители:

$$x\,(ax + b) = 0$$

$$x_1 = 0;\ x_2 = -\frac{b}{a}.$$



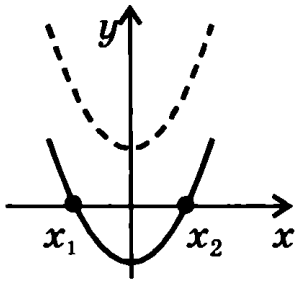
Парабола пересекает ось x в двух точках, одна из которых является началом координат.

Пример: $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x\,(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 2$

$ax^2 + c = 0,\ c \neq 0$

Уравнение не имеет корней, если знаки a и c совпадают; уравнение имеет два корня, если знаки a и c различны:

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}};\ x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$



Парабола или не пересекает ось x, или пересекает ее в двух точках, симметричных относительно начала координат.

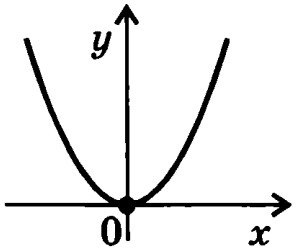
Примеры: $x^2 + 1 = 0$ — нет решений

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 1$

$ax^2 = 0$

Уравнение имеет один (двукратный) корень: $x_1 = 0$.

Парабола касается оси x в начале координат.



PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ТЕОРЕМЫ ВИЕТА

1. Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -b/a$; $x_1 \cdot x_2 = c/a$.

2. Если x_1 и x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -b/a$, $x_1 \cdot x_2 = c/a$, то x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

ПРИВЕДЕННЫЕ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Приведенным квадратным уравнением называется уравнение вида $x^2 + px + q = 0$

Замечание. Любое квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ можно привести к такому виду с помощью деления уравнения на a.

ФОРМУЛЫ ВИЕТА ДЛЯ КОРНЕЙ ПРИВЕДЕННОГО КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

$$x_1 + x_2 = -p; \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

Теоремы Виета часто используются для:

- *Подбора корней без решения уравнения*
- *Определения знаков корней без решения уравнения (при условии $D \geqslant 0$) по следующим правилам:*

	$p > 0$	$p < 0$
$q > 0$	Оба корня отрицательны	Оба корня положительны
$q < 0$	Корни имеют противоположные знаки	

Примеры подбора корней с использованием теорем Виета:

1. $x^2 - 7x + 6 = 0$. Нетрудно подобрать пару чисел, сумма которых равна 7, а произведение равно 6 — это 1 и 6. Согласно теоремам Виета корнями квадратного уравнения $x^2 - 7x + 6 = 0$ являются 1 и 6.
2. $x^2 - 4x - 5 = 0$. Нетрудно подобрать пару чисел, сумма которых равна 4, а произведение равно -5 — это -1 и 5. Согласно теоремам Виета корнями квадратного уравнения $x^2 - 4x - 5 = 0$ являются -1 и 5.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

УРАВНЕНИЯ, СВОДЯЩИЕСЯ К КВАДРАТНЫМ

$$af^2(x) + bf(x) + c = 0$$

СХЕМА РЕШЕНИЯ

1. С помощью введения новой переменной $t = f(x)$ уравнение приводят к виду
$$at^2 + bt + c = 0$$
2. Если это уравнение имеет корни t_1 и t_2 (или один корень t_1), решения исходного уравнения ищут как решения совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x) = t_1 \\ f(x) = t_2 \end{array}\right.$ (или одного уравнения $f(x)=t_1$).

Частный случай уравнений, сводящихся к квадратным — *биквадратные уравнения* (уравнения вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$). В этом случае вводят переменную $t = x^2$.

Примеры:

Биквадратное уравнение

$x^4 - x^2 - 2 = 0$; замена $t = x^2$

$$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 = -1 & \text{корней нет} \\ x^2 = 2 & x_{1,2} = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Иррациональное уравнение

$x^2 + \sqrt{x^2 - 2} = 4 \Leftrightarrow (x^2 - 2) + \sqrt{x^2 - 2} - 2 = 0$;

замена $t = \sqrt{x^2 - 2}$

$$t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x^2 - 2} = -2 & \text{корней нет} \\ \sqrt{x^2 - 2} = 1 & x_{1,2} = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Тригонометрическое уравнение

$\sin^2 x - \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x + \cos x - 2 = 0$; замена $t = \cos x$

$$t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x = -2 & \text{корней нет} \\ \cos x = 1 & x = 2\pi n,\ n \in Z \end{array}\right.$$

Показательное уравнение

$3^{2x} - 12 \cdot 3^{x-1} + 3 = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$;

замена $t = 3^x$

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 1 \\ 3^x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Как правило, иррациональное уравнение сводится к равносильной системе, содержащей уравнения и неравенства.

1. $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$

Замечание. Из двух систем выбирают ту, которая решается проще.

Пример: $\sqrt{3-x} = \sqrt{x^2-5x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x = x^2-5x-2 \\ 3-x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x-5=0 \\ x \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ x \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1$$

2. $\sqrt{f(x)} = a$

Если $a < 0$, уравнение не имеет корней.

Если $a \geqslant 0$, уравнение равносильно уравнению $f(x) = a^2$.

Замечание. Иногда иррациональное уравнение можно свести к приведенному виду с помощью введения новой переменной.

Пример: $x - \sqrt{x+1} = 5 \Leftrightarrow (x+1) - \sqrt{x+1} - 6 = 0$

$$z = \sqrt{x+1}, \quad z^2 - z - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-2 \\ z=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1}=-2 \\ \sqrt{x+1}=3 \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности не имеет корней, корень второго уравнения $x = 8$.

3. $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$

Пример: $\sqrt{7-x} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ 7-x = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x^2-x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

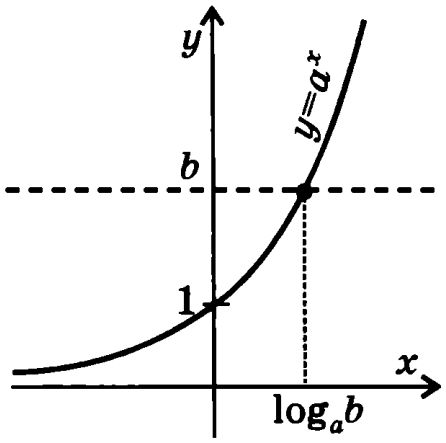
ПРОСТЕЙШИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

$a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$

Если $b > 0$, уравнение имеет один корень:

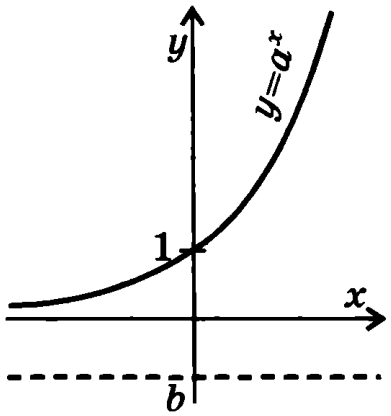
$$x = \log_a b.$$

График функции $y = a^x$ пересекает прямую $y = b$ в одной точке.



Если $b \leqslant 0$, корней нет.

График функции $y = a^x$ не пересекает прямую $y = b$.



Примеры: 1. $2^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{1}{2} = -1$ 2. $3^x = 9 \Leftrightarrow x = \log_3 9 = 2$

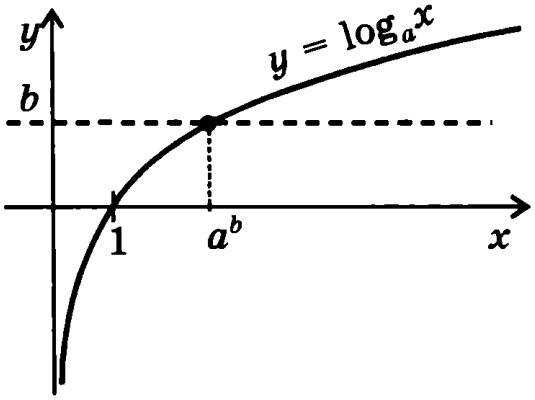
ПРОСТЕЙШИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

$\log_a x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$

Уравнение имеет один положительный корень при любом b:

$$x = a^b.$$

График функции $y = \log_a x$ пересекает прямую $y = b$ в одной точке.



Пример: $\log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = 2^{-1} = 1/2$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

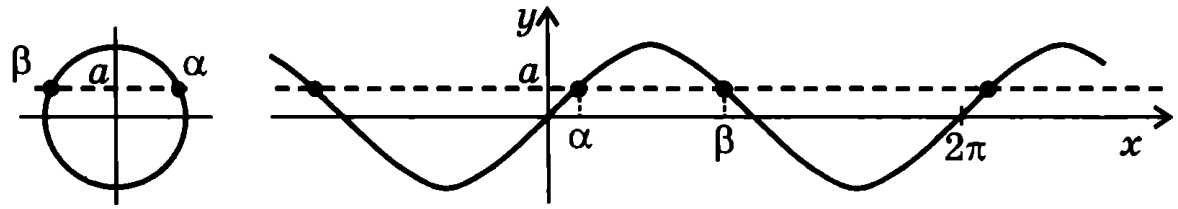
$\sin x = a$

$|a| \leqslant 1$

$$\sin x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z \end{array}\right.$$

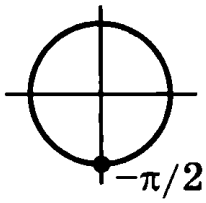
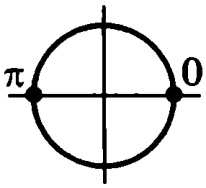
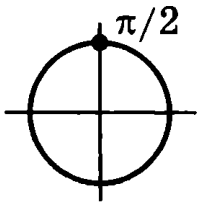
Эти две формулы можно объединить в одну:

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z$$



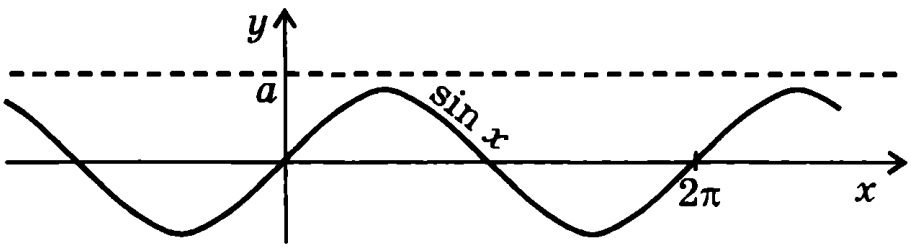
$\alpha = \arcsin a$; $\beta = \pi - \arcsin a$

Частные случаи

$a = -1$	$a = 0$	$a = 1$
$\sin x = -1$ $x = -\pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z$	$\sin x = 0$ $x = \pi n,\ n \in Z$	$\sin x = 1$ $x = \pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z$
		

$|a| > 1$

корней нет



PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

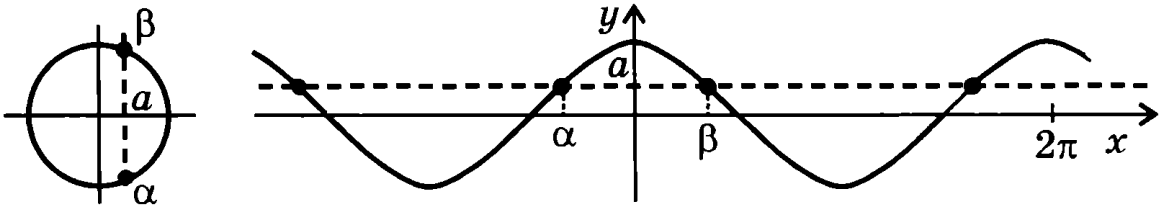
$\cos x = a$

$|a| \leqslant 1$

$$\cos x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z \\ x = -\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z \end{array}\right.$$

Эти две формулы можно объединить в одну:

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$$



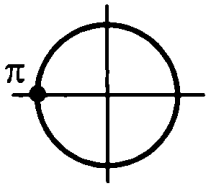
$\alpha = -\arccos a$; $\beta = \arccos a$

Частные случаи

$a = -1$

$\cos x = -1$

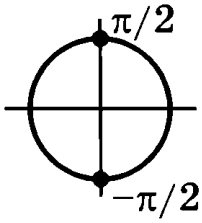
$x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$



$a = 0$

$\cos x = 0$

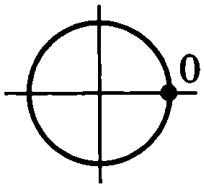
$x = \pi/2 + \pi n,\ n \in Z$



$a = 1$

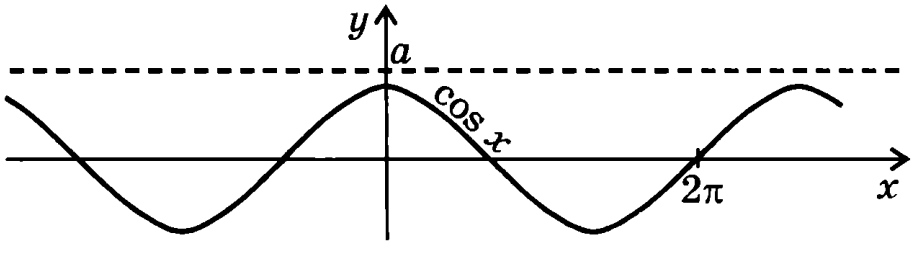
$\cos x = 1$

$x = 2\pi n,\ n \in Z$



$|a| > 1$

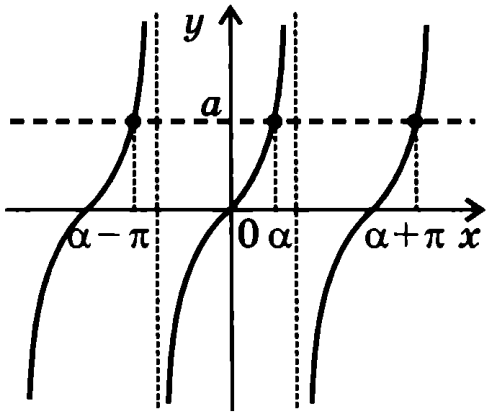
корней нет



PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

$\operatorname{tg} x = a$

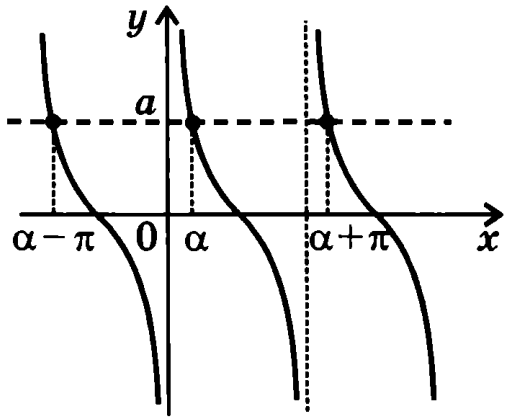
$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z$



$\alpha = \operatorname{arctg} a$

$\operatorname{ctg} x = a$

$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z$



$\alpha = \operatorname{arcctg} a$

$a \sin x + b \cos x = c \quad (a,\ b \neq 0)$

Уравнение не имеет корней, если $a^2 + b^2 < c^2$.

Если $a^2 + b^2 \geqslant c^2$, уравнение можно привести к виду:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Поскольку $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$, можно ввести новую переменную φ такую, что $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Уравнение примет вид: $\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Корни этого уравнения:

$$x = -\varphi + (-1)^k \arcsin\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) + \pi k,\ k \in Z.$$

Пример: $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

УРАВНЕНИЕ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ЕГО ГРАФИК

Общий вид:

$$f_1(x,y) = f_2(x,y)$$

Решением уравнения с двумя переменными называется **пара** чисел $(x_0,\ y_0)$, при подстановке которых вместо соответствующих переменных $x,\ y$ уравнение обращается в верное числовое равенство.

Решить уравнение с двумя неизвестными — значит найти все его решения или доказать, что решений нет.

Примеры:

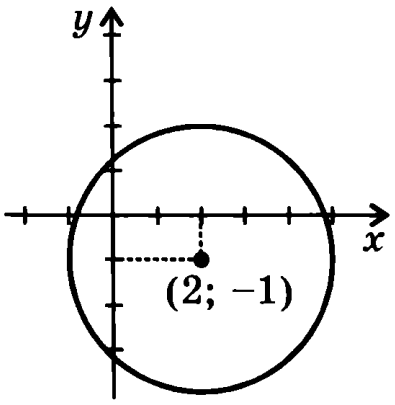
1. $x^2 + y^2 = 1$ — бесконечно много решений: решением является любая пара чисел, совпадающих с координатами точки, лежащей на единичной окружности, т.е. окружности радиуса 1 с центром в начале координат
2. $x^2 + y^2 = 0$ — одно решение: $x = 0,\ y = 0$
3. $x^2 + y^2 = -1$ — решений нет

Решения уравнения с двумя переменными представляют часто в виде графика.

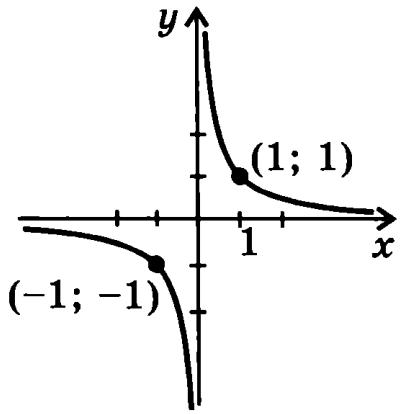
График уравнения с двумя переменными называется множество всех точек плоскости, координаты которых $x,\ y$ являются решениями этого уравнения.

Примеры графиков уравнения с двумя переменными:

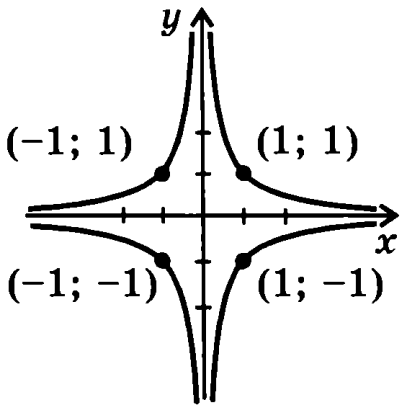
1. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$



2. $xy = 1$

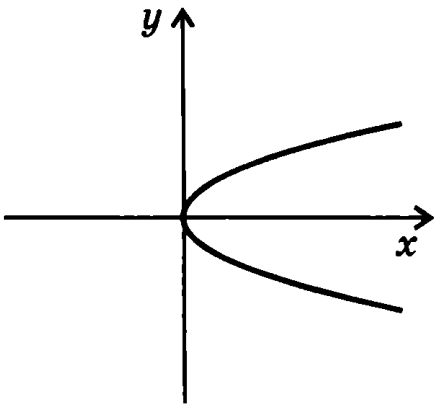


3. $|x| \cdot |y| = 1$

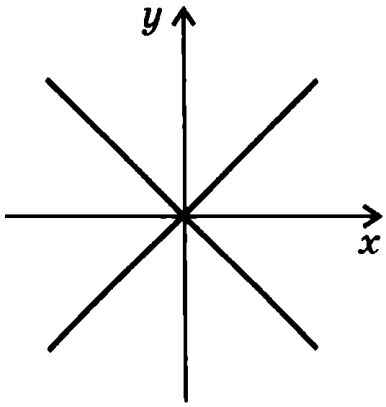


PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

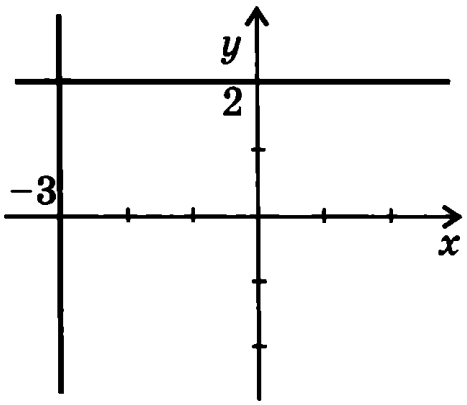
4. $y^2 = x$



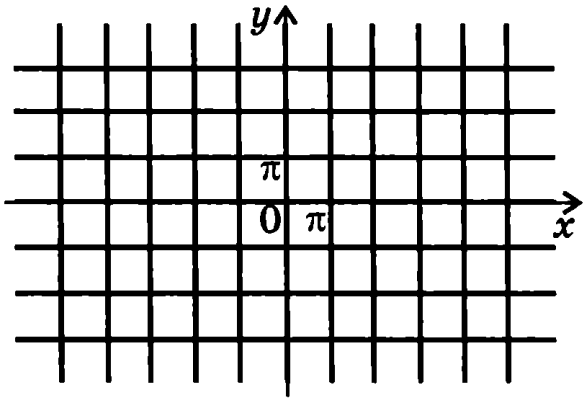
5. $y^2 = x^2$



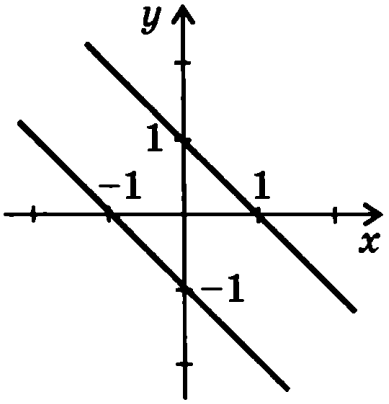
6. $(x + 3)(y - 2) = 0$



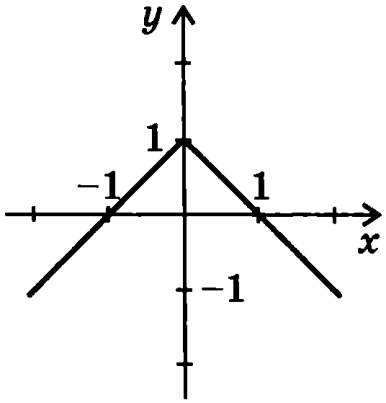
7. $\sin x \cdot \sin y = 0$



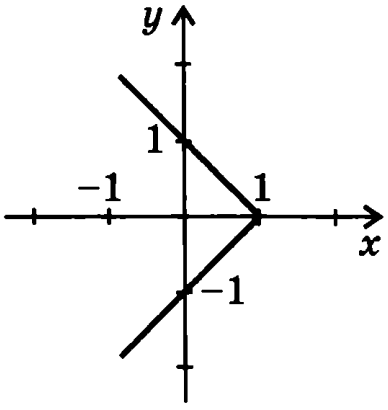
8. $|x + y| = 1$



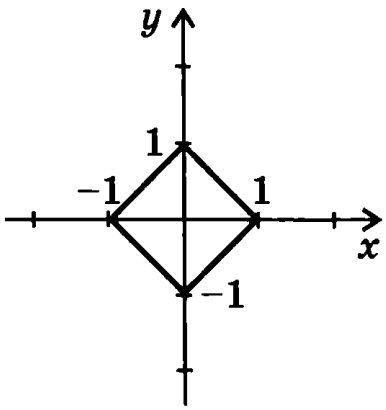
9. $|x| + y = 1$



10. $x + |y| = 1$



11. $|x| + |y| = 1$



PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

НЕРАВЕНСТВА

Неравенствами называются выражения вида $a < b$, $a \leqslant b$, $a > b$, $a \geqslant b$, где a и b могут быть числами (числовыми выражениями) или функциями. Неравенства, содержащие знаки $<$ или $>$, называются строгими, а содержащие знаки $\leqslant$ или $\geqslant$ — нестрогими.

Различают два вида неравенств: числовые и неравенства с переменными.

Примеры:

1. $5 < 10$ — числовое неравенство
2. $2x \geqslant 3$ — неравенство с одной переменной
3. $2x < 5y$ — неравенство с двумя переменными

Решением неравенства с одной переменной называется такое значение переменной, при подстановке которого неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство — значит найти все его решения или доказать, что решений нет.

Примеры:

1. $x^2 + 5 > 0 \Leftrightarrow x \in R$
2. $x - 4 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 4]$
3. $x^2 < 0$ — решений нет

Равносильными называются неравенства, множества решений которых совпадают.

В частности, равносильны все неравенства, не имеющие решений.

Примеры равносильных неравенств:

1. $x > 2$ и $x^3 > 8$
2. $\sin x > 2$ и $\sqrt{x} < -1$

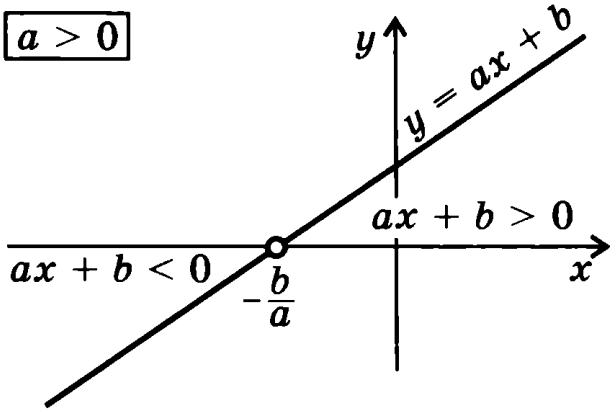
Из неравенств так же, как из уравнений, составляют системы и совокупности (примеры см. на стр. 66). Кроме того, часто рассматриваются системы и совокупности, содержащие одновременно уравнения и неравенства (примеры см. на стр. 54).

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

$ax + b > 0,\ ax + b \geqslant 0,\ ax + b < 0,\ ax + b \leqslant 0$

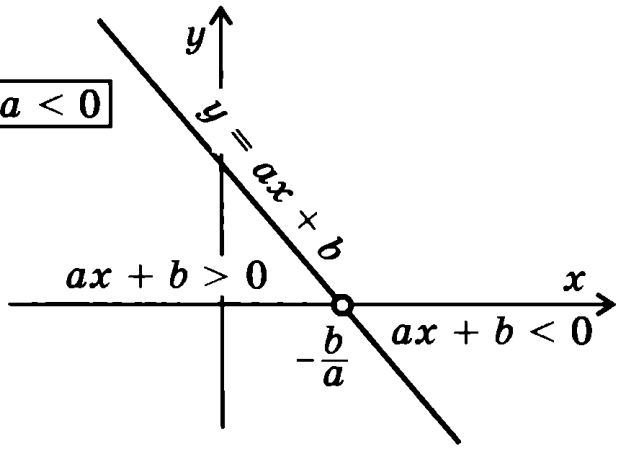
$a > 0$



$ax + b > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{b}{a}; \infty\right)$

$ax + b < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$

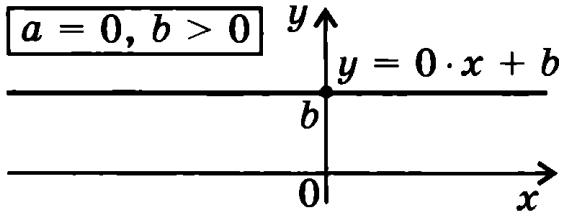
$a < 0$



$ax + b > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$

$ax + b < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{b}{a}; \infty\right)$

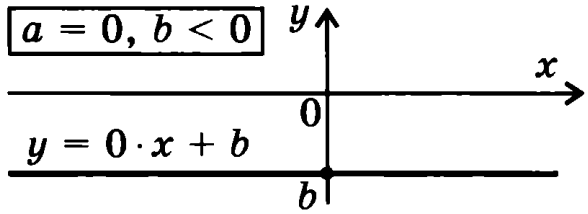
$a = 0,\ b > 0$



$0 \cdot x + b > 0 \Leftrightarrow x \in R$

$0 \cdot x + b < 0$ — решений нет

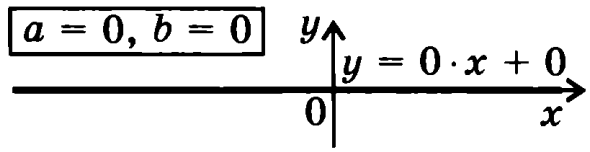
$a = 0,\ b < 0$



$0 \cdot x + b > 0$ — решений нет

$0 \cdot x + b < 0 \Leftrightarrow x \in R$

$a = 0,\ b = 0$



$0 \cdot x + 0 > 0$ — решений нет

$0 \cdot x + 0 < 0$ — решений нет

Замечание. Если неравенство нестрогое ($ax + b \geqslant 0$, $ax + b \leqslant 0$), его решением является объединение решений соответствующего строгого неравенства и уравнения $ax + b = 0$. Например, $x + 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-2; \infty)$; $0 \cdot x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in R$.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

$ax^2 + bx + c > 0$ $\qquad$ $ax^2 + bx + c < 0$

$ax^2 + bx + c \geqslant 0$ $\qquad$ $ax^2 + bx + c \leqslant 0$

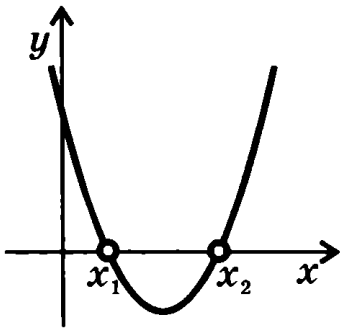
Решение неравенства зависит, в основном, от значений коэффициента a и дискриминанта $D = b^2 - 4ac$.

Если $a < 0$, удобно умножить неравенство на -1, т.е. изменить все знаки в левой части на противоположные и *изменить знак неравенства*.

Пример. Неравенство $-2x^2 + 3x - 6 > 0$ равносильно неравенству $2x^2 - 3x + 6 < 0$.

Ниже рассмотрены только случаи $a > 0$.

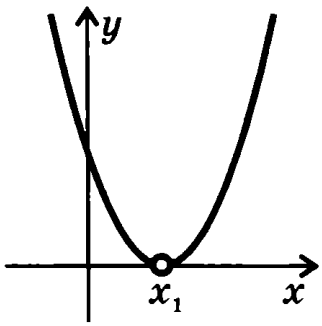
$D > 0$



$ax^2 + bx + c > 0$
Решением является объединение двух лучей: $(-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$.

$ax^2 + bx + c < 0$
Решением является интервал $(x_1; x_2)$.

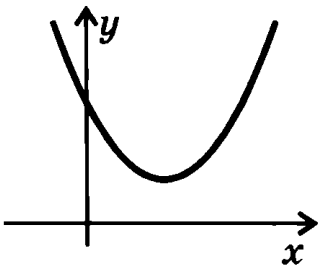
$D = 0$



$ax^2 + bx + c > 0$
Решением является объединение двух лучей: $(-\infty; x_1) \cup (x_1; \infty)$.

$ax^2 + bx + c < 0$
Решений нет.

$D < 0$



$ax^2 + bx + c > 0$
Решением является вся числовая ось.

$ax^2 + bx + c < 0$
Решений нет.

Замечание. Если неравенство нестрогое ($ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$), его решением является объединение решений соответствующего строгого неравенства и уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Например, $x^2 - 3x + 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [1; 2]$.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ

для неравенств вида

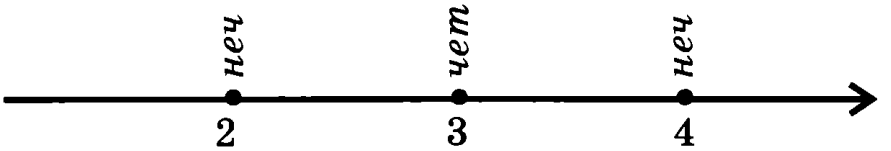
$(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots(x-a_n)^{k_n} > 0 \ (\geqslant 0;\ < 0;\ \leqslant 0)$, где $k_i \in N$

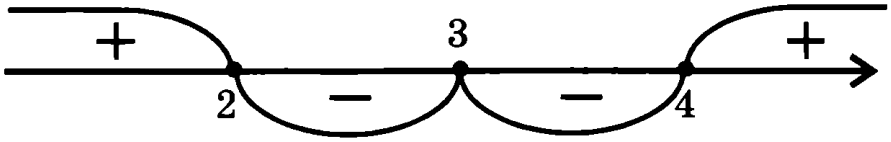
СХЕМА РЕШЕНИЯ

1. Найти *нули* функции, стоящей в левой части неравенства.
2. Отметить положение нулей на числовой оси и определить их *кратность* (если k_i четное, то нуль четной кратности, если k_i нечетное — то нечетной).
3. Найти *знаки функции* в промежутках между ее нулями, начиная с крайнего правого промежутка: в этом промежутке функция в левой части неравенства всегда *положительна* для приведенного вида неравенств. При переходе справа налево через нуль функции от одного промежутка к соседнему следует учитывать:
   - если нуль *нечетной* кратности, знак функции *изменяется*;
   - если нуль *четной* кратности, знак функции *сохраняется*.
4. Записать ответ.

Пример: $(x-2)(x-3)^2(x-4)^3 \geqslant 0$

1. нули: $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$

2. 

3. 

4. $x \in (-\infty;\ 2] \cup \{3\} \cup [4;\ \infty)$

Замечание. Если функция, стоящая в левой части неравенства, содержит множители вида $(a_i - x)^{k_i}$, следует заменить их соответствующими множителями $(x-a_i)^{k_i}$ с учетом четности k_i.

Примеры:

1. $(2-x)^2 = (x-2)^2$; 2. $(2-x)^3 = -(x-2)^3$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНТЕРВАЛОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

СТРОГИЕ НЕРАВЕНСТВА

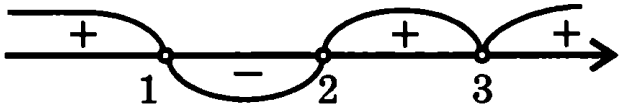
$$\frac{(x-a_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_n)^{k_n}}{(x-b_1)^{p_1}\cdot\ldots\cdot(x-b_m)^{p_m}}<0 \ (\text{или} > 0), \text{ где } k_i,\ p_j \in N$$

равносильно неравенству

$$(x-a_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_n)^{k_n}(x-b_1)^{p_1}\cdot\ldots\cdot(x-b_m)^{p_m}<0 \ (\text{или} > 0)$$

Схему решения таких неравенств см. на стр. 64.

Пример: $\dfrac{(x-2)(x-3)^2}{x-1}<0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3)^2(x-1)<0$



$x \in (1;2)$

НЕСТРОГИЕ НЕРАВЕНСТВА

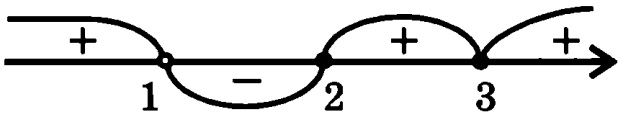
$$\frac{(x-a_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_n)^{k_n}}{(x-b_1)^{p_1}\cdot\ldots\cdot(x-b_m)^{p_m}}\leqslant 0 \ (\text{или} \geqslant 0), \text{ где } k_i,\ p_j \in N$$

равносильно системе

$$\begin{cases}(x-a_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_n)^{k_n}(x-b_1)^{p_1}\cdot\ldots\cdot(x-b_m)^{p_m}\leqslant 0 \ (\text{или} \geqslant 0)\\ x\neq b_1, b_2, \ldots, b_m\end{cases}$$

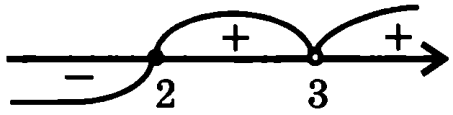
Схему решения первого неравенства системы см. на стр. 64.

Примеры: **1.** $\dfrac{(x-2)(x-3)^2}{x-1}\leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)(x-2)(x-3)^2\leqslant 0\\ x\neq 1\end{cases}$



$x \in (1;2]\cup\{3\}$

2. $\dfrac{(x-3)(x-2)}{x-3}\geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2(x-2)\geqslant 0\\ x\neq 3\end{cases}$



$x \in [2;3)\cup(3;\infty)$

Замечание. Сокращение числителя и знаменателя на $(x-3)$ во втором примере привело бы к неравенству $x-2\geqslant 0$, решение которого $[2;\infty)$ содержит значение $x=3$, которое не является решением исходного неравенства.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Как правило, иррациональное неравенство сводится к равносильной системе (или совокупности систем) неравенств.

$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$	$\sqrt{f(x)} \geqslant \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) \geqslant g(x) \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$	$\sqrt{f(x)} \leqslant g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) \geqslant 0 \\ f(x) \leqslant g^2(x) \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array}\right.$	$\sqrt{f(x)} \geqslant g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) \geqslant g^2(x) \end{cases} \end{array}\right.$

Примеры:

$$1.\ \sqrt{x+12} > \sqrt{4-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x \geqslant 0 \\ x+12 > 4-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 4 \\ 2x > -8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 4 \\ x > -4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-4; 4]$$

$$2.\ \sqrt{x+2} \geqslant x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0 \\ x+2 \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x+2 \geqslant x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \leqslant x < 0 \\ 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in [-2; 2]$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$

$a > 1$	$0 < a < 1$
$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$	$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

Примеры:

1. $2^{x^2} > 2^{x+2} \Leftrightarrow x^2 > x+2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$

2. $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \Leftrightarrow 2x \geqslant x - 1 \Leftrightarrow x \in [-1; \infty)$

Замечание. В случае нестрогих неравенств знаки $>$ и $<$ *в решениях* заменяются соответственно на $\geqslant$ и $\leqslant$.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

$\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$

$a > 1$	$0 < a < 1$
$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$	$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$
$\log_a f(x) \geqslant \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \geqslant g(x) \end{cases}$	$\log_a f(x) \geqslant \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \leqslant g(x) \end{cases}$

Примеры:

1. $\log_2(x+8) > \log_2(2x+4) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4 > 0 \\ x+8 > 2x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2; 4)$

2. $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) \geqslant \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \\ x-2 \leqslant x^2 - 3x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \\ x^2 - 4x + 3 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant 1 \\ x \geqslant 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \in [3; \infty)$$

Замечание. Следует обратить внимание на область определения функции $y = \log_a x$: решения нестрогих неравенств *не всегда получаются* из решений соответствующих строгих неравенств просто заменой знаков $>$ и $<$ на знаки $\geqslant$ и $\leqslant$.

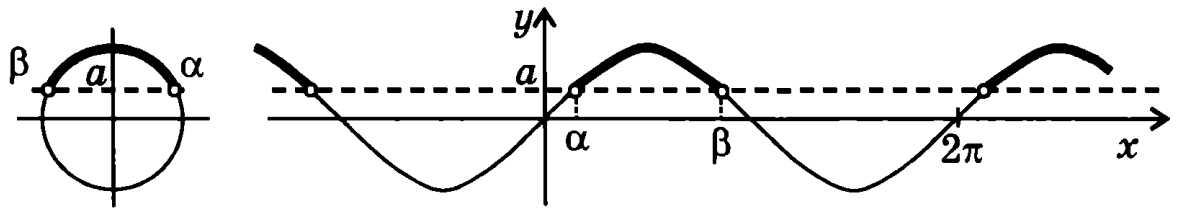
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА*)

$\sin x > a;\ \sin x \geqslant a;\ \sin x < a;\ \sin x \leqslant a$

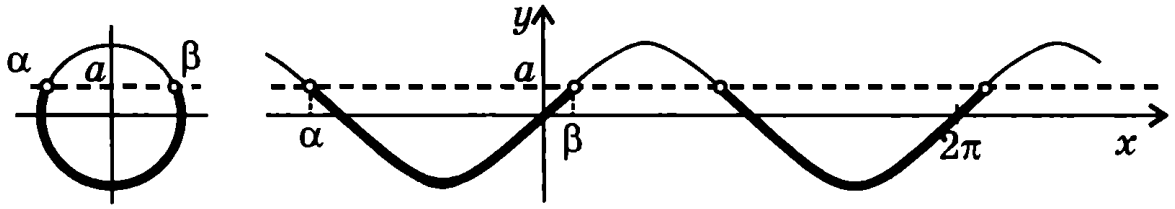
$|a| < 1$

$$\sin x > a \Leftrightarrow \arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z$$



$\alpha = \arcsin a;\quad \beta = \pi - \arcsin a$

$$\sin x < a \Leftrightarrow -\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z$$



$\alpha = -\pi - \arcsin a;\quad \beta = \arcsin a$

Замечание. В случае нестрогих неравенств знаки $>$ и $<$ *в решениях* заменяются соответственно на $\geqslant$ и $\leqslant$.

