# Школьная программа

## Математика в таблицах

5-11 классы



«Астрель»

УДК 373:51
ББК 22.1я2
М34

**Математика** в таблицах : 5–11-й кл. : справ. материалы. — М.: АСТ: Астрель, 2011. — 95, [1] с.: ил. — (Школьная программа).

ISBN 978-5-17-017214-6 (ООО «Издательство АСТ»)(Жел.)
ISBN 978-5-271-05626-0 (ООО «Издательство Астрель»)(Жел.)
ISBN 978-5-17-059064-3 (ООО «Издательство АСТ»)(ЕГЭ)
ISBN 978-5-271-23839-0 (ООО «Издательство Астрель»)(ЕГЭ)

Справочный материал по всему школьному курсу математики в 5–11 классах сгруппирован в тематические таблицы. Весь материал распределен в соответствии с содержанием школьных предметов — математика, алгебра, геометрия — по разделам, адресованным школьникам 5–6 классов, 7–9 и 10–11.

Пособие предназначено для повторения материала и подготовки к контрольным работам, зачетам, экзаменам.

**УДК 373:51**
**ББК 22.1я2**

Подписано в печать 12.10.2010. Формат 70×90 $^{1}/_{32}$. Усл. печ. л. 3,51
(Жел.) Доп. тираж 5000 экз. Заказ № 8424.
(ЕГЭ) Доп. тираж 10 000 экз. Заказ № 8423.

ISBN 978-5-17-017214-6 (ООО «Издательство АСТ»)(Жел.)
ISBN 978-5-271-05626-0 (ООО «Издательство Астрель»)(Жел.)
ISBN 978-5-17-059064-3 (ООО «Издательство АСТ»)(ЕГЭ)
ISBN 978-5-271-23839-0 (ООО «Издательство Астрель»)(ЕГЭ)

© ООО «Издательство Астрель»

# СОДЕРЖАНИЕ

## МАТЕМАТИКА 5—6

Натуральные числа . . . . . 6
Признаки делимости . . . . . 7
НОК и НОД . . . . . 8
Действия с обыкновенными дробями . . . . . 9
Положительные и отрицательные числа. . . 9
Действия с положительными
и отрицательными числами . . . . . 10

## АЛГЕБРА 7—9

Формулы сокращенного умножения . . . . . 11
Свойства степени . . . . . 11
Пропорция . . . . . 12
Свойства квадратного корня . . . . . 12
Свойства корня $n$-й степени . . . . . 12
Свойства числовых неравенств . . . . . 13

**Функции**
Линейная функция. . . . . 15
Дробно-линейная функция. . . . . 16
Квадратное уравнение . . . . . 17
Квадратный трехчлен. . . . . 18
Квадратичная функция . . . . . 19
Квадратное неравенство . . . . . 20
Прогрессии. . . . . 21
Средние величины . . . . . 22
Тригонометрические тождества . . . . . 23

## АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА 10—11


Логарифмы . . . . . 26
Пределы . . . . . 28
Производная . . . . . 29

**Функции**
Степенная функция . . . . . 31
Показательная функция . . . . . 32
Логарифмическая функция . . . . . 33
Тригонометрические функции . . . . . 34
Обратные тригонометрические функции . . . . . 36
Интеграл . . . . . 38
Вычисления с помощью интеграла . . . . . 40
Комбинаторика . . . . . 42
Комплексные числа . . . . . 44


## ГЕОМЕТРИЯ 7—9


Углы . . . . . 46
Треугольники . . . . . 48
Площадь треугольника . . . . . 50
Равные и подобные треугольники . . . . . 51
Прямоугольный треугольник . . . . . 54
Равнобедренный треугольник . . . . . 56
Равносторонний треугольник . . . . . 57
Параллелограмм . . . . . 58
Трапеция . . . . . 60
Многоугольники . . . . . 62
Окружность . . . . . 64
Углы в окружности . . . . . 68
Декартовы координаты на плоскости . . . . . 69




