## Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

**15**

*а*) Решите уравнение $2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{tg}x$.

*б*) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

**Решение.**

*а*) Преобразуем уравнение:

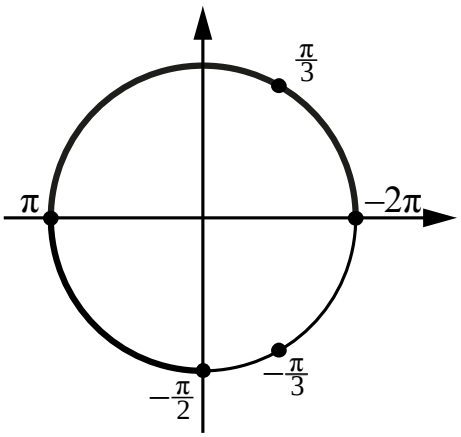
$$2\sin x=\frac{\sin x}{\cos x};\qquad \sin x\left(2-\frac{1}{\cos x}\right)=0;$$

$$\sin x=0 \text{ или } \cos x=\frac{1}{2},$$

откуда

$$x=\pi k \text{ или } x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

*б*) Отберем корни на промежутке $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$ с помощью тригонометрической окружности.




Получаем $x=-2\pi$; $x=-\frac{5\pi}{3}$ и $x=-\pi$.

**Ответ**: а) $\pi k$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-2\pi$, $-\frac{5\pi}{3}$, $-\pi$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*,<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта *а* и пункта *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

© СтатГрад 2014–2015 уч. г. Публикация в Интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена

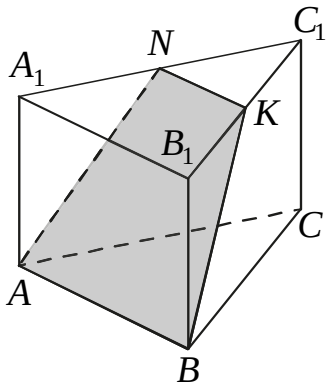
**16** В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник со стороной 6. Высота призмы равна 4. Точка $N$ — середина ребра $A_1C_1$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью $BAN$.

б) Найдите периметр этого сечения.

**Решение.**

а) Проведём через точку $N$ прямую, параллельную прямой $AB$, до пересечения с прямой $B_1C_1$ в точке $K$. Трапеция $ABKN$ — искомое сечение.




б) Имеем $A_1N = 3$, так как точка $N$ — середина ребра $A_1C_1$. Значит $AN = \sqrt{16+9} = 5$. Аналогично $BK = 5$.

Далее $NK = 3$ как средняя линия треугольника $A_1B_1C_1$. Следовательно, искомый периметр сечения равен $6+5+5+3=19$.

**Ответ:** 19.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б* | 2 |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* или обоснованно получен верный ответ в пункте *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

© СтатГрад 2014–2015 уч. г. Публикация в Интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена

***Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 17.1 или 17.2.***

**17.1** Решите неравенство $\log_{x^2+x}\left(x^2-2x+1\right)\le 1$.

**Решение**.

1) Если $x^2+x>1$, то

$$\begin{cases} x^2+x-1>0, \\ 0<x^2-2x+1\le x^2+x; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+x-1>0, \\ x\ne 1, \\ 3x\ge 1, \end{cases}$$

откуда $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}<x<1$ или $x>1$.

2) Если $0<x^2+x<1$, то

$$\begin{cases} x^2+x>0, \\ x^2+x-1<0, \\ x^2-2x+1\ge x^2+x; \end{cases} \qquad \begin{cases} x(x+1)>0, \\ x^2+x-1<0, \\ 3x\le 1, \end{cases}$$

откуда

$$\frac{-\sqrt{5}-1}{2}<x<-1 \text{ или } 0<x\le\frac{1}{3}$$

Объединяя найденные промежутки, получаем решение неравенства:

$$\frac{-\sqrt{5}-1}{2}<x<-1, \text{ или } 0<x\le\frac{1}{3}, \text{ или } \frac{\sqrt{5}-1}{2}<x<1, \text{ или } x>1.$$

**Ответ**: $\left(\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2};-1\right), \left(0;\dfrac{1}{3}\right], \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};1\right), (1;+\infty)$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного включением/исключением точек граничных точек<br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

© СтатГрад 2014–2015 уч. г. Публикация в Интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена

**17.2**

Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}}{x^2+x-1}\le 0$.

