Часть 1

Ответом на задания B1–B8 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерения писать не нужно.

B1 Найдите значение выражения $-\dfrac{10}{\sin^2 92^\circ + \sin^2 182^\circ}$.

Ответ: _____

B2 В таблице даны сведения о населении и площади девяти крупнейших городов Российской Федерации.

	Город	Численность населения (тыс. чел.)	Площадь (кв. км)
1	Екатеринбург	1396,1	487
2	Казань	1176,2	425
3	Москва	11980	2511
4	Нижний Новгород	1259,9	411
5	Новосибирск	1523,8	506
6	Омск	1160,7	573
7	Самара	1171,6	541
8	Санкт-Петербург	5028	1439
9	Челябинск	1156,2	501

Найдите города, в которых численность населения отличается от медианы этой величины не более, чем на 100 тыс. жителей. В ответ запишите количество таких городов.

Ответ: _____

B3 Симметричную монету бросили дважды. Известно, что при одном из бросков выпал орёл. Найдите вероятность того, что при другом броске также выпал орёл. При необходимости ответ округлите до сотых.

Ответ: _____

B4 Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Найдите высоту треугольника, проведённую из вершины прямого угла.

Ответ: _____

B5 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S – вершина, $SO=12$, $AC=18$. Найдите боковое ребро SB.

Ответ: _____

B6 При температуре $0°C$ рельс имеет длину $l_0=15$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t°)=l_0(1+\alpha\cdot t°)$, где $\alpha=1{,}2\cdot 10^{-5}(°C)^{-1}$ – коэффициент теплового расширения, $t°$ – температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 9 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Ответ: _____

B7 Заказ на изготовление 154 деталей первый рабочий выполняет на 3 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей за час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 3 детали больше?

Ответ: _____

B8 Найдите точку максимума функции $y=x^3+12x^2+13$.

Ответ: _____

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С7 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

С1 а) Решите уравнение $4\cos^4 x - 3\cos 2x - 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие интервалу $\left(-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right)$.

С2 На ребре BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбрана точка K так, что $KB_1 = 4$ и $KB = 5$. Постройте сечение куба плоскостью A_1DK и найдите его площадь.

С3 а) Решите неравенство $x + \frac{20}{x+6} \geq 6$.

б) Решите неравенство $\sqrt{x+4,2} + \frac{1}{\sqrt{x+4,2}} \geq \frac{5}{2}$.

в) Найдите все решения второго неравенства, не являющиеся решениями первого.

С4 В треугольник ABC вписана окружность радиуса R, касающаяся стороны AC в точке D, причём $AD = R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F.

Найдите площадь треугольника BEF, если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.

С5 Предприниматель взял в банке кредит на сумму 9930000 рублей под 10% годовых. Схема погашения кредита: раз в год клиент должен выплачивать банку одну и ту же сумму, которая состоит из двух частей. Первая часть составляет 10% от оставшейся суммы долга, а вторая часть направлена на погашение оставшейся суммы долга. Каждый следующий год проценты начисляются только на оставшуюся сумму долга.

Какой должна быть ежегодная сумма выплаты (в рублях), чтобы предприниматель полностью погасил кредит тремя равными платежами?

С6 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - |x - a + 6| = |x + a - 6| - (a - 6)^2$$

имеет единственный корень.

С7 а) Приведите пример такого натурального числа n, что числа n^2 и $(n+24)^2$ дают одинаковый остаток при делении на 100.

б) Сколько существует трёхзначных чисел n с указанным в пункте a свойством?

в) Сколько существует двузначных чисел m, для каждого из которых существует ровно 36 трёхзначных чисел n, таких, что n^2 и $(n+m)^2$ дают одинаковый остаток при делении на 100.

Профильный уровень.

Сейчас обойдемся без шуток, потому что будем крайне серьезно и вдумчиво разбирать задачи из наделавшего паники профильного варианта по математике.

Эдуард Джендубаев, 22 августа 2014 года.

****

B1. (B13 из базового)

Решение.

Известно, что

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x\,,\qquad \sin(x^\circ+90^\circ)=\cos x^\circ.$$

Это просто красивые случаи синуса суммы.

Становится понятным, что знаменатель дроби равен единице по основному тригонометрическому тождеству.

Ответ: –10 .

B2. (B8 из базового)

Решение.

Тяжелая задача. Что такое "медиана величины"?