$a = -1$	$a = 1$
$\sin x < -1$ — решений нет	$\sin x < 1 \Leftrightarrow x \neq \pi/2 + 2\pi n$
$\sin x \leqslant -1 \Leftrightarrow x = -\pi/2 + 2\pi n$	$\sin x \leqslant 1 \Leftrightarrow x \in R$
$\sin x > -1 \Leftrightarrow x \neq -\pi/2 + 2\pi n$	$\sin x > 1$ — решений нет
$\sin x \geqslant -1 \Leftrightarrow x \in R$	$\sin x \geqslant 1 \Leftrightarrow x = \pi/2 + 2\pi n$

$a < -1$	$a > 1$
$\sin x < a$ $(\leqslant a)$ — решений нет	$\sin x < a$ $(\leqslant a) \Leftrightarrow x \in R$
$\sin x > a$ $(\geqslant a) \Leftrightarrow x \in R$	$\sin x > a$ $(\geqslant a)$ — решений нет

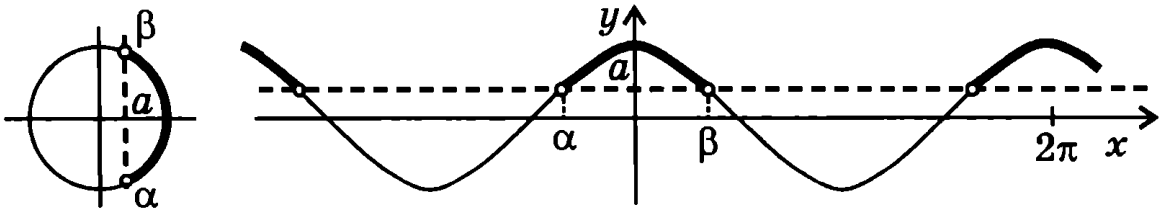
*) Во всех формулах, приведенных в этом разделе, $n \in Z$.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

$\cos x > a$; $\cos x \geqslant a$; $\cos x < a$; $\cos x \leqslant a$

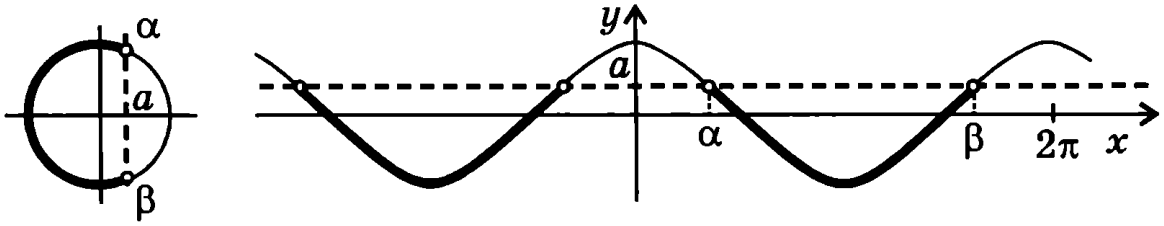
$|a| < 1$

$$\cos x > a \Leftrightarrow -\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$$



$\alpha = -\arccos a$; $\beta = \arccos a$

$$\cos x < a \Leftrightarrow \arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$$



$\alpha = \arccos a$; $\beta = 2\pi - \arccos a$

Замечание. В случае нестрогих неравенств знаки $>$ и $<$ *в решениях* заменяются соответственно на $\geqslant$ и $\leqslant$.

$a = -1$	$a = 1$
$\cos x < -1$ — решений нет	$\cos x < 1 \Leftrightarrow x \neq 2\pi n$
$\cos x \leqslant -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n$	$\cos x \leqslant 1 \Leftrightarrow x \in R$
$\cos x > -1 \Leftrightarrow x \neq \pi + 2\pi n$	$\cos x > 1$ — решений нет
$\cos x \geqslant -1 \Leftrightarrow x \in R$	$\cos x \geqslant 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n$

$a < -1$	$a > 1$
$\cos x < a$ $(\leqslant a)$ — решений нет	$\cos x < a$ $(\leqslant a) \Leftrightarrow x \in R$
$\cos x > a$ $(\geqslant a) \Leftrightarrow x \in R$	$\cos x > a$ $(\geqslant a)$ — решений нет

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

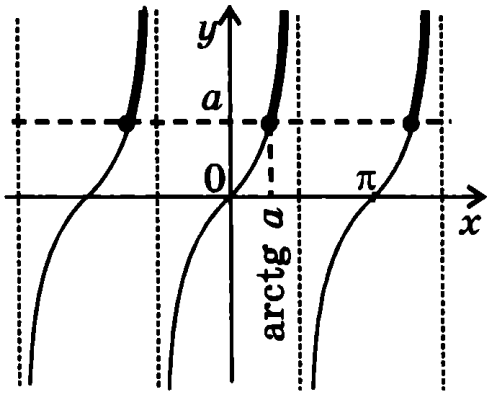
$\operatorname{tg} x > a;\ \operatorname{tg} x \geqslant a;\ \operatorname{tg} x < a;\ \operatorname{tg} x \leqslant a$

$\operatorname{tg} x > a$

$\operatorname{arctg} a + \pi n < x < \pi/2 + \pi n,$
$n \in Z$

$\operatorname{tg} x \geqslant a$

$\operatorname{arctg} a + \pi n \leqslant x < \pi/2 + \pi n,$
$n \in Z$

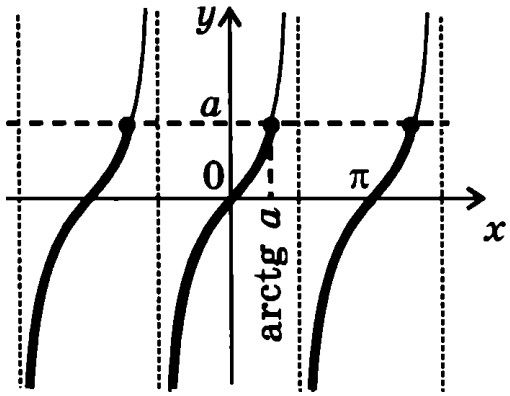


$\operatorname{tg} x < a$

$-\pi/2 + \pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n,$
$n \in Z$

$\operatorname{tg} x \leqslant a$

$-\pi/2 + \pi n < x \leqslant \operatorname{arctg} a + \pi n,$
$n \in Z$



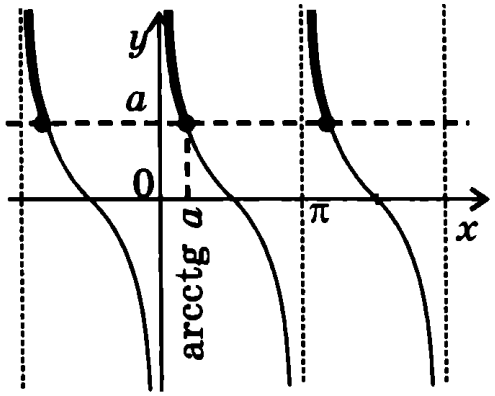
$\operatorname{ctg} x > a;\ \operatorname{ctg} x \geqslant a;\ \operatorname{ctg} x < a;\ \operatorname{ctg} x \leqslant a$

$\operatorname{ctg} x > a$

$\pi n < x < \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z$

$\operatorname{ctg} x \geqslant a$

$\pi n < x \leqslant \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z$

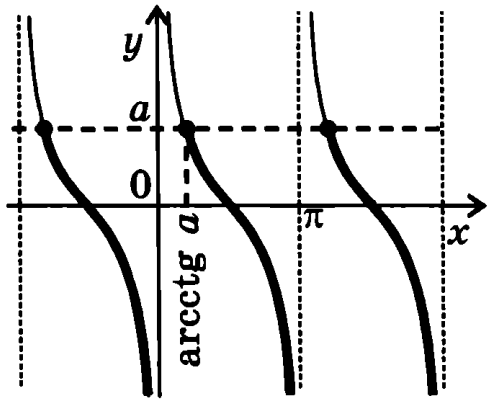


$\operatorname{ctg} x < a$

$\operatorname{arcctg} a + \pi n < x < \pi + \pi n,\ n \in Z$

$\operatorname{ctg} x \leqslant a$

$\operatorname{arcctg} a + \pi n \leqslant x < \pi + \pi n,\ n \in Z$



Замечание. Следует обратить внимание на область определения функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$: решения нестрогих неравенств *не всегда получаются* из решений соответствующих строгих неравенств просто заменой знаков $>$ и $<$ на знаки $\geqslant$ и $\leqslant$.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Общий вид:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y) \\ f_2(x, y) = g_2(x, y) \end{cases}$$

Решением системы двух уравнений с двумя неизвестными называется **пара** чисел $(x_0;\ y_0)$, при подстановке которых вместо соответствующих переменных x, y **оба** уравнения системы обращаются в верные числовые равенства.

Примеры:

1. $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$ Решение системы: (3; 1)

2. $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$ Решения системы: (−1; 1) и (2; 4)

Решить систему уравнений — значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.

Равносильными называются системы, множества решений которых совпадают.

В частности, равносильны все системы, не имеющие решений. Система, не имеющая решений, называется *несовместной*.

Пример несовместной системы:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x + 6y = 5 \end{cases}$$

Замечание. Наряду с системами уравнений часто рассматриваются *совокупности* уравнений. Решением совокупности является объединение решений всех уравнений совокупности.

Для обозначения совокупности уравнений используют квадратную скобку.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

МЕТОД ПОДСТАНОВКИ

Этапы решения	Примеры	
1. С помощью какого-либо из уравнений выразить одно неизвестное через другое.	$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$ из первого уравнения $y = 2x - 4$	$\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ из второго уравнения $y = 2 - x$
2. Подставить найденное выражение в другое уравнение системы: в результате получится одно уравнение с одним неизвестным.	$x + 3(2x - 4) = 9;$ $7x = 21$	$x^2 + x(2 - x) -$ $- (2 - x)^2 = 1;$ $x^2 - 6x + 5 = 0$
3. Найти корень (корни) этого уравнения, то есть найти значение (значения) одного из неизвестных системы.	$x = 3$	$x_1 = 1;$ $x_2 = 5$
4. Использовать найденное выражение одного неизвестного через другое (подстановку), то есть найти значение (соответствующие значения) второго неизвестного.	$y = 2x - 4 =$ $= 2 \cdot 3 - 4 = 2$	$y_1 = 2 - x_1 =$ $= 2 - 1 = 1;$ $y_2 = 2 - x_2 =$ $= 2 - 5 = -3$
5. Записать ответ.	(3; 2)	(1; 1), (5; −3)

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

МЕТОД СЛОЖЕНИЯ

Этапы решения	Примеры	
1. Сложить почленно уравнения системы, умножив предварительно каждое из уравнений на подходящее число так, чтобы в результате сложения получилось одно уравнение с одним неизвестным.	$\begin{cases} 4x + 5y = 19 \mid \times 4 \\ 7x - 4y = -5 \mid \times 5 \end{cases}$ $\begin{cases} 16x + 20y = 76 \\ 35x - 20y = -25 \end{cases}$ $51x = 51$	$\begin{cases} 2xy + x^2 = 2 \mid \times 3 \\ 3xy - 4x = 5 \mid \times(-2) \end{cases}$ $\begin{cases} 6xy + 3x^2 = 6 \\ -6xy + 8x = -10 \end{cases}$ $3x^2 + 8x = -4$
2. Найти корень (корни) этого уравнения, то есть найти значение (значения) одного из неизвестных системы.	$x = 1$	$x_1 = -2;$ $x_2 = -2/3$
3. Подставить найденное значение (значения) одного из неизвестных в любое из уравнений системы: в результате снова получится уравнение (уравнения) с одним неизвестным.	Подстановка в первое уравнение дает: $4 \cdot 1 + 5y = 19;$ $5y = 15$	Подстановка во второе уравнение дает: при $x = x_1 = -2$ $6y = 3;$ при $x = x_2 = -2/3$ $2y = -7/3$
4. Найти решение (решения) этого уравнения (этих уравнений), то есть найти значение (соответствующие значения) второго неизвестного.	$y = 3$	$y_1 = 1/2;$ $y_2 = -7/6$
5. Записать ответ.	$(1; 3)$	$(-2; 1/2),$ $(-2/3; -7/6)$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Надо построить графики обоих уравнений и найти координаты общих точек этих графиков — эти координаты являются решениями системы.

Примеры:

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^3 - y = 0 \end{cases}$

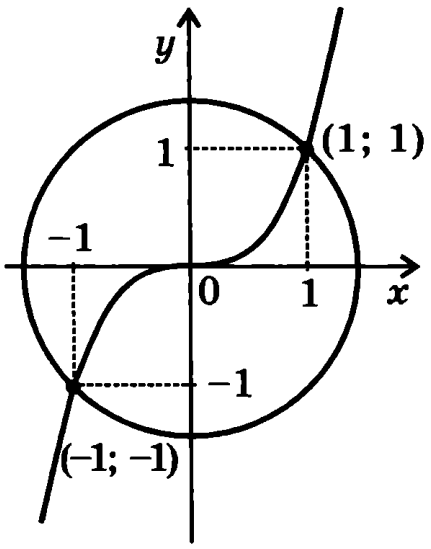


График первого уравнения — окружность радиуса $\sqrt{2}$ с центром в начале координат, график второго уравнения — кубическая парабола $y = x^3$. Эти два графика пересекаются в двух точках с координатами $(-1; -1)$ и $(1; 1)$.

2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$

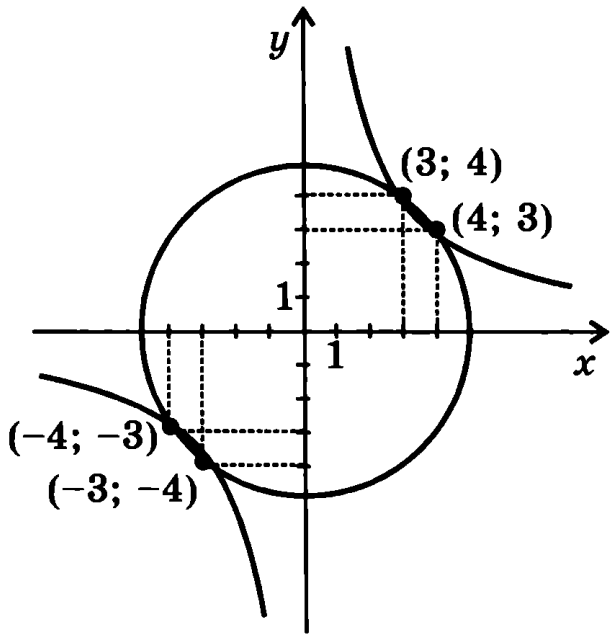


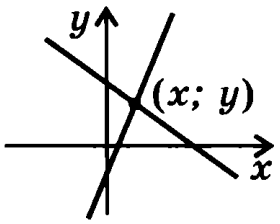
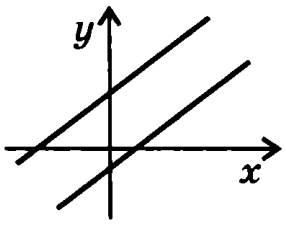
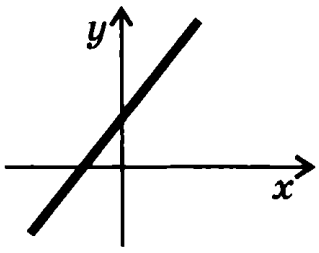
График первого уравнения — окружность радиуса 5 с центром в начале координат, график второго уравнения — гипербола $y = \frac{12}{x}$. Эти два графика пересекаются в четырех точках с координатами $(-4; -3)$, $(-3; -4)$, $(4; 3)$ и $(3; 4)$.

Замечание. Хотя графический метод не всегда позволяет найти точные решения системы уравнений, он помогает обнаружить решения, которые часто упускаются из виду при аналитическом решении (например, отрицательные значения неизвестных в приведенных примерах).

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ*)

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Возможные случаи	Графическая интерпретация
1. Коэффициенты при неизвестных в уравнениях не пропорциональны, т.е. $a_1b_2 \neq a_2b_1$. Система имеет единственное решение: $x = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$	Прямые — графики уравнений системы пересекаются в одной точке, координаты которой являются решением системы: 
2. Коэффициенты при неизвестных в уравнениях пропорциональны, т.е. $a_1b_2 = a_2b_1$, но они не пропорциональны свободным членам, т.е. $a_1c_2 \neq a_2c_1$ или $b_1c_2 \neq b_2c_1$. Система не имеет решений.	Прямые — графики уравнений системы параллельны: 
3. Коэффициенты при неизвестных и свободные члены в уравнениях пропорциональны, т.е. $a_1b_2 = a_2b_1$, $a_1c_2 = a_2c_1$, $b_1c_2 = b_2c_1$. Система имеет бесконечно много решений: решениями является любая пара $(x; y)$, удовлетворяющая одному (любому) уравнению системы.	Прямые — графики уравнений системы совпадают: 

*) Предполагается, что в каждом уравнении системы хотя бы один из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля, т.е. графиком каждого уравнения системы является прямая.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ*)

ПРОИЗВОДНАЯ

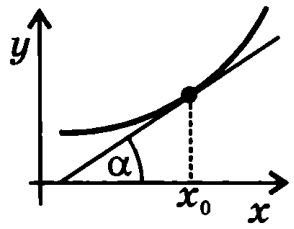
Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$, если этот предел существует:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

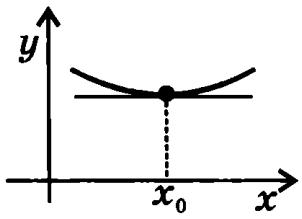
Пример: $(x^2)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

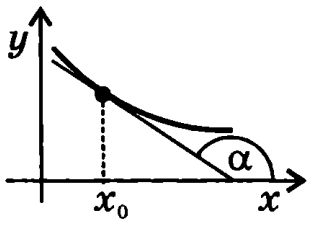
Производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке:



$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha > 0$



$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = 0$



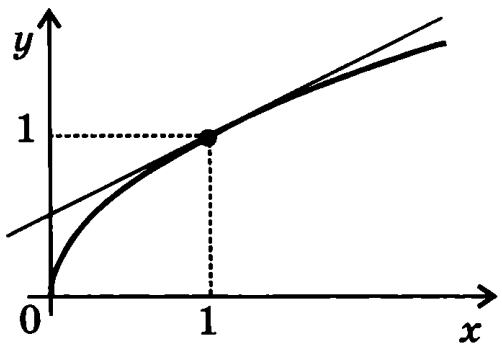
$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha < 0$

УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ

к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Пример. Нахождение уравнения касательной к графику функции $f(x) = \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 1$:



1. $f(x_0) = f(1) = 1$
2. $f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
3. $f'(x_0) = f'(1) = \dfrac{1}{2}$
4. $y = 1 + \dfrac{1}{2}(x - 1) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

*)Таблицу производных см. на стр. 188.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ВТОРАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

Второй производной функции $y = f(x)$ называется производная от производной $f'(x)$ (обозначается $f''(x)$).

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Если точка движется вдоль оси x и ее координата изменяется по закону $x(t)$, то мгновенная скорость точки:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t),$$

а ускорение:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) = x''(t).$$

Пример. При свободном падении $x(t) = \frac{gt^2}{2}$, $v(t) = x'(t) = gt$, $a(t) = v'(t) = g$.

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Если у функций $u(x)$ и $v(x)$ существуют производные, то

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(cu)' = cu'$, где c — const

$(uv)' = u'v + uv'$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Если $y = f(g(x))$ и существуют производные f'_g и g'_x, то

$$y'_x = f'_g \cdot g'_x,$$

где индексы g и x указывают, по какому аргументу вычисляются производные.

Примеры: **1.** $\left(\sqrt{\sin x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} \quad (\sin x > 0)$

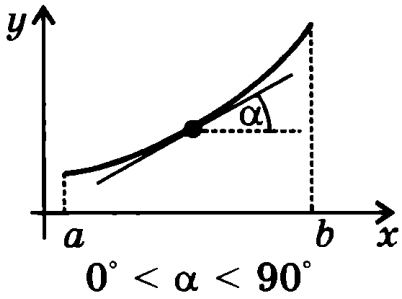
2. $(\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x \quad (\sin x > 0)$

3. $(x^x)' = \left(e^{x \ln x}\right)' = e^{x \ln x}(x \ln x)' = x^x(\ln x + 1) \quad (x > 0)$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

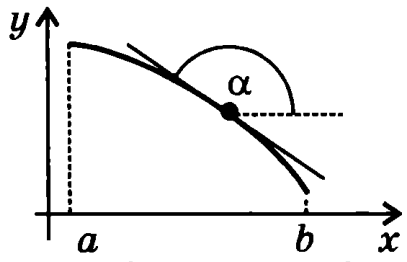
МОНОТОННОСТЬ



$0^\circ < \alpha < 90^\circ$

Достаточное условие возрастания функции

Если в каждой точке интервала $(a; b)$ $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ монотонно возрастает на этом интервале.



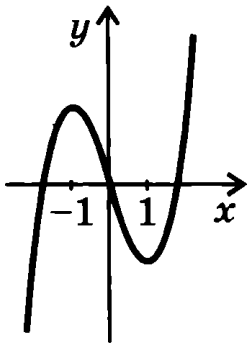
$90^\circ < \alpha < 180^\circ$

Достаточное условие убывания функции

Если в каждой точке интервала $(a; b)$ $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ монотонно убывает на этом интервале.

Замечание. Приведенные условия являются только *достаточными* условиями монотонности, но не являются необходимыми. Например, функция $y = x^3$ возрастает во всей области определения, хотя ее производная $y' = 3x^2$ обращается в нуль при $x = 0$.

Пример исследования функции на монотонность:

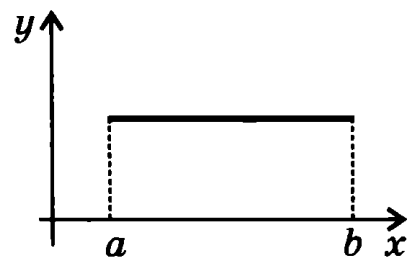


$y = x^3 - 3x$

$y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

$y' > 0$ при $x \in (-\infty; -1)$ и при $x \in (1; \infty)$, следовательно, при $x \in (-\infty; -1)$ и при $x \in (1; \infty)$ функция возрастает

$y' < 0$ при $x \in (-1; 1)$, следовательно, при $x \in (-1; 1)$ функция убывает



Необходимое и достаточное условие постоянства функции

Функция $f(x)$ постоянна на интервале $(a; b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ в каждой точке этого интервала.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ЭКСТРЕМУМЫ

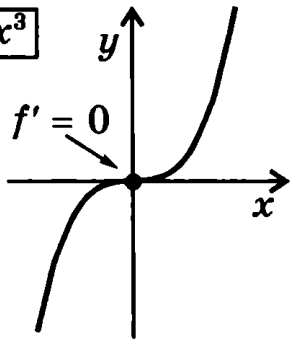
НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА

Если x_0 — точка экстремума функции $y = f(x)$, то эта точка является *критической* точкой данной функции, т.е. в этой точке производная либо равна нулю, либо она не существует.

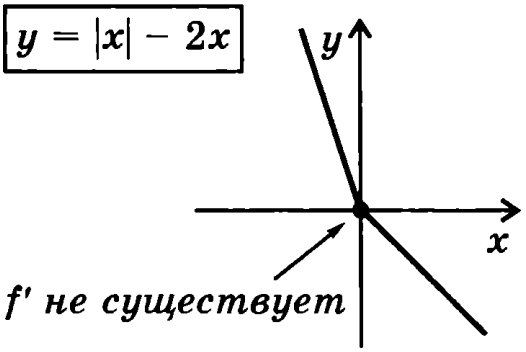
Замечание. Приведенное условие является только *необходимым* условием экстремума, но не является достаточным: критическая точка не обязательно является точкой экстремума.

Примеры отсутствия экстремума в критической точке $x = 0$:

$y = x^3$



$y = |x| - 2x$



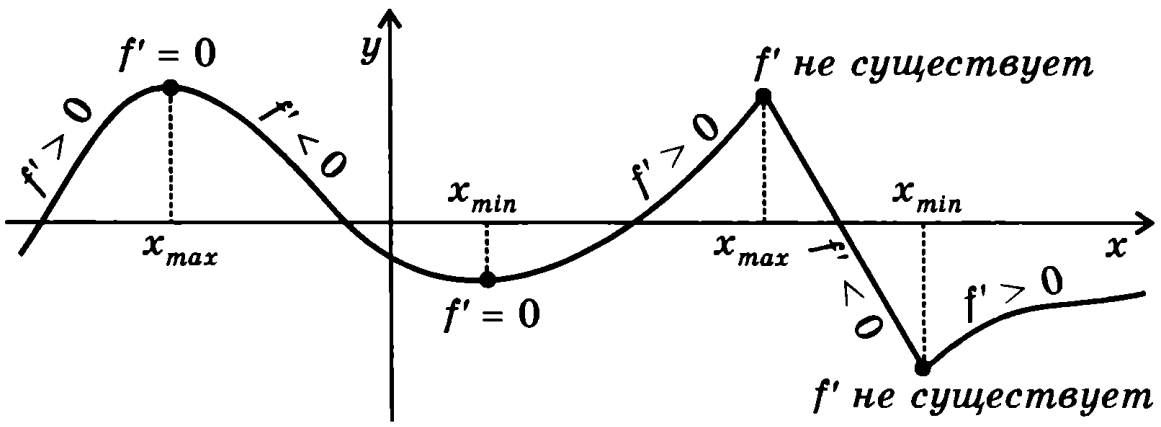
ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и производная $f'(x)$ меняет знак в этой точке, то x_0 — точка экстремума функции $y = f(x)$.

Если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$, $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то x_0 — точка максимума.	Если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$, $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то x_0 — точка минимума.

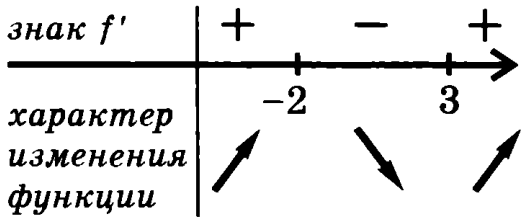
Замечание. В самой точке x_0 производной у функции $y = f(x)$ может не существовать.

Примеры экстремумов:



PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

СХЕМА ПРИМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ИНТЕРВАЛОВ МОНОТОННОСТИ И ЭКСТРЕМУМОВ

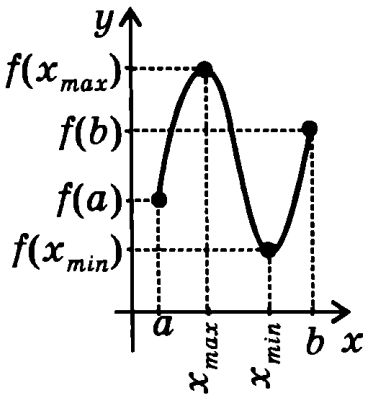
Этапы	**Пример** для функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$
1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.	Обл. определения: R Функция непрерывна во всей обл. определения
2. Найти производную $f'(x)$.	$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$
3. Найти критические точки, т.е. точки, в которых производная функции равна нулю или не существует.	$f'(x) = 0$ при $x = -2$, $x = 3$
4. В каждом из интервалов, на которые область определения разбивается критическими точками, определить знак производной и характер изменения функции (с помощью достаточных условий монотонности).	
5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.	$x = -2$ точка максимума; $x = 3$ точка минимума
6. Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.	$f(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; -2)$ и при $x \in (3; \infty)$; $f(x)$ убывает при $x \in (-2; 3)$; $x_{max} = -2$, $y_{max} = f(-2) = 49$; $x_{min} = 3$, $y_{min} = f(3) = -76$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ, НЕПРЕРЫВНОЙ НА ОТРЕЗКЕ

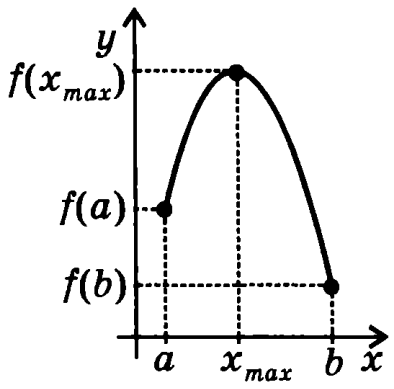
Функция, непрерывная на отрезке, достигает своего наибольшего и наименьшего значений на этом отрезке либо в критических точках, принадлежащих отрезку, либо на его концах.

Примеры:



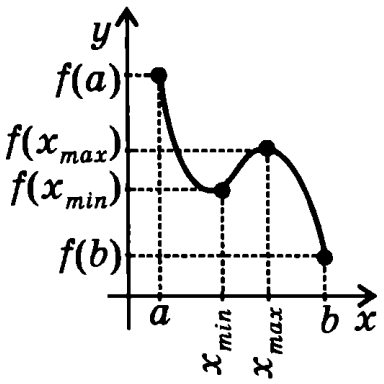
$\max\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(x_{max})$

$\min\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(x_{min})$



$\max\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(x_{max})$

$\min\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(b)$



$\max\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(a)$

$\min\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(b)$

СХЕМА НАХОЖДЕНИЯ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ, НЕПРЕРЫВНОЙ НА ОТРЕЗКЕ

Этапы	**Пример** для функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$ на отрезке $[0; 4]$
1. Найти производную $f'(x)$.	$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$
2. Найти на данном отрезке критические точки, т.е. точки, в которых $f'(x) = 0$ или не существует.	$f'(x) = 0$ при $x = -2$ и при $x = 3$. Отрезку $[0; 4]$ принадлежит только одна критическая точка: $x = 3$.
3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.	$f(0) = 5$; $f(3) = -76$; $f(4) = -59$
4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее и наибольшее.	$\max\limits_{[0;\,4]} f(x) = f(0) = 5$ $\min\limits_{[0;\,4]} f(x) = f(3) = -76$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ*)

ПЕРВООБРАЗНАЯ

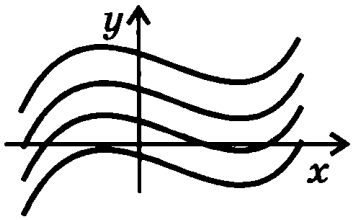
Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на данном промежутке, если для любого x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Пример. Первообразной для функции $f(x) = x$ на всей числовой оси является $F(x) = x^2/2$, поскольку $(x^2/2)' = x$.

ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ПЕРВООБРАЗНЫХ

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то и функция $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, также является первообразной функции $f(x)$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ



Графики всех первообразных данной функции $f(x)$ получаются из графика какой-либо одной первообразной параллельными переносами вдоль оси y.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Совокупность всех первообразных данной функции $f(x)$ называется ее **неопределенным интегралом** и обозначается $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$ где C — произвольная постоянная.

ПРАВИЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx, \text{ где } c \text{ — const}$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,\ a \neq 0$$

*)Таблицу интегралов см. на стр. 189.

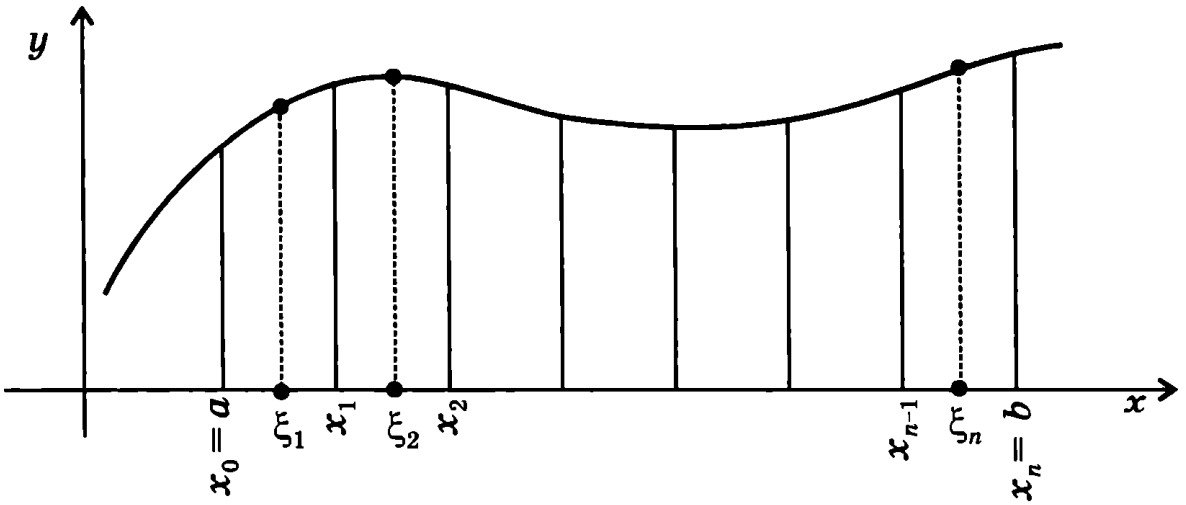
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется предел интегральной суммы $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x$ при $n \to \infty$,

где $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x\,,$$ где $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ (см. рисунок)



СВЯЗЬ МЕЖДУ ОПРЕДЕЛЕННЫМ ИНТЕГРАЛОМ И ПЕРВООБРАЗНОЙ (ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА)

Для непрерывной функции

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\,,$$

где $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b dx = b - a$$

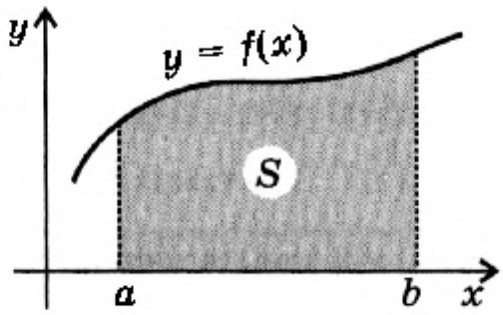
$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx\,,$$ где c — const

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

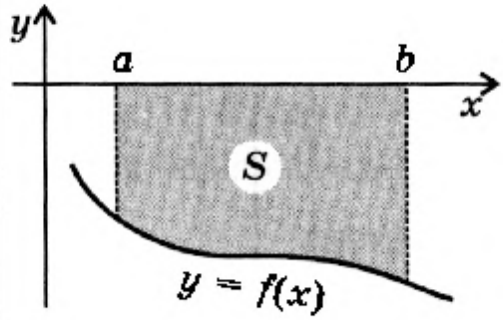
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА



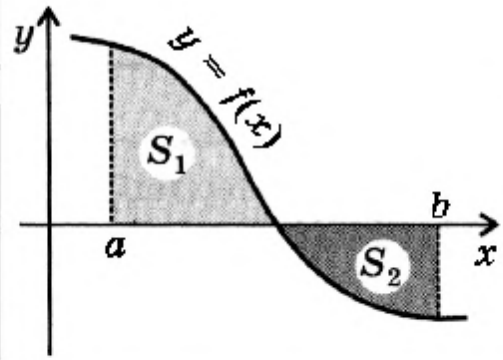
Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной положительной на промежутке $[a;\ b]$ функции $f(x)$, осью x и прямыми $x = a$ и $x = b$:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$



Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной отрицательной на промежутке $[a;\ b]$ функции $f(x)$, осью x и прямыми $x = a$ и $x = b$:

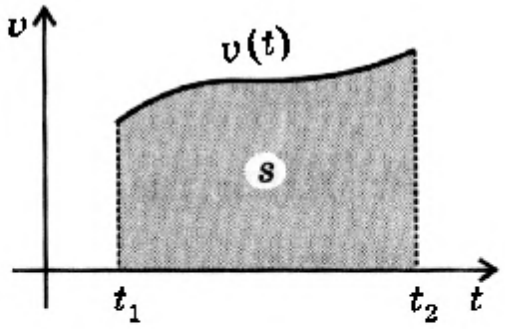
$$S = -\int_a^b f(x)dx$$



Замечание. Если функция изменяет знак на промежутке $[a;\ b]$, то

$$S_1 - S_2 = \int_a^b f(x)dx$$

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

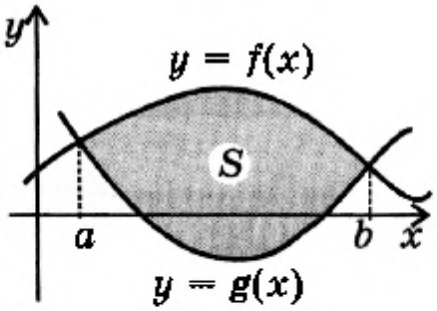


При прямолинейном движении перемещение s численно равно площади криволинейной трапеции под графиком зависимости скорости v от времени t:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt\ .$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

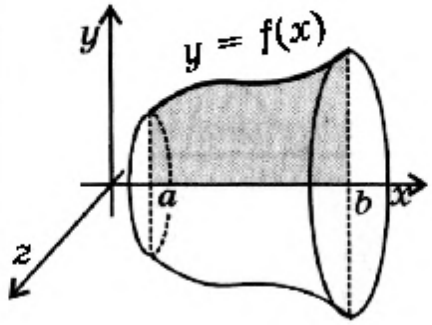
ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ И ОБЪЕМОВ С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА



ПЛОЩАДЬ ФИГУРЫ,

ограниченной графиками непрерывных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ таких, что $f(x) \geqslant g(x)$ для любого $x \in [a; b]$, где a и b — абсциссы точек пересечения графиков функций:

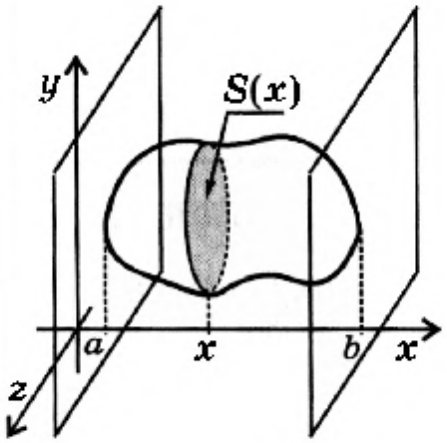
$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx .$$



ОБЪЕМ ТЕЛА,

полученного в результате вращения вокруг оси x криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx .$$



ОБЪЕМ ТЕЛА,

заключенного между двумя перпендикулярными к оси x плоскостями $x = a$ и $x = b$:

$$V = \int_a^b S(x)dx ,$$

где $S(x)$ — площадь сечения плоскостью, проходящей через точку $x \in [a; b]$ и перпендикулярной к оси x.

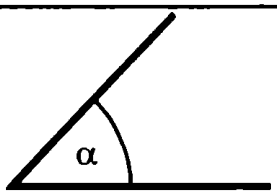
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ГЕОМЕТРИЯ

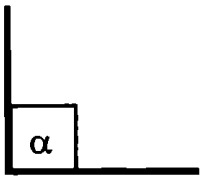
ПЛАНИМЕТРИЯ

ПРЯМЫЕ И УГЛЫ НА ПЛОСКОСТИ

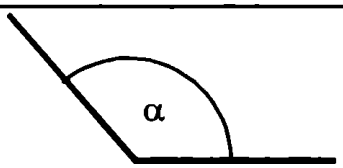
ВИДЫ УГЛОВ



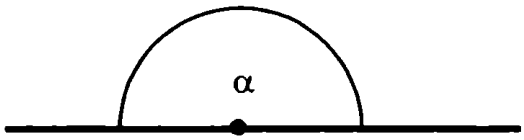
Острый угол
$0° < \alpha < 90°$.



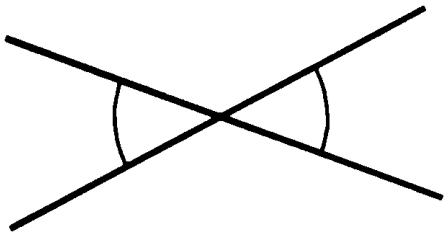
Прямой угол
$\alpha = 90°$.



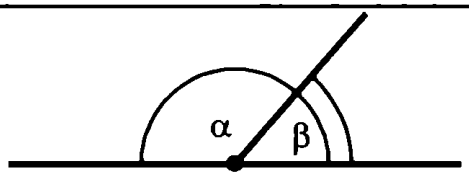
Тупой угол
$90° < \alpha < 180°$.



Развернутый угол
$\alpha = 180°$.

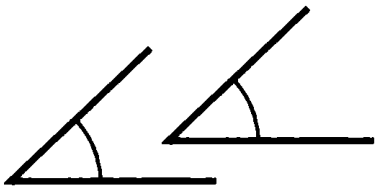


Вертикальные углы равны.

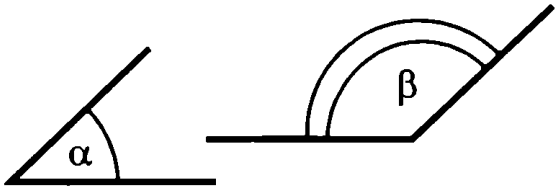


Смежные углы составляют в сумме 180°:
$\alpha + \beta = 180°$.