**Решение.**

Перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases} x^2+x\ge 0, \\ x^2-2x+1\ge 0, \\ \dfrac{\left(x^2-2x+1\right)-\left(x^2+x\right)}{x^2+x-1}\le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\left(x+1\right)\ge 0, \\ \left(x-1\right)^2\ge 0, \\ \dfrac{3x-1}{x^2+x-1}\ge 0. \end{cases}$$

Из первого неравенства получаем $x\le -1$ или $x\ge 0$.

Второе неравенство выполняется при всех $x$.

Из третьего неравенства получаем $\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}<x\le\dfrac{1}{3}$ или $x>\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Решение данного неравенства: $\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}<x\le -1,\ 0\le x\le\dfrac{1}{3}$ или $x>\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

**Ответ**: $\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};-1\right],\ \left[0;\dfrac{1}{3}\right],\ \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};+\infty\right)$.

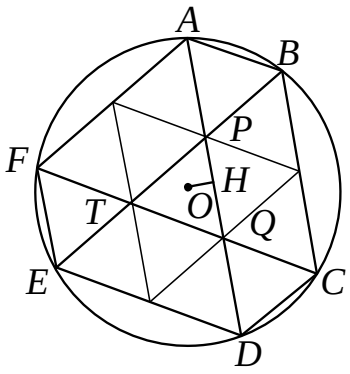
| **Содержание критерия** | **Баллы** |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного включением/исключением граничных точек<br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

© СтатГрад 2014−2015 уч. г. Публикация в Интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена

**18** Хорды $AD$, $BE$ и $CF$ окружности делят друг друга на три равные части.
а) Докажите, что эти хорды равны.
б) Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$, если точки $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ последовательно расположены на окружности, а радиус окружности равен $2\sqrt{21}$.

**Решение.**
а) Пусть две хорды равны $3x$ и $3y$. По теореме о произведении пересекающихся хорд $2x \cdot x = 2y \cdot y$. Отсюда находим, что $x = y$, значит, эти хорды равны. Аналогично докажем, что третья хорда равна каждой из первых двух.

б) Равные хорды равноудалены от центра окружности, поэтому центр равностороннего треугольника с вершинами в точках попарного пересечения хорд совпадает с центром данной окружности. Пусть хорды $BE$ и $CF$ пересекают хорду $AD$ в точках $P$ и $Q$ соответственно, хорды $BE$ и $FC$ пересекаются в точке $T$, а $H$ — проекция центра $O$ на хорду $AD$. Тогда $H$ — общая середина отрезков $AD$ и $PQ$, а $OH$ — радиус вписанной окружности равностороннего треугольника $PQT$ со стороной $PQ$.




Через точку $T$ проведём прямую, параллельную $AD$, через точку $P$ — прямую, параллельную $CF$, а через точку $Q$ — прямую, параллельную $BE$. Эти прямые и хорды $AD$, $BE$ и $CF$ разбивают шестиугольник $ABCDEF$ на 13 одинаковых равносторонних треугольников.
Обозначим $PQ = 2a$. Тогда

$$OH = \frac{2a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad 2\sqrt{21} = OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + 9a^2} = \frac{2a\sqrt{7}}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда находим, что $a = 3$, значит, $PQ = 2a = 6$, $S_{PQT} = a^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.
Следовательно,

$$S_{ABCDEF} = 13S_{PQT} = 13 \cdot 9\sqrt{3} = 117\sqrt{3}.$$

**Ответ:** $117\sqrt{3}$.

© СтатГрад 2014–2015 уч. г. Публикация в Интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а,* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б* | 3 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *б,*<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта *а,* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки | 2 |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а,*<br>ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки,<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |

**19** Оля хочет взять в кредит 100 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10 % годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 24000 рублей?

**Решение.**

Пусть сумма кредита равна $S$, а годовые составляют $a\,\%$. Тогда в последний день каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0{,}01a$.

Составим таблицу выплат.

| Год | Долг банку (руб.) | Остаток доли после выплаты (руб.) |
|---|---|---|
| 0 | 100000 | – |
| 1 | 110000 | 86000 |
| 2 | 94600 | 70600 |
| 3 | 77660 | 53660 |
| 4 | 59026 | 35026 |
| 5 | 38528,6 | 14528,6 |
| 6 | 15981,46 | 0 |

Значит, Оля погасит кредит за 6 лет.

**Ответ**: 6.

© СтатГрад 2014−2015 уч. г. Публикация в Интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 3 |
| Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки<br>ИЛИ<br>получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано | 2 |
| Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |

**20** Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых множество значений функции $y=\dfrac{a+3x-ax}{x^2+2ax+a^2+1}$ содержит отрезок $[0;1]$.