Я признаюсь честно, не помню как решать, но уверен, что в учебниках за 11 класс в главе "Статистика" всё рассказано. Я зашел на соответствующую страницу Википедии и понял, что медиана есть вот что:

пусть есть *ранжированный*, то есть написанный по убыванию значения какой-то величины или по возрастанию, список. Тогда, если число элементов в списке чётное, то медиана есть половина суммы значений величин двух элементов, стоящих в середине списка (на номерах N/2 и N/2 + 1). Если число элементов в списке нечетно, то медиана есть значение величины элемента, стоящего в середине списка (такой номер один, (N+1)/2).

Давайте начнем расставлять города в порядке уменьшения численности населения.

1 – Москва, 2 – Санкт-Петербург, 3 – Новосибирск, 4 – Екатеринбург, 5 – Нижний Новгород, 6 – Казань, 7 – Самара, 8 – Омск, 9 – Челябинск.

(Понятно, что если мы составим список в порядке возрастания численности населения, Нижний Новгород так и останется на 5 месте.)

Если верить мне, то нашей медианой будет число 1259,9. В задаче требуется найти количество городов, численность населения которых больше 1259,9 – 100 = 1159,9, но меньше 1259,9 + 100 = =1359,9. Это горда сам Нижний Новгород, Омск, Самара и Казань, всего 4.

Ответ: 4 .

При моральной поддержке сообществ http://vk.com/chestyle1 и http://vk.com/public73975504

B3.

Решение.

Я некоторое время пребывал в замешательстве, но повторное внимательное прочтение условия мне сильно помогло.

Поскольку известно, что при одном броске выпал орел (это уже железно), то надо просто найти вероятность выпадения орла при другом броске. Это просто 0,5.

Выражение "при необходимости" говорит о том, что может быть нам понадобится округление, а может и нет – указать нам на ошибку полученного результата или на его правильность оно не в состоянии. Если бы было строго "ответ округлите до сотых", то я явно где-то ошибся.

Ответ: 0,5 .

B4.

Решение.

Давайте выведем формулу высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе.

Пусть наши катеты a, b, гипотенуза c и высота h.

По теореме Пифагора

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Используя дважды формулу площади треугольника (половина произведения высоты на сторону)

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch, \qquad ab = h\sqrt{a^2 + b^2}, \qquad h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 4{,}8.$$

Ответ: 4,8 .

B5. (B15 из базового, только на этот раз без рисунка – типа усложнили)

Решение.

Применим теорему Пифагора, и всё. Отметим, что боковые ребра в правильной пирамиде равны и глубоко всё равно, какое из них искать.

$$SB = SA = \sqrt{AO^2 + SO^2} = \sqrt{\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + SO^2} = 15.$$

Ответ: 15 .

При моральной поддержке сообществ http://vk.com/chestyle1 и http://vk.com/public73975504

B6.

Решение.

Логика такова – удлинение это разность длин рельса после нагревания и до нагревания. Обязательно миллиметры переведем в метры

$$l(t^\circ) - l_0 = 0{,}009.$$

Но найти нам надо температуру, выразим её.

$$l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ) - l_0 = 0{,}009.$$

$$l_0 + l_0 \cdot \alpha \cdot t^\circ - l_0 = 0{,}009.$$

$$t^\circ = \frac{0{,}009}{\alpha \cdot l_0}.$$

Подставляем представленные

$$t^\circ = \frac{0{,}009}{15 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5}} = 50.$$

Ответ: 50 .

B7. (B16 из базового)

Решение.

Пусть x деталей в час – искомая производительность второго рабочего. Тогда x+3 деталей в час – производительность первого рабочего.

Время на изготовление 154 деталей вторым рабочим равно 154/x.

Время на изготовление 154 деталей первым рабочим равно 154/(x+3). По условию, первый рабочий выполняет заказ на 3 часа быстрее, чем второй. Пишем уравнение

$$\frac{154}{x+3} = \frac{154}{x} - 3.$$

Опыт подсказывает мне, что в таких задачах почти всегда числитель делится на знаменатель нацело. Разложим 154 на множители:

154 = 2 * 7 * 11, или, что нам подходит лучше, 154 = 11 * 14. Всё сходится, x=11.

Ответ: 11 .

B8.

Решение.