УГЛЫ С СООТВЕТСТВЕННО ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТОРОНАМИ

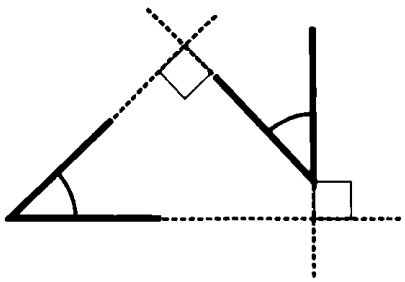


Либо равны,

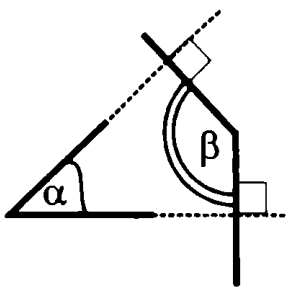


либо составляют в сумме 180°.

УГЛЫ С СООТВЕТСТВЕННО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ СТОРОНАМИ



Либо равны,



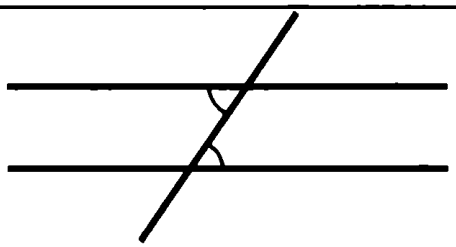
либо составляют в сумме 180°.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

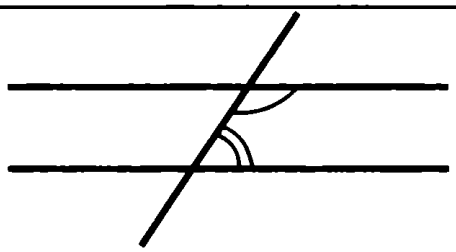
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

Так называются прямые, которые не пересекаются.

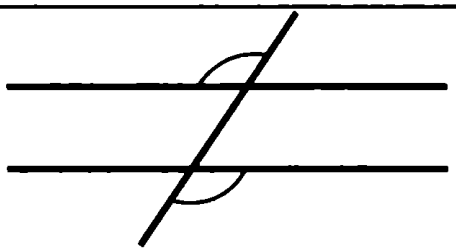
ПРИЗНАКИ И СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ



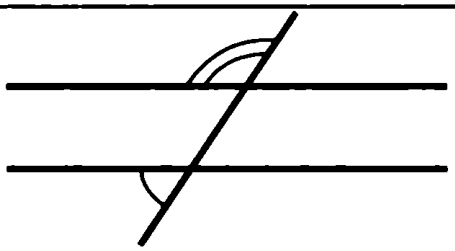
Внутренние накрест лежащие углы равны.



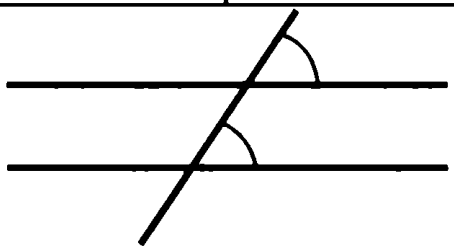
Сумма внутренних односторонних углов равна 180°.



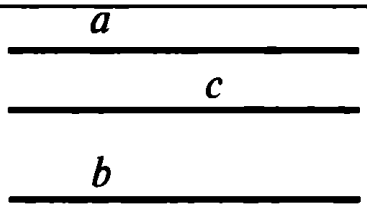
Внешние накрест лежащие углы равны.



Сумма внешних односторонних углов равна 180°.

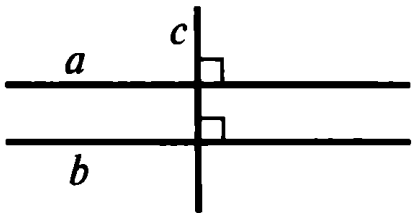


Соответственные углы равны.



Две прямые, параллельные третьей, параллельны:

$(a \parallel c,\ b \parallel c) \Rightarrow a \parallel b$.

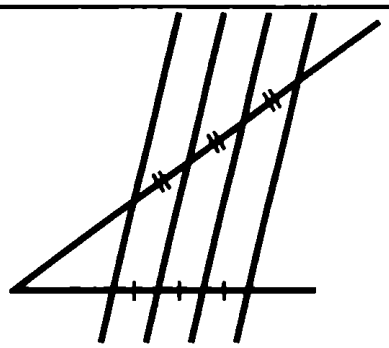


Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны:

$(a \perp c,\ b \perp c) \Rightarrow a \parallel b$.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

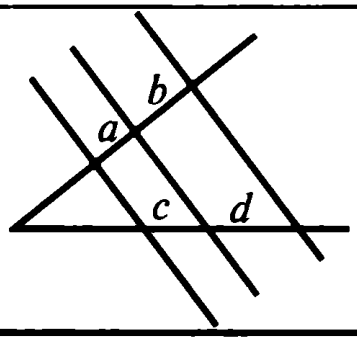
ПРИЗНАКИ И СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ (продолжение)



Теорема Фалеса

Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла,
отсекают на одной стороне угла равные отрезки,
то они отсекают равные отрезки
и на другой стороне угла.

Верно и обратное: если некоторые прямые, не пересекающиеся внутри угла, отсекают на одной стороне угла равные между собой отрезки и на другой стороне тоже равные между собой отрезки, то такие прямые параллельны.



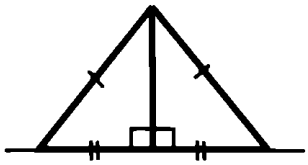
Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

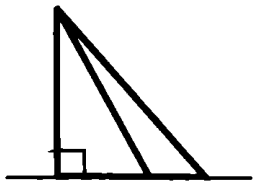
ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННЫЕ



Перпендикуляр короче любой наклонной, проведенной к прямой из той же точки.



У равных наклонных, проведенных из одной и той же точки, проекции равны. Верно и обратное: если проекции равны, то равны и наклонные.



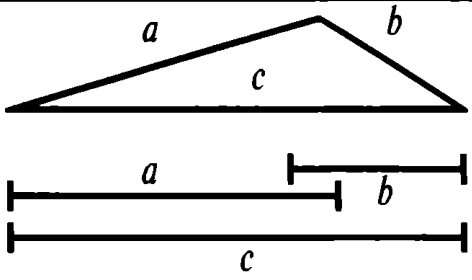
Из двух наклонных, проведенных из одной и той же точки, больше та, у которой проекция больше. Верно и обратное.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ТРЕУГОЛЬНИКИ

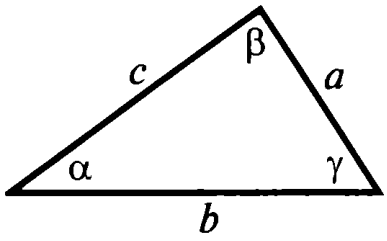
ПРОИЗВОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ

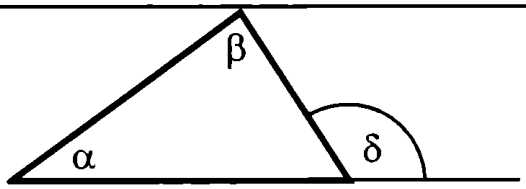


Неравенство треугольника
Любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон, но больше модуля их разности:

$$|a - b| < c < a + b\,.$$

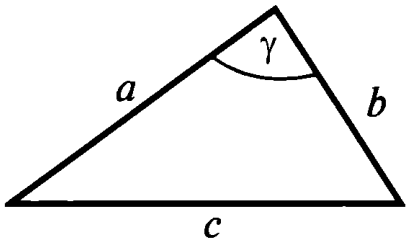


Сумма углов треугольника равна 180°: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
Против большей стороны в треугольнике лежит больший угол: $b > a \Leftrightarrow \beta > \alpha$



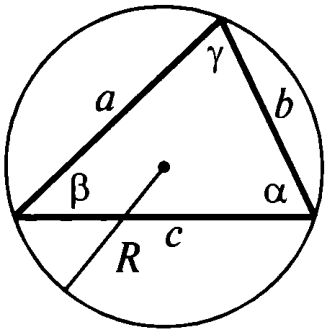
Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним:

$$\delta = \alpha + \beta.$$



Теорема косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$



Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Это отношение равно $2R$, где R – радиус описанной окружности.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ



По двум сторонам и углу между ними.

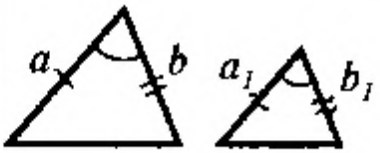


По одной стороне и двум прилежащим к ней углам.



По трем сторонам.

ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

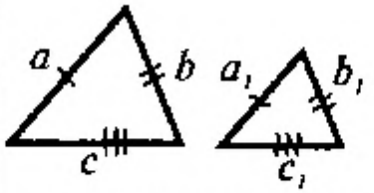


По двум пропорциональным сторонам и углу между ними:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}.$$



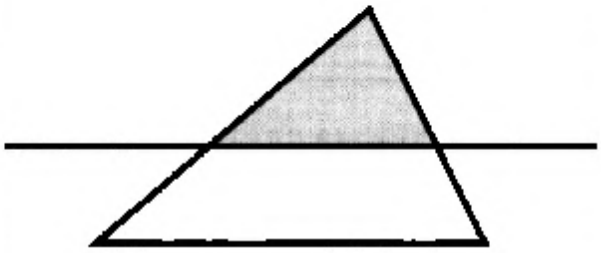
По двум равным углам.



По трем пропорциональным сторонам:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

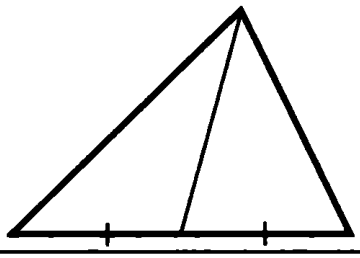
СВОЙСТВО ПРЯМОЙ, ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТОРОНЕ ТРЕУГОЛЬНИКА



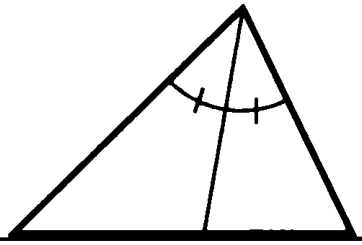
Прямая, параллельная одной из сторон треугольника и пересекающая две другие стороны треугольника, отсекает треугольник, подобный данному.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

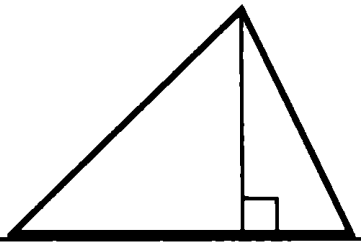
ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ЛИНИИ ТРЕУГОЛЬНИКА



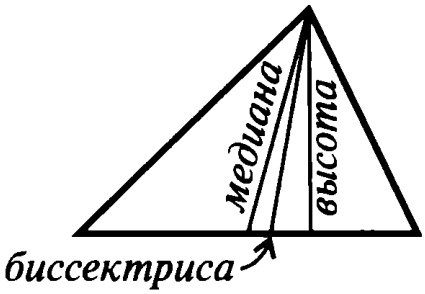
Медиана – отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.



Биссектриса – отрезок, который соединяет вершину треугольника с точкой на противолежащей стороне и делит внутренний угол пополам.



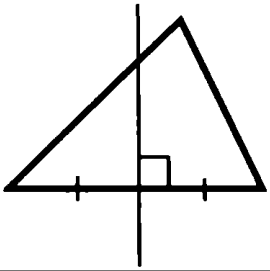
Высота – перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противолежащую сторону треугольника.



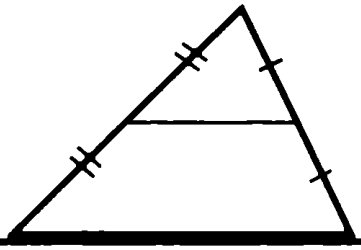
Взаимное расположение медианы, биссектрисы и высоты

Биссектриса лежит внутри угла, образованного высотой и медианой, проведенными из той же вершины.

В равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные к основанию, совпадают.



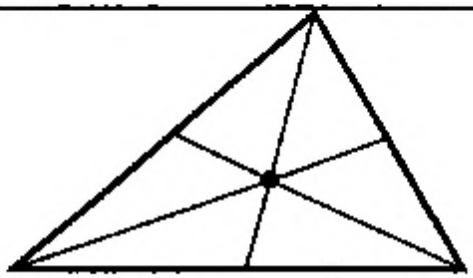
Серединный перпендикуляр – прямая, перпендикулярная стороне треугольника и делящая ее пополам.



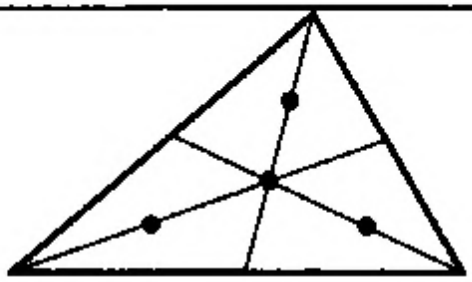
Средняя линия – отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

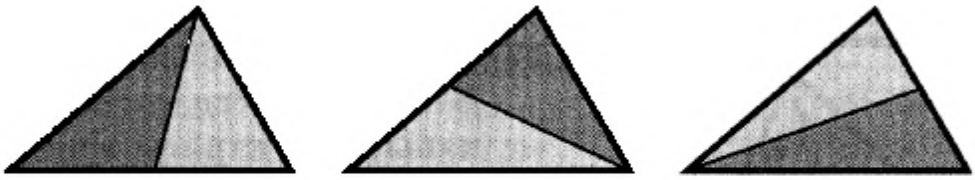
СВОЙСТВА МЕДИАН



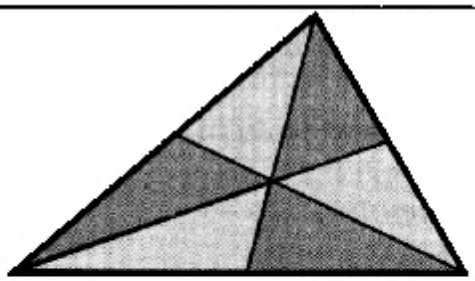
Три медианы пересекаются *в одной точке*, **которая всегда находится** *внутри* **треугольника** (центр масс треугольника).



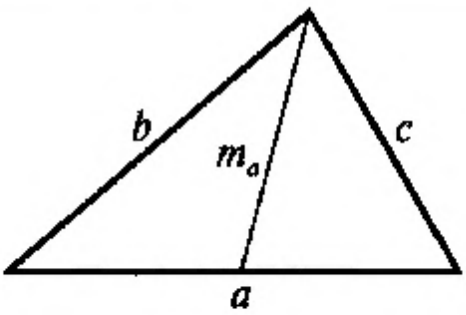
Каждая медиана точкой пересечения медиан делится в отношении 2 : 1, считая от вершины.



Каждая медиана делит треугольник на 2 равновеликих треугольника (одинаковой площади).



Три медианы делят треугольник на 6 равновеликих треугольников.

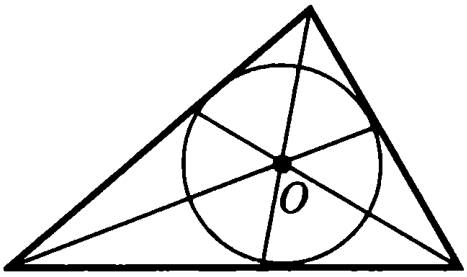


Длина медианы

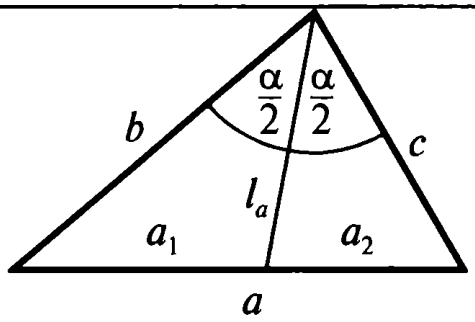
$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

СВОЙСТВА БИССЕКТРИС

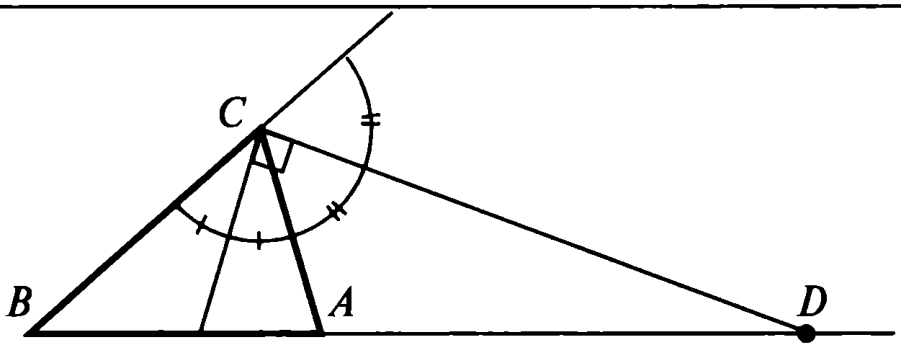


Три биссектрисы пересекаются *в одной точке*, которая всегда лежит *внутри* треугольника. Эта точка является *центром вписанной окружности*.



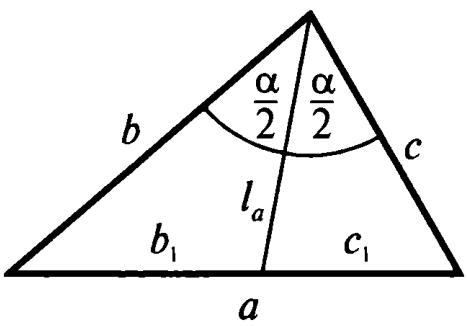
Биссектриса делит сторону треугольника на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b}{c}.$$



Биссектрисы внутреннего и внешнего углов *перпендикулярны*.

Если биссектриса внешнего угла треугольника пересекает продолжение противолежащей стороны, то $\frac{BD}{AD} = \frac{BC}{AC}$.



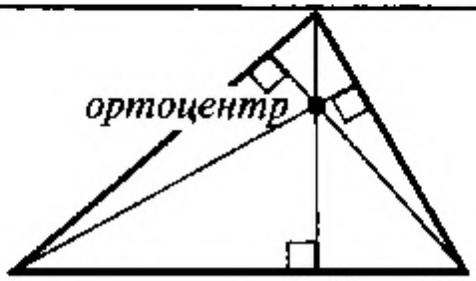
Длина биссектрисы

$$l_a = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$$

$$l_a^2 = bc - b_1c_1$$

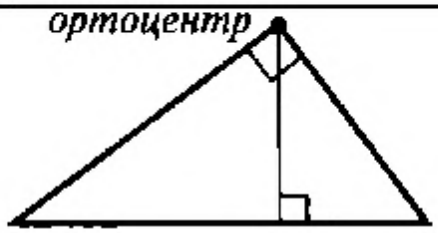
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

СВОЙСТВА ВЫСОТ

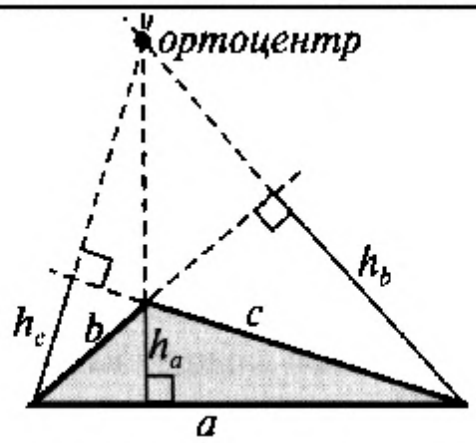


Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются *в одной точке*. Эта точка называется *ортоцентром*.

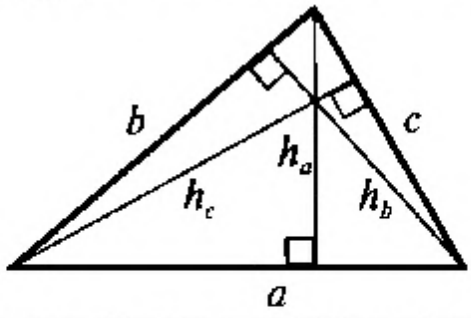
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри треугольника.



Ортоцентр прямоугольного треугольника совпадает с вершиной прямого угла.

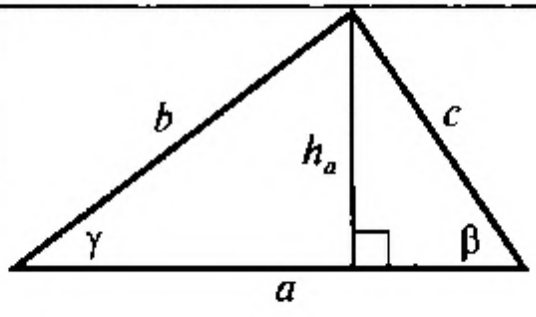


Ортоцентр тупоугольного треугольника лежит вне треугольника (на рисунке треугольник выделен серым цветом, а продолжения высот и сторон, образующих тупой угол, проведены пунктиром).



Высоты треугольника обратно пропорциональны его сторонам:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$



Длина высоты

$$h_a = b\sin\gamma = c\sin\beta;$$

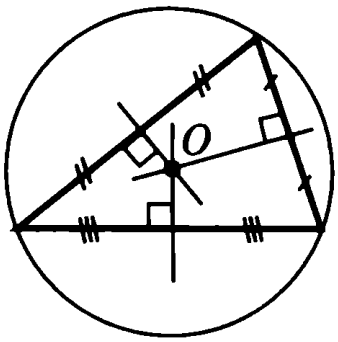
$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a},$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

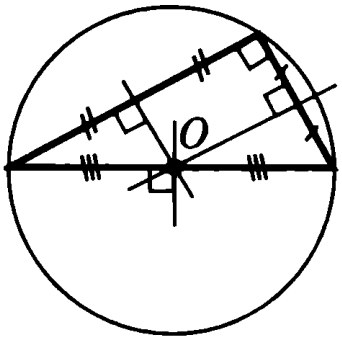
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

СВОЙСТВА СЕРЕДИННЫХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРОВ

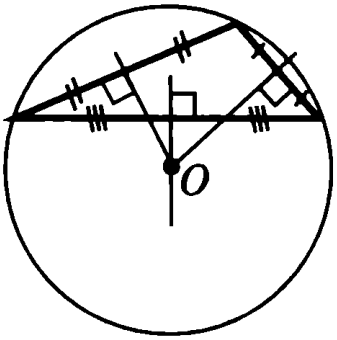
Три серединных перпендикуляра пересекаются *в одной точке*. Эта точка является *центром описанной окружности*.



В случае *остроугольного* треугольника точка пересечения серединных перпендикуляров (центр описанной окружности) лежит *внутри* треугольника.

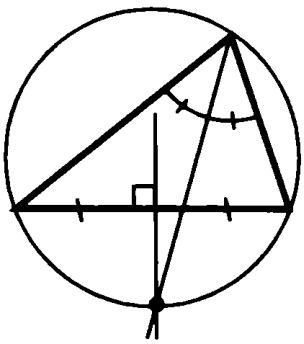


В случае *прямоугольного* треугольника точка пересечения серединных перпендикуляров (центр описанной окружности) *совпадает с серединой гипотенузы*.



В случае *тупоугольного* треугольника точка пересечения серединных перпендикуляров (центр описанной окружности) лежит *вне треугольника*.

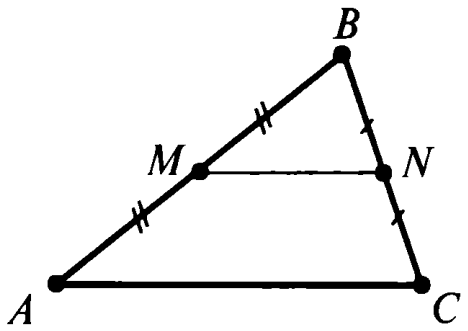
СВОЙСТВО СЕРЕДИННОГО ПЕРПЕНДИКУЛЯРА И БИССЕКТРИСЫ



Продолжение биссектрисы пересекается с серединным перпендикуляром в точке, лежащей на окружности, описанной около треугольника.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

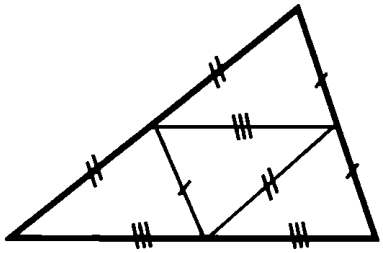
СВОЙСТВА СРЕДНЕЙ ЛИНИИ



Средняя линия параллельна одной из сторон треугольника и равна ее половине:

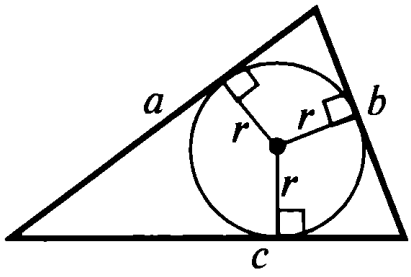
$$MN \parallel AC; \quad MN = \frac{1}{2} AC.$$

Она отсекает треугольник, подобный данному, с коэффициентом подобия 1/2.



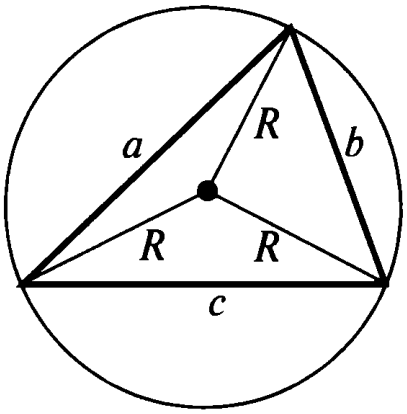
Три средние линии треугольника делят его на 4 равных треугольника, подобных данному, с коэффициентом подобия 1/2.

ВПИСАННАЯ И ОПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТИ



В любой треугольник можно *вписать окружность*.
Центр вписанной окружности — точка пересечения биссектрис.
Радиус вписанной окружности $r = S/p$, где S — площадь треугольника,

$$p = \frac{a + b + c}{2}.$$



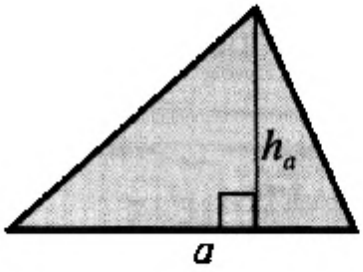
Около любого треугольника можно *описать окружность*.
Центр описанной окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров.
Радиус описанной окружности

$$R = \frac{abc}{4S},$$

где S – площадь треугольника.

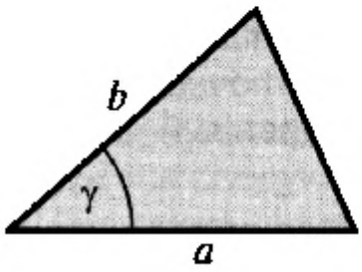
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА



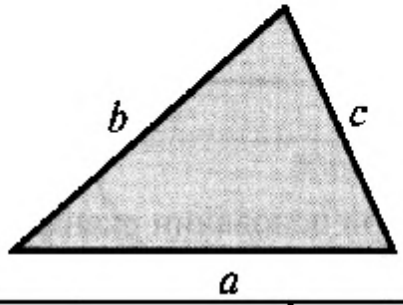
Через сторону и высоту, проведенную к ней:

$$S = \frac{1}{2} a h_a .$$



Через две стороны и угол между ними:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma .$$

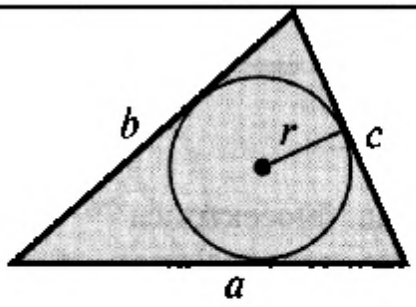


Формула Герона

Через три стороны:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} ,$$

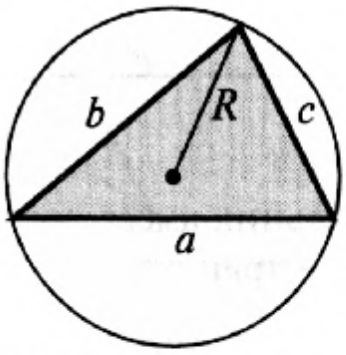
где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.



Через полупериметр и радиус вписанной окружности:

$$S = pr,$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.



Через произведение сторон и радиус описанной окружности:

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Так называется треугольник, у которого две стороны равны.

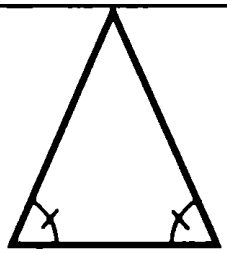
Равные стороны называются боковыми сторонами, а третья сторона — основанием.

СВОЙСТВА И ПРИЗНАКИ РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

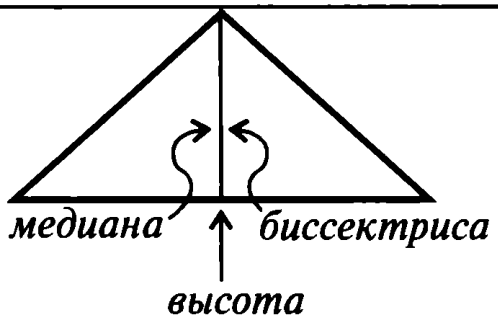
Приведенные ниже утверждения являются как свойствами, так и признаками равнобедренного треугольника, то есть являются *необходимыми и достаточными* условиями того, что треугольник — равнобедренный. Это означает:

1. Если треугольник — равнобедренный, то для него справедливы *все* следующие утверждения.

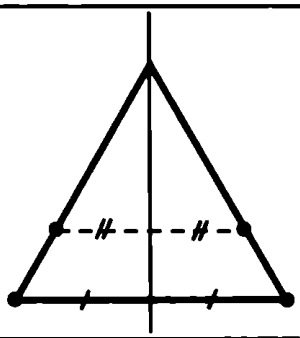
2. Если для треугольника справедливо *хотя бы одно* из следующих утверждений, то он — равнобедренный.



Углы при основании равны.



Медиана, биссектриса и высота, проведенные к основанию, совпадают.



Треугольник имеет ось симметрии.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Так называется треугольник, у которого три стороны равны.

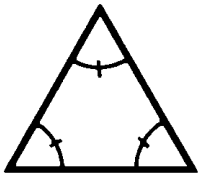
Равносторонний треугольник называется также *правильным* треугольником.

СВОЙСТВА И ПРИЗНАКИ РАВНОСТОРОННЕГО ТРЕУГОЛЬНИКА

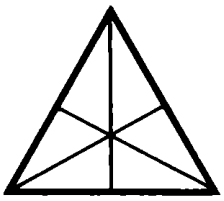
Приведенные ниже утверждения являются как свойствами, так и признаками равностороннего треугольника, то есть являются *необходимыми и достаточными* условиями того, что треугольник — равносторонний. Это означает:

1. Если треугольник — равносторонний, то для него справедливы *все* следующие утверждения.

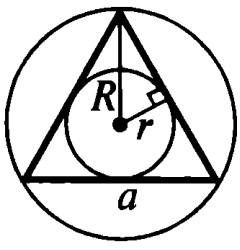
2. Если для треугольника справедливо *хотя бы одно* из следующих утверждений, то он — равносторонний.



Все углы равны.

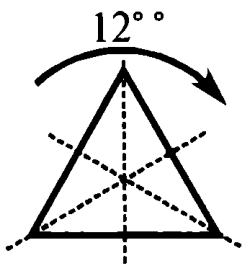


Каждая медиана совпадает с биссектрисой и высотой, проведенными из той же вершины.



Центры вписанной и описанной окружностей совпадают.

(Их радиусы: $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$; $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$; $R = 2r$.)



Треугольник обладает *поворотной* симметрией: он не изменяется при повороте на 120°.

Треугольник имеет три оси симметрии.

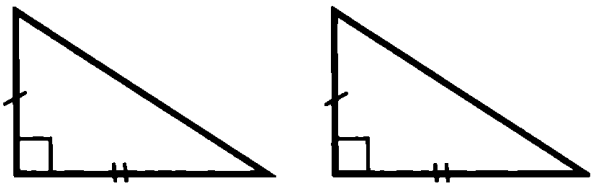
ВЫСОТА И ПЛОЩАДЬ: $h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$; $S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = 3\sqrt{3}r^2 = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

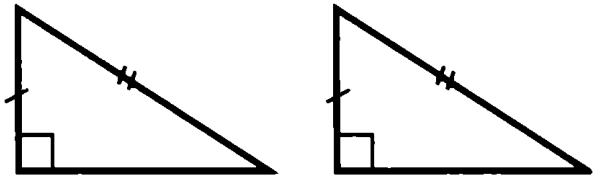
ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Так называется треугольник, у которого один угол прямой. Стороны, прилежащие к прямому углу, называются катетами, а сторона, противолежащая прямому углу — гипотенузой.

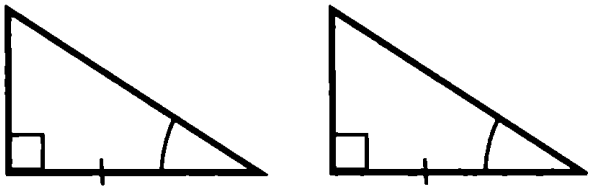
ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



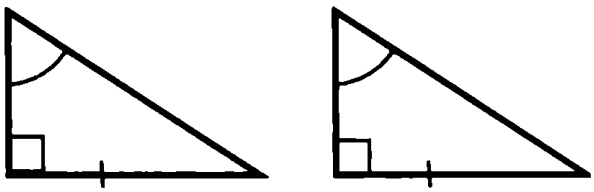
По двум катетам.



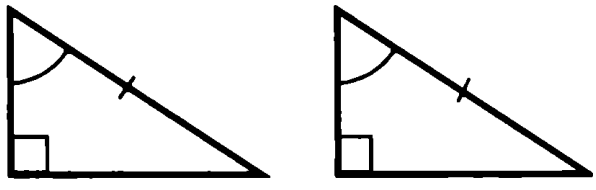
По одному катету и гипотенузе.



По катету и прилежащему острому углу.



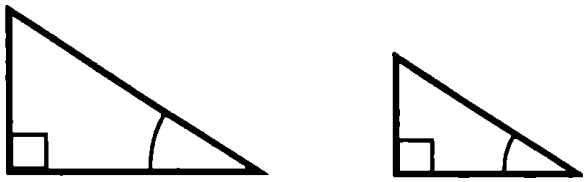
По катету и противолежащему острому углу.



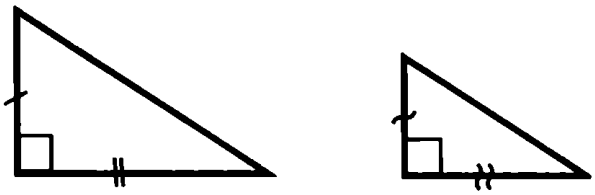
По гипотенузе и острому углу.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

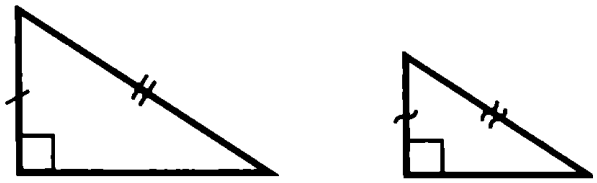
ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



По одному острому углу.

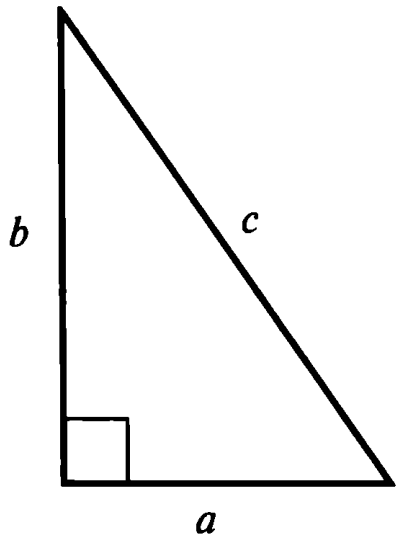


По пропорциональности двух катетов.



По пропорциональности катета и гипотенузы.

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА



Сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

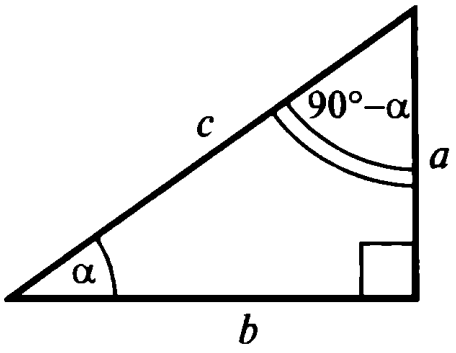
Справедливо и *обратное* утверждение: если для сторон a, b, c треугольника выполняется соотношение

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

то треугольник является прямоугольным, причем стороны a и b — его катеты, а сторона c — гипотенуза.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ



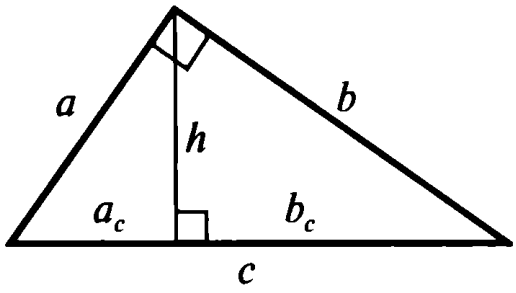
$$\frac{a}{c} = \sin\alpha = \cos(9^\circ{}^\circ - \alpha)$$

$$\frac{b}{c} = \cos\alpha = \sin(9^\circ{}^\circ - \alpha)$$

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}(9^\circ{}^\circ - \alpha)$$

$$\frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(9^\circ{}^\circ - \alpha)$$

СВОЙСТВА ПРОЕКЦИЙ КАТЕТОВ



Каждый катет является средним пропорциональным между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу:

$$\frac{a_c}{a} = \frac{a}{c} \ \ldots\Rightarrow a^2 = a_c c$$

$$\frac{b_c}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow b^2 = b_c c\,.$$

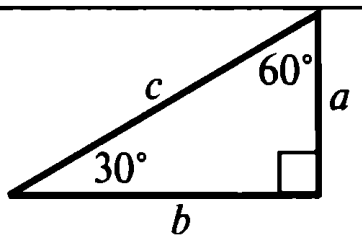
Высота, опущенная на гипотенузу, является средним пропорциональным между проекциями катетов на гипотенузу:

$$\frac{a_c}{h} = \frac{h}{b_c} \Rightarrow h^2 = a_c b_c\,.$$

Высота выражается через стороны и проекции катетов:

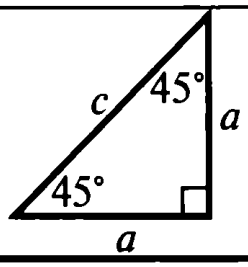
$$h = \frac{ab}{c} = \frac{ab}{a_c + b_c}.$$

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



$$a = \frac{c}{2}$$

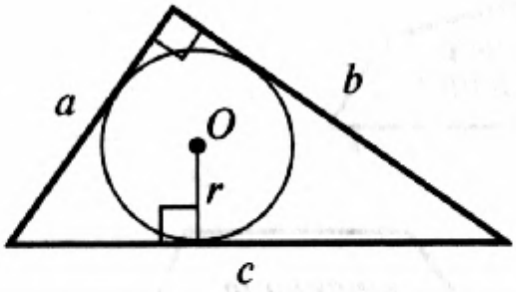
$$b = \frac{\sqrt{3}c}{2}$$



$$a = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

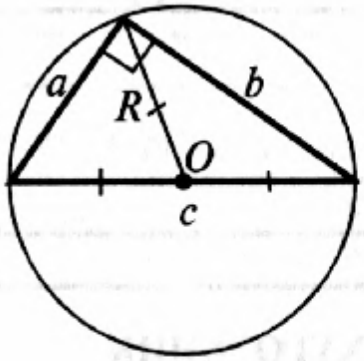


Радиус вписанной окружности:

$$r = \frac{ab}{a+b+c},$$

$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

ОКРУЖНОСТЬ, ОПИСАННАЯ ОКОЛО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА



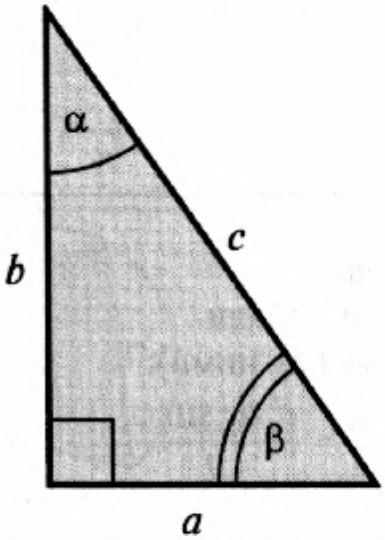
Центр описанной окружности совпадает с серединой гипотенузы, а радиус равен

— половине гипотенузы:

$$R = \frac{c}{2}$$

— медиане, проведенной к гипотенузе: $R = m_c$.

ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА



Через катеты: $S = \frac{1}{2}ab$.

Через катет и острый угол:

$$S = \frac{1}{2}a^2\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}a^2\operatorname{ctg}\alpha.$$

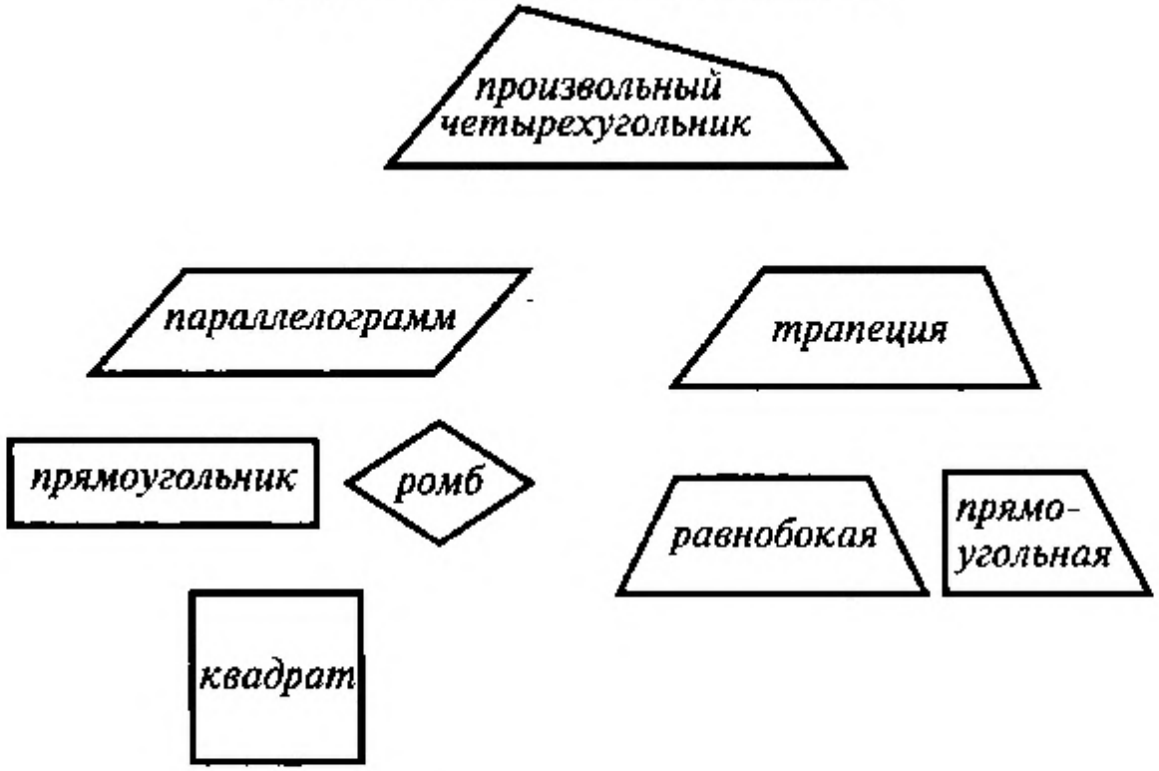
Через гипотенузу и любой из острых углов:

$$S = \frac{1}{4}c^2\sin 2\alpha = \frac{1}{4}c^2\sin 2\beta.$$

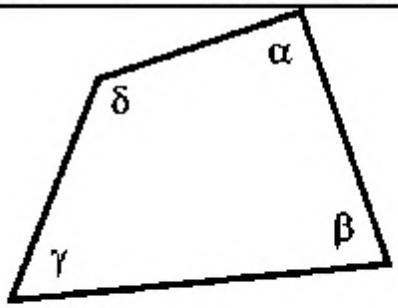
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

ВИДЫ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ

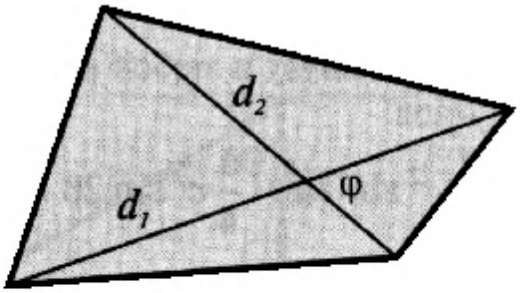


ПРОИЗВОЛЬНЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК



Сумма внутренних углов равна 360°:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°.$$

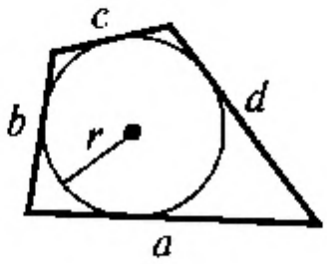


Площадь (через диагонали и угол между ними):

$$S = \frac{d_1 d_2 \sin\varphi}{2}.$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК, ОПИСАННЫЙ ОКОЛО ОКРУЖНОСТИ



Четырехугольник можно описать около окружности, если суммы противолежащих сторон равны:

$$a + c = b + d.$$

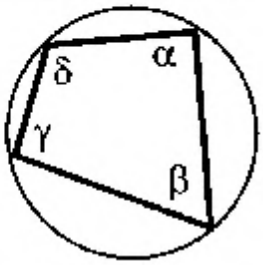
Если четырехугольник описан около окружности, то суммы противолежащих сторон равны.

Площадь: $S = pr$, где $p = \dfrac{a + b + c + d}{2}$ (полупериметр),

r — радиус вписанной окружности.

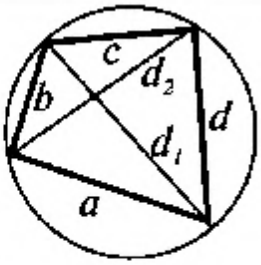
Формула $S = pr$ справедлива для *любого* многоугольника, описанного около окружности.

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК, ВПИСАННЫЙ В ОКРУЖНОСТЬ



Четырехугольник можно вписать в окружность, если сумма противолежащих углов равна 180°: $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$.

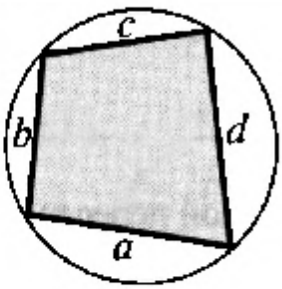
Если четырехугольник вписан в окружность, то суммы противолежащих углов равны 180°.



Теорема Птолемея

Сумма произведений противолежащих сторон равна произведению диагоналей:

$$ac + bd = d_1 d_2.$$



Площадь

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где $p = \dfrac{a + b + c + d}{2}$ (полупериметр).

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

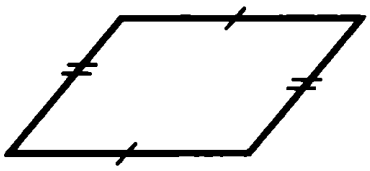
Так называется четырехугольник,
у которого противолежащие стороны параллельны.

СВОЙСТВА И ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

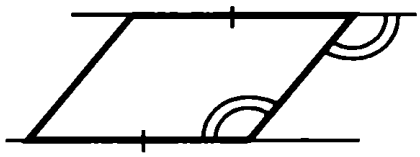
Приведенные ниже утверждения являются как свойствами,
так и признаками параллелограмма, то есть являются *необходимыми и достаточными* условиями того,
что четырехугольник — параллелограмм. Это означает:

1. Если четырехугольник — параллелограмм, то для него справедливы *все* следующие утверждения.

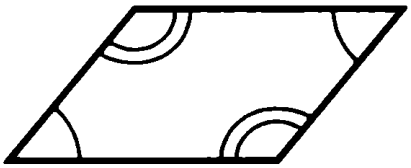
2. Если для четырехугольника справедливо *хотя бы одно* из следующих утверждений, то он — параллелограмм.



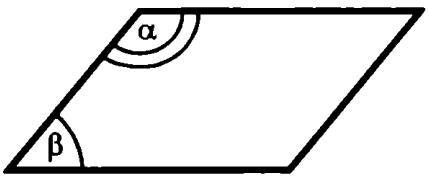
Противолежащие стороны попарно равны.



Противолежащие стороны равны и параллельны.

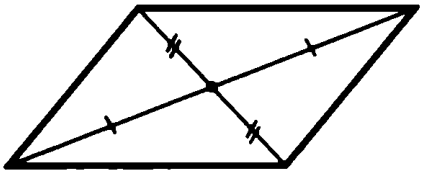


Противолежащие углы попарно равны.



Сумма углов, прилежащих к любой стороне, равна 180°:

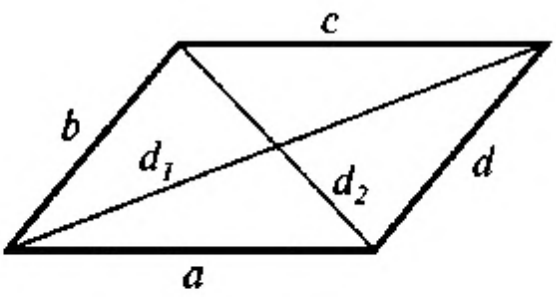
$$\alpha + \beta = 180°.$$



Диагонали точкой пересечения делятся пополам.

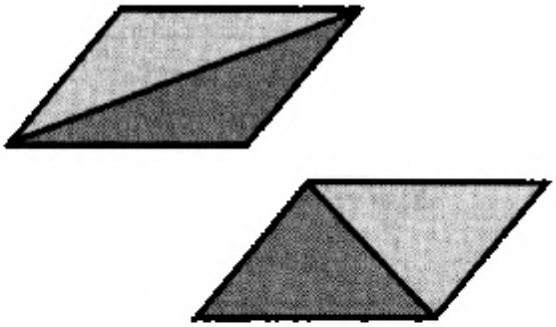
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

СВОЙСТВА И ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА
(продолжение)

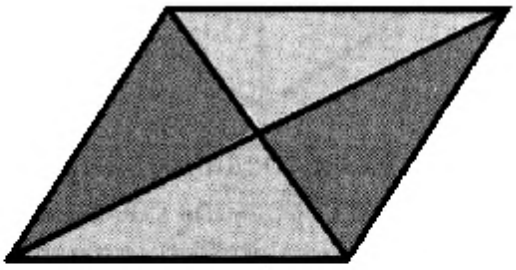


Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон:

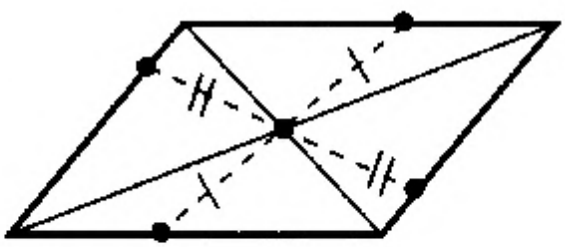
$$d_1^2 + d_2^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$



Каждая диагональ делит четырехугольник на два равных треугольника.



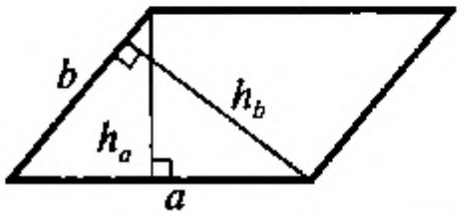
Обе диагонали делят четырехугольник на четыре *равновеликих* треугольника (одинаковой площади).



Точка пересечения диагоналей является центром симметрии.

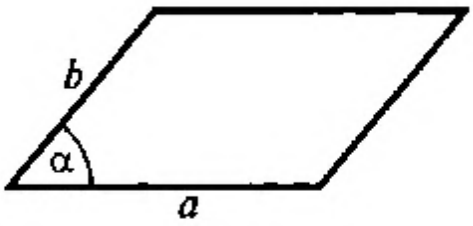
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА



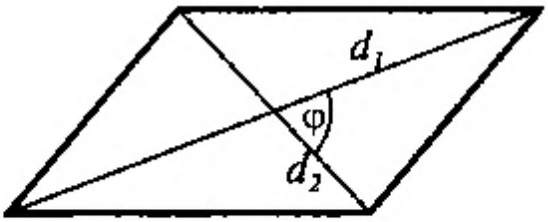
Через сторону
и опущенную на нее высоту:

$$S = ah_a = bh_b .$$



Через две прилежащие стороны
и угол между ними:

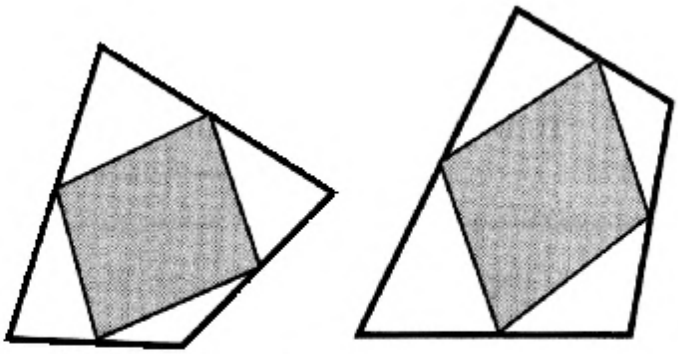
$$S = ab \sin\alpha .$$

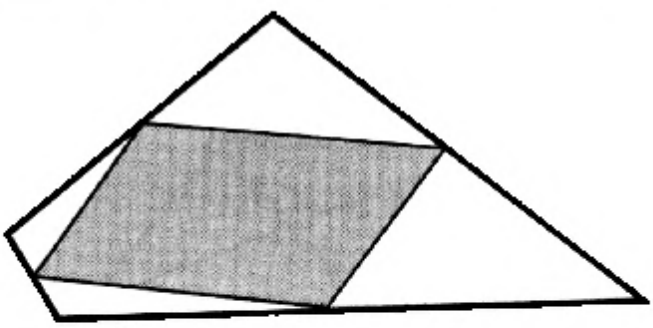


Через диагонали
и угол между ними:

$$S = \frac{d_1 d_2 \sin\varphi}{2} .$$

СВОЙСТВО ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА, СВЯЗАННОЕ С ПАРАЛЛЕЛОГРАММОМ





Если соединить отрезками середины соседних сторон любого четырехугольника, получится параллелограмм.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

РОМБ

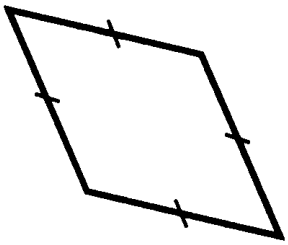
Так называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

СВОЙСТВА И ПРИЗНАКИ РОМБА

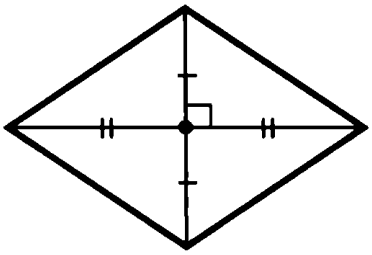
Приведенные ниже утверждения являются как свойствами,
так и признаками ромба, то есть являются *необходимыми и достаточными* условиями того, что четырехугольник — ромб. Это означает:

1. Если четырехугольник — ромб, то для него справедливы *все* следующие утверждения.

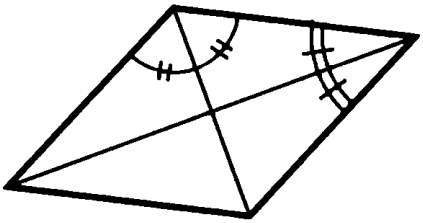
2. Если для четырехугольника справедливо *хотя бы одно* из следующих утверждений, то он — ромб.



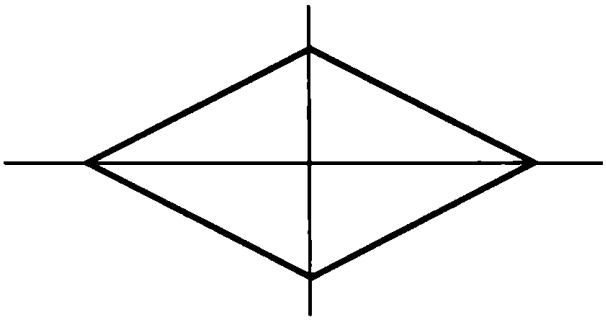
Все стороны равны.



Диагонали перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам.



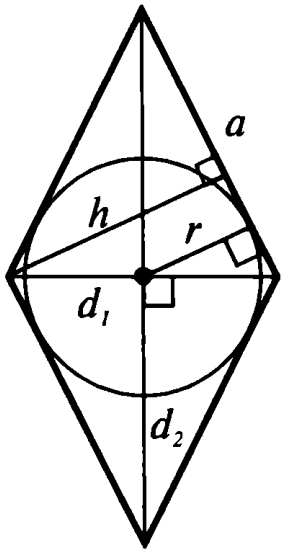
Обе диагонали являются биссектрисами внутренних углов.



Прямые, содержащие диагонали, являются осями симметрии.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В РОМБ



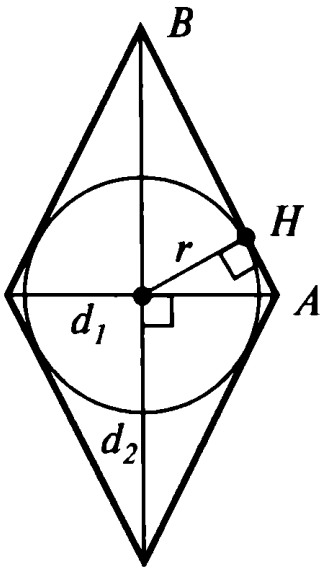
В любой ромб можно вписать окружность. Радиус r вписанной окружности удовлетворяет соотношениям:

$$r = \frac{h}{2},$$

где h — высота ромба,

$$r = \frac{d_1 d_2}{4a},$$

где d_1 и d_2 — диагонали ромба,
a — его сторона.



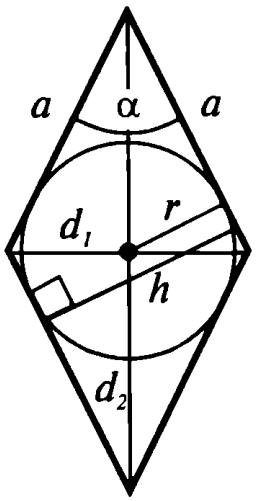
Точка касания вписанной окружности делит сторону ромба на отрезки, связанные с его диагоналями
и радиусом вписанной окружности следующими соотношениями:

$$d_1 = 2\sqrt{AH \cdot AB},$$

$$d_2 = 2\sqrt{BH \cdot AB},$$

$$r = \sqrt{AH \cdot HB}.$$

ПЛОЩАДЬ РОМБА



Через сторону и высоту: $S = ah$.

Через сторону
и радиус вписанной окружности:
$S = 2ar$.

Через сторону и угол ромба:
$S = a^2 \sin\alpha$.

Через диагонали: $S = \frac{d_1 d_2}{2}$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПРЯМОУГОЛЬНИК

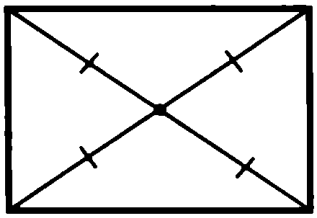
Так называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

СВОЙСТВА И ПРИЗНАКИ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

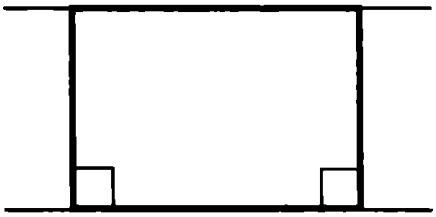
Приведенные ниже утверждения являются как свойствами,
так и признаками прямоугольника, то есть являются *необходимыми и достаточными* условиями того,
что четырехугольник — прямоугольник. Это означает:

1. Если четырехугольник — прямоугольник, то для него справедливы *все* следующие утверждения.

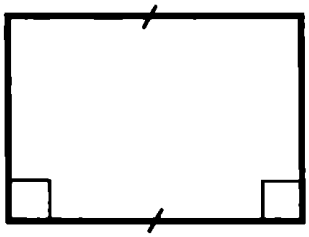
2. Если для четырехугольника справедливо *хотя бы одно* из следующих утверждений, то он — прямоугольник.



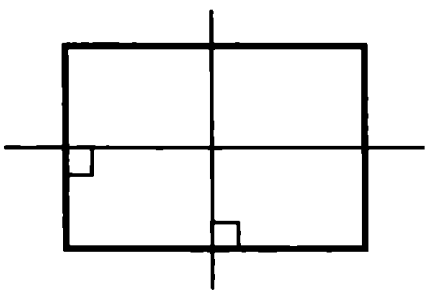
Диагонали равны
и точкой пересечения
делятся пополам.



Две стороны параллельны
и углы, прилежащие
к одной из этих сторон, прямые.



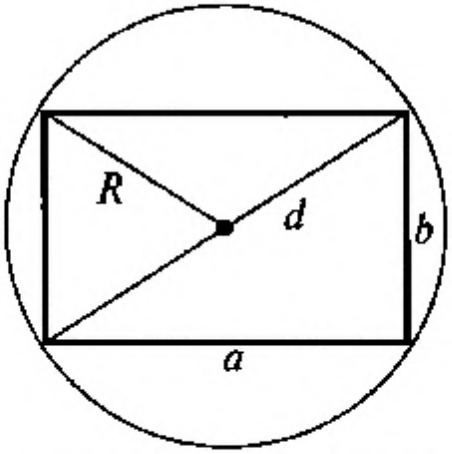
Две противолежащие стороны равны
и углы, прилежащие
к одной из этих сторон, прямые.



Перпендикуляры к сторонам, проходящие через их середины,
являются осями симметрии.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ОКРУЖНОСТЬ, ОПИСАННАЯ ОКОЛО ПРЯМОУГОЛЬНИКА

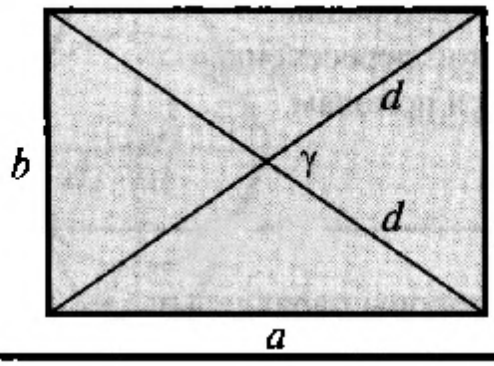


Около любого прямоугольника можно описать окружность. Радиус описанной окружности

$$R = \frac{d}{2},$$

где $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ — диагональ прямоугольника.

ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА



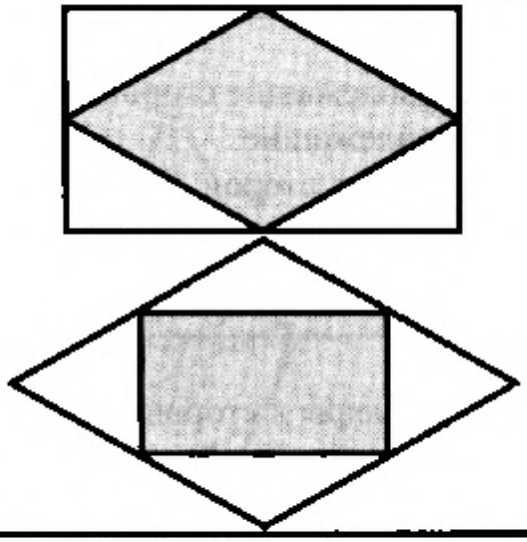
Через стороны:

$$S = ab.$$

Через диагональ и угол между диагоналями:

$$S = \frac{d^2 \sin\gamma}{2}.$$

СВЯЗЬ МЕЖДУ ПРЯМОУГОЛЬНИКОМ И РОМБОМ



Если соединить отрезками середины соседних сторон любого прямоугольника, получится ромб.

Если соединить отрезками середины соседних сторон любого ромба, получится прямоугольник.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

КВАДРАТ

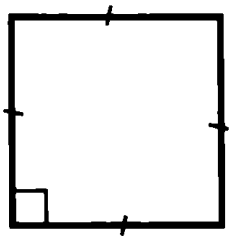
Так называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

СВОЙСТВА И ПРИЗНАКИ КВАДРАТА

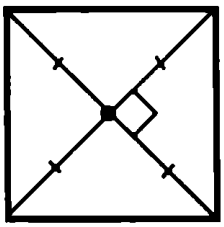
Приведенные ниже утверждения являются как свойствами, так и признаками квадрата, то есть являются *необходимыми и достаточными* условиями того, что четырехугольник — квадрат. Это означает:

1. Если четырехугольник — квадрат, то для него справедливы *все* следующие утверждения.

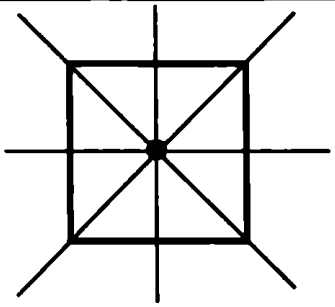
2. Если для четырехугольника справедливо *хотя бы одно* из следующих утверждений, то он — квадрат.



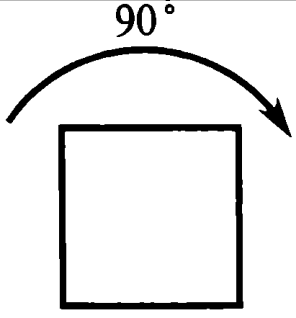
Все стороны равны
и среди внутренних углов
есть прямой угол.



Диагонали равны,
перпендикулярны
и, пересекаясь,
делятся пополам.



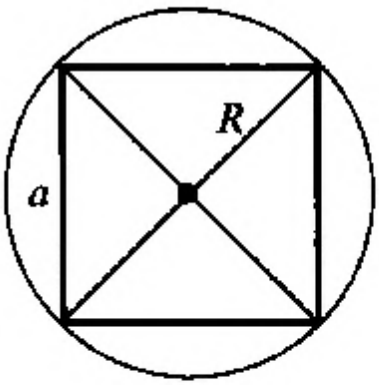
Четырехугольник имеет *четыре* оси симметрии:
— прямые, перпендикулярные сторонам и проходящие
через их середины;
— прямые, содержащие диагонали.



Четырехугольник обладает *поворотной* симметрией:
он не изменяется
при повороте на 90°.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

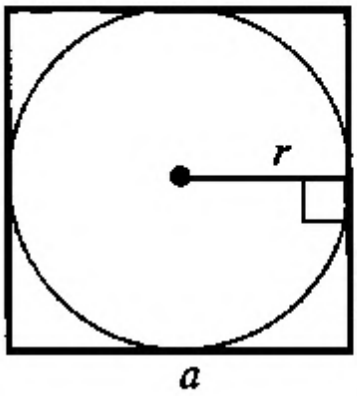
ОКРУЖНОСТЬ, ОПИСАННАЯ ОКОЛО КВАДРАТА



Около квадрата можно описать окружность.
Радиус описанной окружности выражается через сторону a квадрата и его диагональ d следующим образом:

$$R = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{d}{2}.$$

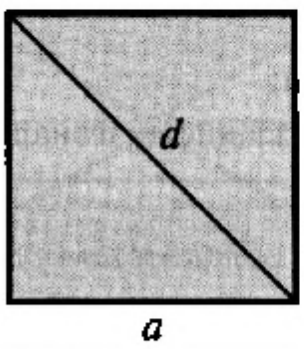
ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В КВАДРАТ



В квадрат можно вписать окружность.
Радиус вписанной окружности равен половине стороны:

$$r = \frac{a}{2}.$$

ПЛОЩАДЬ КВАДРАТА



Через сторону:

$$S = a^2.$$

Через диагональ:

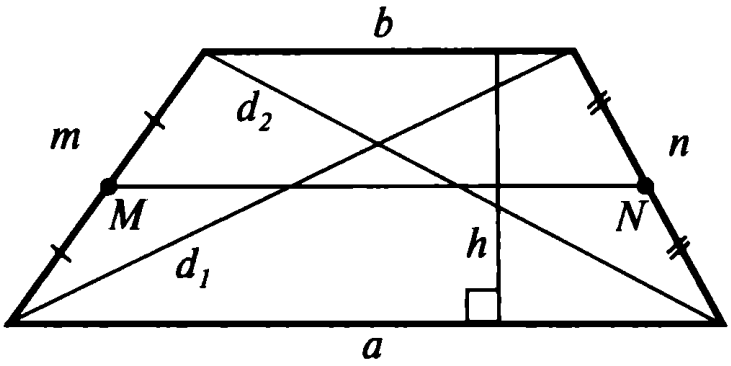
$$S = \frac{d^2}{2}$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ТРАПЕЦИЯ

Так называется четырехугольник, у которого
две стороны параллельны (основания),
а две другие — не параллельны (боковые стороны).
Трапеция с равными боковыми сторонами называется равнобокой (равнобедренной, равнобочной).

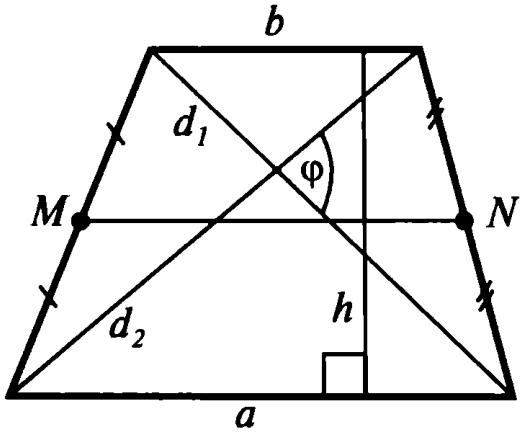
ЭЛЕМЕНТЫ ТРАПЕЦИИ



a,b — основания ($a \parallel b$),
m,n — боковые стороны,
d_1, d_2 — *диагонали*,

h — высота (отрезок, соединяющий основания
и перпендикулярный им),
MN — средняя линия
(отрезок, соединяющий середины боковых сторон).

ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ



Через полусумму оснований и высоту:

$$S = \frac{a+b}{2}h.$$

Через среднюю линию и высоту:

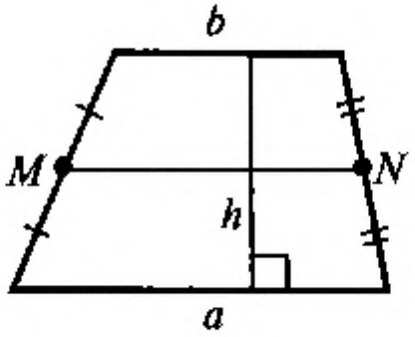
$$S = MN \cdot h.$$

Через диагонали и угол между ними:

$$S = \frac{d_1 d_2 \sin\varphi}{2}.$$

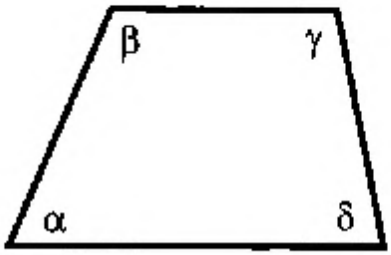
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

СВОЙСТВА ТРАПЕЦИИ



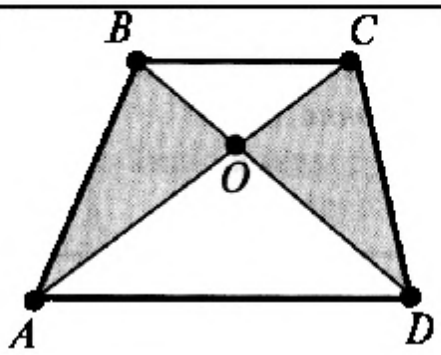
Средняя линия
параллельна основаниям,
равна их полусумме и делит любой отрезок с концами, лежащими на прямых, содержащих основания, (например, высоту трапеции) пополам:

$$MN \parallel a,\ MN \parallel b,\ MN = \frac{a+b}{2}.$$

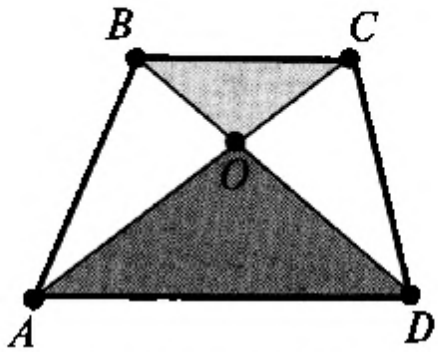


Сумма углов,
прилежащих к любой боковой стороне, равна 180°:

$$\alpha + \beta = 180°,$$
$$\gamma + \delta = 180°.$$



Треугольники
AOB и *DOC*,
образованные боковыми сторонами и отрезками диагоналей, равновелики (имеют равные площади).



$\Delta AOD \sim \Delta COB$

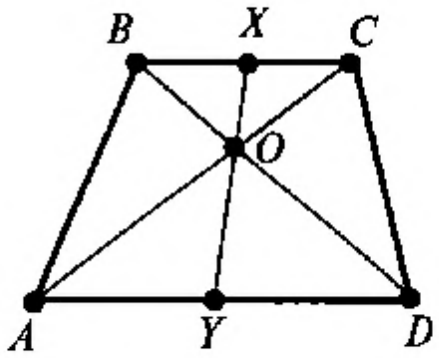
Треугольники *AOD* и *COB*,
образованные основаниями и отрезками диагоналей, подобны.
Коэффициент подобия *k*
равен отношению оснований:

$$k = \frac{AD}{BC}.$$

Отношение площадей этих треугольников равно k^2.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

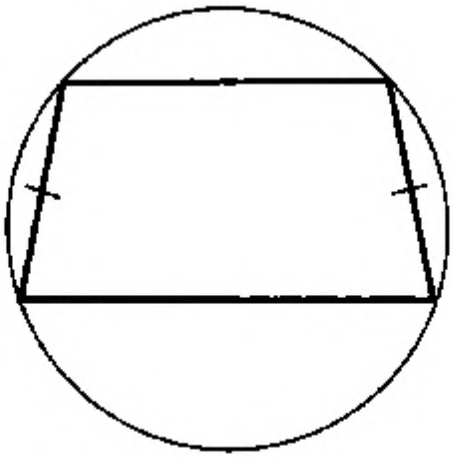
СВОЙСТВА ТРАПЕЦИИ (продолжение)



Любой отрезок, соединяющий основания и проходящий через точку пересечения диагоналей трапеции, делится этой точкой в отношении

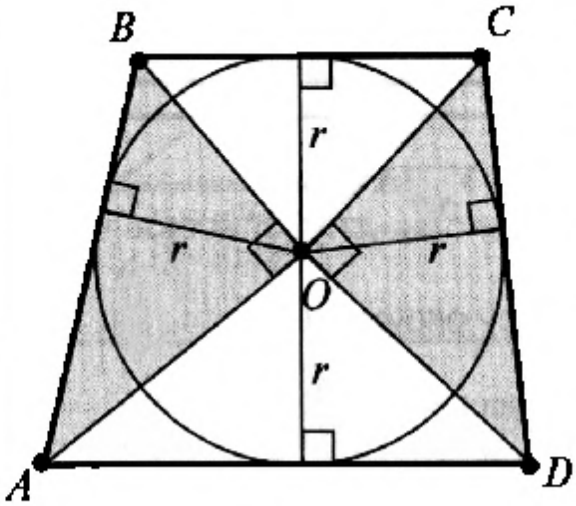
$$\frac{OX}{OY} = \frac{BC}{AD}.$$

Это справедливо, в том числе, для самих диагоналей и высоты.



Любую равнобокую трапецию можно вписать в окружность.

Вписать в окружность можно *только* равнобокую трапецию.



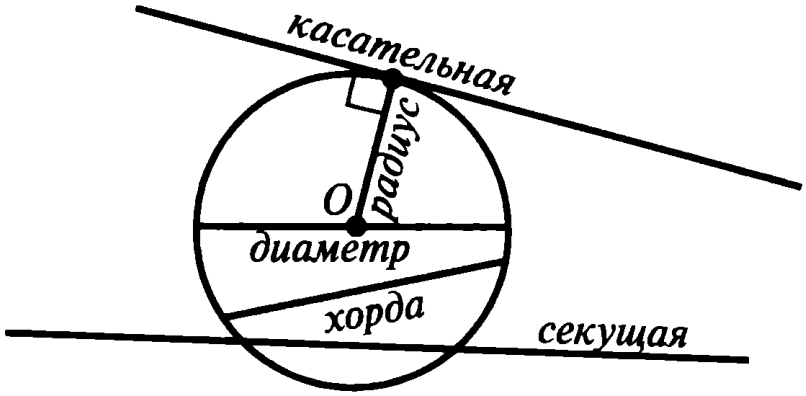
Если трапеция $ABCD$ *описана* около окружности, то треугольники AOB и DOC прямоугольные (точка O — центр вписанной окружности).

Высоты этих треугольников, опущенные на гипотенузы, равны радиусу вписанной окружности, а высота трапеции равна диаметру вписанной окружности.

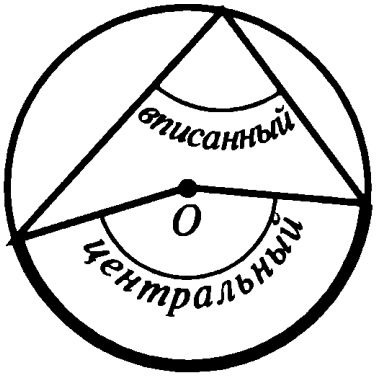
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

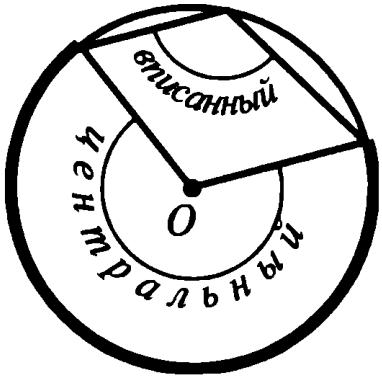
ОКРУЖНОСТЬ

ПРЯМЫЕ И ОТРЕЗКИ, СВЯЗАННЫЕ С ОКРУЖНОСТЬЮ



УГЛЫ, СВЯЗАННЫЕ С ОКРУЖНОСТЬЮ УГЛОВАЯ МЕРА ДУГИ ОКРУЖНОСТИ

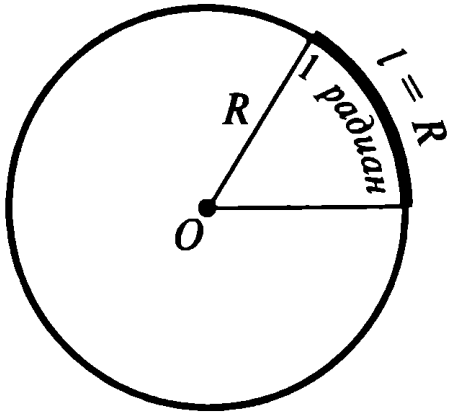




Угловой мерой дуги окружности является центральный угол, который опирается на эту дугу.

РАДИАННАЯ МЕРА УГЛА

Угол в один радиан равен центральному углу, опирающемуся на дугу, длина которой равна радиусу окружности.



1 радиан $\approx 57°17'45''$,

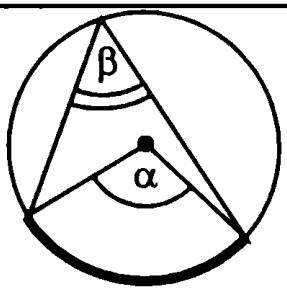
$1° = \frac{\pi}{18°}$ радиан

π радиан $= 180°$,

$\frac{\pi}{2}$ радиан $= 90°$.

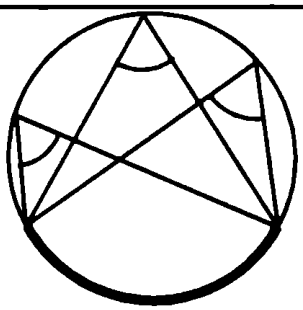
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

СВОЙСТВА ВПИСАННЫХ УГЛОВ

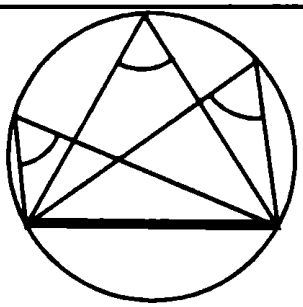


Вписанный угол равен половине центрального, опирающегося на ту же дугу:

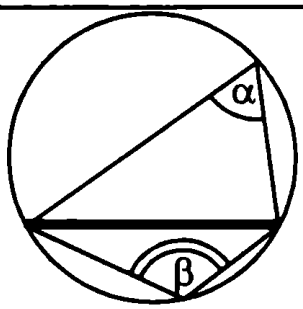
$$\beta = \frac{\alpha}{2}.$$



Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

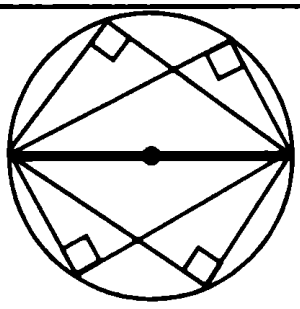


Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же хорду, вершины которых лежат по одну сторону от этой хорды, равны.