## ГЕОМЕТРИЯ 10—11


Углы в пространстве . . . . . 70

**Многогранники**
Призма . . . . . 73
Пирамида . . . . . 76
Правильные многогранники . . . . . 80

**Тела вращения**
Цилиндр . . . . . 82
Конус . . . . . 84
Сфера и шар . . . . . 86
Декартовы координаты в пространстве . . . . 89
Векторы . . . . . 90

**Справочные таблицы** . . . . . 92

## Натуральные числа

| Арифметические действия | Свойства нуля и единицы |
|---|---|
| *Сложение*<br>$a + b = c$<br>↑ ↑ ↑<br>слагаемые сумма | $a + 0 = 0 + a = a$ |
| *Вычитание*<br>$a - b = c$<br>↑ ↑ ↑<br>уменьшаемое разность<br>вычитаемое | $a - 0 = a$<br>$a - a = 0$ |
| *Умножение*<br>$a \cdot b = c$<br>↑ ↑ ↑<br>множители произведение | $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$<br>$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ |
| *Деление*<br>$a : b = c$<br>↑ ↑ ↑<br>делимое частное<br>делитель | $0 : a = 0$<br>$a : 1 = a$<br>На нуль делить нельзя |



| Правила арифметических действий |
|---|
| *Переместительный закон*<br>$a + b = b + a$<br>$a \cdot b = b \cdot a$<br>*Сочетательный закон*<br>$a + (b + c) = (a + b) + c$<br>$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$<br>*Распределительный закон*<br>$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$<br>$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ |

## Признаки делимости

**На 2**: последняя цифра — четная (0, 2, 4, 6, 8).
Пример: 2<u>4</u>, 24<u>8</u>, ~~351~~.

**На 3**: сумма цифр числа делится на 3.
Пример: 45 (4 + 5 = 9 — делится на 3);
~~86~~ (8 + 6 = 14 — не делится на 3);

**На 4**: число, составленое из двух последних цифр, делится на 4 (00, 04, 08, 12 и т. д.).
Пример: 24<u>8</u>, 5<u>12</u>, ~~715~~.

**На 5**: последняя цифра 0 или 5.
Пример: 34<u>0</u>, 23<u>5</u>, ~~187~~.

**На 9**: сумма цифр числа делится на 9.
Пример: 198 (1 + 9 + 8 = 18 — делится на 9);
~~281~~ (2 + 8 + 1 = 11 — не делится на 9).

**На 10**: последняя цифра 0.
Пример: 183<u>0</u>, ~~2017~~.

**На 25**: число, составленное из двух последних цифр, делится на 25 (00, 25, 50, 75).
Пример: 13<u>75</u>, ~~240~~, ~~805~~, 6<u>50</u>.

## НОК и НОД

**Разложение чисел на множители**

| 180 | ② |
|---|---|
| 90 | ② |
| 45 | ③ |
| 15 | ③ |
| 5 | 5 |
| 1 | |

| 1368 | ② |
|---|---|
| 684 | ② |
| 342 | 2 × |
| 171 | ③ |
| 57 | ③ |
| 19 | 19 × |
| 1 | |

**Наибольший общий делитель**

$$НОД\,(180, 1368) = ② \cdot ② \cdot ③ \cdot ③ = 36$$

выписываем все общие делители чисел

! НОД либо меньше данных чисел, либо равен меньшему из них.

**Наименьшее общее кратное**

$$НОК\,(180, 1368) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 19 = 6840$$

× × ×

выписываем все делители меньшего числа и не совпадающие с ними делители другого числа

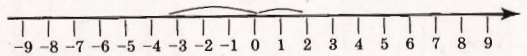
! НОК либо больше данных чисел, либо равен большему из них.



## Действия с обыкновенными дробями

| | |
|---|---|
| *Сложение и вычитание:* дробей с общим знаменателем | $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$<br>$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$ |
| дробей с разными знаменателями | $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$<br>$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$ |
| *Умножение* | $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ |
| *Деление* | $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ |

## Положительные и отрицательные числа




$|-4| = 4 \quad |0| = 0 \quad |2| = 2$

*Модуль числа* равен расстоянию от нуля до числа на координатной прямой.