Классика: берем производную, приравниваем её к нулю, находим корни и ищем место, где производная меняет свой знак с плюса на минус.

$$y' = (x^3 + 12x^2 + 13)' = 3x^2 + 24x, \qquad 3x^2 + 24x = 0, \qquad x_1 = 0, \qquad x_2 = -8.$$

Понятно, что наша точка x = –8. Нарисуйте параболу y=3x^2+24x и вы увидите, что она меняет знак с плюса на минус в точке x = –8.

Ответ: –8 .

При моральной поддержке сообществ http://vk.com/chestyle1 и http://vk.com/public73975504

C1.

Решение.

а) Решаем как умеем. Сразу чувствуется, что биквадратное.

$$4\cos^4 x - 3(2\cos^2 x - 1) - 1 = 0.$$

$$4\cos^4 x - 6\cos^2 x + 3 - 1 = 0.$$

$$4\cos^4 x - 6\cos^2 x + 2 = 0.$$

$$2\cos^4 x - 3\cos^2 x + 1 = 0.$$

Делаем очевидную замену

$$\cos^2 x = t, \qquad 0 \le t \le 1.$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0, \qquad t_1 = 1, \qquad t_2 = \frac{1}{2}.$$

Возвращаемся. Полученная совокупность абсолютно равносильна исходному уравнению.

$$\left[\begin{array}{l}\cos^2 x = 1,\\ \cos^2 x = \dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 1,\\ \cos x = -1,\\ \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} x = 2\pi n, & n \in \mathbb{Z};\\ x = \pi + 2\pi m, & m \in \mathbb{Z};\\ x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z};\\ x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi l, & l \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

В принципе никто не имеет никакого права снизить вам балл за такой ответ. Однако, чувствуется, что по крайней мере нужно попытаться записать его чуть компактнее.

$$\left[\begin{array}{ll} x = \pi n, & n \in \mathbb{Z},\\ x = \pm\dfrac{\pi}{4} + \pi m, & m \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

в) Как отобрать корни из промежутка каждый решает для себя сам. Если интервал по длине не превышает 2π, я предпочитаю использовать тригонометрическую окружность.

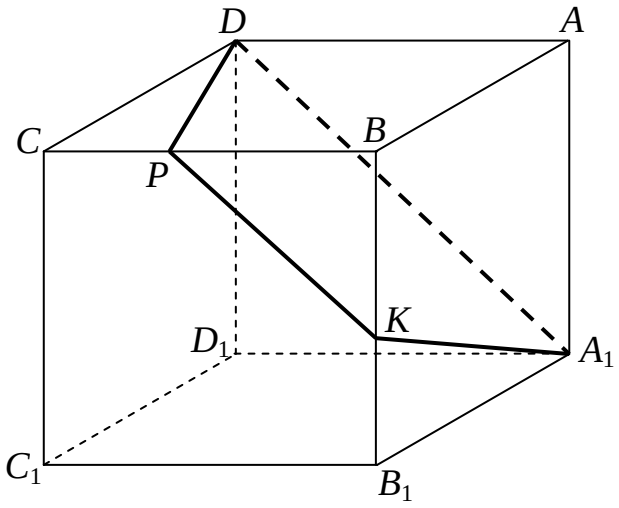
Ответ: а) $\left[\begin{array}{l} x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z},\\ x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$

б) $-\frac{13\pi}{4}, \quad -3\pi, \quad -\frac{11\pi}{4}, \quad -\frac{9\pi}{4}.$

При моральной поддержке сообществ http://vk.com/chestyle1 и http://vk.com/public73975504

C2.

Решение.



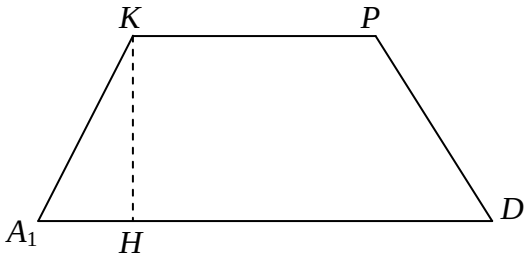
В плоскости BB_1C_1C проводим прямую KP, параллельную прямой A_1D.

Искомое сечение A_1KPD построено, причем $CP=4$, $BP=5$ (по теореме Фалеса из квадрата BB_1C_1C, поскольку $KP \| B_1C$).