Любая пара углов, опирающихся на одну и ту же хорду, вершины которых лежат по разные стороны хорды, составляют в сумме 180°:

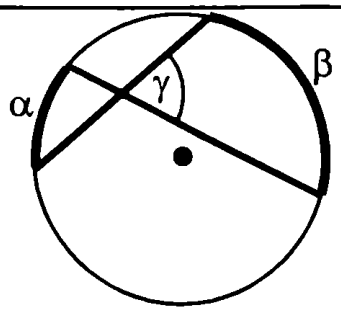
$$\alpha + \beta = 180°.$$



Все вписанные углы, опирающиеся на диаметр, прямые.

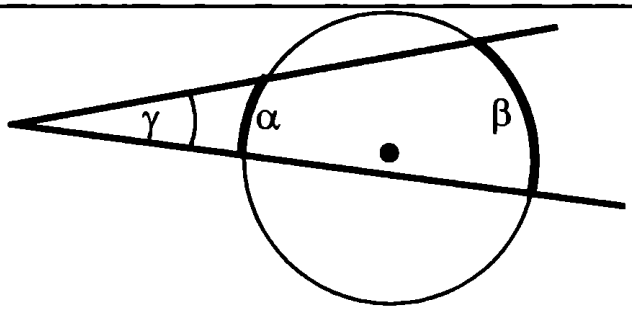
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

УГЛЫ МЕЖДУ ХОРДАМИ, КАСАТЕЛЬНЫМИ И СЕКУЩИМИ



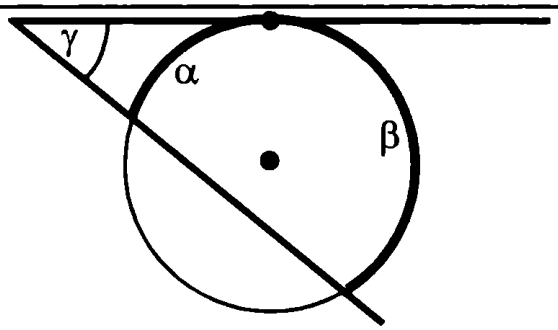
Угол между пересекающимися хордами:

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$



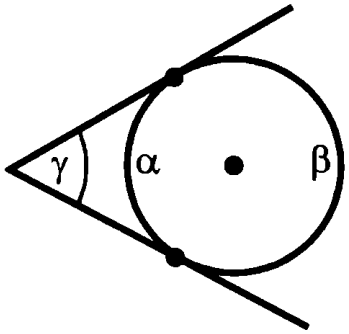
Угол между секущими, пересекающимися вне окружности:

$$\gamma = \frac{\beta - \alpha}{2}.$$



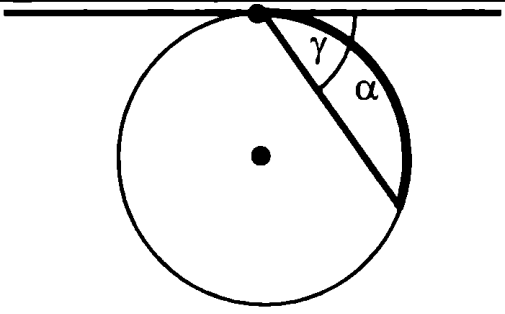
Угол между касательной и секущей:

$$\gamma = \frac{\beta - \alpha}{2}.$$



Угол между касательными:

$$\gamma = \frac{\beta - \alpha}{2} = \pi - \alpha.$$

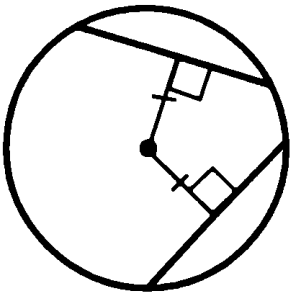


Угол между касательной и хордой:

$$\gamma = \frac{\alpha}{2}$$

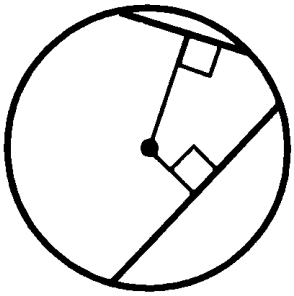
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

СВОЙСТВА ХОРД

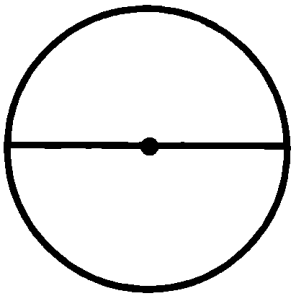


Если хорды равноудалены
от центра окружности,
то они равны.

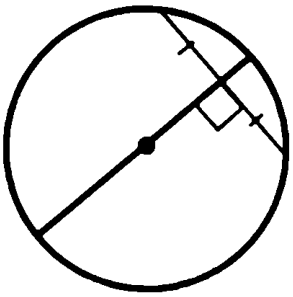
Если хорды равны,
то они равноудалены
от центра окружности.



Большая из двух хорд
находится ближе
к центру окружности.

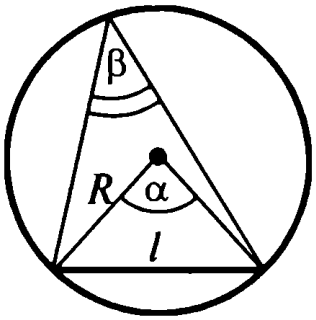


Наибольшая хорда
является диаметром.



Если диаметр делит хорду пополам,
то он перпендикулярен ей.

Если диаметр перпендикулярен хорде,
то он делит ее пополам.

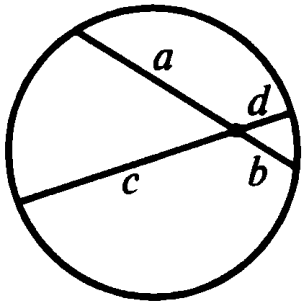


Длина хорды:

$$l = 2R\sin\frac{\alpha}{2} = 2R\sin\beta\,.$$

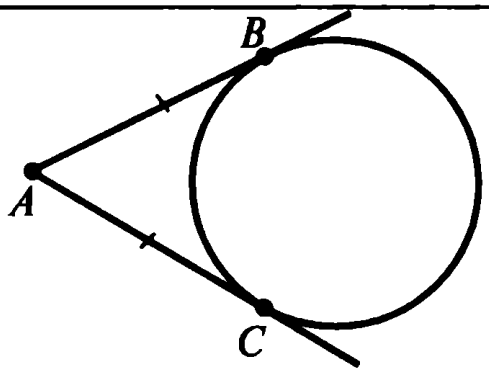
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ДЛИНАМИ ХОРД, ОТРЕЗКОВ КАСАТЕЛЬНЫХ И СЕКУЩИХ



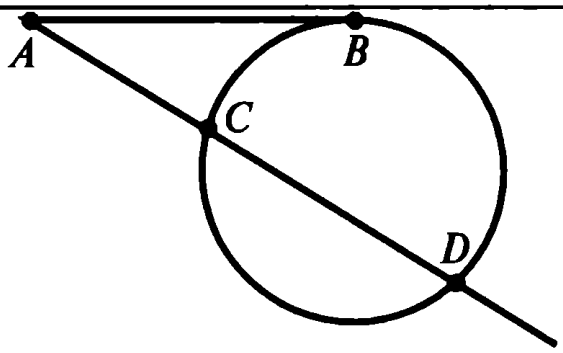
Отрезки пересекающихся хорд связаны соотношением:

$$ab = cd.$$



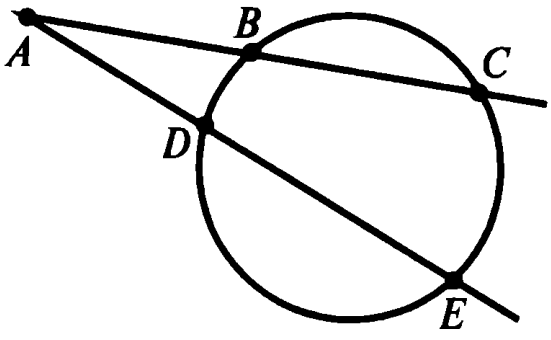
Отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны:

$$AB = AC.$$



Квадрат отрезка касательной равен произведению отрезков секущей, проведенной из той же точки:

$$AB^2 = AC \cdot AD\,.$$

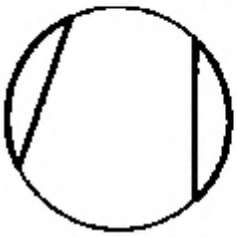


Произведения отрезков секущих, проведенных из одной точки, равны:

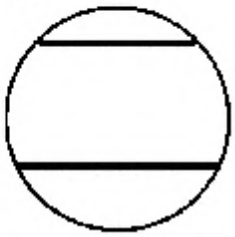
$$AB \cdot AC = AD \cdot AE\,.$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

СВОЙСТВА ДУГ И ХОРД

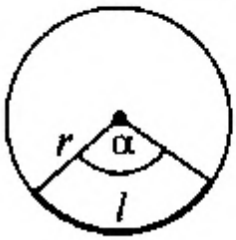


Равные дуги стягиваются равными хордами.



Дуги, заключенные между параллельными хордами, равны.

ДЛИНА ДУГИ И ОКРУЖНОСТИ



Длина дуги: $l = \alpha r$ (угол α в радианах).

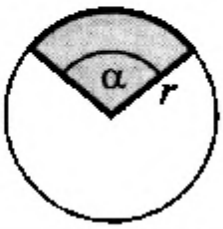


Длина окружности: $L = 2\pi r$.

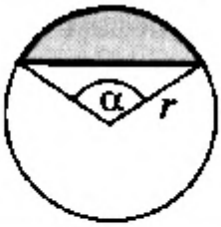
ПЛОЩАДЬ КРУГА И ЕГО ЧАСТЕЙ



Площадь круга: $S = \pi r^2$.



Площадь сектора: $S = \frac{1}{2}\alpha r^2$ (угол α в радианах).

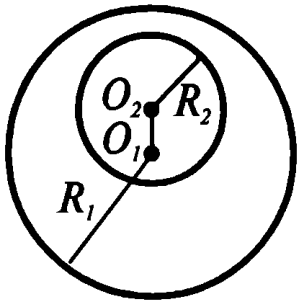


Площадь сегмента: $S = \frac{1}{2}(\alpha - \sin\alpha)r^2$ (угол α в радианах).

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

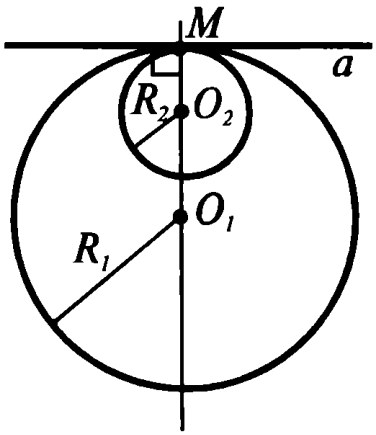
ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ. ОБЩИЕ КАСАТЕЛЬНЫЕ

Общей касательной к двум окружностям называется прямая, касающаяся обеих окружностей.



Одна окружность лежит внутри другой — общих касательных нет.

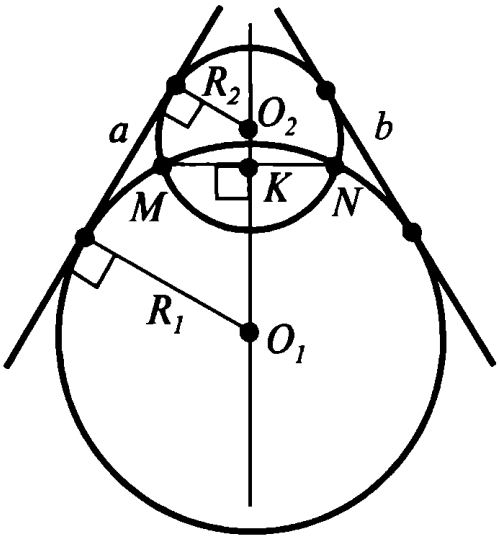
Расстояние между центрами окружностей меньше разности их радиусов: $O_1O_2 < R_1 - R_2$.



Одна окружность касается другой изнутри — окружности имеют одну общую точку M, лежащую на прямой O_1O_2.

Одна общая касательная a проходит через эту точку и перпендикулярна прямой O_1O_2.

Расстояние между центрами окружностей равно разности их радиусов: $O_1O_2 = R_1 - R_2$.



Окружности пересекаются — имеют две общих точки M и N.

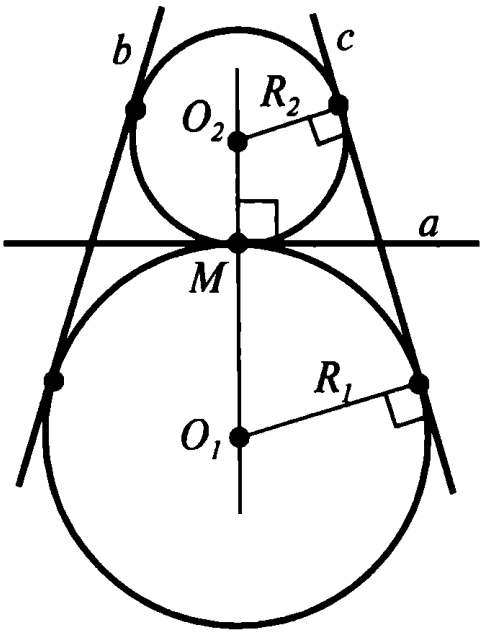
Есть две общих касательных a и b. Если радиусы окружностей равны, то касательные параллельны, а если радиусы не равны, то касательные пересекаются в точке, лежащей на прямой O_1O_2.

Общая хорда MN перпендикулярна прямой O_1O_2 и делится ею пополам: $MN \perp O_1O_2$; $MK = KN$.

Расстояние между центрами окружностей больше разности их радиусов, но меньше суммы: $R_1 - R_2 < O_1O_2 < R_1 + R_2$.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ
(продолжение)



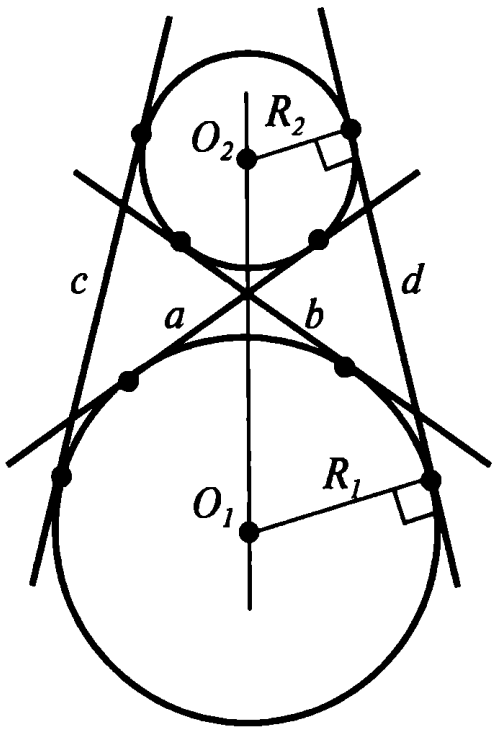
Одна окружность касается другой снаружи — окружности имеют одну общую точку M, лежащую на прямой O_1O_2.

Есть три общих касательных.

Одна из них (a) проходит через точку касания окружностей и перпендикулярна прямой O_1O_2.

Если радиусы окружностей равны, то две другие общие касательные (b и c) параллельны, а если радиусы не равны, то эти общие касательные пересекаются в точке, лежащей на прямой O_1O_2.

Расстояние между центрами окружностей равно сумме их радиусов: $O_1O_2 = R_1 + R_2$.



Одна окружность лежит вне другой.

Есть четыре общих касательных: две из них (a и b) называются внутренними и всегда пересекаются в точке, лежащей на отрезке O_1O_2.

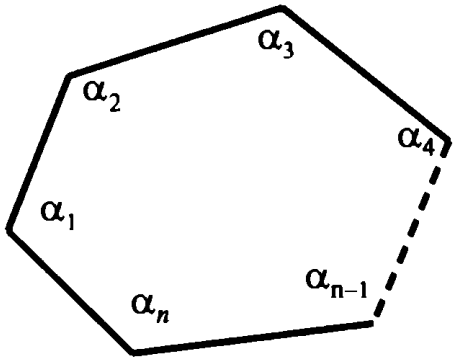
Две другие общие касательные (c и d) называются внешними. Если радиусы окружностей равны, то внешние касательные параллельны, а если радиусы не равны, то внешние касательные пересекаются в точке, лежащей на прямой O_1O_2.

Расстояние между центрами окружностей больше суммы их радиусов: $O_1O_2 > R_1 + R_2$.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

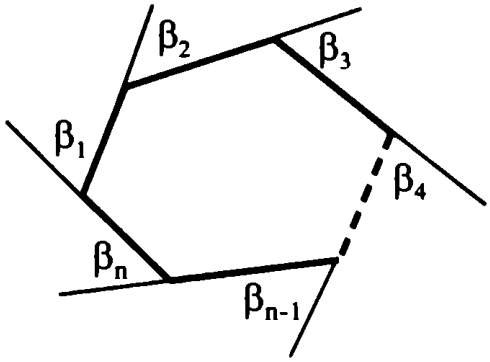
МНОГОУГОЛЬНИКИ

ПРОИЗВОЛЬНЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК



Сумма внутренних углов *n*-угольника:

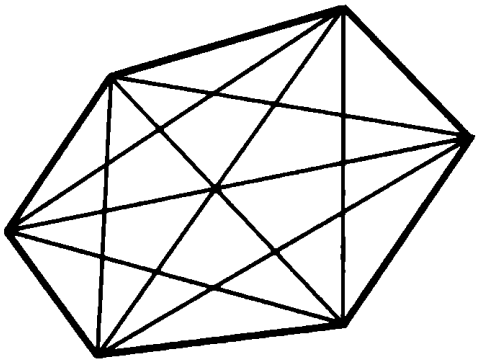
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ \ldots \ + \alpha_n = 18^\circ\,^\circ\,(n-2).$$



Сумма внешних углов *n*-угольника:

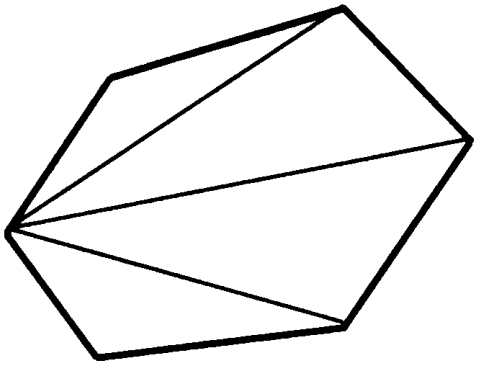
$$\beta_1 + \beta_2 + \ \ldots \ + \beta_n = 36^\circ\,^\circ.$$

Сумма внешних углов *не зависит* от *n*.



Число *N* диагоналей *n*-угольника:

$$N = \frac{n(n-3)}{2}.$$



Число *K* треугольников, на которые разбивается *n*-угольник диагоналями, выходящими из одной вершины:

$$K = n - 2.$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Так называются многоугольники, у которых все стороны равны
и все углы равны. Любой правильный многоугольник можно вписать в окружность и описать около окружности.

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНОЙ ПРАВИЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА И РАДИУСАМИ ВПИСАННОЙ И ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТЕЙ

(обозначения: a — сторона, r — радиус вписанной окружности, R — радиус описанной окружности)

	r через a	R через a	a через r	a через R
треугольник	$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$	$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$	$a = 2\sqrt{3}r$	$a = \sqrt{3}R$
квадрат	$r = \frac{a}{2}$	$R = \frac{a}{\sqrt{2}}$	$a = 2r$	$a = \sqrt{2}R$
шестиугольник	$r = \frac{\sqrt{3}a}{2}$	$R = a$	$a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$	$a = R$
n-угольник	$r = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{18^\circ}{n}}$	$R = \frac{a}{2\sin\frac{18^\circ}{n}}$	$a = 2r\operatorname{tg}\frac{18^\circ}{n}$	$a = 2R\sin\frac{18^\circ}{n}$

ПЛОЩАДЬ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

	через a	через r	через R
треугольник	$S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$	$S = 3\sqrt{3}r^2$	$S = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$
квадрат	$S = a^2$	$S = 4r^2$	$S = 2R^2$
шестиугольник	$S = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$	$S = 2\sqrt{3}r^2$	$S = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$
n-угольник	$S = \frac{a^2 n}{4\operatorname{tg}\frac{18^\circ}{n}}$	$S = r^2 n\operatorname{tg}\frac{18^\circ}{n}$	$S = \frac{1}{2}R^2 n\sin\frac{36^\circ}{n}$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

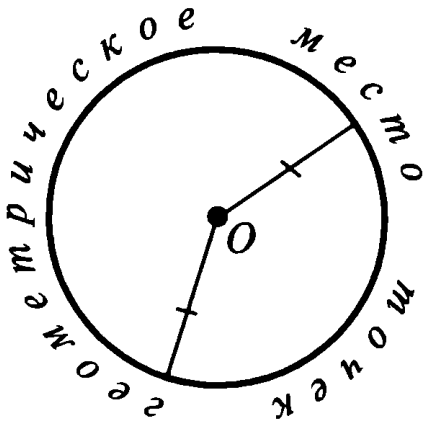
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

Геометрическим местом точек называется фигура, удовлетворяющая *двум* условиям:

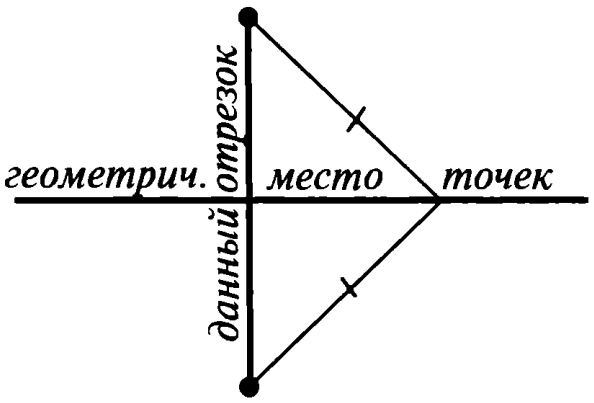
1. Все точки фигуры обладают данным свойством.

2. Все точки, обладающие данным свойством, принадлежат этой фигуре.

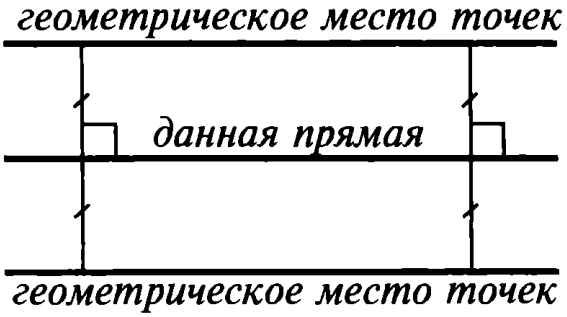
НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ



Окружность — множество точек, находящихся на данном расстоянии от данной точки *O*.



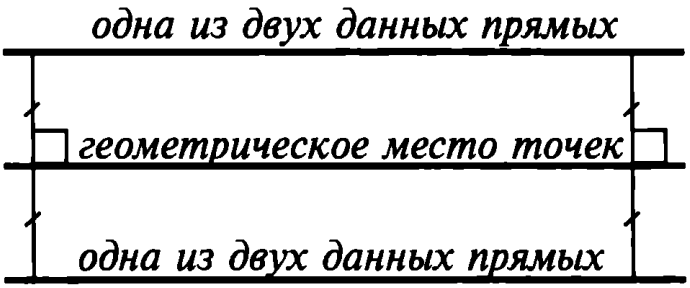
Серединный перпендикуляр к отрезку с концами в двух данных точках — множество точек, равноудаленных от двух данных точек.



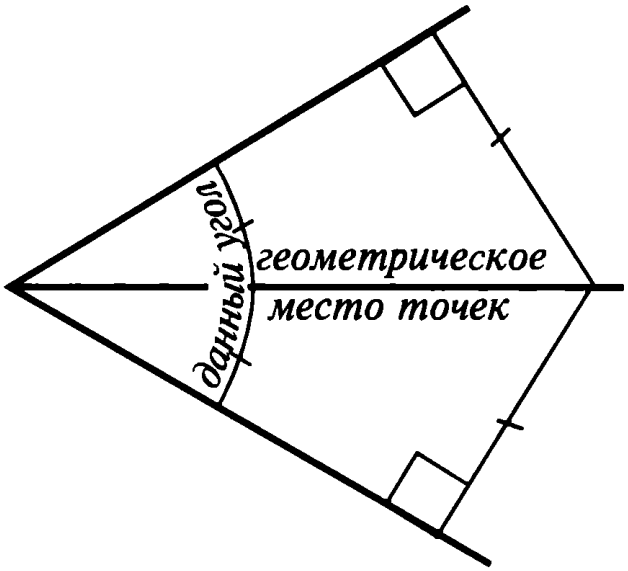
Две прямые, параллельные данной и находящиеся на данном расстоянии от нее — множество точек, удаленных от данной прямой на данное расстояние.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ
(продолжение)



Прямая, параллельная двум данным прямым и находящаяся на одинаковом расстоянии от них — множество точек, удаленных от двух параллельных прямых на одно и то же расстояние.



Биссектриса угла — множество точек, равноудаленных от сторон угла.

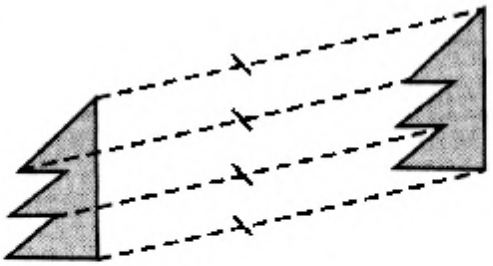


Две дуги окружности равных радиусов (за исключением крайних точек), опирающиеся на данный отрезок — множество точек, из которых данный отрезок виден под данным углом.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

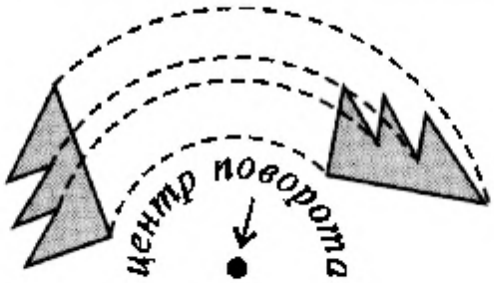
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФИГУР. ВИДЫ СИММЕТРИИ

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФИГУР



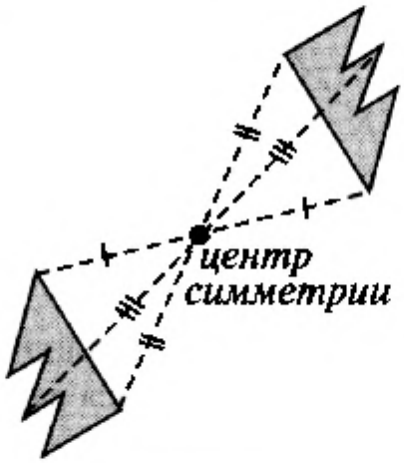
Параллельный перенос

Все точки фигуры смещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние.



Поворот

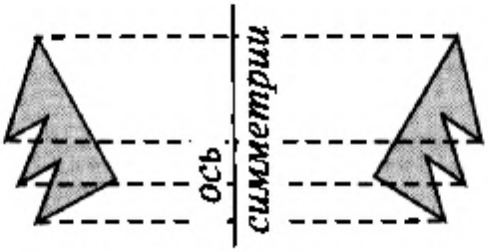
Все точки фигуры поворачиваются на один и тот же угол вокруг одной и той же точки — центра поворота.



Преобразование симметрии относительно точки

Каждая точка фигуры переходит в точку, симметричную ей относительно фиксированной точки — центра симметрии.

Для плоскости это преобразование совпадает с поворотом на 180° (вокруг той же точки).



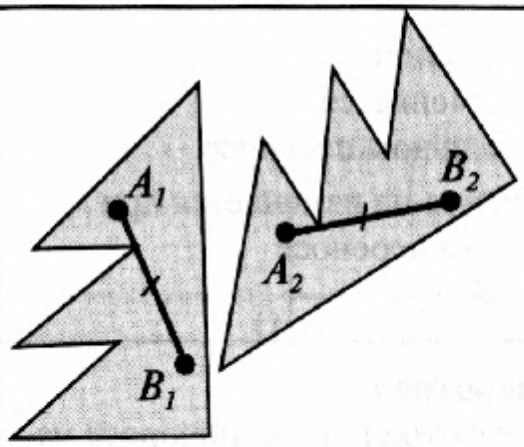
Преобразование симметрии относительно прямой

Каждая точка фигуры переходит в точку, симметричную ей относительно фиксированной прямой — оси симметрии.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФИГУР (продолжение)

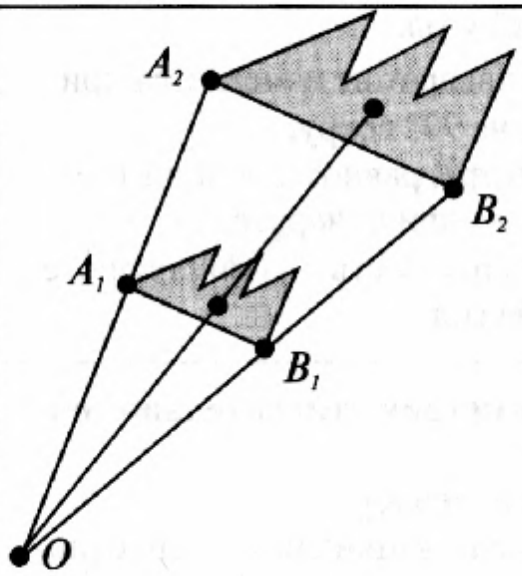
Движение



Преобразование фигуры,
при котором расстояния между любыми соответственными точками фигуры сохраняются.

Примерами движений являются параллельный перенос, поворот, преобразования симметрии относительно точки и прямой.

Гомотетия



Все точки фигуры смещаются вдоль прямых, проходящих
через одну и ту же точку
(центр гомотетии) так, что

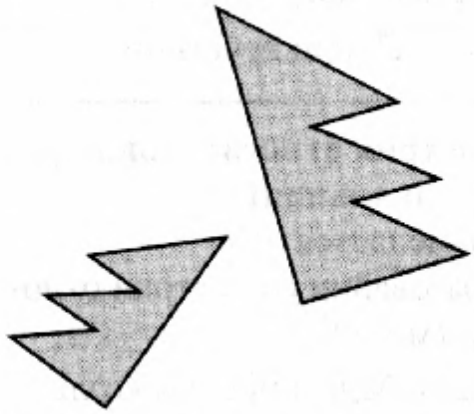
$$OA_2 = k \cdot OA_1,$$

$$OB_2 = k \cdot OB_1 \text{ и т. д.}$$

Величина k называется коэффициентом гомотетии.

При $k = -1$ гомотетия совпадает с преобразованием симметрии относительно точки.

Подобие

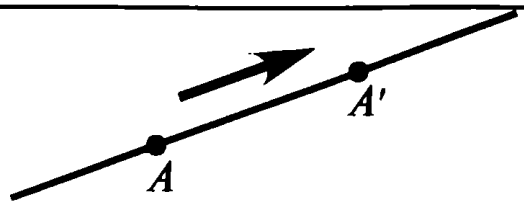


Преобразование фигуры,
при котором расстояния между любыми соответственными точками изменяются в одно
и то же число раз. Пример подобия — преобразование гомотетии.

Площади подобных фигур относятся как квадраты их линейных размеров (например, соответствующих сторон, высот, периметров, радиусов и т.п.).

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

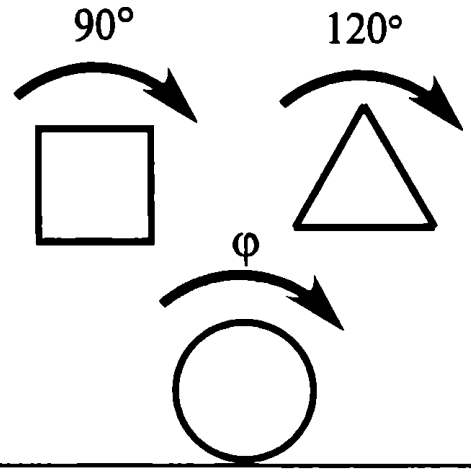
ВИДЫ СИММЕТРИИ ФИГУР



Переносная

Фигура не изменяется при параллельном переносе.

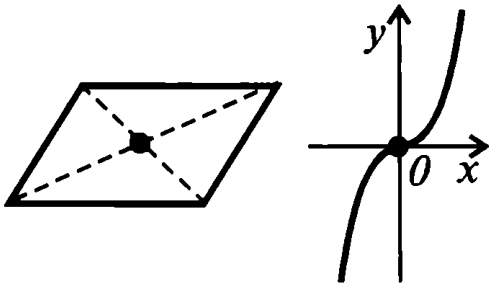
Пример: прямая не изменяется при параллельном переносе вдоль самой себя.



Поворотная

Фигура не изменяется при повороте на некоторый угол.

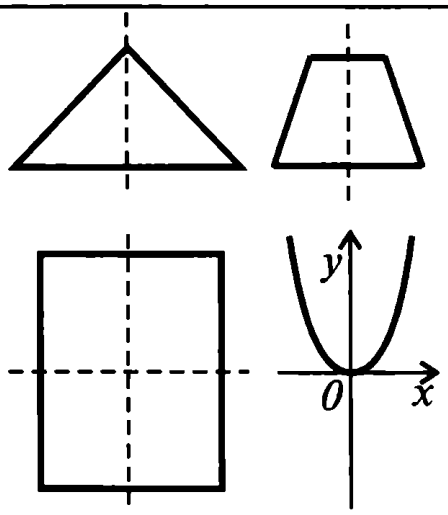
Примеры: квадрат не изменяется при повороте на 90° вокруг своего центра, равносторонний треугольник — при повороте на 120°, окружность — при повороте на любой угол.



Симметрия относительно точки

Фигура не изменяется при преобразовании симметрии относительно точки.

Примеры: параллелограмм, график функции $y = x^n$ при нечетном n.



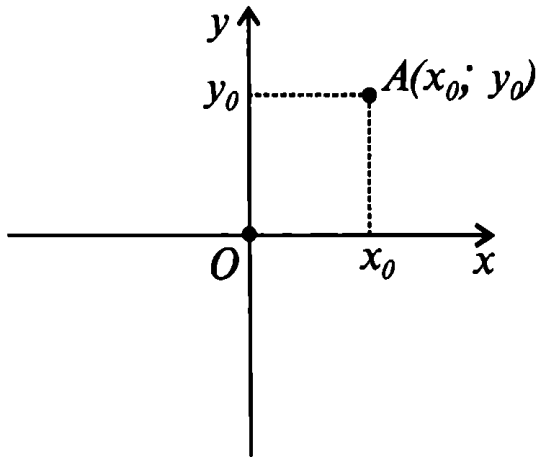
Симметрия относительно прямой (зеркальная)

Фигура не изменяется при преобразовании симметрии относительно прямой.

Примеры: равнобедренный треугольник, прямоугольник (две оси симметрии), равнобокая трапеция, график функции $y = x^n$ при четном n.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

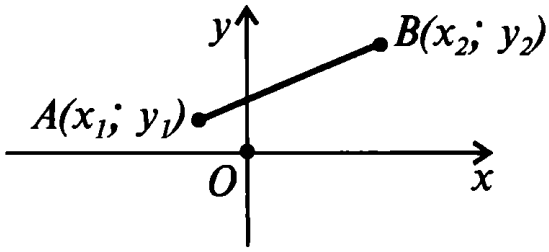
ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ



Оси координат:
ось x — ось абсцисс,
ось y — ось ординат.
Точка O — начало координат.

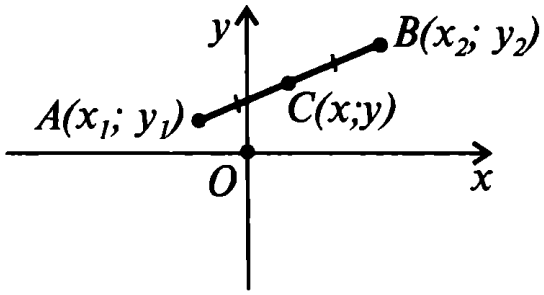
Любой точке плоскости сопоставляются два числа: абсцисса x_0 и ордината y_0.

Эти числа называются декартовыми координатами данной точки.



Расстояние между двумя точками:

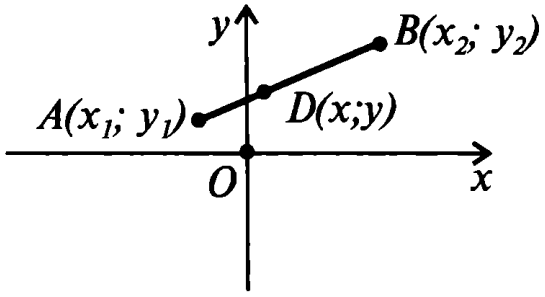
$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\ .$$



Координаты середины отрезка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$



Координаты точки, делящей отрезок в заданном отно-шении: если

$\frac{AD}{DB} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, то

$$x = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} x_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} x_2$$

$$y = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} y_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} y_2$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

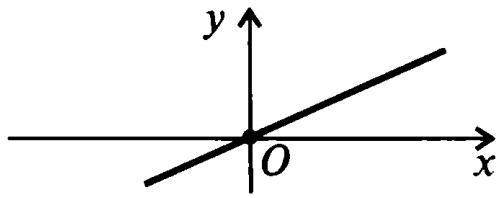
ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

$$ax + by + c = 0$$

(коэффициенты a, b не равны нулю одновременно; они являются координатами вектора $(\overline{a;b})$, перпендикулярного данной прямой).