*Противоположные числа* — числа с одинаковыми модулями и разными знаками (5 и −5, −1,5 и 1,5).

| | |
|---|---|
| $\lvert a\rvert = a$, если $a > 0$<br>$\lvert a\rvert = -a$, если $a < 0$<br>$\lvert a - b\rvert = \lvert b - a\rvert$ | $-a + a = 0$<br>$a + (-a) = 0$<br>$a - a = 0$ |

## Действия с положительными и отрицательными числами

| | Положительные числа | | Отрицательные числа | | Числа с разными знаками | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | + | Сложить | – | Сложить | Знак числа с большим модулем | Вычесть из большего модуля меньший |
| *Сложение* | | | | | | |
| *Вычитание* | Заменяем на сложение: $a - b = a + (-b)$ | | | | | |
| *Умножение* | + | Перемножить | + | Перемножить | – | Перемножить |
| *Деление* | + | Поделить | + | Поделить | – | Поделить |
| | Знак ответа | Действия с модулями | Знак ответа | Действия с модулями | Знак ответа | Действия с модулями |



# АЛГЕБРА 7—9

## Формулы сокращенного умножения

| | |
|---|---|
| Квадрат суммы | $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ |
| Квадрат разности | $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ |
| Куб суммы | $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ |
| Куб разности | $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ |
| Разность квадратов | $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ |
| Сумма кубов | $a^3 + b^3 = (a + b) \times (a^2 - ab + b^2)$ |
| Разность кубов | $a^3 - b^3 = (a - b) \times (a^2 + ab + b^2)$ |

## Свойства степени

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

$a^0 = 1$

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

## Пропорция

Пропорция $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ равносильна следующим равенствам:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}; \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Основное свойство пропорции:

$$ad = bc$$

## Свойства квадратного (арифметического) корня

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \qquad \sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$$

$$(\sqrt{a})^m = \sqrt{a^m} \qquad \sqrt{a^m} = (\sqrt{|a|})^m$$

## Свойства корня *n*-й степени

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k} \qquad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$



## Свойства числовых неравенств

| $a$, $b$ — любые числа |
|---|
| Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (свойство транзитивности). |
| Если $a > b$, то $a + c > b + c$ $(c \in R)$. |
| Если $a > b$ и $c$ — положительное число, то $ac > bc$. |
| Если $a > b$ и $c$ — отрицательное число, то $ac < bc$. |
| Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$. |
| **$a$, $b$ — положительные числа** |
| Если $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. |
| Если $a > b > 0$ и $c > d > 0$, то $ac > bd$. |
| Если $a > b > 0$ и $m \in N$, то $a^m > b^m$. |
| Если $a > b > 0$ и $m \in N$, то $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$ |

## Двойное неравенство ($a < b < c$)

*Сложение двойных неравенств*

Если $a \leqslant b \leqslant c$ и $p \leqslant m < q$,
то $a + p \leqslant b + m < c + q$.

*Умножение двойных неравенств с положительными членами*

Если $0 < a < b < c$ и $0 < p < m < q$,
то $ap < bm < cq$.

## Модуль числа

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a > 0 \\ -a, \text{ если } a < 0 \end{cases}$$

## *Свойства модуля*

$$|a| \geqslant 0$$

$$|ab| = |a| \cdot |b|$$

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

$$|-a| = |a|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|a - b| \geqslant \big||a| - |b|\big|$$

$$|a - b| = |b - a|$$

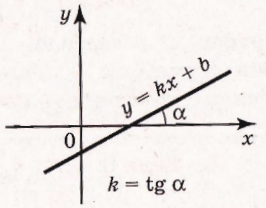
$$a^2 + b^2 \geqslant 2|ab|$$



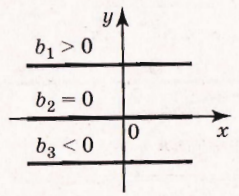
# ФУНКЦИИ

## Линейная функция $y = kx + b$

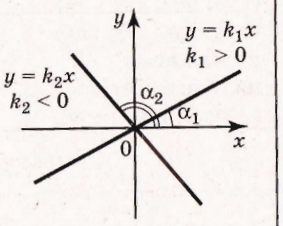
**График** — *прямая*.
Функция $y = kx$ (при $b = 0$) называется прямая пропорциональность.