Нетрудно видеть, что сечение A_1KPD является равнобедренной трапецией:

$KP \| A_1D$, $A_1K=DP=\sqrt{97}$ (из равных прямоугольных треугольников CDP и A_1KB_1 с катетами 4 и 9), $KP=5\sqrt{2}$ (из равнобедренного прямоугольного треугольника BKP), $A_1D=9\sqrt{2}$ (из равнобедренного прямоугольного треугольника A_1DA).

Отрезок A_1H (где KH – высота трапеции) находится как модуль половины разности оснований равнобедренной трапеции, $A_1H=2\sqrt{2}$.



По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника A_1KH находим высоту $KH=\sqrt{89}$.

Тогда искомая площадь равна $7\sqrt{178}$.

Ответ: сечение A_1KPD построено, его площадь равна $7\sqrt{178}$.

При моральной поддержке сообществ http://vk.com/chestyle1 и http://vk.com/public73975504

С3.

Решение.

а)

$$\frac{x^2+6x+20}{x+6}-6\geq 0,\qquad \frac{x^2+6x+20-6x-36}{x+6}\geq 0,\qquad \frac{x^2-16}{x+6}\geq 0,\qquad \frac{(x-4)(x+4)}{x-3}\geq 0.$$

В последнем неравенстве все аргументы со знаком плюс, применяем метод интервалов.

$x\in(-6;\ -4]\cup[4;+\infty)$ – решение первого неравенства.

б)

Сразу отметим, что все $x<-4{,}2$ не являются решениями второго неравенства.

Пусть $t=\sqrt{x+4{,}2}>0$.

$$t^2-\frac{5}{2}t+1\geq 0,\qquad 2t^2-5t+2\geq 0,\qquad \left[\begin{array}{l} t\leq\frac{1}{2},\\ t\geq 2.\end{array}\right.$$

Делаем обратную замену, возвращаемся к переменной x.

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+4{,}2}\leq\frac{1}{2},\\ \sqrt{x+4{,}2}\geq 2;\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{c}0\leq x+4{,}2\leq 0{,}25,\\ x+4{,}2\geq 2;\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{c}-4{,}2\leq x\leq -3{,}95,\\ x\geq -0{,}2.\end{array}\right.$$

$x\in(-4{,}2;\ -3{,}95]\cup[-0{,}2;\ +\infty)$ – решение второго неравенства.

в)

$x\in(-4;\ -3{,}95]\cup[-0{,}2;4)$ – решения второго неравенства, не являющиеся решениями первого.

Ответ: а) $x\in(-6;\ -4]\cup[4;+\infty)$;

б) $x\in(-4{,}2;\ -3{,}95]\cup[-0{,}2;\ +\infty)$;

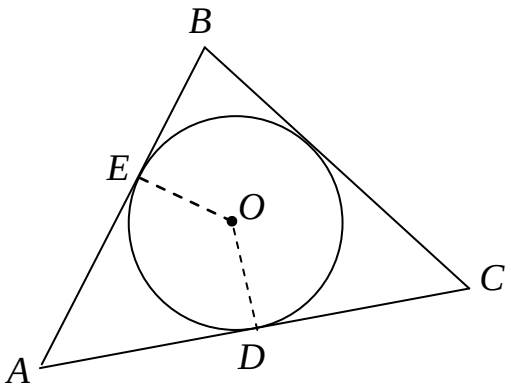
в) $x\in(-4;\ -3{,}95]\cup[-0{,}2;4)$ – решения второго неравенства, не являющиеся решениями первого.

При моральной поддержке сообществ http://vk.com/chestyle1 и http://vk.com/public73975504

C4.

Решение.

а) Когда имеем дело с треугольником и вписанной в него окружностью, рисунок нужно начинать с окружности. Понятно, что треугольник во время доказательства должен быть абсолютно произвольным. Разумеется, мы не имеем права использовать в доказательстве пункта а) ничего, кроме условия задачи! Мы не имеем права использовать данные пункта б)!



В четырехугольнике *ADOE* углы *ADO* и *AEO* равны 90° по свойству радиуса, проведенного в точку касания. Также *AD=DO=OE* по условию.

AD=AE по свойству касательных, проведенных к окружности из одной точки.

Таким образом, *ADOE* – ромб с двумя не соседними углами по 90°, а значит *ADOE* – квадрат.