**Решение.**

Запишем функцию в виде $y=\dfrac{a+(3-a)x}{(x+a)^2+1}$.

Отрезок $[0;1]$ содержится в множестве значений данной функции тогда и только тогда, когда уравнения $\dfrac{a+(3-a)x}{(x+a)^2+1}=0$ и $\dfrac{a+(3-a)x}{(x+a)^2+1}=1$ имеют решения.

Решим первое уравнение. Уравнение $(a-3)x=a$ имеет решение при любом $a\neq 3$.

Решим второе уравнение. Уравнение $x^2+3(a-1)x+a^2-a+1=0$ имеет решение тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен:

$$D=9(a-1)^2-4\left(a^2-a+1\right)\geq 0;\ \ 5a^2-14a+5\geq 0;$$

$$\left(a-\frac{7-2\sqrt{6}}{5}\right)\left(a-\frac{7+2\sqrt{6}}{5}\right)\geq 0,$$

откуда $a\leq\dfrac{7-2\sqrt{6}}{5}$ или $a\geq\dfrac{7+2\sqrt{6}}{5}$. Следовательно,

$$a\leq\frac{7-2\sqrt{6}}{5},\ \frac{7+2\sqrt{6}}{5}\leq a<3 \text{ или } a>3.$$

**Ответ:** $a\leq\dfrac{7-2\sqrt{6}}{5},\ \dfrac{7+2\sqrt{6}}{5}\leq a<3,\ a>3.$

© СтатГрад 2014–2015 уч. г. Публикация в Интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен правильный ответ | 4 |
| Найдено множество значений $a$, корни, соответствующие единственному значению параметра не определены<br>ИЛИ<br>Найдены корни, но в множество значений $a$ не включены одна или две граничные точки. | 3 |
| Найдено множество значений $a$, но не включены одна или две граничные точки. Корни, соответствующие единственному значению параметра не найдены. | 2 |
| Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений $a$ | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |

**21** Красный карандаш стоит 17 рублей, синий — 13 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 495 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на пять.

а) Можно ли купить при таких условиях 32 карандаша?

б) Можно ли купить при таких условиях 35 карандашей?

в) Какое наибольшее число карандашей можно купить при таких условиях?

**Решение.**

а) Например, можно купить 14 красных и 18 синих карандашей:

$$14\cdot 17+18\cdot 13=472 \text{ (руб.)}.$$

б) Дешевле всего 35 карандашей будут стоить, если купить наибольшее возможное число синих карандашей и наименьшее возможное число красных, то есть если купить 15 красных и 20 синих, поскольку если красных меньше 15, то синих больше 20, и в этом случае разность между числом красных и синих больше чем 5. Но тогда стоимость покупки

$$15\cdot 17+20\cdot 13=515 \text{ (руб.)},$$

что больше, чем имеющаяся сумма 495 рублей.

в) Пусть $n$ и $m$ — число синих и красных карандашей соответственно. Тогда

$$\begin{cases} 17m+13n\le 495, \\ |m-n|\le 5, \\ m,n=0,1,2,\ldots \end{cases}$$

© СтатГрад 2014–2015 уч. г. Публикация в Интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена

Положим $s = n + m$, тогда

$$\begin{cases} 4m + 13s \le 495, \\ -5 \le 2m - s \le 5, \\ m = 0, 1, ..., s; \end{cases} \qquad \begin{cases} m \le \dfrac{495 - 13s}{4}, \\ \dfrac{s-5}{2} \le m \le \dfrac{s+5}{2}, \\ m = 0, 1, ..., s. \end{cases}$$

Следовательно, $\dfrac{s-5}{2} \le \dfrac{495-13s}{4}$, откуда $s \le 33\dfrac{2}{3}$.

Можно купить не больше 33 карандашей. Осталось проверить, возможен ли случай, когда $s = 33$. При $m = 14$, $n = 19$ получаем

$$14 \cdot 17 + 19 \cdot 13 = 485 < 495.$$

Значит, наибольшее возможное число карандашей 33.

**Ответ**: а) да; б) нет; в) 33.

| **Содержание критерия** | **Баллы** |
|---|---|
| Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты | 4 |
| Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов | 3 |
| Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов | 2 |
| Верно получен один из следующих результатов:<br>– пример в п. *а*,<br>– обоснованное решение в п. *б*,<br>– искомая оценка в п. *в*,<br>– пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |

© СтатГрад 2014–2015 уч. г. Публикация в Интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена

## Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

**15**

*а*) Решите уравнение $2\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x$.