$y = b$ $(k = 0)$

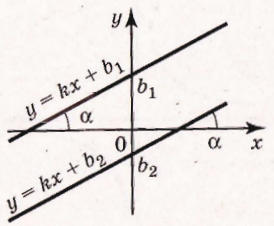



$y = kx$ $(b = 0)$

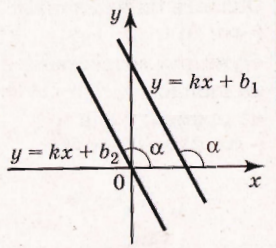



$y = kx + b$

$k > 0$




$k < 0$

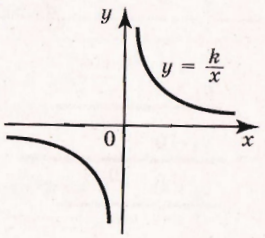
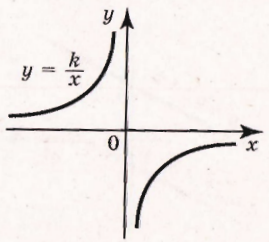


## Дробно-линейная функция

$$y = \frac{k}{x} \quad (k \neq 0,\ x \neq 0)$$

(обратная пропорциональность)

**График** — *гипербола.*
Оси симметрии — прямые $y = x$ и $y = -x$.
Центр симметрии — начало координат (точка 0).

| $k > 0$ |
|---|
| Область определения: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Функция убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.   |
| $k < 0$ |
| Область определения: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.   |



## Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$

Дискриминант: $D = b^2 - 4ac$,
$D > 0$ — два действительных корня,
$D = 0$ — один действительный корень,
$D < 0$ — нет действительных корней.

| Формула корней | Свойства корней (теорема Виета) |
|---|---|
| *Квадратное уравнение* $ax^2 + bx + c = 0$ | |
| $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ | $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$<br>$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ |
| *Приведенное уравнение* $(a = 1)$<br>$x^2 + px + q = 0$ | |
| $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ | $x_1 + x_2 = -p$<br>$x_1 \cdot x_2 = q$ |
| *Уравнение с четным вторым коэффициентом* $(b = 2k)$<br>$ax^2 + 2kx + c = 0$ | |
| $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$ | $x_1 + x_2 = \frac{-2k}{a}$<br>$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ |

## Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$

Корни квадратного трехчлена:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

! Чтобы найти корни квадратного трехчлена, нужно решить соответствующее квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

| **Разложение квадратного трехчлена на множители** | |
|---|---|
| $D < 0$ | Не раскладывается |
| $D > 0$ | $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ |
| $D = 0$ | $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ |

**Выделение квадрата двучлена из квадратного трехчлена**

$$ax^2 + bx + c =$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

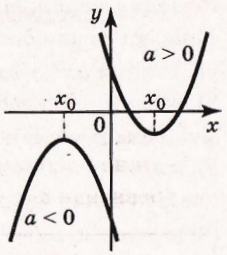
$$= a\left(\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}$$



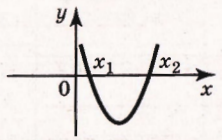
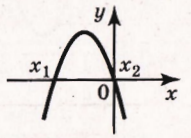
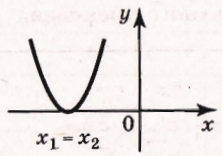
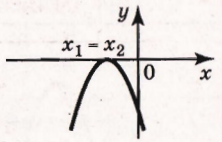
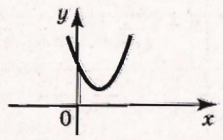
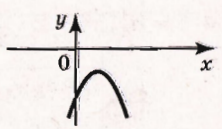
## Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$

**График** — *парабола*.
Ось симметрии — прямая $x = x_0$.
$a > 0$ — ветви вверх, при $x_0$ — наименьшее значение.
$a < 0$ — ветви вниз, при $x_0$ — наибольшее значение.
*Координаты вершины параболы*: $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$.




*Корни функции* (или нули функции) — это точки пересечения графика функции с осью $Ox$.