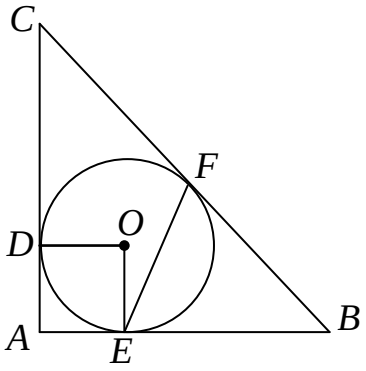
Получается, угол *A* действительно прямой, а значит треугольник *ABC* прямоугольный, что и требовалось доказать.

б) При ответе на вопрос пункта б) мы вправе использовать и условие, и доказательство из пункта а), даже если мы его не доказали. Со всей ответственностью рисуем прямоугольный треугольник со вписанной в него окружностью.

Обозначим *BF=BE=x* (они равны по свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности).

Имеем *CD=CF*=15 и *AD=AE=5* (по тому же свойству).

Теперь мы можем составить уравнение, используя две формулы площади треугольника: половина произведения стороны на высоту (здесь половина произведения катетов) и произведение половины периметра треугольника на радиус вписанной в него окружности.



$$\frac{1}{2}(AC)(AB)=\frac{1}{2}(AC+BC+AB)R, \qquad (15+5)(5+x)=(15+5+15+x+5+x)5.$$

$$4x+20=40+2x, \qquad x=10.$$

Теперь можем найти синус угла *B*: $\frac{AC}{BC}=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$.

Тогда искомая площадь треугольника *BEF* будет равна

$$S=\frac{1}{2}(\sin\angle B)(BE)(BF)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot 10\cdot 10=40.$$

Возможность второй конфигурации исключена: в пункте а) был абсолютно произвольный треугольник и мы доказали, что именно угол *A* равен 90°, а значит никакой другой угол не может быть равен 90°, поскольку в треугольнике не может быть больше одного угла в 90°; в пункте б) дополнительные данные условия обеспечивают *жесткость* треугольника – благодаря однозначному определению длины катета *AC* и радиуса вписанной окружности, прямоугольный треугольник *ABC* определяется строго однозначно – можно найти все его элементы.

Ответ: пункт а) доказан; б) 40 .

При моральной поддержке сообществ http://vk.com/chestyle1 и http://vk.com/public73975504

C5.

Решение.

Длинный не рациональный путь, на котором можно несколько раз подорваться.

Громоздкое условие также ужасно, как и маленькое. Внимательно и несколько раз читаем его.

Пусть a, b, c – вторые части платежей первого, второго и третьего года соответственно, F – величина кредитного займа, F=9930000.

Первый год.

Долг: $F + 0{,}1F = 1{,}1F$.

Платеж: $0{,}1 \cdot 1{,}1F + a = 0{,}11F + a$.

Остаток: $1{,}1F - 0{,}11F - a = 0{,}99F - a$.

Второй год.

Долг: $0{,}99F - a + 0{,}1(0{,}99F - a) = 1{,}089F - 1{,}1a$.

Платеж: $0{,}1(1{,}089F - 1{,}1a) + b = 0{,}1089F - 0{,}11a + b$.

Остаток: $1{,}089F - 1{,}1a - 0{,}1089F + 0{,}11a - b = 0{,}9801F - 0{,}99a - b$.

Третий год.

Долг: $0{,}9801F - 0{,}99a - b + 0{,}1(0{,}9801F - 0{,}99a - b) = 1{,}07811F - 1{,}089a - 1{,}1b$.

Платеж: $0{,}1(,07811F - 1{,}089a - 1{,}1b) + c = 0{,}107811F - 0{,}1089a - 0{,}11b + c$.

Остаток: 0, потому что по условию было всего 3 платежа.

Первое уравнение: *Долг за третий год – Платеж за третий год* = 0.

$$0{,}970299F - 0{,}9801a - 0{,}99b - c = 0.$$

По условию, платежи за каждый год равны. Тогда приравняем первый и второй платежи.

$$0{,}11F + a = 0{,}1089F - 0{,}11a + b, \qquad b = 0{,}0011F + 1{,}11a.$$

Теперь приравняем первый и третий платежи.

$$0{,}11F + a = 0{,}107811F - 0{,}1089a - 0{,}11b + c, \qquad c = 0{,}002189F + 1{,}1089a + 0{,}11b.$$

Подставляем полученное выражение для c в первое уравнение.

$$0{,}970299F - 0{,}9801a - 0{,}99b - 0{,}002189F - 1{,}1089a - 0{,}11b = 0.$$

$$0{,}96811F - 2{,}089a - 1{,}11b = 0.$$

В последнее равенство подставляем выражение для b, находим a.

$$0{,}96811F - 2{,}089a - 0{,}00121F - 1{,}221a = 0, \qquad 0{,}9669F = 3{,}31a, \qquad a = 2900700.$$

Тогда искомая величина платежа равна $0{,}1F + a = 1092300 + 2900700 = 3993000$.