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

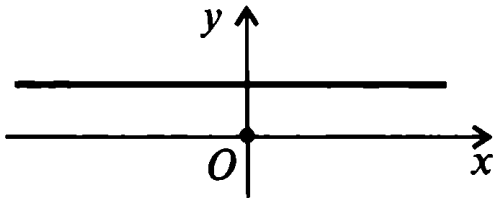
ПРЯМАЯ, ПРОХОДЯЩАЯ ЧЕРЕЗ НАЧАЛО КООРДИНАТ ПОД УГЛОМ К КООРДИНАТНЫМ ОСЯМ (ГРАФИК ПРЯМОЙ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ)



$$(a \neq 0,\ b \neq 0,\ c = 0) \Rightarrow ax + by = 0$$

$$y = -\frac{a}{b}x$$

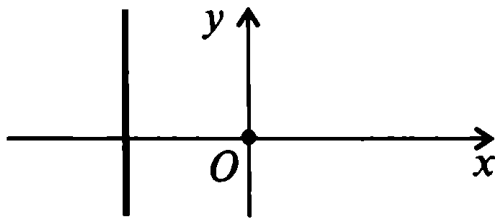
ПРЯМАЯ, ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ОСИ x



$$(a = 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0) \Rightarrow by + c = 0$$

$$y = -\frac{c}{b}$$

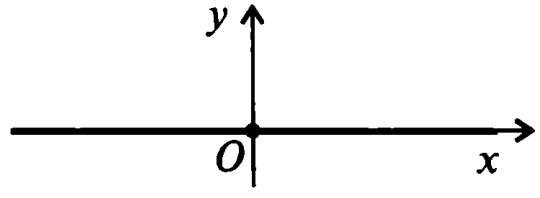
ПРЯМАЯ, ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ОСИ y



$$(a \neq 0,\ b = 0,\ c \neq 0) \Rightarrow ax + c = 0$$

$$x = -\frac{c}{a}$$

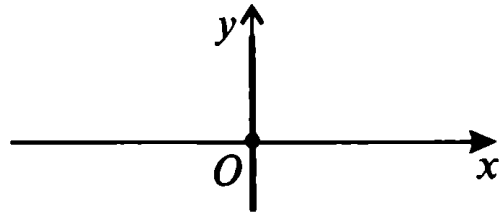
УРАВНЕНИЕ ОСИ x



$$(a = 0,\ b \neq 0,\ c = 0) \Rightarrow by = 0$$

$$y = 0$$

УРАВНЕНИЕ ОСИ y



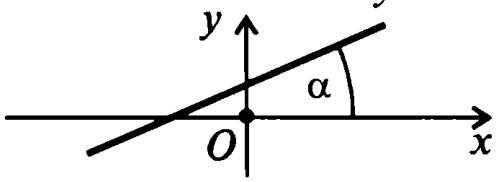
$$(a \neq 0,\ b = 0,\ c = 0) \Rightarrow ax = 0$$

$$x = 0$$

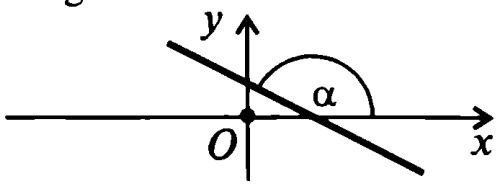
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ С УГЛОВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

$y = kx + b;\ \ k = \operatorname{tg}\alpha$



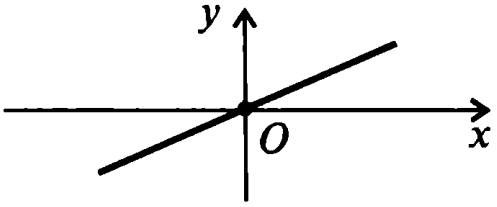
$k > 0$ при $0° < \alpha < 90°$



$k < 0$ при $90° < \alpha < 180°$

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

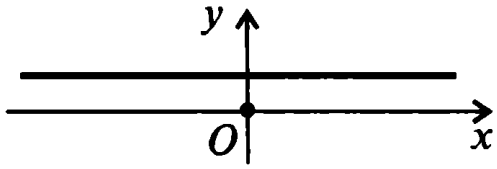
ГРАФИК ПРЯМОЙ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ



$b = 0,\ k \neq 0$

$y = kx$

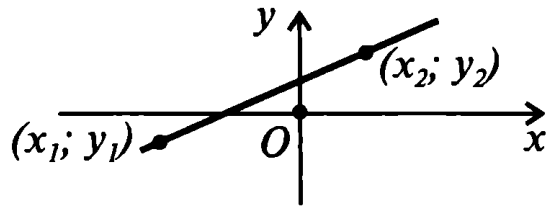
ПРЯМАЯ, ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ОСИ x



$k = 0,\ b \neq 0$

$y = b$

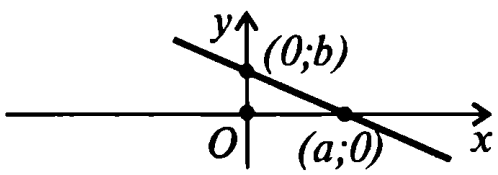
УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДВЕ ЗАДАННЫЕ ТОЧКИ



$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1)$

Если $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, это уравнение можно записать в виде $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ В ОТРЕЗКАХ НА ОСЯХ



$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

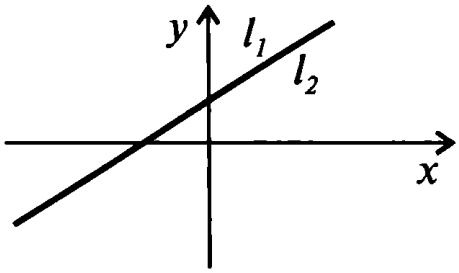
$(a \neq 0,\ b \neq 0)$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ, ЗАДАННЫХ ОБЩИМ УРАВНЕНИЕМ ПРЯМОЙ

$$l_1:\ a_1x + b_1y + c_1 = 0; \quad l_2:\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

СОВПАДАЮЩИЕ ПРЯМЫЕ



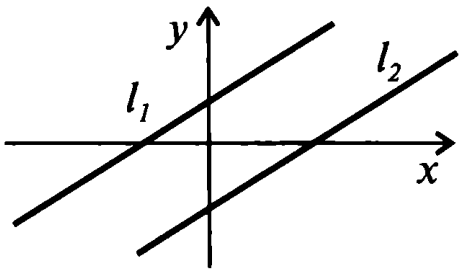
Для коэффициентов a_i, b_i, c_i, отличных от нуля:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Для произвольных коэффициентов a_i, b_i, c_i:

$$\begin{cases} a_1b_2 = a_2b_1 \\ a_1c_2 = a_2c_1 \end{cases}$$

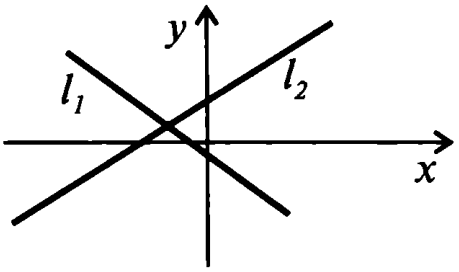
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ



$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$$\begin{cases} a_1b_2 = a_2b_1 \\ a_1c_2 \neq a_2c_1 \end{cases}$$

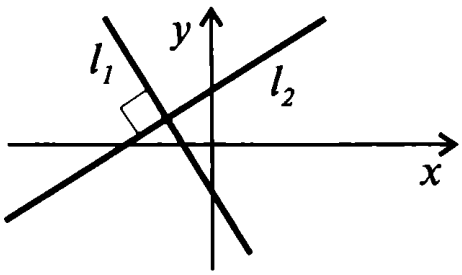
ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ



$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

$$a_1b_2 \neq a_2b_1$$

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ



$$\frac{a_1}{b_1} = -\frac{b_2}{a_2}$$

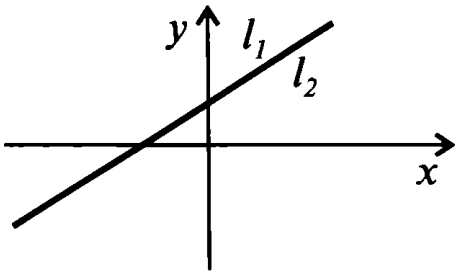
$$a_1a_2 + b_1b_2 = {}^{\circ}$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ, ЗАДАННЫХ УРАВНЕНИЕМ ПРЯМОЙ С УГЛОВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

$$l_1: \; y = k_1 x + b_1; \quad l_2: \; y = k_2 x + b_2$$

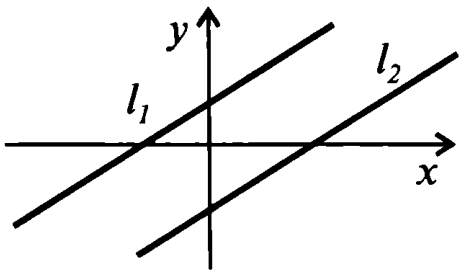
СОВПАДАЮЩИЕ ПРЯМЫЕ



$$k_1 = k_2$$

$$b_1 = b_2$$

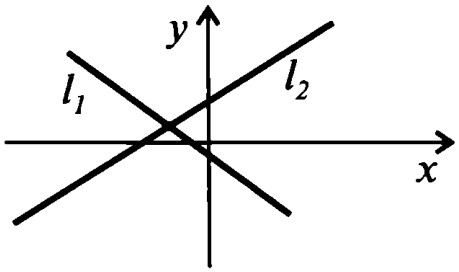
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ



$$k_1 = k_2$$

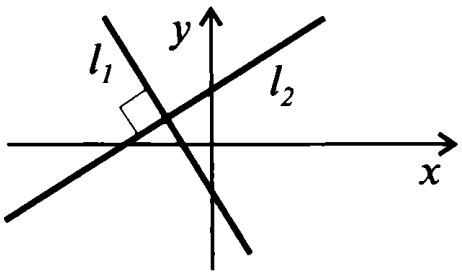
$$b_1 \neq b_2$$

ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ



$$k_1 \neq k_2$$

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ



$$k_1 k_2 = -1$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

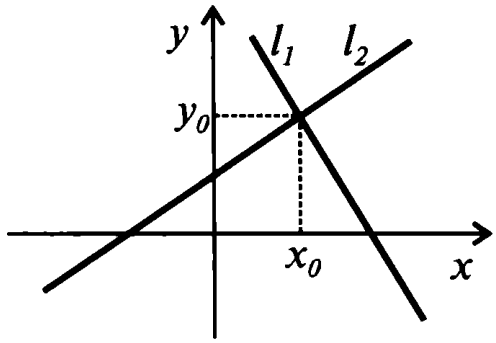
КООРДИНАТЫ ТОЧКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ ПРЯМЫХ

$$l_1:\ a_1x + b_1y + c_1 = 0;\quad l_2:\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

или

$$l_1:\ y = k_1x + b_1;\quad l_2:\ y = k_2x + b_2$$

являются решением системы уравнений:



$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

откуда

$$x_0 = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1},$$

$$y_0 = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

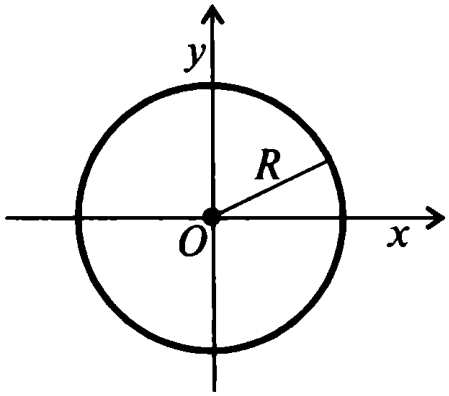
$$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$$

откуда

$$x_0 = -\frac{b_1 - b_2}{k_1 - k_2},$$

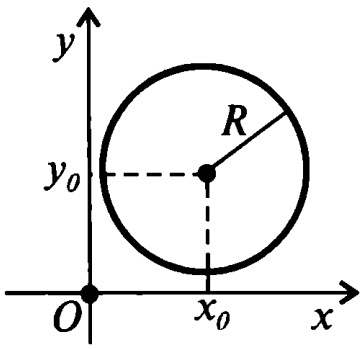
$$y_0 = \frac{k_1b_2 - k_2b_1}{k_1 - k_2}.$$

УРАВНЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ



С центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 = R^2$$



С центром в точке $(x_0; y_0)$:

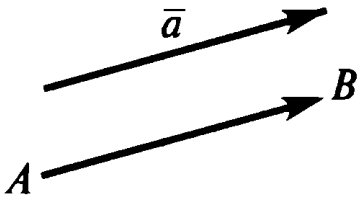
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ВЕКТОРЫ

Так называются величины, которые характеризуются численным значением и направлением. На чертежах векторы изображаются в виде направленных отрезков. Длина отрезка называется модулем (абсолютной величиной) вектора.

ОБОЗНАЧЕНИЯ ВЕКТОРОВ



$\bar{a}$ или $\overline{AB}$,
где A — начало вектора,
B —конец вектора.

Обозначение модуля: $|\bar{a}|$ или $|\overline{AB}|$.

НУЛЕВОЙ ВЕКТОР

Так называется вектор, конец которого совпадает с началом. На чертежах такой вектор изображается точкой и обозначается $\bar{0}$. Модуль нулевого вектора равен нулю, а его направление не определено.

КОЛЛИНЕАРНЫЕ ВЕКТОРЫ

Так называются векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых.
(Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.)

ВИДЫ КОЛЛИНЕАРНЫХ ВЕКТОРОВ

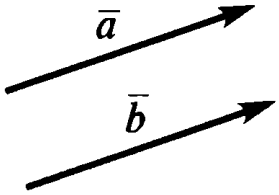
сонаправленные



противоположно направленные

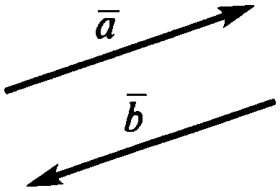


равные



$\bar{a} = \bar{b}$

противоположные



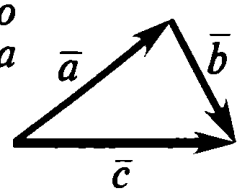
$\bar{a} = -\bar{b}$

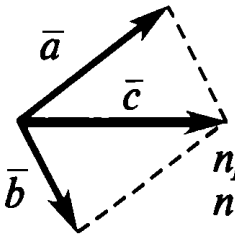
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ

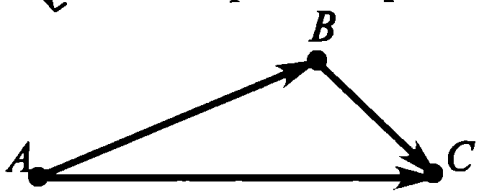
СЛОЖЕНИЕ ДВУХ ВЕКТОРОВ

правило треугольника





правило параллелограмма



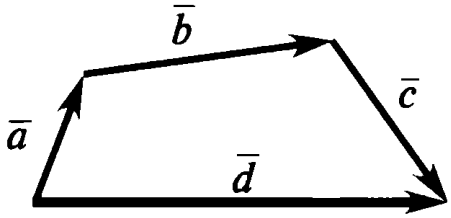
Сумма двух векторов находится с помощью **правила треугольника** или **правила параллелограмма**:

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}\,.$$

Для любых трех точек A,B,C справедливо соотношение:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

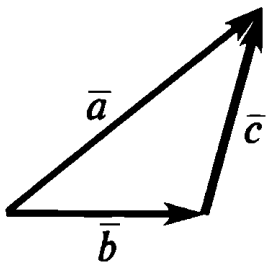
СЛОЖЕНИЕ НЕСКОЛЬКИХ ВЕКТОРОВ



$$\bar{d} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$$

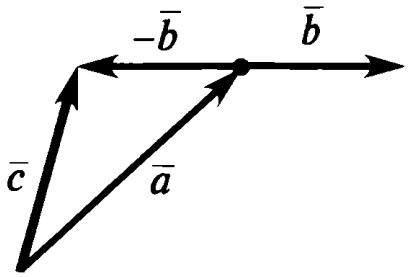
Сумма нескольких векторов находится аналогично сумме двух векторов с помощью **правила многоугольника**, которое является обобщением правила треугольника.

ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ



Разность двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — это вектор $\bar{c}$, который в сумме с вектором $\bar{b}$ дает вектор $\bar{a}$:

$$\bar{b} + \bar{c} = \bar{a} \;\Rightarrow\; \bar{c} = \bar{a} - \bar{b}\,.$$



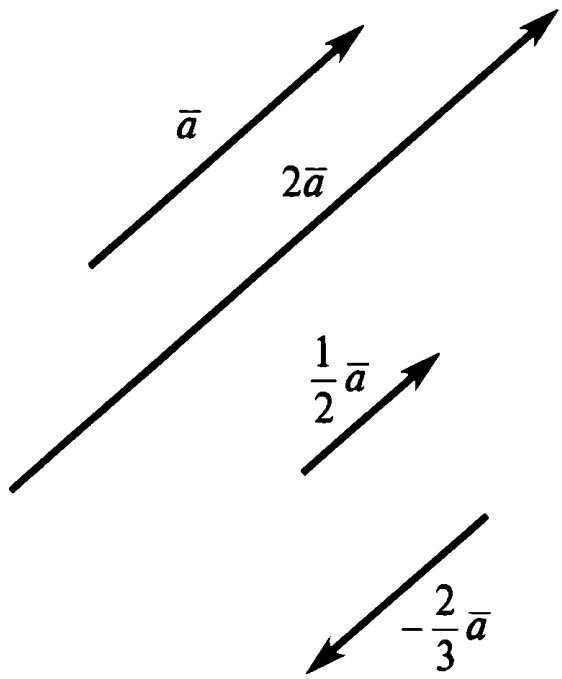
Вектор $\bar{c}$ можно найти также, складывая с вектором $\bar{a}$ вектор $-\bar{b}$, противоположный вектору $\bar{b}$:

$$\bar{c} = \bar{a} + (-\bar{b})$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ (продолжение)

УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО



Произведение вектора $\bar{a}$ на число λ — это коллинеарный ему вектор $\lambda\bar{a}$, сонаправленный с вектором $\bar{a}$, если $\lambda > 0$, и направленный противоположно ему, если $\lambda < 0$.

Модуль вектора $\lambda\bar{a}$ удовлетворяет соотношению:

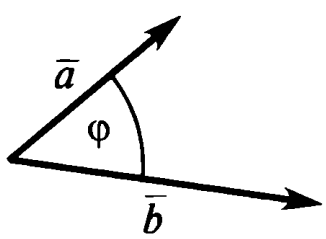
$$|\lambda\bar{a}| = |\lambda| \cdot |\bar{a}|.$$

СКАЛЯРНОЕ УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b}$ векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — это *число*, равное произведению модулей векторов на косинус угла между ними:

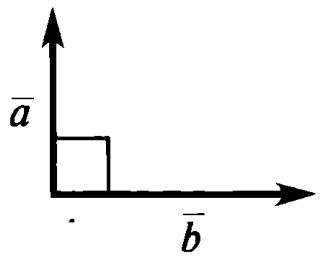
$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi .$$

Модуль вектора $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a} \cdot \bar{a}} = \sqrt{\bar{a}^2}$.



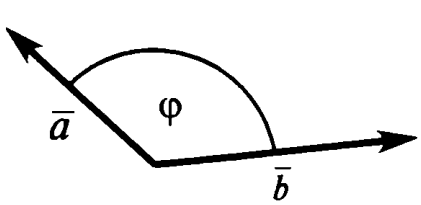
$0° \leqslant \varphi < 90°$

$\bar{a} \cdot \bar{b} > 0$



$\varphi = 90°$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$



$90° < \varphi \leqslant 180°$

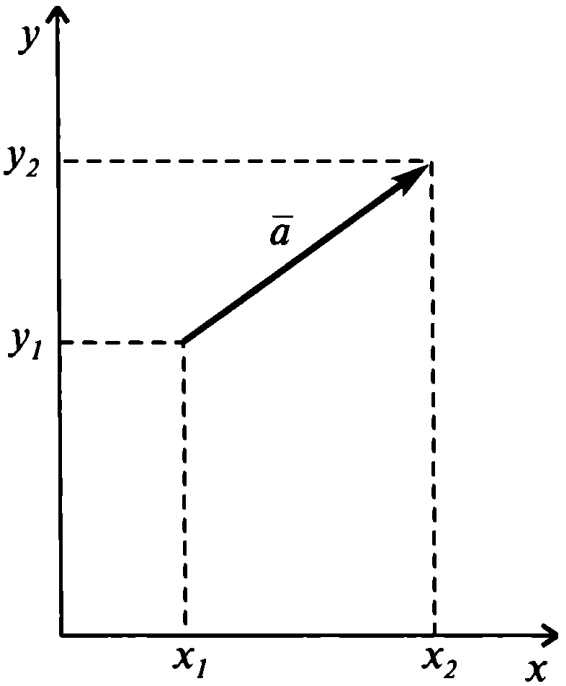
$\bar{a} \cdot \bar{b} < 0$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Координатами вектора называются разности координат конца и начала вектора.

НА ПЛОСКОСТИ



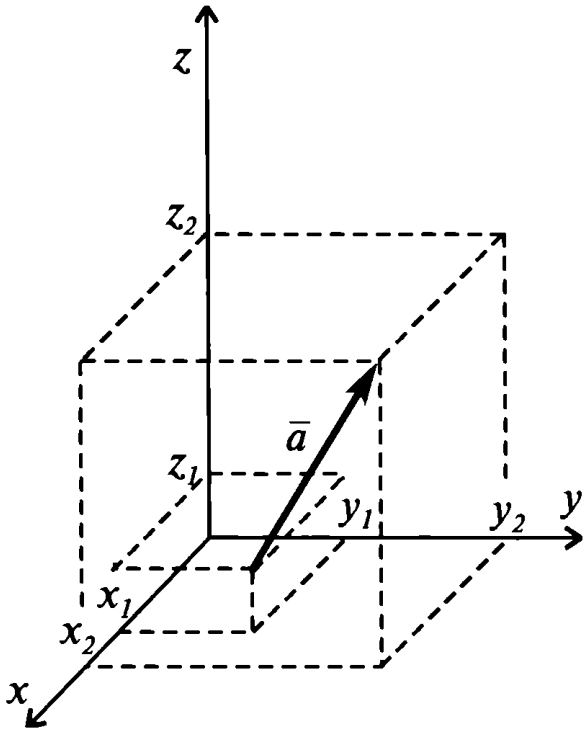
Координаты вектора $\bar{a}(a_x;a_y)$:

$$a_x = x_2 - x_1,$$
$$a_y = y_2 - y_1$$

Модуль вектора

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

В ПРОСТРАНСТВЕ



Координаты вектора $\bar{a}(a_x;a_y;a_z)$:

$$a_x = x_2 - x_1,$$
$$a_y = y_2 - y_1$$
$$a_z = z_2 - z_1$$

Модуль вектора

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Координаты вектора не изменяются при параллельном переносе.

У равных векторов соответствующие координаты равны.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

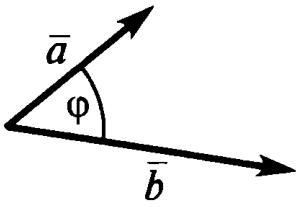
ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ В КООРДИНАТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

НА ПЛОСКОСТИ	В ПРОСТРАНСТВЕ
СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ: $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$	
$c_x = a_x + b_x$ $c_y = a_y + b_y$	$c_x = a_x + b_x$ $c_y = a_y + b_y$ $c_z = a_z + b_z$
ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ: $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$	
$c_x = a_x - b_x$ $c_y = a_y - b_y$	$c_x = a_x - b_x$ $c_y = a_y - b_y$ $c_z = a_z - b_z$
УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО: $\bar{b} = \lambda \bar{a}$	
$b_x = \lambda a_x$ $b_y = \lambda a_y$	$b_x = \lambda a_x$ $b_y = \lambda a_y$ $b_z = \lambda a_z$
СКАЛЯРНОЕ УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ: $s = \bar{a} \cdot \bar{b}$	
$s = a_x b_x + a_y b_y$	$s = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ



Косинус угла между векторами находится из соотношения

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}.$$

В координатном представлении:

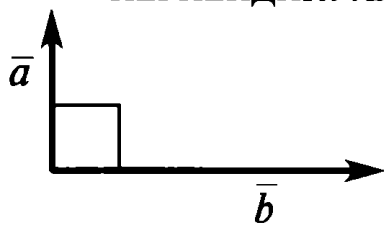
на плоскости:

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2}},$$

в пространстве:

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ (ОРТОГОНАЛЬНЫЕ) ВЕКТОРЫ



Скалярное произведение равно нулю:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = 0.$$

В координатном представлении:

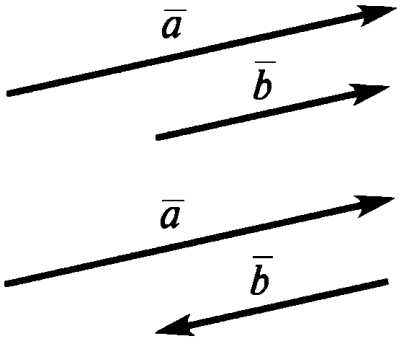
на плоскости:

$$a_x b_x + a_y b_y = 0,$$

в пространстве:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

КОЛЛИНЕАРНЫЕ ВЕКТОРЫ



Модуль скалярного произведения векторов равен произведению их модулей:

$$|\bar{a}\cdot\bar{b}| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|.$$

В координатном представлении:
координаты векторов *пропорциональны*, то есть удовлетворяют соотношениям:

на плоскости: $a_x b_y = a_y b_x$,

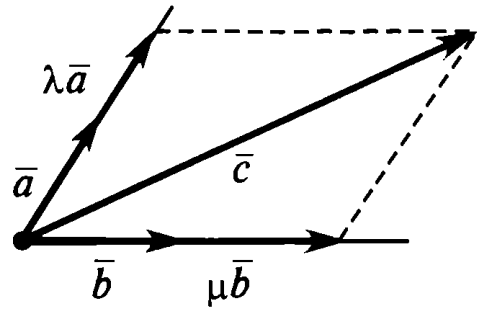
(если $a_i,\ b_i \neq 0$, то $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y}$),

в пространстве: $\begin{cases} a_x b_y = a_y b_x \\ a_x b_z = a_z b_x \end{cases}$

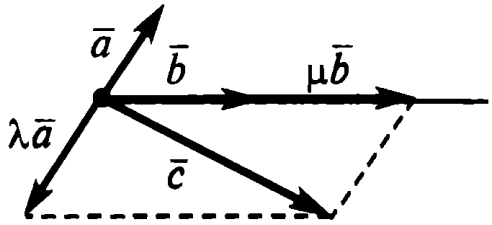
(если $a_i,\ b_i \neq 0$, то $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$).

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ПЛОСКОСТИ ПО ДВУМ НЕКОЛЛИНЕАРНЫМ ВЕКТОРАМ



$\lambda > 0,\ \mu > 0$



$\lambda < 0,\ \mu > 0$

На плоскости любой вектор $\bar{c}$ может быть представлен в виде суммы двух векторов, соответственно коллинеарных двум заданным неколлинеарным векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b},$$

где λ и μ — числа.

Такое представление называется разложением вектора по двум заданным векторам.

Разложить вектор на плоскости по двум *заданным* неколлинеарным векторам можно *единственным* образом.

РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ ПО ТРЕМ НЕКОМПЛАНАРНЫМ ВЕКТОРАМ

(Компланарными называются векторы, параллельные одной и той же плоскости)

В пространстве любой вектор $\bar{d}$ может быть представлен в виде суммы трех векторов, соответственно коллинеарных трем заданным некомпланарным векторам $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$:

$$\bar{d} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b} + \nu\bar{c},$$

где λ, μ и ν — числа.

Такое представление называется разложением вектора по трем заданным векторам.

Разложить вектор в пространстве по трем *заданным* некомпланарным векторам можно *единственным* образом.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО КООРДИНАТНЫМ ВЕКТОРАМ

Координатные векторы (орты) направлены вдоль осей координат. Модули этих векторов равны 1.

Обозначения координатных векторов:

на плоскости

$\bar{i}(1;\ 0),\ \bar{j}(0;\ 1)$

или

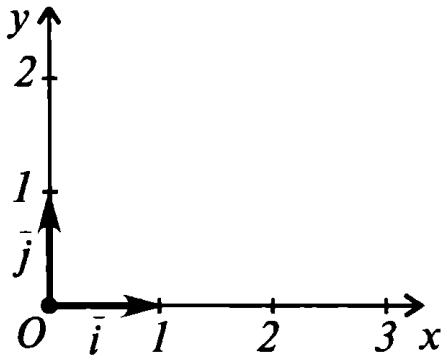
$\bar{e}_1(1;\ 0),\ \bar{e}_2(0;\ 1)$

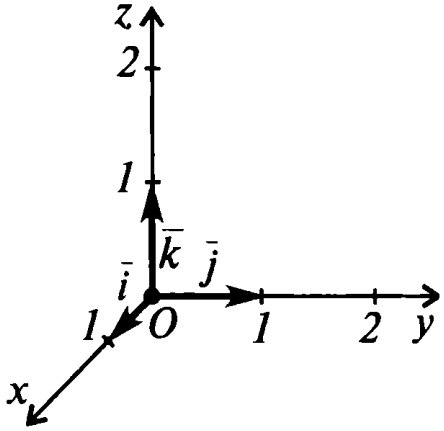
в пространстве

$\bar{i}(1;\ 0;\ 0),\ \bar{j}(0;\ 1;\ 0),\ \bar{k}(0;\ 0;\ 1)$

или

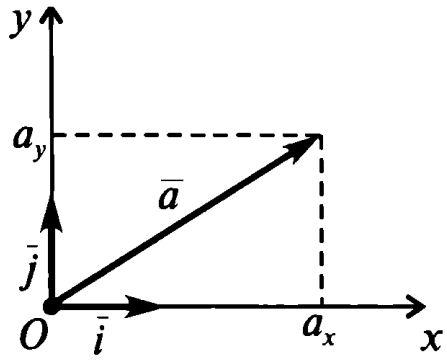
$\bar{e}_1(1;\ 0;\ 0),\ \bar{e}_2(0;\ 1;\ 0),\ \bar{e}_3(0;\ 0;\ 1)$



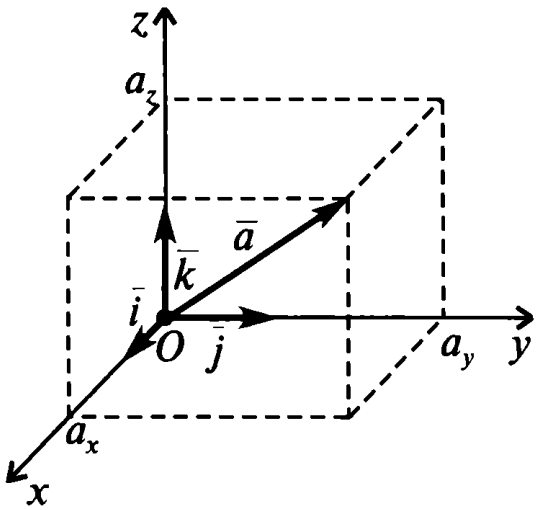


Любой вектор $\bar{a}$ можно разложить единственным образом по координатным векторам:

$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j}$



$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$



Коэффициенты разложения a_i являются проекциями вектора $\bar{a}$ на оси координат.

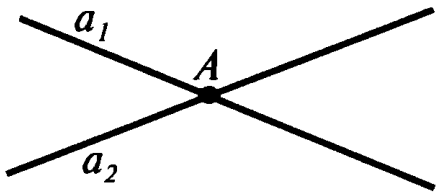
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

СТЕРЕОМЕТРИЯ

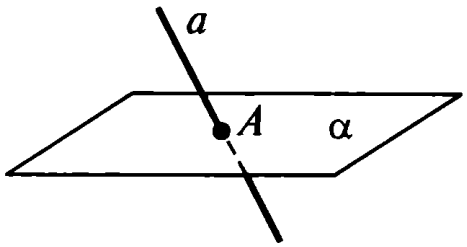
ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ТОЧКИ

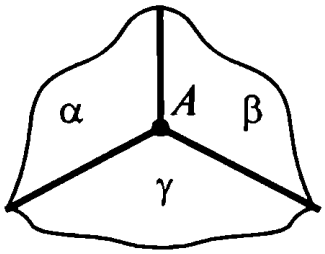
Точка в пространстве однозначно определяется:



Двумя пересекающимися прямыми.



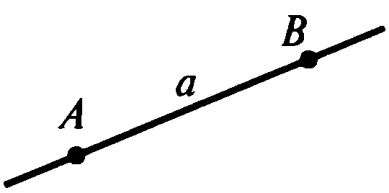
Пересекающимися прямой и плоскостью.



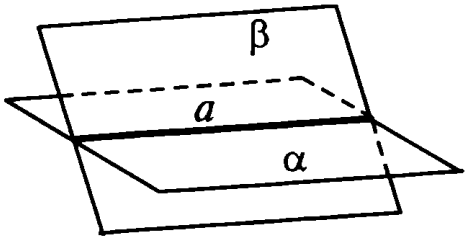
Тремя попарно пересекающимися плоскостями, если прямые пересечения плоскостей пересекаются.

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ПРЯМОЙ

Прямая в пространстве однозначно определяется:



Двумя точками.

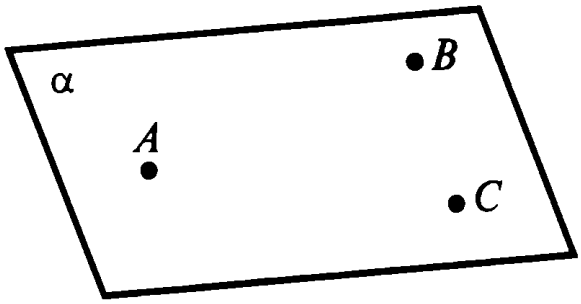


Двумя пересекающимися плоскостями.

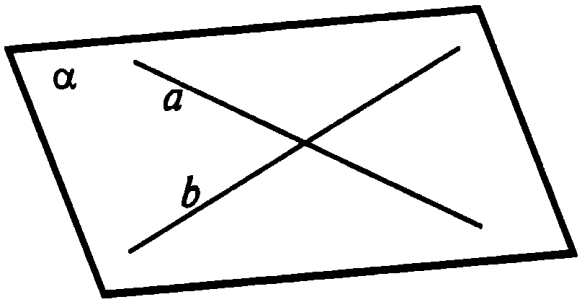
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ПЛОСКОСТИ

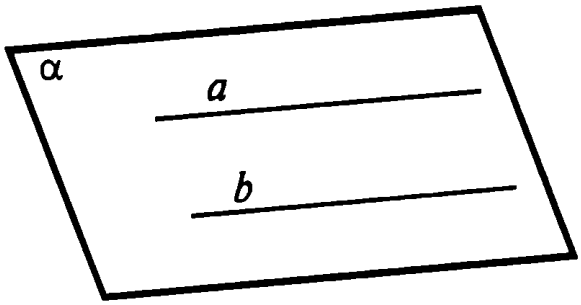
Плоскость в пространстве однозначно определяется:



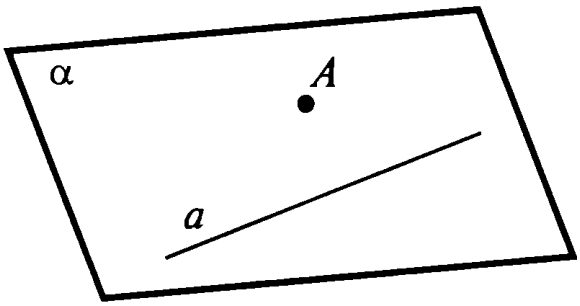
Тремя точками,
не лежащими
на одной прямой.



Двумя
пересекающимися прямыми.



Двумя
параллельными прямыми.



Прямой и точкой,
не лежащей на ней.

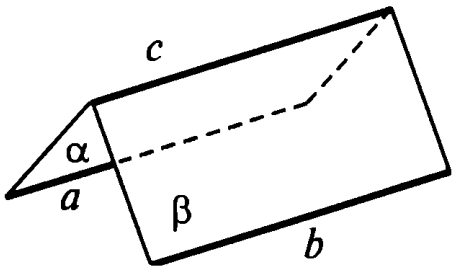
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

Так называются прямые, которые лежат в одной плоскости
и не пересекаются.

ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ



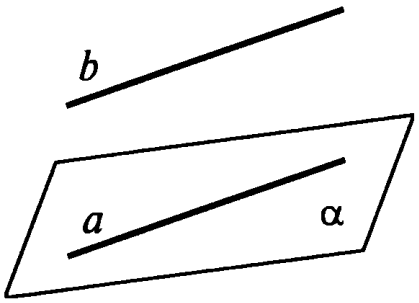
Две прямые, параллельные третьей,
параллельны между собой:

$$(a \parallel c\ ,\ b \parallel c) \Rightarrow a \parallel b$$

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

Прямая и плоскость называются параллельными,
если они не пересекаются.

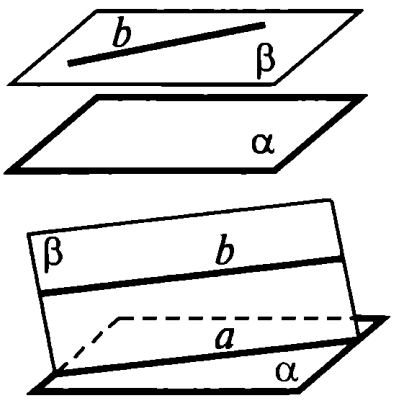
ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



Если прямая, не принадлежащая данной плоскости, параллельна одной из прямых этой плоскости,
то она параллельна
этой плоскости:

$$(b \parallel a,\ b \not\subset \alpha,\ a \subset \alpha) \Rightarrow b \parallel \alpha.$$

СВОЙСТВО ПРЯМОЙ, ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ДАННОЙ ПЛОСКОСТИ



Любая плоскость, проходящая через прямую параллельную данной плоскости, либо параллельна этой плоскости, либо пересекает ее по прямой, параллельной данной прямой:

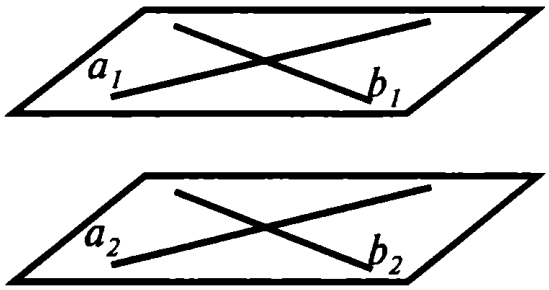
$$(b \subset \beta,\ b \parallel \alpha) \Rightarrow \beta \parallel \alpha \text{ или } a \parallel b.$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЛОСКОСТИ

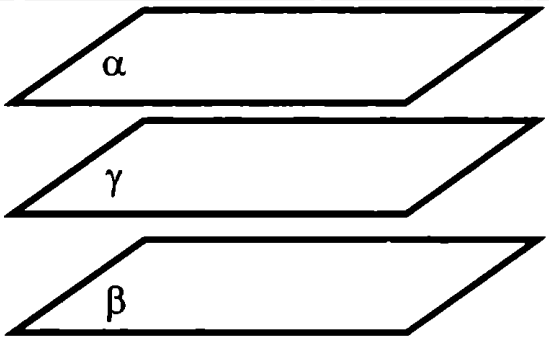
Так называются плоскости, которые не пересекаются.

ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПЛОСКОСТЕЙ



Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, **то** эти плоскости параллельны:

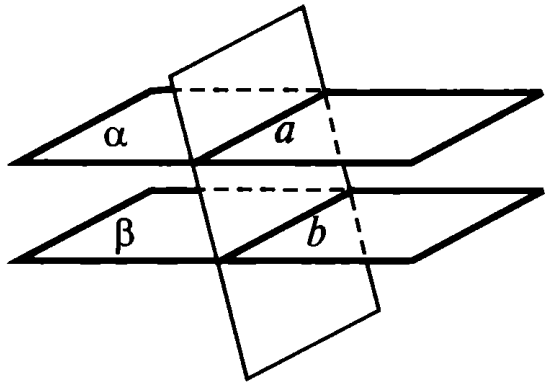
$$(a_1 \| a_2,\ b_1 \| b_2) \Rightarrow \alpha \| \beta .$$



Если каждая из двух данных плоскостей параллельна третьей плоскости, **то** данные две плоскости параллельны между собой:

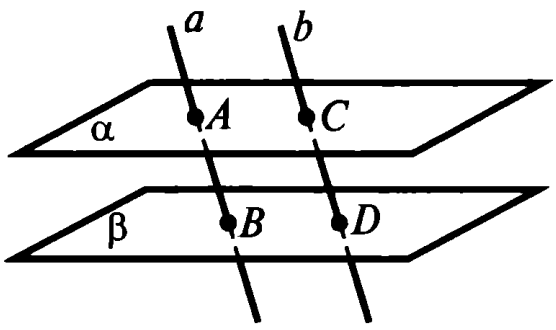
$$(\alpha \| \gamma,\ \beta \| \gamma) \Rightarrow \alpha \| \beta .$$

СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ



Если две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, **то** линии пересечения плоскостей параллельны:

$$\alpha \| \beta \Rightarrow a \| b .$$



Отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны:

$$(\alpha \| \beta,\ a \| b) \Rightarrow AB = CD .$$

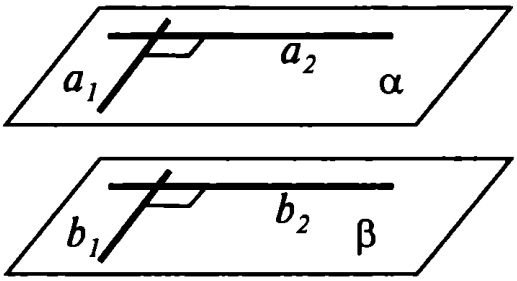
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ

Две прямые называются перпендикулярными, если они пересекаются под прямым углом.

ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМЫХ



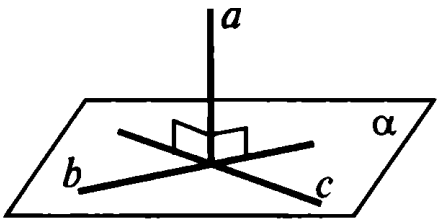
Две пересекающиеся прямые, параллельные соответственно двум перпендикулярным прямым, перпендикулярны:

$$(a_1 \| b_1,\ a_2 \| b_2,\ a_1 \perp a_2) \Rightarrow b_1 \perp b_2 .$$

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, принадлежащей плоскости и проходящей через точку пересечения.