! Корни функции определяются как корни соответствующего квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

| | $a > 0$ | $a < 0$ |
|---|---|---|
| $D > 0$ Два корня |   |   |
| $D = 0$ Один корень |   |   |
| $D < 0$ Нет корней |   |   |

## Квадратное неравенство

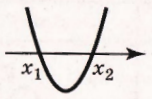
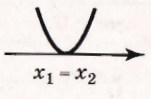
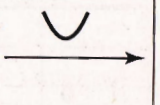
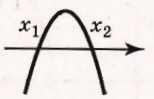
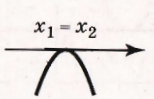
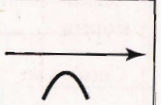
***Решение квадратного неравенства:***

1) найти корни соответствующего квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$;

2) схематично изобразить график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$;

3) записать промежутки, на которых квадратичная функция положительна (неравенство $ax^2 + bx + c > 0$) или отрицательна (неравенство $ax^2 + bx + c < 0$).

① $ax^2 + bx + c > 0$ ② $ax^2 + bx + c \leqslant 0$

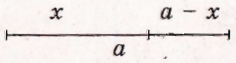
| | | $D > 0$ | $D = 0$ | $D < 0$ |
|---|---|---|---|---|
| $a > 0$ | |  |  |  |
| | ① | $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ | $(-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$ | $(-\infty; +\infty)$ |
| | ② | $[x_1; x_2]$ | $\{x_1\}$ | $\varnothing$ |
| $a < 0$ | | $D > 0$ | $D = 0$ | $D < 0$ |
| | |  |  |  |
| | ① | $(x_1; x_2)$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| | ② | $(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$ | $(-\infty; +\infty)$ | $(-\infty; +\infty)$ |



## Прогрессии

| **Арифметическая прогрессия** | |
|---|---|
| Формула $n$-го члена | $a_n = a_1 + (n-1)d$ |
| Характеристическое свойство | $\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = a_n$ |
| Сумма $n$ первых членов | $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ |
| Свойство | $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_k + a_{n-k}$ |
| **Геометрическая прогрессия** | |
| Формула $n$-го члена | $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ |
| Характеристическое свойство | $b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_n^2$ |
| Сумма $n$ первых членов | $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1} = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ |
| Свойство | $b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = \ldots = b_k \cdot b_{n-k}$ |
| Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии ($0 < \lvert q \rvert < 1$) | $S = \frac{b_1}{1-q}$ |

## Средние величины

| Среднее арифметическое | |
|---|---|
| двух величин | $\frac{a+b}{2}$ |
| $n$ величин | $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ |
| **Среднее квадратичное** | |
| двух величин | $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ |
| $n$ величин | $\sqrt{\frac{1}{n}(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)}$ |
| **Среднее геометрическое** (*среднее пропорциональное*) | |
| двух величин | $\sqrt{ab}$ |
| $n$ величин | $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$ |
| **Золотое сечение** | |
| Величина $a$ делится на части $x$ и $a-x$ так, чтобы $x = \sqrt{a(a-x)} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot a \approx 0{,}618a$   | |



## Тригонометрические тождества

| Основные тождества | |
|---|---|
| $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ | |
| $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ | |
| $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ | |
| $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ | |
| $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ | |
| **Формулы сложения** | |
| $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ | |
| $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$ | |
| $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$ | |
| **Формулы половинного угла** | **Формулы двойного угла** |
| $\left\lvert\cos\frac{\alpha}{2}\right\rvert = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ | $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ |
| $\left\lvert\sin\frac{\alpha}{2}\right\rvert = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ | $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ |
| $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} =$ | $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ |
| $= \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ | $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ |
| | $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ |

## Формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

## Переход от суммы к произведению

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \pm\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \pm\frac{\cos(\alpha\mp\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$$

## Переход от произведения к сумме

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

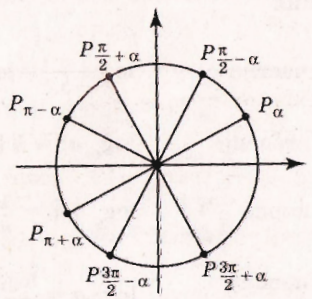
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$$