Ответ: 3993000 .

При моральной поддержке сообществ http://vk.com/chestyle1 и http://vk.com/public73975504

C5.

Решение.

Пусть F=9930000 – величина кредита, x – искомая величина ежегодного платежа.

Первый год.

Долг: $1{,}1F$.

Платеж: x.

Остаток: $1{,}1F - x$.

Второй год.

Долг: $1{,}1(1{,}1F - x)$.

Платеж: x.

Остаток: $1{,}1(1{,}1F - x) - x$.

Третий год.

Долг: $1{,}1(1{,}1(1{,}1F - x) - x)$.

Платеж: x.

Остаток: 0, потому что по условию было всего три платежа.

Единственное уравнение

$$1{,}1(1{,}1(1{,}1F - x) - x) - x = 0, \qquad 1{,}331F = 3{,}31x, \qquad x = 3993000.$$

Ответ: 3993000 .

При моральной поддержке сообществ http://vk.com/chestyle1 и http://vk.com/public73975504

С6.

Решение.

Давайте несколько раз почитаем условие задачи.

А теперь будем рассуждать: раскрытие модулей потребует правильной расстановки чисел $a-6$ и $-(a-6)$ на числовой прямой, т.е. придется рассматривать случаи $a<6,\ a\geq 6$. Дальше надо будет уже *x* заключать в неравенства, чтобы раскрыть модули. После всех раскрытий придется еще решить уравнение относительно *x* и отобрать именно тот единственный корень, который удовлетворяет всем неравенствам.

И так придется делать неоднократно.

Если же мы решили строить графики, прекрасно. Оставим x^2 слева, чтобы получить хоть один *жесткий* график, а всё остальное перенесем вправо. Снова потребуется раскрытие модулей чтобы хоть как-то понять, что за график получается слева. Фактически та же работа, что и при первом методе решения, только без отбора корней.

А дальше придется смотреть перемещающиеся прямые относительно *жесткой* параболы и правильно найти значения их параметров, что тоже выглядит жутко.

Не скажу, что я решил много таких задач, но что-то мне подсказывает, что когда просят найти "единственный корень", нужно сделать следующее:

Пусть мы нашли такое значение параметра *a*, при котором наше уравнение имеет единственное решение *x*. Проверим, является ли число $(-x)$ также решением нашего уравнения. Для удобства перенесем всё влево.

$$(-x)^2-(|-x-(a-6)|+|-x+(a-6)|)+(a-6)^2=0.$$

$$x^2-\left(\left|(-1)\cdot\left(x+(a-6)\right)\right|+\left|(-1)\cdot\left(x-(a-6)\right)\right|\right)+(a-6)^2=0.$$

$$x^2-(|x+(a-6)|+|x-(a-6)|)+(a-6)^2=0.$$

По сравнению с исходным уравнением только модули поменялись местами, но от перемены мест слагаемых сумма не меняется, а значит при подстановке $(-x)$ мы получили то же самое уравнение.

Таким образом, единственное подходящее значение переменной *x* это ноль. Подставляем его в исходное уравнение и решаем относительно *a*.

$$0-(|0+(a-6)|+|0-(a-6)|)+(a-6)^2=0,\qquad (a-6)^2-2|a-6|=0.$$

Рассмотрим $a<6$.

$$(a-6)^2+2(a-6)=0,\qquad (a-6)(a-4)=0,\qquad a_1=6,\qquad a_2=4.$$

Значение 6 не удовлетворяет условию рассмотрения, остается *a*=4.

Рассмотрим $a\geq 6$.

$$(a-6)^2-2(a-6)=0,\qquad (a-6)(a-8)=0,\qquad a_1=6,\qquad a_2=8.$$

Оба полученных числа удовлетворяют условию рассмотрения.