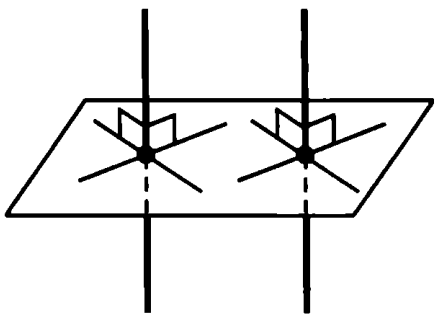
ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым данной плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости:

$$(a \perp b \text{ и } a \perp c) \Rightarrow a \perp \alpha .$$

ПРЯМЫЕ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПЛОСКОСТИ

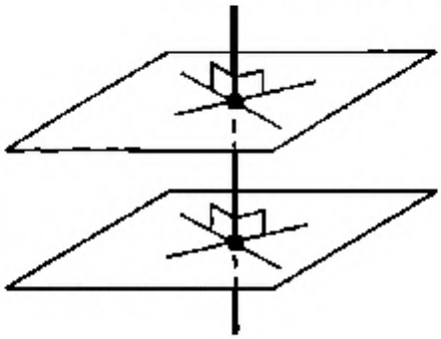


Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна данной плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПРЯМАЯ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНАЯ ПЛОСКОСТЯМ

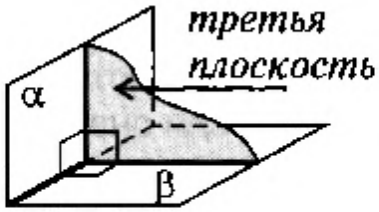


Прямая, перпендикулярная
одной из двух параллельных плоскостей,
перпендикулярна
и другой плоскости.

Две плоскости,
перпендикулярные
одной и той же прямой, параллельны.

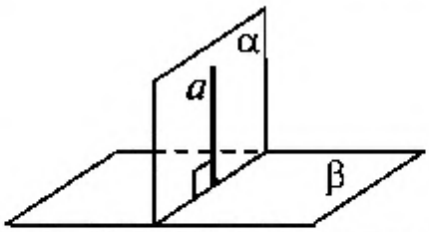
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

Пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными, если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.



$\alpha \perp \beta$

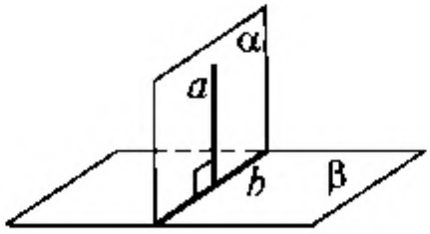
ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПЛОСКОСТЕЙ



Плоскости перпендикулярны,
если одна из них содержит перпендикуляр
к другой плоскости:

$$(a \subset \alpha \text{ и } a \perp \beta) \Rightarrow \alpha \perp \beta.$$

СВОЙСТВО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

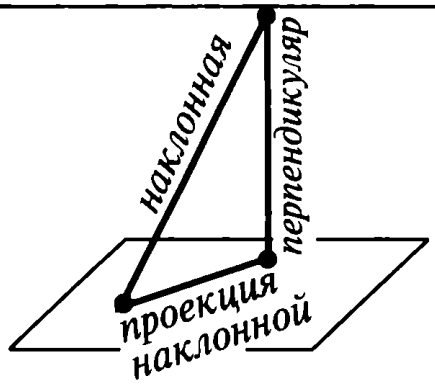


Если плоскости перпендикулярны,
то прямая, лежащая в одной из них
и перпендикулярная линии пересечения
плоскостей, перпендикулярна другой плоскости:

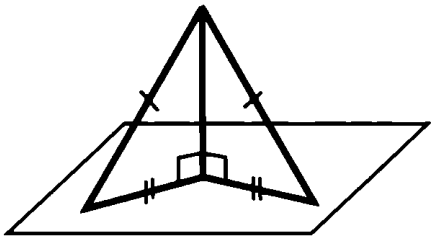
$$(\alpha \perp \beta \text{ и } a \subset \alpha \text{ и } a \perp b) \Rightarrow a \perp \beta.$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННЫЕ

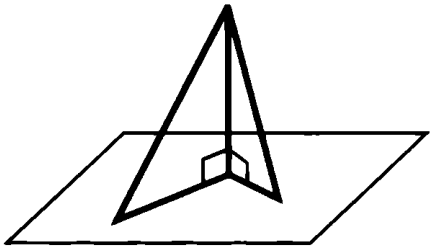


Перпендикуляр короче любой наклонной, проведенной к плоскости из той же точки.



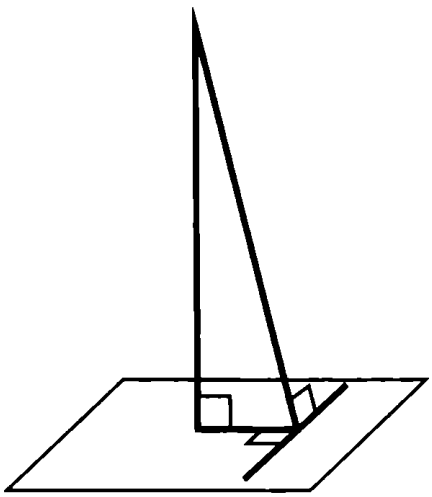
У равных наклонных, проведенных к плоскости из одной точки, проекции равны.

Справедливо и обратное: если у двух наклонных, проведенных из одной точки, проекции равны, то равны и наклонные.



Из двух наклонных, проведенных из одной точки, больше та, у которой проекция больше.

Справедливо и обратное.



Теорема о трех перпендикулярах
(содержит *два* утверждения: прямое и обратное)

Если прямая, лежащая в плоскости и проходящая через основание наклонной, перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна и самой наклонной.

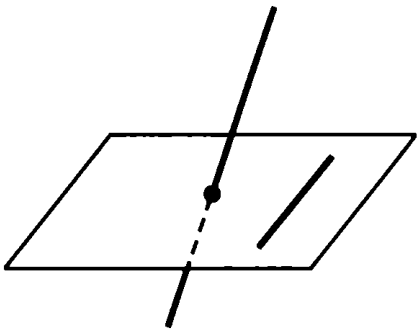
Если прямая, лежащая в плоскости и проходящая через основание наклонной, перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

СКРЕЩИВАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ

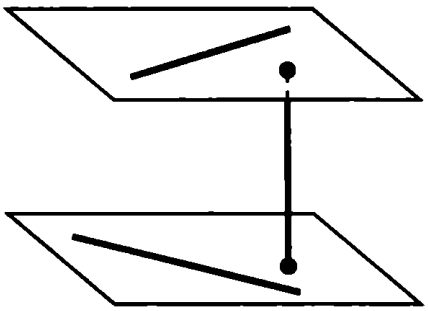
Так называются прямые, которые не лежат в одной плоскости
(то есть не параллельны и не пересекаются).

ПРИЗНАК СКРЕЩИВАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ



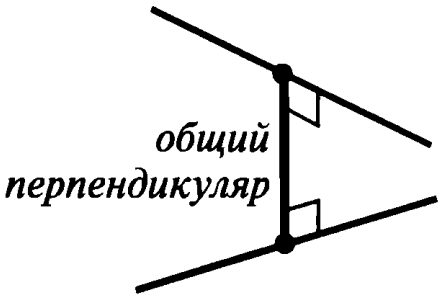
Если одна из двух данных прямых пересекает плоскость, в которой лежит другая прямая, и точка пересечения прямой и плоскости
не принадлежит другой прямой,
то данные прямые скрещиваются.

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ



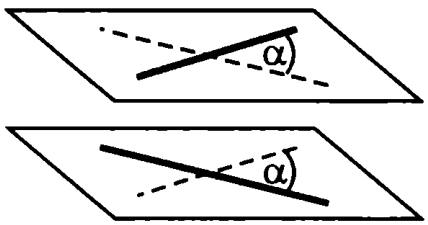
Через две скрещивающиеся прямые можно провести две параллельные плоскости (*единственным образом*).
Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние между этими плоскостями.

ОБЩИЙ ПЕРПЕНДИКУЛЯР К ДВУМ СКРЕЩИВАЮЩИМСЯ ПРЯМЫМ



Так называется отрезок, перпендикулярный каждой из двух скрещивающихся прямых, концы которого лежат на этих прямых.
Длина общего перпендикуляра равна расстоянию между скрещивающимися прямыми.

УГОЛ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

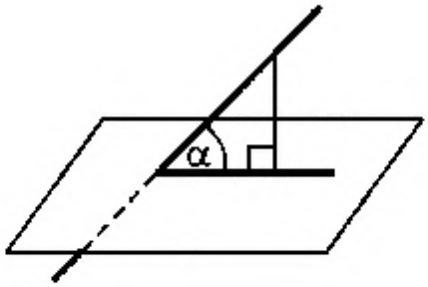


Так называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными
двум данным скрещивающимся прямым.
(Одна из упомянутых пересекающихся прямых
может совпадать
с одной из скрещивающихся.)

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

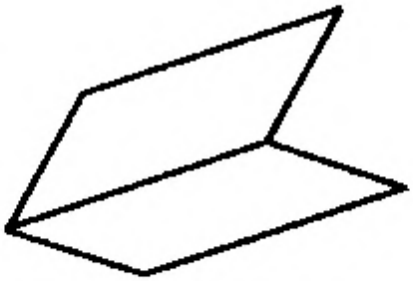
УГЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ



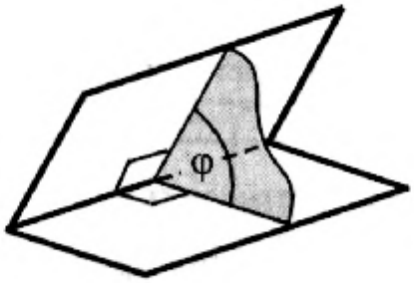
Так называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

ДВУГРАННЫЙ УГОЛ



Так называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей ограничивающей их прямой (эта прямая называется ребром двугранного угла).

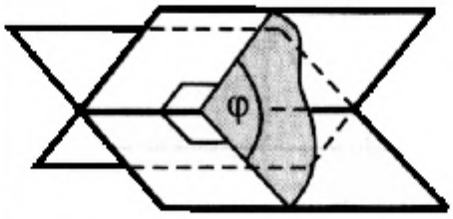
ЛИНЕЙНЫЙ УГОЛ ДВУГРАННОГО УГЛА



Так называется угол между двумя лучами, образующимися при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной ребру двугранного угла.

Мерой φ двугранного угла является мера соответствующего ему линейного угла: $0° < \varphi < 180°$.

УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ

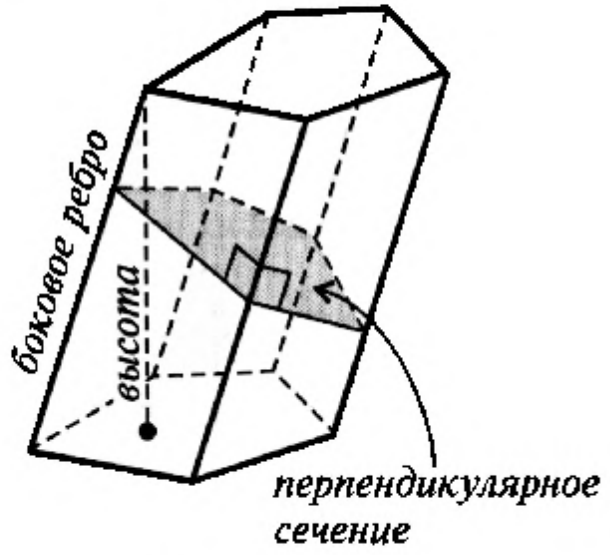


Две пересекающиеся плоскости определяют четыре двугранных угла. Сумма двух таких углов, имеющих общую грань, равна 180°. Углом между плоскостями называют меньший из этих углов:
$0° < \varphi \leqslant 90°$. (Если $\varphi = 90°$, плоскости перпендикулярны.)

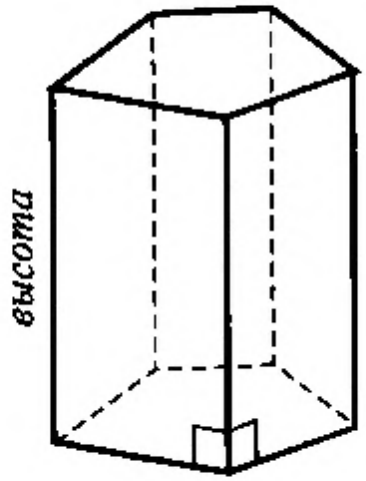
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПРИЗМА

Так называется многогранник, две грани которого (основания) — равные n-угольники, лежащие в параллельных плоскостях,
а остальные n граней (боковые грани) — параллелограммы.
Призма называется **прямой**, если все ее боковые ребра перпендикулярны основаниям. Призма называется **правильной**,
если она прямая и ее основания — правильные многоугольники.



Наклонная призма



Прямая призма

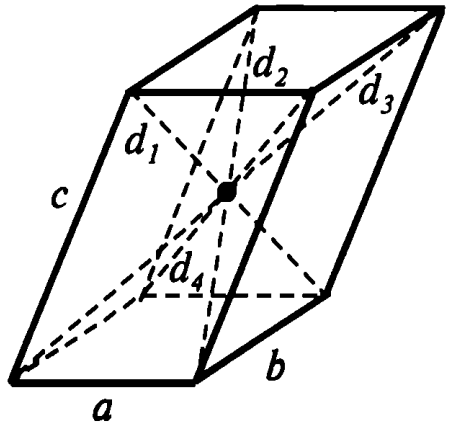
ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ И ОБЪЕМ ПРИЗМЫ

	Наклонная призма	Прямая призма
Боковая поверхность	$S_{бок} = P_{сеч} \cdot l$, где $P_{сеч}$ — периметр перпендикулярного сечения, l — длина бокового ребра	$S_{бок} = P_{осн} \cdot H$, где $P_{осн}$ — периметр основания, H — высота
Полная поверхность	$S_{полн} = S_{бок} + 2 \ldots \cdot S_{осн}$	$S_{полн} = S_{бок} + 2 \ldots \cdot S_{осн}$
Объем	$V = S_{сеч} \cdot l$, где $S_{сеч}$ — площадь перпендикулярного сечения, l — боковое ребро	$V = S_{осн} \cdot H$, где $S_{осн}$ — площадь основания призмы, H — высота

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

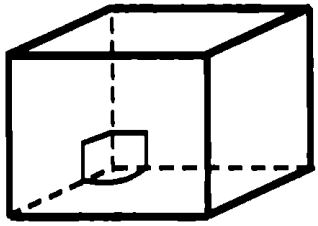
Так называется призма, основания которой — параллелограммы.



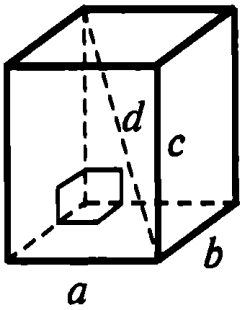
Все грани параллелепипеда — параллелограммы.
Противолежащие грани параллельны и равны.
Все четыре диагонали пересекаются в одной точке
и точкой пересечения делятся пополам.
Точка пересечения диагоналей — центр симметрии.

Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех ребер:

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$$



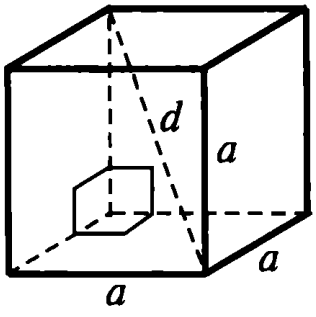
Прямой параллелепипед:
боковые ребра перпендикулярны основаниям.
Боковые грани — *прямоугольники*,
а основания — *параллелограммы*.



Прямоугольный параллелепипед: прямой параллелепипед, основания которого — *прямоугольники*.
Все диагонали равны.
Квадрат диагонали равен сумме квадратов ребер, исходящих из одной вершины:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 .$$

$$S_{\text{полн}} = 2\,(ab + bc + ac);\ V = abc.$$



Куб:
все грани — квадраты.
Все ребра равны.

$$d = \sqrt{3}a\,,\ S_{\text{полн}} = 6a^2,\ V = a^3.$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

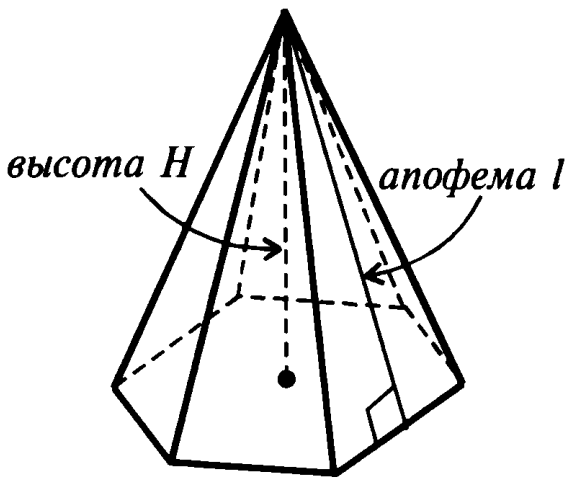
ПИРАМИДА

Так называется многогранник, одна грань которого (основание) — многоугольник, а все остальные грани (боковые) — треугольники, имеющие общую вершину (вершина пирамиды).

Усеченной пирамидой называется часть пирамиды, заключенная между ее основанием и сечением пирамиды, параллельным основанию.

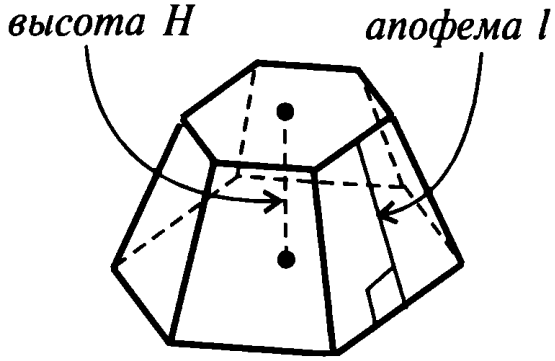
ПРАВИЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Пирамида называется правильной, если основание ее — правильный многоугольник, а вершина проецируется в центр основания.



Боковые грани — равные равнобедренные треугольники.
Боковые ребра равны.
Апофемы равны (*апофемой* пирамиды называется высота ее боковой грани, проведенная из вершины пирамиды, противоположной основанию).

ПРАВИЛЬНАЯ УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА



Боковые грани — равные равнобокие трапеции.
Боковые ребра равны.
Апофемы равны.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ И ОБЪЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ		
	Пирамида	**Усеченная пирамида**
Боковая поверхность	$S_{бок} = \sum_{i=1}^{n} S_i$, где S_i — площадь одной боковой грани	$S_{бок} = \sum_{i=1}^{n} S_i$, где S_i — площадь одной боковой грани
Полная поверхность	$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$	$S_{полн} = S_{бок} + S + s$, где S — площадь нижнего основания, s — площадь верхнего основания
Объем	$V = \frac{1}{3} H... \cdot S_{осн}$	$V = \frac{1}{3} H... \cdot (S + s + \sqrt{Ss})$

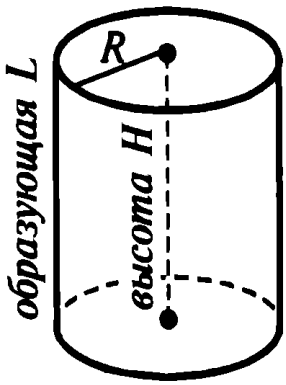
ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ И ОБЪЕМ ПРАВИЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ		
	Пирамида	**Усеченная пирамида**
Боковая поверхность	$S_{бок} = \frac{1}{2} P \cdot l$, где P — периметр основания, l — апофема	$S_{бок} = \frac{1}{2}(P + p) \cdot l$, где P — периметр нижнего основания, p — периметр верхнего основания, l — апофема
Полная поверхность	$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$	$S_{полн} = S_{бок} + S + s$, где S — площадь нижнего основания, s — площадь верхнего основания
Объем	$V = \frac{1}{3} H... \cdot S_{осн}$	$V = \frac{1}{3} H... \cdot (S + s + \sqrt{Ss})$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

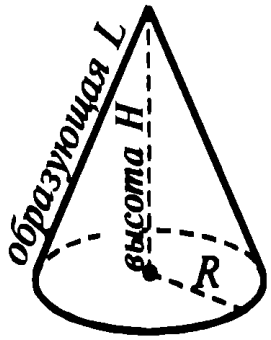
ЦИЛИНДР

Прямым круговым цилиндром называется фигура, полученная при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей одну из его сторон.



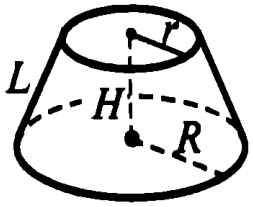
КОНУС

Прямым круговым конусом называется фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей его катет.



УСЕЧЕННЫЙ КОНУС

Так называется часть конуса, ограниченная его основанием и сечением, параллельным основанию.



ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ И ОБЪЕМ ЦИЛИНДРА		
Боковая поверхность	Полная поверхность	Объем
$S_{бок} = 2\pi RH$	$S_{полн} = 2\pi R(R + H)$	$V = \pi R^2 H$

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ И ОБЪЕМ КОНУСА		
	Конус	**Усеченный конус**
Боковая поверхность	$S_{бок} = \pi RL$	$S_{бок} = \pi(R + r)L$
Полная поверхность	$S_{полн} = \pi R(R + L)$	$S_{полн} = \pi(R + r)L + \pi(R^2 + r^2)$
Объем	$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$	$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$

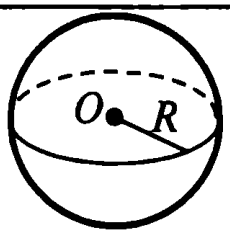
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

СФЕРА. ШАР

Сферой называется множество всех точек пространства, находящихся на данном расстоянии R от данной точки O.

Шаром называется множество всех точек пространства, находящихся от данной точки O на расстоянии, не большем данного расстояния R.

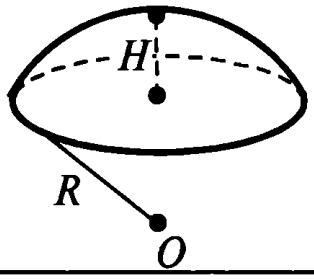
Сфера является поверхностью шара.



Площадь сферы $S = 4\pi R^2$

Объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

ЧАСТИ ШАРА

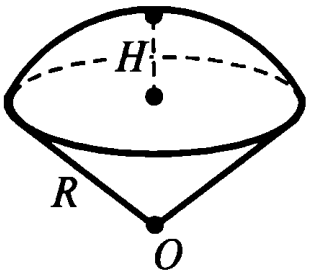


Шаровой сегмент

Объем $V = \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H)$

Площадь сегментной поверхности

$S_{бок} = 2\pi RH$

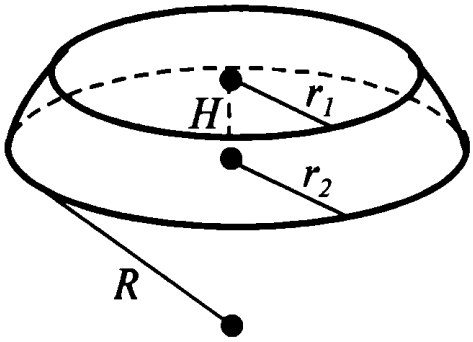


Шаровой сектор

Объем $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$

Площадь полной поверхности

$S_{полн} = \pi R(2H + \sqrt{2RH - H^2})$



Шаровой слой

Объем

$V = \frac{1}{6}\pi H^3 + \frac{1}{2}\pi(r_1^2 + r_2^2)H$

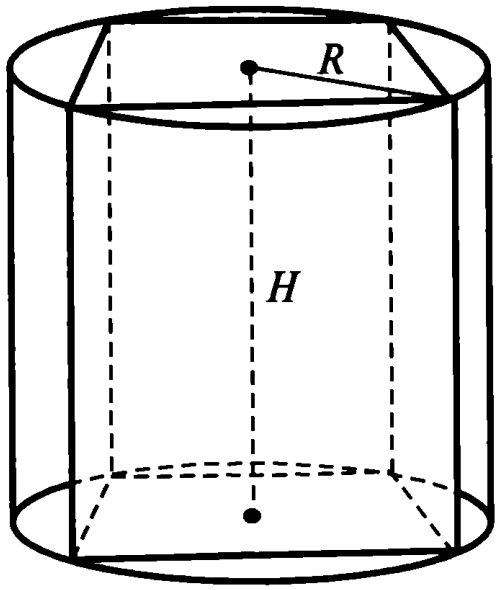
Площадь боковой поверхности

$S_{бок} = 2\pi RH$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ТЕЛА*

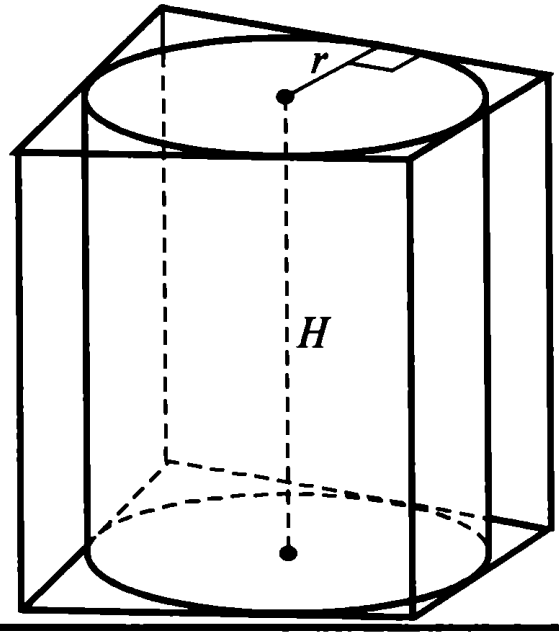
ЦИЛИНДР, ОПИСАННЫЙ ОКОЛО ПРИЗМЫ



Цилиндр можно описать около прямой призмы, если ее основание — многоугольник, вписанный в окружность.
Радиус цилиндра R **равен радиусу** этой окружности.

Ось цилиндра лежит на одной прямой с высотой H призмы, соединяющей центры окружностей, описанных около оснований призмы.

ЦИЛИНДР, ВПИСАННЫЙ В ПРИЗМУ



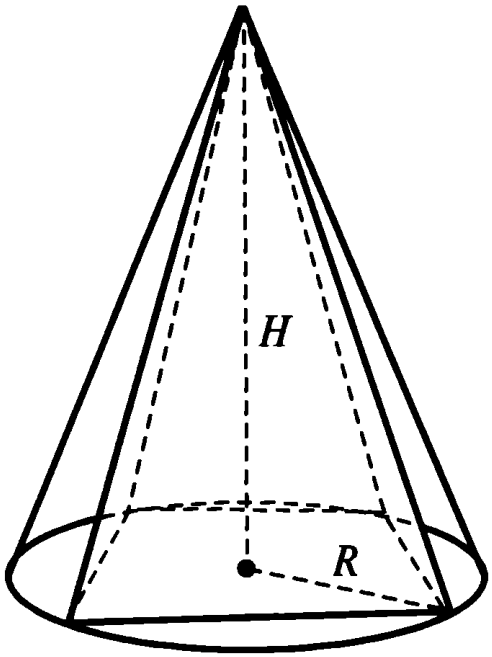
Цилиндр можно вписать в прямую призму, если ее основание — многоугольник, описанный около окружности.
Радиус цилиндра r **равен радиусу этой** окружности.

Ось цилиндра лежит на одной прямой с высотой H призмы, соединяющей центры окружностей, вписанных в основания призмы.

* На рисунках этого раздела описанное тело изображено как прозрачное. Рассмотрены наиболее часто встречающиеся комбинации тел.

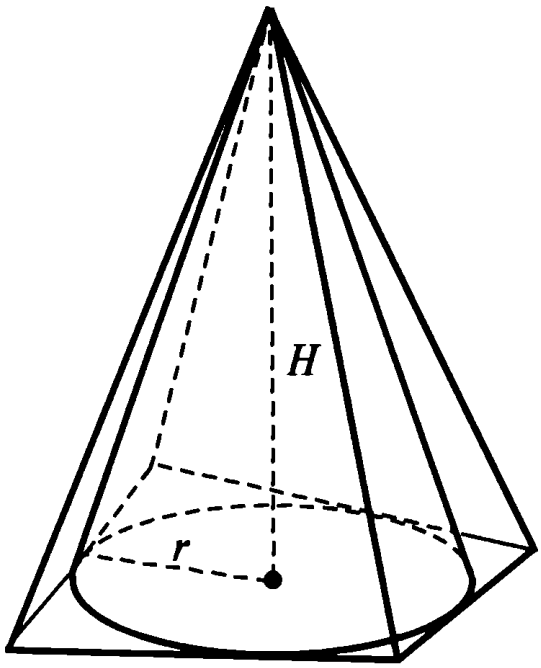
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

КОНУС, ОПИСАННЫЙ ОКОЛО ПИРАМИДЫ



Конус можно описать
около пирамиды,
если ее основание — многоугольник,
вписанный в окружность,
а вершина пирамиды проецируется в центр
этой окружности.
Радиус конуса R
равен радиусу этой окружности,
а высоты H **конуса**
и пирамиды совпадают.

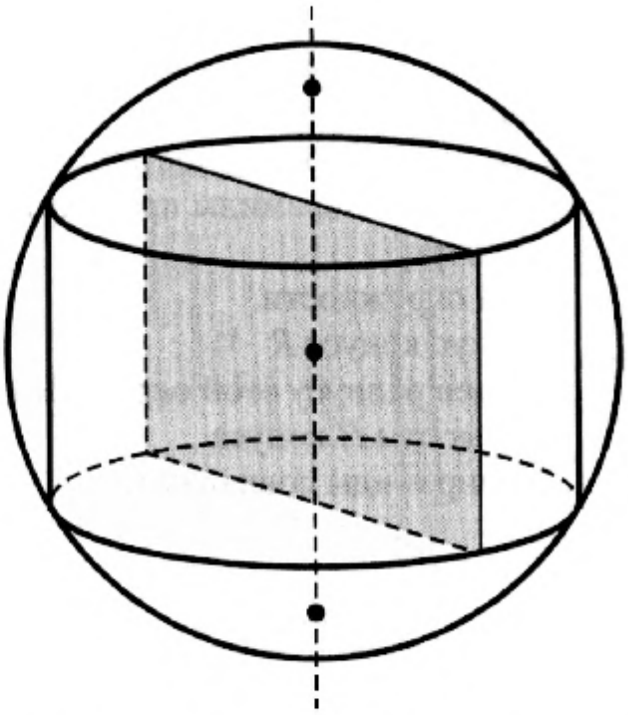
КОНУС, ВПИСАННЫЙ В ПИРАМИДУ



Конус можно вписать
в пирамиду,
если ее основание —
многоугольник,
описанный около окружности,
а вершина пирамиды проецируется в центр этой окружности.
Радиус конуса r
равен радиусу этой окружности,
а высоты H **конуса**
и пирамиды совпадают.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ШАР, ОПИСАННЫЙ ОКОЛО ЦИЛИНДРА

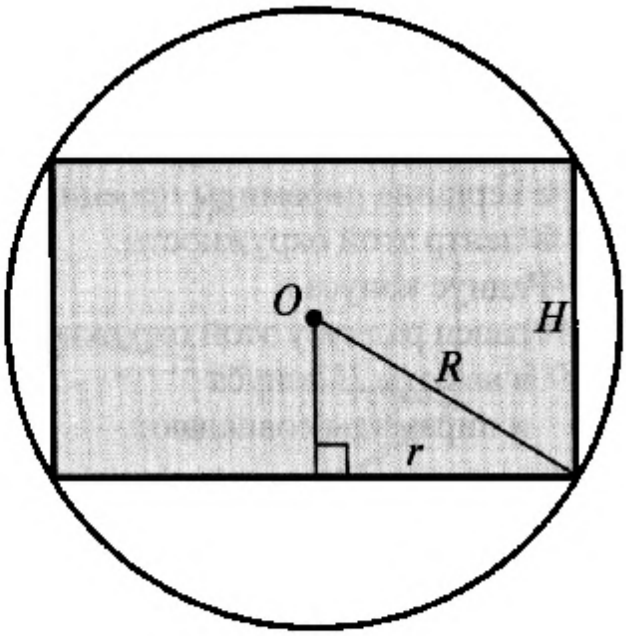


Сечение плоскостью, проходящей через ось цилиндра (осевое сечение)

Шар можно описать около любого (прямого кругового) цилиндра.

Окружности оснований цилиндра лежат на поверхности шара.

Центр шара лежит на середине высоты, проходящей через ось цилиндра.

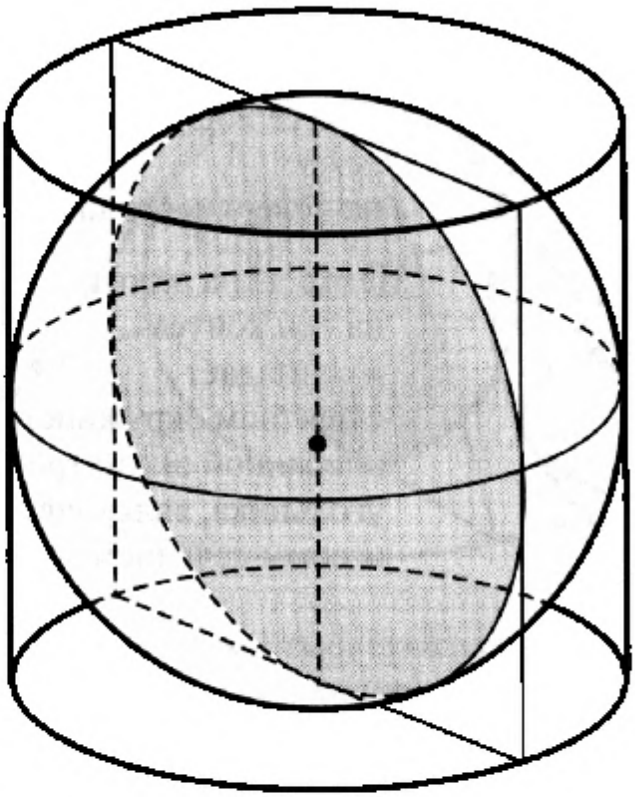


Радиус шара R, радиус цилиндра r и высота цилиндра H связаны соотношением:

$$R^2 = \left(\frac{H}{2}\right)^2 + r^2.$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

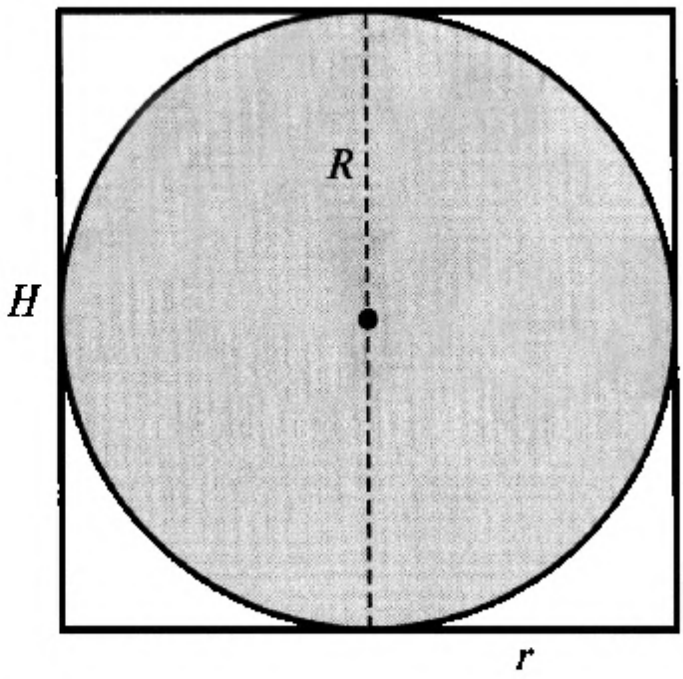
ШАР, ВПИСАННЫЙ В ЦИЛИНДР



Шар можно вписать только в такой цилиндр, высота которого равна диаметру основания (такой цилиндр называется равносторонним).

Шар касается оснований цилиндра в их центрах и боковой поверхности цилиндра по окружности большого круга шара, параллельной основаниям цилиндра.

Сечение плоскостью, проходящей через ось цилиндра (осевое сечение)

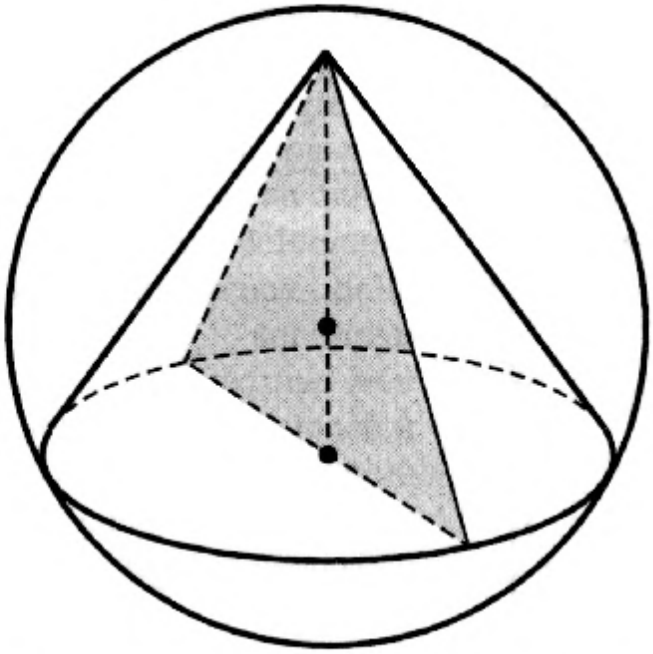


Радиус шара R равен радиусу цилиндра r, а диаметр шара равен высоте цилиндра:

$$R = r,$$
$$2R = H.$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ШАР, ОПИСАННЫЙ ОКОЛО КОНУСА

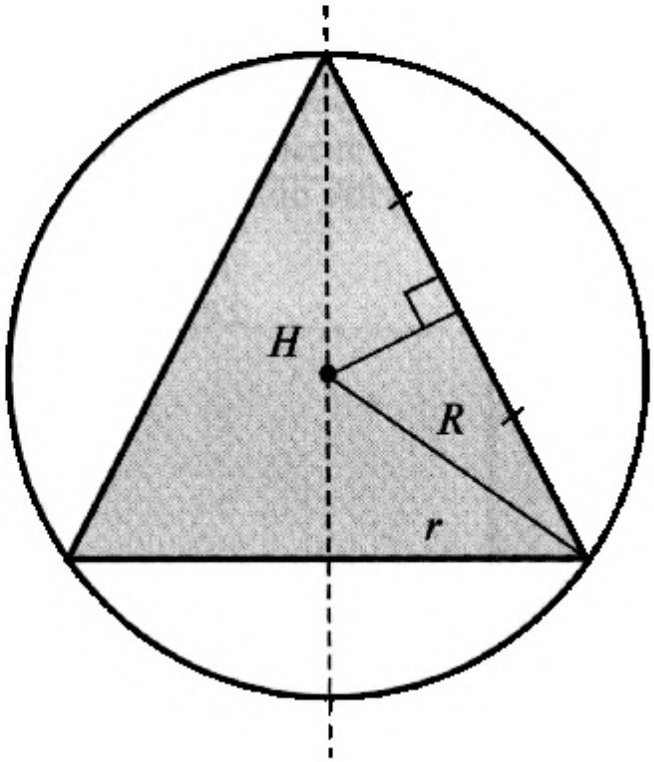


Сечение плоскостью, проходящей через ось конуса (осевое сечение)

Шар можно описать около любого конуса.

Окружность основания конуса и вершина конуса лежат на поверхности шара.

Центр шара лежит на оси конуса и совпадает с центром окружности, описанной около треугольника, являющегося осевым сечением конуса.