*б*) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

**Решение.**

*а*) Преобразуем уравнение:

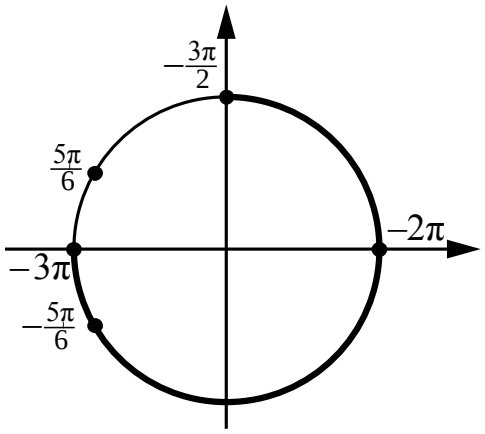
$$-2\sin x=\frac{\sqrt{3}\sin x}{\cos x};\qquad \sin x\left(2+\frac{\sqrt{3}}{\cos x}\right)=0;$$

$$\sin x=0 \text{ или } \cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

откуда

$$x=\pi k \text{ или } x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

*б*) Отберем корни на промежутке $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$ с помощью тригонометрической окружности.




Получаем $x=-3\pi$; $x=-\frac{17\pi}{6}$ и $x=-2\pi$.

**Ответ**: а) $\pi k$, $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-3\pi$, $-\frac{17\pi}{6}$, $-2\pi$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*,<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта *а* и пункта *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

© СтатГрад 2014–2015 уч. г. Публикация в Интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена

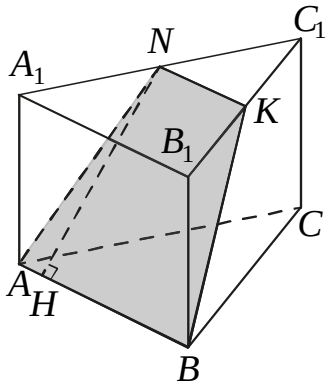
**16** В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник со стороной 8. Высота призмы равна 3. Точка $N$ — середина ребра $A_1C_1$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью $BAN$.

б) Найдите площадь этого сечения.

**Решение.**

а) Проведём через точку $N$ прямую, параллельную прямой $AB$ до пересечения с прямой $B_1C_1$ в точке $K$. Трапеция $ABKN$ — искомое сечение.




б) Имеем $A_1N = 4$, так как точка $N$ — середина ребра $A_1C_1$. Значит, $AN = \sqrt{16+9} = 5$.

Далее $NK = 3$ как средняя линия треугольника $A_1B_1C_1$.

Опустим из точки $N$ высоту $NH$ на сторону $AB$. Имеем $AH = \dfrac{AB - NK}{2} = 2$.

Высота $NH$ равна $\sqrt{AN^2 - AH^2} = \sqrt{21}$. Следовательно, искомая площадь сечения равна $\dfrac{AB + NK}{2} \cdot NH = \dfrac{8+4}{2} \cdot \sqrt{21} = 6\sqrt{21}$.

**Ответ:** $6\sqrt{21}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а,* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б* | 2 |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а,* или обоснованно получен верный ответ в пункте *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

© СтатГрад 2014–2015 уч. г. Публикация в Интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена

***Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 17.1 или 17.2.***

**17.1** Решите неравенство $\log_{x^2-x}\left(x^2+4x+4\right)\geq 1$.

**Решение**.

1) Если $x^2-x>1$, то

$$\begin{cases} x^2-x-1>0, \\ x^2+4x+4\geq x^2-x; \end{cases} \quad \text{вместо} \quad \begin{cases} x^2-x-1>0, \\ 5x\geq -4, \end{cases}$$

откуда

$$-\frac{4}{5}\leq x<\frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ или } x>\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

2) Если $0<x^2-x<1$, то

$$\begin{cases} x^2-x>0, \\ x^2-x-1<0, \\ 0<x^2+4x+4\leq x^2-x; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x-1)>0, \\ x^2-x-1<0, \\ x\neq -2, \\ 5x\leq -4. \end{cases}$$

Система решений не имеет, поскольку неравенства $x^2-x-1<0$ и $5x\leq -4$ совместно не выполняются ни для какого $x$.

**Ответ**: $\left[-\frac{4}{5};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного включением/исключением точек граничных точек<br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

© СтатГрад 2014–2015 уч. г. Публикация в Интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена

**17.2**

Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2-x}}{x^2-x-1}\le 0$.