Ответ: $a=\{4,\ 6,\ 8\}$.

При моральной поддержке сообществ http://vk.com/chestyle1 и http://vk.com/public73975504

C7.

Решение.

а) Предположим, что числа n^2 и $(n+24)^2$ дают остаток 0 при делении на 100, т.е. делятся на 100 нацело. Тогда число n^2 должно оканчиваться на два нуля, а значит число n должно оканчиваться цифрой ноль.

Значит, число $n+24$ оканчивается на 4, а $(n+24)^2$ оканчивается на последнюю цифру числа 4^2=16, т.е. на 6. Получается, что число $(n+24)^2$ не делится на 100 без остатка.

Таким образом, если числа n^2 и $(n+24)^2$ дают одинаковый остаток при делении на 100, то он не равен нулю.

Обозначим этот остаток буквой R, причем очевидно, что $0 < R < 100$.

Тогда

$$\frac{n^2}{100} = 100k + R, \qquad \frac{(n+24)^2}{100} = 100k + R + \frac{48n + 24^2}{100} = 100k + R + 100p + H;$$

$$k, p \in \mathbb{N}; \quad 0 < R, H < 100.$$

Имеем две возможности: либо $R + H = 100 + R$, чего не может быть, либо $R + H = R,\ H = 0$.

Итак, число $48n + 24^2 = 48(n+12)$ должно делиться на 100 без остатка. 48 делится на 4 нацело, а это значит, что для деление на 100 данного числа нужно, чтобы число $(n+12)$ делилось на 25.

Число $n = 13$ подходит, проверим: 13^2=169, 37^2=1369. Действительно, числа дают равный остаток от деления на 100, не равный нулю.

б) Как уже отмечалось, число $(n+12)$ должно делится на 25 без остатка. Это условие, а еще то условие, что число n должно быть трехзначным, запишем следующим образом.

$$n + 12 = 25q, \qquad q \in \mathbb{N}; \qquad n = 25q - 12.$$

$$100 \le 25q - 12 \le 999.$$

$$3 < \frac{88}{25} \le q \le 39 < \frac{987}{25}.$$

Таким образом, таких чисел n ровно 36.

в) *Искушение сдаться будет самым сильным за миг до победы*.

Основываясь на результатах двух предыдущих пунктов, можно сказать, что числа n^2 и $(n+m)^2$ не должны давать нулевой остаток при делении на 100. Тогда число $2m\left(n + \frac{m}{2}\right)$ должно делится на 100. По аналогии с пунктом б), число m должно быть чётным, чтобы записанное произведение делилось на 4. Также, число $\frac{m}{2}$ не должно превышать 25, иначе два последних записанных неравенства не будут выполняться, а именно таких трехзначных чисел n уже не будет ровно 36.

С учетом всех замечаний, количество двузначных чисел m, удовлетворяющих условию, будет ровно 8.

Ответ: а) 13; б) 36; в) 8 .

При моральной поддержке сообществ http://vk.com/chestyle1 и http://vk.com/public73975504

Примечание.

Если предположить, что за ЕГЭ давали 100 баллов, то я попытаюсь грубо оценить заработанный балл.

Вспоминаем, что каждую из двадцати задач В базового уровня я оценил в 5 баллов, то я потерял 5 баллов из 100 на задаче В2.

Далее, оценим С1, С2 в 7 баллов из 100, С3, С4 в 8 баллов, а С5, С6, С7 в 10. С учетом того, что вариант был без логарифмов, а они (я подозреваю) должны были быть в С3, ставим ±4 балла.

Также я очень сильно сомневаюсь в том, что пункт в) задачи С7 я выполнил с достаточным обоснованием, отнимаем 4 балла.

Итого у меня либо 100–5–4–4=87 баллов, либо 100–5–4=91 балл, что не может не радовать.

Я не могу сказать, что этот вариант стал гораздо более сложным, чем обычный вариант 2014 года, а скорее наоборот, он стал легче: число заданий В сократилось почти вдвое; к части С добавилась "странная" и достаточно легкая задача, критерии оценивания которой пока неясны. Но с другой стороны, я уверен, что если раньше можно было решить все В и С1-С3 с ошибками и поступить в хороший вуз на бюджет, то в идеологии этого варианта обязательным является решение как минимум всех задач вплоть до С5 без ошибок.