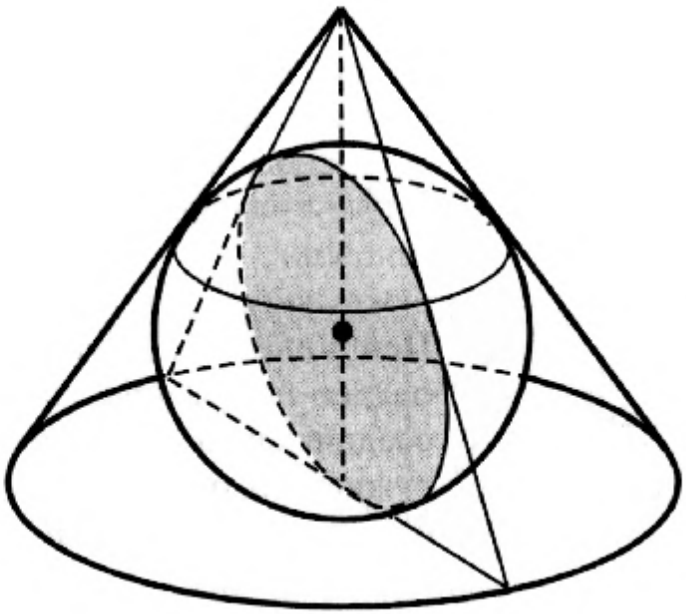
Радиус шара R, радиус конуса r и высота конуса H связаны соотношением:

$$R^2 = (H - R)^2 + r^2.$$

Это соотношение справедливо и в том случае, когда $H \leqslant R$.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ШАР, ВПИСАННЫЙ В КОНУС

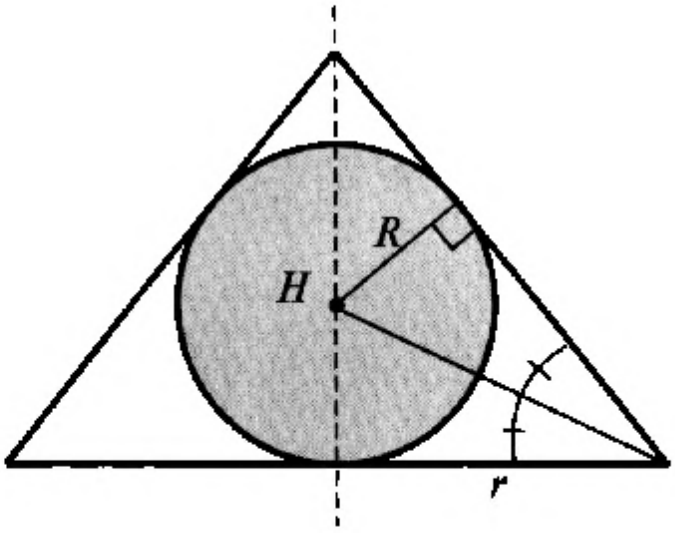


Сечение плоскостью, проходящей через ось конуса (осевое сечение)

Шар можно вписать в любой конус.

Шар касается основания конуса в его центре и боковой поверхности конуса по окружности, лежащей в плоскости, параллельной основанию конуса.

Центр шара лежит на оси конуса и совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник, являющийся осевым сечением конуса.

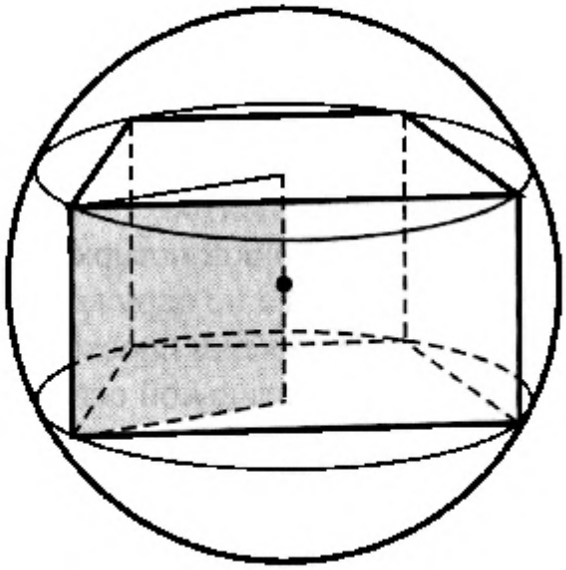


Радиус шара R, радиус конуса r и высота конуса H связаны соотношением:

$$\frac{R}{H-R}=\frac{r}{\sqrt{H^2+r^2}}.$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

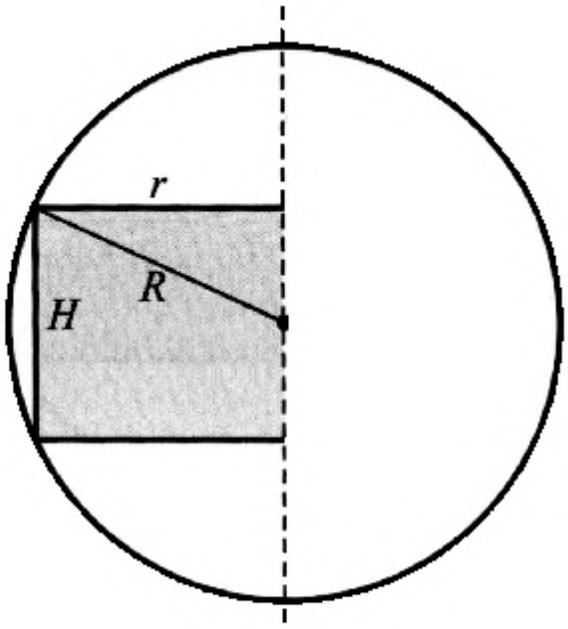
ШАР, ОПИСАННЫЙ ОКОЛО ПРИЗМЫ



Шар можно описать около призмы, если она прямая и ее основания являются многоугольниками, вписанными в окружность.

Центр шара лежит на середине высоты призмы, соединяющей центры окружностей, описанных около оснований призмы.

Сечение полуплоскостью, проходящей через центр шара и боковое ребро призмы. (Полуплоскость ограничена прямой, параллельной боковому ребру призмы и проходящей через центр шара.)

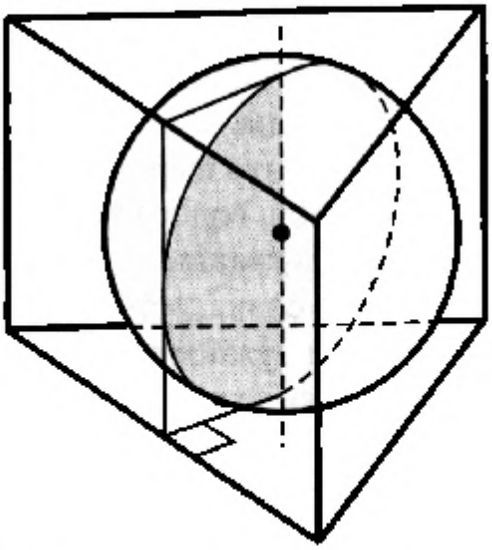


Радиус шара R, высота призмы H и радиус окружности r, описанной около основания призмы, связаны соотношением:

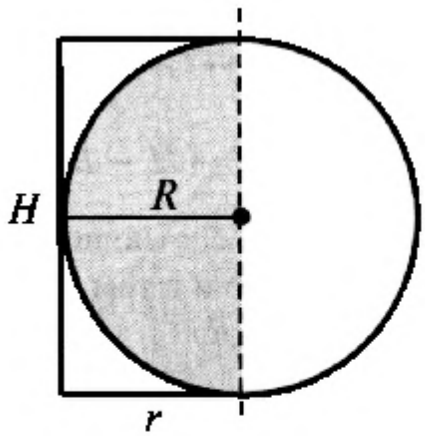
$$R^2 = \left(\frac{H}{2}\right)^2 + r^2.$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ШАР, ВПИСАННЫЙ В ПРЯМУЮ ПРИЗМУ



Сечение полуплоскостью, перпендикулярной боковой грани призмы и проходящей через высоту призмы, соединяющую центры окружностей, вписанных в основания.



Шар можно вписать в прямую призму, если ее основания являются многоугольниками, описанными около окружности, а высота призмы равна диаметру этой окружности.

Радиус вписанного шара равен радиусу этой окружности.

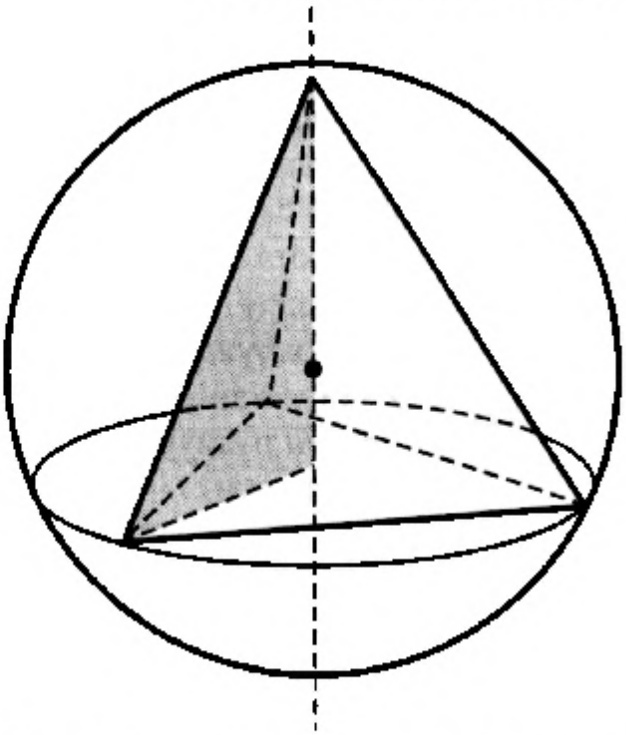
Центр шара лежит на середине высоты призмы, соединяющей центры окружностей, вписанных в основания призмы.

Радиус шара R, высота призмы H и радиус окружности r, вписанной в основание призмы, связаны соотношениями:

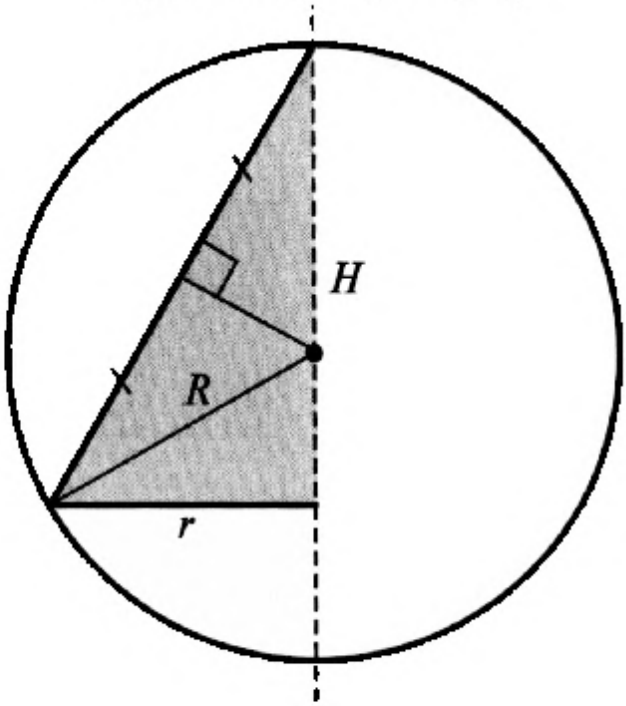
$$R = r = \frac{H}{2}.$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ШАР, ОПИСАННЫЙ ОКОЛО ПРАВИЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ



Сечение полуплоскостью, проходящей через центр шара и боковое ребро пирамиды. (Полуплоскость ограничена прямой, проходящей через высоту пирамиды.)



Шар можно описать около любой правильной пирамиды.

Центр шара лежит на прямой, содержащей высоту пирамиды и совпадает с центром окружности, описанной около равнобедренного треугольника, боковой стороной которого является боковое ребро пирамиды, а высотой — высота пирамиды.

Радиус шара равен радиусу этой окружности.

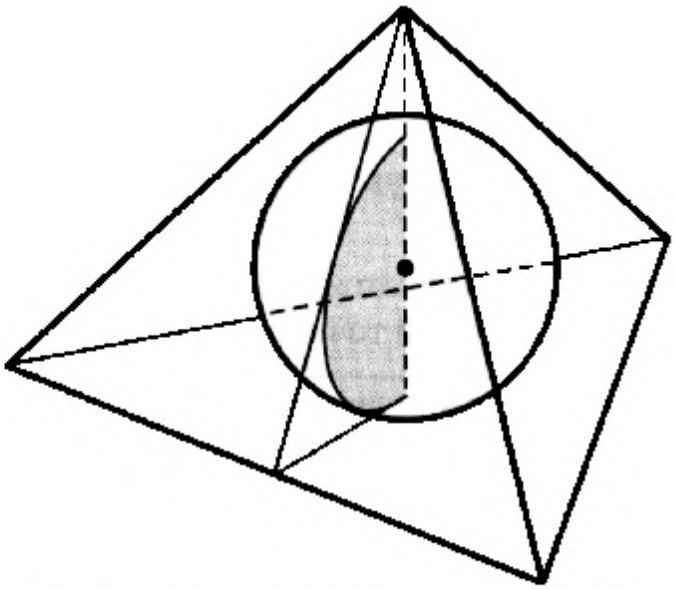
Радиус шара R, высота пирамиды H и радиус окружности r, описанной около основания пирамиды, связаны соотношением:

$$R^2 = (H - R)^2 + r^2 .$$

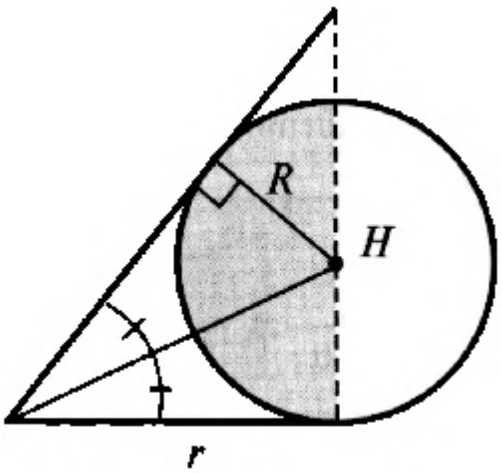
Это соотношение справедливо и в том случае, когда $H \leqslant R$.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ШАР, ВПИСАННЫЙ В ПРАВИЛЬНУЮ ПИРАМИДУ



Сечение полуплоскостью, проходящей через центр шара и апофему пирамиды. (Полуплоскость ограничена прямой, проходящей через высоту пирамиды.)



Шар можно вписать в любую правильную пирамиду.

Центр шара лежит на высоте пирамиды и совпадает с центром окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, боковой стороной которого является апофема (высота боковой грани) пирамиды, а высотой — высота пирамиды.

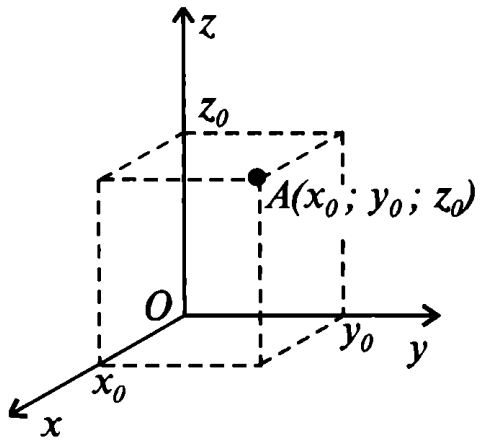
Радиус шара равен радиусу этой окружности.

Радиус шара R, высота пирамиды H и радиус окружности r, вписанной в основание пирамиды, связаны соотношением:

$$\frac{R}{H-R}=\frac{r}{\sqrt{H^2+r^2}}$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

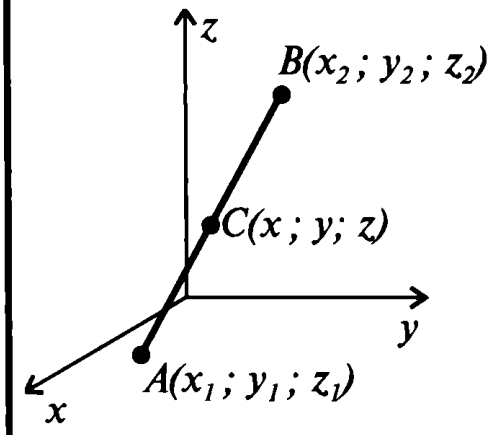
ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ



Оси координат:
ось x — ось абсцисс,
ось y — ось ординат,
ось z — ось аппликат.
Точка O — начало координат.

Любой точке пространства сопоставляются три числа:
абсцисса x_0, ордината y_0
и аппликата z_0.

Эти числа называются декартовыми координатами данной точки.



Расстояние между двумя точками:

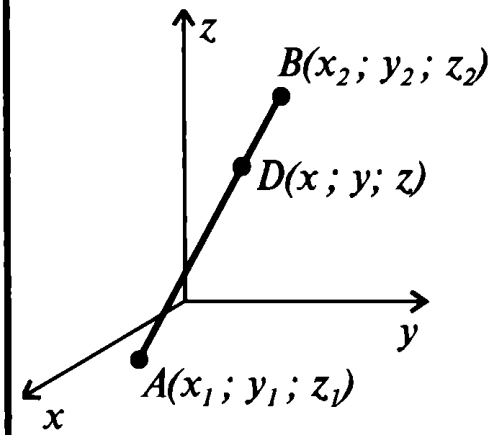
$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Координаты середины отрезка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ и}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} \text{ и}$$

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$



Координаты точки, делящей отрезок в заданном отношении:

если $\frac{AD}{DB} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, то

$$x = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} x_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} x_2$$

$$y = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} y_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} y_2$$

$$z = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} z_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} z_2$$

УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

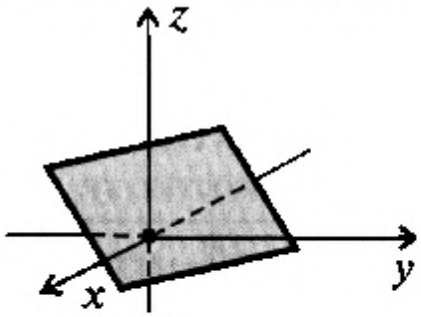
$$ax + by + cz + d = 0$$

(коэффициенты a,b,c не равны нулю одновременно;

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

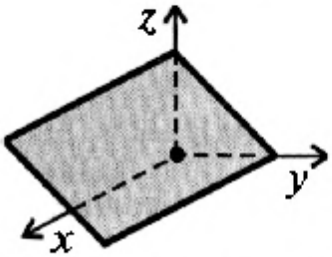
они являются координатами вектора $(\overline{a;b;c})$, перпендикулярного данной плоскости)

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ



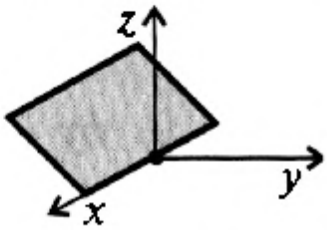
$d = 0 \Rightarrow ax + by + cz = 0$

Плоскость проходит через начало координат.



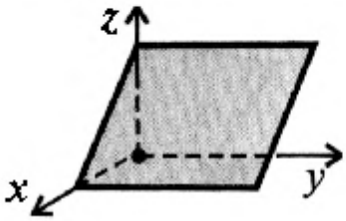
$a = 0 \Rightarrow by + cz + d = 0$

Плоскость параллельна оси x.



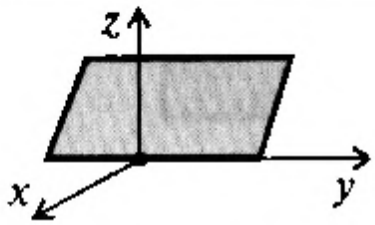
$(a = 0 \text{ и } d = 0) \Rightarrow by + cz = 0$

Плоскость проходит через ось x.



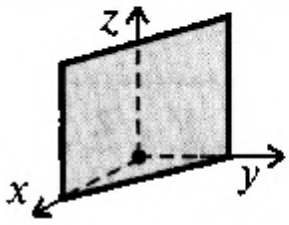
$b = 0 \Rightarrow ax + cz + d = 0$

Плоскость параллельна оси y.



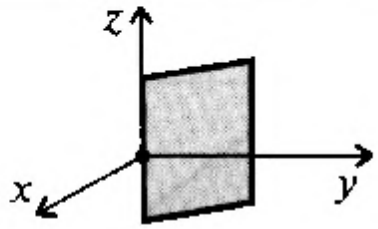
$(b = 0 \text{ и } d = 0) \Rightarrow ax + cz = 0$

Плоскость проходит через ось y.



$c = 0 \Rightarrow ax + by + d = 0$

Плоскость параллельна оси z.



$(c = 0 \text{ и } d = 0) \Rightarrow ax + by = 0$

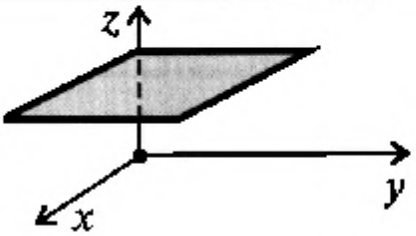
Плоскость проходит через ось z.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

$ax + by + cz + d = 0$

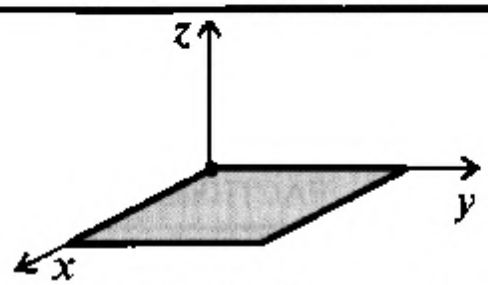
(продолжение)

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com



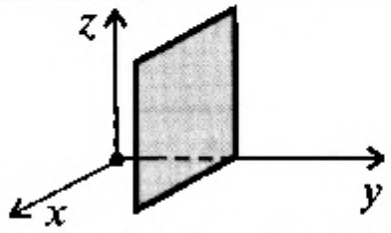
$(a = 0 \text{ и } b = 0) \Rightarrow cz + d = 0$

Плоскость параллельна плоскости *xy*.



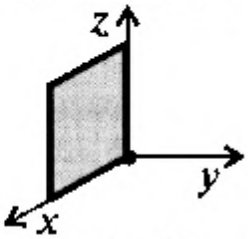
$(a = 0 \text{ и } b = 0 \text{ и } d = 0) \Rightarrow cz = 0$

Плоскость совпадает с плоскостью *xy*.



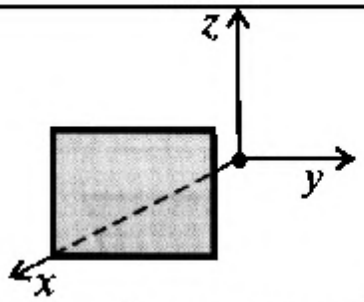
$(a = 0 \text{ и } c = 0) \Rightarrow by + d = 0$

Плоскость параллельна плоскости *xz*.



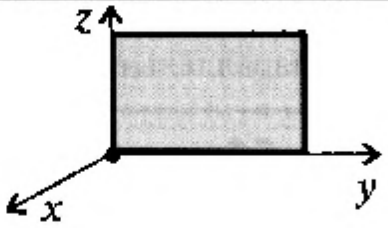
$(a = 0 \text{ и } c = 0 \text{ и } d = 0) \Rightarrow by = 0$

Плоскость совпадает с плоскостью *xz*.



$(b = 0 \text{ и } c = 0) \Rightarrow ax + d = 0$

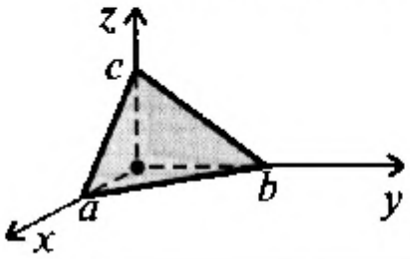
Плоскость параллельна плоскости *yz*.



$(b = 0 \text{ и } c = 0 \text{ и } d = 0) \Rightarrow ax = 0$

Плоскость совпадает с плоскостью *yz*.

УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ В ОТРЕЗКАХ НА ОСЯХ



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$(a \neq 0 \text{ и } b \neq 0 \text{ и } c \neq 0)$

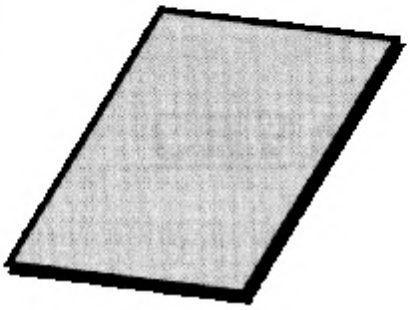
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

$$\alpha_1:\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0;$$

$$\alpha_2:\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

СОВПАДАЮЩИЕ ПЛОСКОСТИ



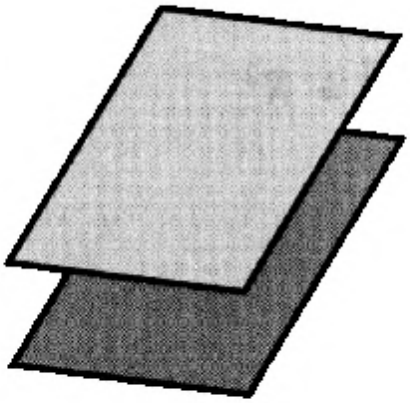
Для коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i, отличных от нуля:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

Для произвольных коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i:

$$\begin{cases} a_1b_2 = a_2b_1 \\ a_1c_2 = a_2c_1 \\ a_1d_2 = a_2d_1 \end{cases}$$

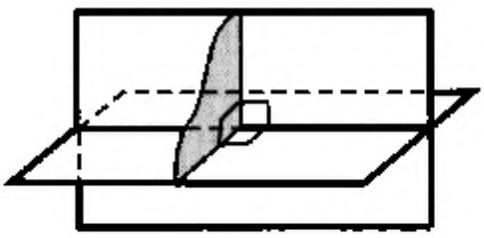
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЛОСКОСТИ



$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$$

$$\begin{cases} a_1b_2 = a_2b_1 \\ a_1c_2 = a_2c_1 \\ a_1d_2 \neq a_2d_1 \end{cases}$$

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПЛОСКОСТИ



$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = {}^{\circ}$$

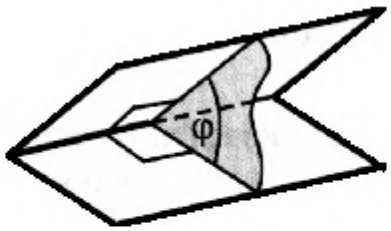
PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПЛОСКОСТЯМИ

(меньший из двух смежных углов)

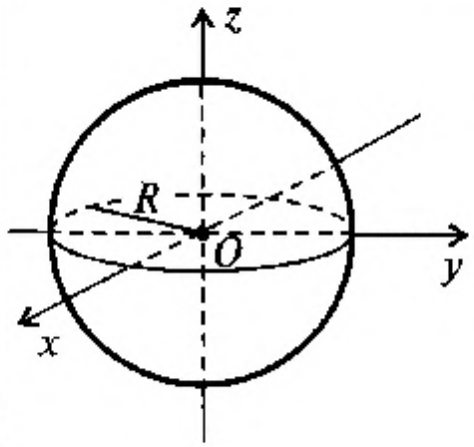
$$\alpha_1:\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0;$$

$$\alpha_2:\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$



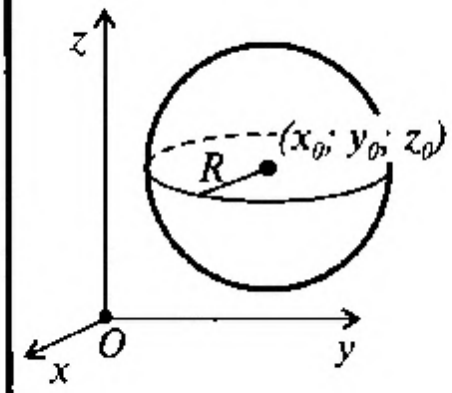
$$\cos\varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

УРАВНЕНИЕ СФЕРЫ



С центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



С центром в точке (x_0, y_0, z_0):

$$(x - x_\circ)^2 + (y - y_\circ)^2 + (z - z_\circ)^2 = R^2$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

на 2	последняя цифра числа четная
на 3	сумма цифр числа делится на 3
на 4	две последние цифры числа нули или образуют число, делящееся на 4
на 5	последняя цифра числа 0 или 5
на 6	число должно делиться на 2 и на 3 (см. соответствующие признаки делимости)
на 8	три последние цифры числа нули или образуют число, делящееся на 8
на 9	сумма цифр числа делится на 9
на 11	сумма цифр, стоящих на четных местах, отличается от суммы цифр, стоящих на нечетных местах, на число, кратное 11
на 25	две последние цифры числа 00, 25, 50 или 75

ТАБЛИЦА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ (до 997)

2	79	191	311	439	577	709	857
3	83	193	313	443	587	719	859
5	89	197	317	449	593	727	863
7	97	199	331	457	599	733	877
11	101	211	337	461	601	739	881
13	103	223	347	463	607	743	883
17	107	227	349	467	613	751	887
19	109	229	353	479	617	757	907
23	113	233	359	487	619	761	911
29	127	239	367	491	631	769	919
31	131	241	373	499	641	773	929
37	137	251	379	503	643	787	937
41	139	257	383	509	647	797	941
43	149	263	389	521	653	809	947
47	151	269	397	523	659	811	953
53	157	271	401	541	661	821	967
59	163	277	409	547	673	823	971
61	167	281	419	557	677	827	977
67	173	283	421	563	683	829	983
71	179	293	431	569	691	839	991
73	181	307	433	571	701	853	997

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ТАБЛИЦА КВАДРАТОВ ДВУЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

десятки	единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

ПРОПОРЦИИ*)

СВОЙСТВА ПРОПОРЦИЙ

1. Произведение крайних членов равно произведению средних, т.е. если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $ad=bc$.

2. В пропорции, все члены которой отличны от нуля, можно менять местами средние и крайние члены пропорции, т.е. если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$, $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$.

ПРОИЗВОДНЫЕ ПРОПОРЦИИ,

полученные из пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$:

$$\frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c} \qquad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

$$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d} \qquad \frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\frac{am_1+bn_1}{am_2+bn_2}=\frac{cm_1+dn_1}{cm_2+dn_2}, \qquad \frac{am_1+cn_1}{am_2+cn_2}=\frac{bm_1+dn_1}{bm_2+dn_2},$$

где m_1, m_2, n_1, n_2 — произвольные числа.

*) Во всех приведенных формулах знаменатели не должны равняться нулю.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

МНОГОЧЛЕНЫ

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

Для $n \in N$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Если n — четное,

$$a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + ab^{n-2} - b^{n-1})$$

Если n — нечетное,

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

БИНОМ НЬЮТОНА

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$$

$$= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний из n по k.

МОДУЛЬ ЧИСЛА

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}, \quad |a| = \sqrt{a^2}$$

$|a| \geqslant 0$;

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

$|a + b| \leqslant |a| + |b|$

$|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

$\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, \ b \neq 0$

$|a - b| \geqslant ||a| - |b||$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ПРОГРЕССИИ

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ	ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ
$a_{n+1} = a_n + d$, где d – разность прогрессии	$b_{n+1} = b_n \cdot q$, где $q \neq 0$ – знаменатель прогрессии

Формулы n-го члена

$a_n = a_1 + (n-1)d$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
$a_n = a_k + (n-k)d$	$b_n = b_k \cdot q^{n-k}$
$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$	$b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$

Формулы суммы первых n членов

$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$	$S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q} = b_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$, $q \neq 1$
	$S_n = b_1 \cdot n$, $q = 1$

Формула для разности	Формула для знаменателя
$d = a_{n+1} - a_n$	$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$

Если $n + m = k + p$, то

$a_n + a_m = a_k + a_p$	$b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_p$

Сумма последовательных натуральных чисел от 1 до n:	Сумма бесконечно убывающей геометрической прогресии:
$S = \frac{n(n+1)}{2}$	$S = \frac{b_1}{1-q}$, $\lvert q \rvert < 1$

ПРОСТЕЙШИЕ НЕРАВЕНСТВА*)

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab; \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2, \; ab > 0$$

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}, \; a \geqslant 0, \; b \geqslant 0$$

(Среднее арифметическое не меньше среднего геометрического)

*) Равенства в приведенных неравенствах достигаются тогда и только тогда, когда $a = b$.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КОРЕНЬ

Арифметическим корнем n-ой степени из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число b, n-ая степень которого равна a, т.е. $\sqrt[n]{a} = b$, если $b^n = a$ $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$.

СВОЙСТВА КОРНЕЙ

Основное свойство корня	$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$, $a \geqslant 0$
Умножение корней	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, $a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$
Деление корней	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, $a \geqslant 0,\ b > 0$
Возведение корня в степень	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, $a \geqslant 0$
Извлечение корня из корня	$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$, $a \geqslant 0$
Вынесение множителя из-под знака корня	$\sqrt[2n]{a^{2n}b} = \lvert a\rvert \cdot \sqrt[2n]{b}$, $b \geqslant 0$ в частности, $\sqrt{a^2b} = \lvert a\rvert \sqrt{b}$ $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}b} = a \cdot \sqrt[2n+1]{b}$
Внесение множителя под знак корня	$a \cdot \sqrt[2n]{b} = \begin{cases} \sqrt[2n]{a^{2n}b}, (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0) \\ -\sqrt[2n]{a^{2n}b}, (a < 0,\ b \geqslant 0) \end{cases}$ $a \cdot \sqrt[2n+1]{b} = \sqrt[2n+1]{a^{2n+1}b}$

СТЕПЕНИ

С натуральным показателем	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$, $a^1 = a$
С положительным дробным показателем	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, где $a \geqslant 0, m, n \in N$
С нулевым показателем	$a^0 = 1$, где $a \neq 0$
С отрицательным рациональным показателем	$a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$, где $a > 0$
Умножение степеней	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$; $a^p \cdot b^p = (ab)^p$
Деление степеней	$\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$; $\dfrac{a^p}{b^p} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^p$
Возведение степени в степень	$(a^p)^q = a^{pq}$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ЛОГАРИФМЫ

Логарифмом положительного числа b по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называется такой показатель степени c, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b.$$

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ*)

- Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$, $b > 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- Логарифм произведения: $\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|$, $xy > 0$
- Логарифм частного: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|$, $\frac{x}{y} > 0$
- Логарифм степени: $\log_a x^p = p \log_a |x|$, $x^p > 0$

  $\log_{a^q} x^p = \frac{p}{q} \log_a |x|$, $x^p > 0$
- Логарифм корня: $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$, $x > 0$
- Формула перехода к другому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ где } b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \text{ где } b > 0,\ b \neq 1$$

*) Во всех приведенных формулах $a > 0$, $a \neq 1$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИИ*)

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ ОДНОГО И ТОГО ЖЕ АРГУМЕНТА

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \qquad \operatorname{ctg}(x + y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}$$

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \qquad \operatorname{ctg}(x - y) = -\frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y + 1}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y}$$

ВЫРАЖЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЧЕРЕЗ ТАНГЕНС ПОЛОВИННОГО УГЛА

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \qquad \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

*)Во всех формулах, приведенных в этом разделе, следует учитывать область допустимых значений левой и правой частей формул.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО АРГУМЕНТА

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x} = \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}{2}$$

ФОРМУЛЫ ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \qquad \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2} \qquad \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$$

ФОРМУЛЫ ТРОЙНОГО АРГУМЕНТА

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{ctg} 3x = \frac{\operatorname{ctg}^3 x - 3\operatorname{ctg} x}{3\operatorname{ctg}^2 x - 1}$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СУММЫ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y} \qquad \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x\sin y}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y} \qquad \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = -\frac{\sin(x-y)}{\sin x\sin y}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} y = -\frac{\cos(x+y)}{\cos x\sin y}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x\cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = -2\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = -2\operatorname{ctg} 2x$$

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos(45°-x) = \sqrt{2}\sin(45°+x)$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin(45°-x) = \sqrt{2}\cos(45°+x)$$

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi),$$

где $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ В СУММУ

$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$

$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)]$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

угол / функция	$\beta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = \pi \pm \alpha$	$\beta = \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = 2\pi \pm \alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\mp \sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm \sin\alpha$
$\cos\beta$	$\mp \sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm \sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\beta$	$\mp \operatorname{ctg}\alpha$	$\pm \operatorname{tg}\alpha$	$\mp \operatorname{ctg}\alpha$	$\pm \operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\beta$	$\mp \operatorname{tg}\alpha$	$\pm \operatorname{ctg}\alpha$	$\mp \operatorname{tg}\alpha$	$\pm \operatorname{ctg}\alpha$

ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ УГЛОВ

Угол в градусах	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Угол в радианах	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.	0	не сущ.	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не сущ.	0	не сущ.

СВОЙСТВА ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a, \qquad |a| \le 1$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a, \qquad |a| \le 1$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a, \qquad a \in \mathrm{R}$$

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a, \qquad a \in \mathrm{R}$$

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}, \qquad |a| \le 1$$

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}, \qquad a \in R$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЫ

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a,\ a>0$
$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Функция	Производная
$f(x)=c$	$c'=0$, где c — const
$f(x)=x^\alpha$	$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$
$f(x)=e^x$	$(e^x)'=e^x$
$f(x)=a^x$	$(a^x)'=a^x\ln a$
$f(x)=\ln x$	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
$f(x)=\log_a x$	$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$
$f(x)=\sin x$	$(\sin x)'=\cos x$
$f(x)=\cos x$	$(\cos x)'=-\sin x$
$f(x)=\operatorname{tg} x$	$(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$f(x)=\operatorname{ctg} x$	$(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$f(x)=\arcsin x$	$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\arccos x$	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\operatorname{arctg} x$	$(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$
$f(x)=\operatorname{arcctg} x$	$(\operatorname{arcctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

$$\int 0 \cdot dx = C$$

$$\int 1 \cdot dx = x + C$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin\dfrac{x}{a} + C \\ -\arccos\dfrac{x}{a} + C \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C \\ -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a} + C \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

ПРОСТЕЙШИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение радиоактивного распада: $y' = -ay$

$y = Ce^{-ax}$, где C — произвольная постоянная.

Уравнение гармонических колебаний: $y'' = -\omega^2 y$

$y = A\cos(\omega x + \varphi)$, где A и φ — произвольные постоянные.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Комплексное число имеет вид $z = a + bi$,
где a и b — действительные числа, i — **мнимая единица**, $i^2 = -1$.
Число a называется **действительной частью** комплексного числа, а число b — его **мнимой частью**;
они обозначаются соответственно $\mathrm{Re}\,z$ и $\mathrm{Im}\,z$.
Числа $a + bi$ и $a - bi$, которые отличаются только знаком мнимой части, называются **сопряженными**.

ДЕЙСТВИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Сложение	$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
Вычитание	$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
Умножение	$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
Деление	$\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i;\quad c^2+d^2 \neq 0$
Возведение в степень числа i	$i^{4m}=1,\ i^{4m+1}=i,\ i^{4m+2}=-1,\ i^{4m+3}=-i.$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Модуль	$r = \sqrt{a^2 + b^2}$
Аргумент	Число α такое, что $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{b}{a}$.
Тригонометрическая форма комплексного числа	$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$
Умножение	$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2)\right)$
Деление	$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left(\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\right)$
Возведение в степень	$z^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$
Формула Муавра	$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$
Извлечение корня:	$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}\right),$ $k = 1, 2, \ldots, n-1.$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ

Число *перестановок* из n элементов:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

Число *размещений* из n элементов по k элементов:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Число *сочетаний* из n элементов по k элементов:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$$

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вероятность случайного события	$P(A) = \frac{m}{n}$, где m — количество элементарных событий, благоприятствующих событию A, n — общее количество равновозможных и несовместных событий, образующих полную группу.
Теорема сложения вероятностей несовместных событий	$P(A+B) = P(A) + P(B)$
Теорема умножения вероятностей несовместных событий	$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$
Вероятность осуществления хотя бы одного из независимых событий	$P(A) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot \ldots \cdot (1 - P(A_n))$ и $A_1, A_2, \ldots A_n$ — взаимно независимые события.
Формула Бернулли	$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$ и $P_{m,n}$ — вероятность того, что событие A наступит в n испытаниях m раз.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

Лев Элевич Генденштейн
Алла Петровна Ершова
Анна Сергеевна Ершова

Наглядный справочник по математике с примерами

Для абитуриентов, школьников, учителей

Ответственный за выпуск *Л.А. Кирик*
Художник-оформитель *А.А. Андреев*

Подписано в печать 28.08.2009. Формат 60×88/16.
Усл.-печ. л. 11,73. Тираж 15 000 экз. Заказ 1575.

ООО «Илекса», 105187, г. Москва, Измайловское шоссе, 48а,
сайт: www.ilexa.ru, E-mail: real@ilexa.ru,
факс 8(495) 365-30-55, телефон 8(495) 984-70-83

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени
«Чеховский полиграфический комбинат»
142300, г. Чехов Московской области,
сайт: www.chpk.ru, E-mail: marketing@chpk.ru,
факс 8(49672) 6-25-36, факс 8(499) 270-73-00,
отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И АБИТУРИЕНТОВ

Л.Э. Генденштейн
А.П. Ершова
А.С. Ершова

МАТЕМАТИКА

Наглядный справочник с примерами



ИЛЕКСА

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com



ISBN 978-5-89237-108-7





PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com