**Решение.**

Перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases} x^2-x\ge 0, \\ x^2+4x+4\ge 0, \\ \dfrac{\left(x^2+4x+4\right)-\left(x^2-x\right)}{x^2-x-1}\le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x-1)\ge 0, \\ (x+2)^2\ge 0, \\ \dfrac{5x+4}{x^2-x-1}\le 0. \end{cases}$$

Из первого неравенства получаем $x\le 0$ или $x\ge 1$.

Второе неравенство выполняется при всех $x$.

Из третьего неравенства получаем $x\le -\dfrac{4}{5}$ или $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Решение данного неравенства: $x\le -\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<x\le 0$ или $1\le x<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

**Ответ**: $\left(-\infty;-\dfrac{4}{5}\right],\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};0\right],\left[1;\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

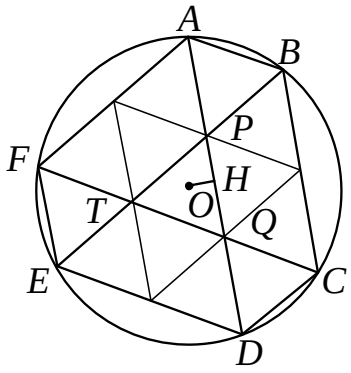
| **Содержание критерия** | **Баллы** |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного включением/исключением граничных точек<br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

© СтатГрад 2014–2015 уч. г. Публикация в Интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена

**18** Хорды $AD$, $BE$ и $CF$ окружности делят друг друга на три равные части.
а) Докажите, что эти хорды равны.
б) Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$, если точки $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ последовательно расположены на окружности, а радиус окружности равен $2\sqrt{14}$.

**Решение.**
а) Пусть две хорды равны $3x$ и $3y$. По теореме о произведении пересекающихся хорд $2x \cdot x = 2y \cdot y$. Отсюда находим, что $x = y$, значит, эти хорды равны. Аналогично докажем, что третья хорда равна каждой из первых двух.

б) Равные хорды равноудалены от центра окружности, поэтому центр равностороннего треугольника с вершинами в точках попарного пересечения хорд совпадает с центром данной окружности. Пусть хорды $BE$ и $CF$ пересекают хорду $AD$ в точках $P$ и $Q$ соответственно, хорды $BE$ и $FC$ пересекаются в точке $T$, а $H$ — проекция центра $O$ на хорду $AD$. Тогда $H$ — общая середина отрезков $AD$ и $PQ$, а $OH$ — радиус вписанной окружности равностороннего треугольника $PQT$ со стороной $PQ$.




Через точку $T$ проведём прямую, параллельную $AD$, через точку $P$ — прямую, параллельную $CF$, а через точку $Q$ — прямую, параллельную $BE$. Эти прямые и хорды $AD$, $BE$ и $CF$ разбивают шестиугольник $ABCDEF$ на 13 одинаковых равносторонних треугольников.
Обозначим $PQ = 2a$. Тогда

$$OH = \frac{2a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3},\ 2\sqrt{14} = OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + 9a^2} = \frac{2a\sqrt{7}}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда находим, что $a = \sqrt{6}$, значит, $PQ = 2a = 2\sqrt{6}$, $S_{PQT} = a^2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.
Следовательно,

$$S_{ABCDEF} = 13S_{PQT} = 13 \cdot 6\sqrt{3} = 78\sqrt{3}.$$

**Ответ:** $78\sqrt{3}$.

© СтатГрад 2014–2015 уч. г. Публикация в Интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а.* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б* | 3 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *б,*<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта *а,* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки | 2 |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а,*<br>ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки,<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |

**19** Оля хочет взять в кредит $1\,200\,000$ рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10 % годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более $320\,000$ рублей?

**Решение.**

Пусть сумма кредита равна $S$, а годовые составляют $a\,\%$. Тогда в последний день каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0{,}01a$.

Составим таблицу выплат.

| Год | Долг банку (руб.) | Остаток доли после выплаты (руб.) |
|---|---|---|
| 0 | 1200000 | – |
| 1 | 1320000 | 1000000 |
| 2 | 1100000 | 780000 |
| 3 | 858000 | 538000 |
| 4 | 591800 | 271800 |
| 5 | 298980 | 0 |

Значит, Оля погасит кредит за 5 лет.