Касаемо множества использованных букв в записи решения уравнения в С1, да, вы правы, можно было использовать одну букву. Разные буквы нужно указывать в системах тригонометрических уравнений, чтобы не потерять пары точек.

Касаемо возможной недостаточности обоснования построения плоскости сечения в С2 могу сказать, что вы снова правы, на вопрос "почему KP проводим параллельно именно прямой A_1D" нужно было дописать, что плоскости (грани куба) AA_1D_1D и BB_1C_1C параллельны, а значит линии пересечения этих плоскостей искомой плоскостью сечения также параллельны.

Касаемо трусости в попытке решить С6 графическим методом, заменив $t = (a - 6)$, могу лишь сказать, что я оставил возможность решить графически именно для вас, драгоценный читатель!

При моральной поддержке сообществ http://vk.com/chestyle1 и http://vk.com/public73975504

Это можно не читать.

Если кому интересно мое мнение, то со стороны разделение на уровни экзамена по математике выглядит абсолютно омерзительно. Почему? Ну, во-первых школьников просят указать, дураки они точно или пока еще не решили – базовый выбрали сдавать или профильный. Во-вторых, каково будет вузам с такими абитуриентами? Говоря начистоту, посмотрите билеты вступительных экзаменов в МГУ и ужаснитесь от одного только прочтения. А теперь посмотрите на базовый ЕГЭ. А теперь снова на билеты МГУ. А теперь опять на базовый ЕГЭ. Неужели не видно, что идет бесчеловечное снижение уровня математики, требуемой у школьника? Да, это конечно чудесно для двоечника, он, решив 4 задания базового уровня спокойно получает аттестат и жизнь прекрасна. Ему не нужно стремиться знать больше, ведь достаточно решить базовый уровень.

По меньшей мере странными являются недавние высказывания Рособрнадзора. В конце эпопеи экзаменов в 2014 году все как один говорили о первом в истории человечества объективном и честном ЕГЭ. Не прошло и минуты, как появляется инициатива разделения экзамена по математике на уровни. Зачем?!

Если мыслить неуважительно к Рособрнадзору и ФИПИ, то можно додуматься до того, что они никак не успокоятся со структурой экзамена потому, что на них давят издательские боссы для того, чтобы каждый год продавать новые (но на самом деле одни и те же книги), только с меняющимся числом, указывающим год. Они никак не успокоятся со структурой экзамена потому, что потеряют работу те, кого нанимали на составление предыдущей структуры экзамена и заданий. Они не успокоятся со структурой экзамена потому, что нельзя будет попросить у государства денежек на изменение этой самой структуры. Но это, разумеется, не так и я никого не призываю так мыслить.

Хотя, если так глянуть, бесплатной является только возможность скачать демовариант. Всё остальное, касаемо ЕГЭ, платное. Сделайте пособия по ЕГЭ, разработанные с участием ФИПИ, бесплатными – никто слова не скажет, меняйте эту структуру сколько влезет. Но так нет же! Каждый год люди покупают эти дорогущие книжки из бумаги отвратительного качества, каждый год учителя школ нервничают, как бы составить учебный план, чтобы и по ФГОС пройти весь учебник, и к ЕГЭ подготовиться. Благо, есть прекрасные люди, выкладывающие пособия в интернет, где их можно без проблем скачать, но я снова-таки никого не призываю скачивать книги без разрешения автора.

Конечно, я не являюсь ни экспертом-составителем, ни идеологом ЕГЭ и скорее всего я не понимаю той благородной цели, которой руководствуются создатели КИМов. Да, они идут в ногу со временем, составляя очень жизненные задачи, "отвечающие вызовам реалий современности". Да, может им кажется варварством и насилием над абитуриентами те страшные задачи, которые были раньше на вступительных экзаменах. Да, на манер прогрессивного Запада (который, к слову, в гробу видал умного, знающего математику на качественном уровне школьника Российской Федерации). Да, эффективная дифференциация результатов и объективная оценка знаний экзаменуемого, которую понимают наверное человек 10-15. Да, право выбора, демократия. Да, скорее всего, им виднее и они правы.

Но, черт возьми, зачем *каждый* год что-то менять?

****

Спасибо всем, кто читал. Извините за ошибки и рекламу.

Ваша Зинаида Хаджи-Рудольфовна фон Рабинович-Парллелограммова, 23 августа 2014 года.

****