**Ответ**: 5.

© СтатГрад 2014−2015 уч. г. Публикация в Интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 3 |
| Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки<br>ИЛИ<br>получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано | 2 |
| Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |

**20** Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых множество значений функции $y=\dfrac{5a-15x+ax}{x^2-2ax+a^2+25}$ содержит отрезок $[0;1]$.

**Решение.**

Запишем функцию в виде $y=\dfrac{5a+(a-15)x}{(x-a)^2+25}$.

Отрезок $[0;1]$ содержится в множестве значений данной функции тогда и только тогда, когда уравнения $\dfrac{5a+(a-15)x}{(x-a)^2+25}=0$ и $\dfrac{5a+(a-15)x}{(x-a)^2+25}=1$ имеют решения.

Решим первое уравнение. Уравнение $(15-a)x=5a$ имеет решение при любом $a\neq 15$.

Решим второе уравнение. Уравнение $x^2+3(5-a)x+a^2-5a+25=0$ имеет решение тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен.

$$D=9(5-a)^2-4\left(a^2-5a+25\right)\geq 0;\quad a^2-14a+25\geq 0;$$

$$\left(a-7+2\sqrt{6}\right)\left(a-7-2\sqrt{6}\right)\geq 0,$$

откуда $a\leq 7-2\sqrt{6}$ или $a\geq 7+2\sqrt{6}$.

Следовательно,

$$a\leq 7-2\sqrt{6},\ 7+2\sqrt{6}\leq a<15 \text{ или } a>15.$$

**Ответ:** $a\leq 7-2\sqrt{6},\ 7+2\sqrt{6}\leq a<15,\ a>15$.

© СтатГрад 2014–2015 уч. г. Публикация в Интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен правильный ответ | 4 |
| Найдено множество значений $a$, корни, соответствующие единственному значению параметра не определены<br>ИЛИ<br>Найдены корни, но в множество значений $a$ не включены одна или две граничные точки. | 3 |
| Найдено множество значений $a$, но не включены одна или две граничные точки. Корни, соответствующие единственному значению параметра не найдены. | 2 |
| Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений $a$ | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |

**21** Красный карандаш стоит 18 рублей, синий — 14 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 499 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на шесть.

а) Можно ли купить 30 карандашей?

б) Можно ли купить 33 карандаша?

в) Какое наибольшее число карандашей можно купить?

**Решение.**

а) Например, можно купить 12 красных и 18 синих карандашей:

$$12\cdot 18+18\cdot 14=468 \text{ (руб.).}$$

б) Дешевле всего 33 карандаша будут стоить, если купить наибольшее возможное число синих карандашей и наименьшее возможное число красных, то есть если купить 14 красных и 19 синих, поскольку если красных меньше 14, то синих больше 19, и в этом случае разность между числом красных и синих больше чем 6. Но тогда стоимость покупки

$$14\cdot 18+19\cdot 14=518 \text{ (руб.),}$$

что больше, чем имеющаяся сумма 499 рублей.

в) Пусть $n$ и $m$ — число синих и красных карандашей соответственно. Тогда

$$\begin{cases} 18m+14n\le 499, \\ |m-n|\le 6, \\ m,n=0,1,2,\ldots \end{cases}$$

© СтатГрад 2014–2015 уч. г. Публикация в Интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена

Положим $s = n + m$, тогда

$$\begin{cases} 4m + 14s \le 499, \\ -6 \le 2m - s \le 6, \\ m = 0, 1, ..., s. \end{cases} \qquad \begin{cases} m \le \dfrac{499 - 14s}{4}, \\ \dfrac{s-6}{2} \le m \le \dfrac{s+6}{2}, \\ m = 0, 1, ..., s. \end{cases}$$

Следовательно, $\frac{s-6}{2} \le \frac{499-14s}{4}$, откуда $s \le 31\frac{15}{16}$.

Можно купить не более 31 карандаша. Осталось проверить, возможен ли случай, когда $s = 31$. При $m = 13$, $n = 18$ получаем

$$13 \cdot 18 + 18 \cdot 14 = 486 < 499.$$

Значит, наибольшее возможное число карандашей 31.

**Ответ**: а) да; б) нет; в) 31.

| **Содержание критерия** | **Баллы** |
|---|---|
| Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты | 4 |
| Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов | 3 |
| Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов | 2 |
| Верно получен один из следующих результатов:<br>– пример в п. *а*,<br>– обоснованное решение в п. *б*,<br>– искомая оценка в п. *в*,<br>– пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |

© СтатГрад 2014–2015 уч. г. Публикация в Интернете или печатных изданиях без письменного согласия СтатГрад запрещена