## Формулы приведения

| $t$ | $\cos t$ | $\sin t$ | $\operatorname{tg} t$ |
|---|---|---|---|
| $\pi - \alpha$ | $-\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ |
| $\pi + \alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ |
| $\frac{\pi}{2} - \alpha$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ |
| $\frac{\pi}{2} + \alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ |
| $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ |
| $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ |



## Логарифмы

| Определение логарифма |
|---|
| Логарифмом числа $b$ по основанию $a$ называется показатель степени, в которую нужно возвести $a$, чтобы получить $b$.<br>$\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b$ |
| **Свойства логарифма** |
| $b^{\log_b a} = a \quad \log_a a = 1 \quad \log_a 1 = 0 \quad \log_a a^m = m$ |
| **Действия с логарифмами** |
| Логарифм произведения $\log_c (ab) = \log_c a + \log_c b$ |
| Логарифм частного $\log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$ |
| Логарифм степени $\log_c a^k = k \log_c a$ |
| Логарифм корня $\log_c \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log_c a$ |
| Переход к новому основанию $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ |



| Дополнительные формулы |
|---|
| $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$<br>$\frac{\log_n b}{\log_n c} = \frac{\log_m b}{\log_m c} = \log_c b$<br>$\log_n b \cdot \log_m c = \log_m b \cdot \log_n c$<br>$a^{\log_n b} = b^{\log_n a}$ |
| **Сравнение логарифмов** |
| Если $0 < a < 1$ и $0 < x_1 < x_2$, то<br>$\log_a x_1 > \log_a x_2$<br>(знак неравенства меняется).<br>Если $a > 1$ и $0 < x_1 < x_2$, то<br>$\log_a x_1 < \log_a x_2$<br>(знак неравенства не меняется). |
| Если $1 < a < b$ и $x > 1$, то<br>$\log_a x > \log_b x.$<br>Если $0 < a < b < 1$ и $x > 1$, то<br>$\log_a x > \log_b x.$<br>Если $1 < a < b$ и $0 < x < 1$, то<br>$\log_a x < \log_b x.$<br>Если $0 < a < b < 1$ и $0 < x < 1$, то<br>$\log_a x < \log_b x.$ |

## Пределы

### Свойства пределов

$$\lim_{x \to a} c = c$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$$

$$\lim_{x \to a} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

### Пределы некоторых последовательностей

$a > 0$, $b > 1$, $\alpha > 0$, $p$ — натуральное число

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \lim_{n \to \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e \qquad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{\log_b n}{n^\alpha} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^\alpha}{b^n} = 0 \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$



## Производная

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Вторая производная: $f''(x) = (f'(x))'$

Производные высших порядков:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

### Производные некоторых функций

$C' = 0$ ($C$ — константа)

$x' = 1$

$(x^2)' = 2x$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$

$(\lg x)' = \frac{1}{x} \lg e$

## Правила вычисления производных

$u = u(x)$, $v = v(x)$, $c$ – постоянная

$(cu)' = cu'$ $\quad (u + v)' = u' + v'$ $\quad (u \cdot v)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}$ $\quad (u - v)' = u' - v'$ $\quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

## Производная сложной функции

$(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ $\quad (u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ $\quad (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$ $\quad (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$ $\quad (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$

$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$ $\quad (e^u)' = e^u \cdot u'$

## Производная обратной функции

$f(x)$ и $g(x)$ взаимно обратные функции.

Если существует $f'(x_0)$ и $g'(x_0)$, то $g'(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

## Свойства производных высшего порядка

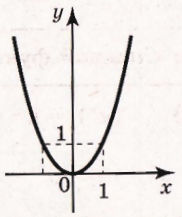
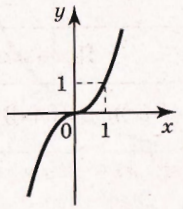
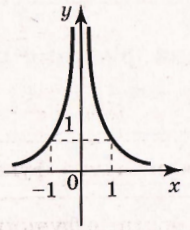
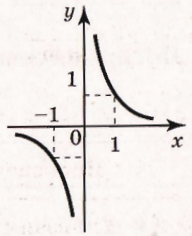
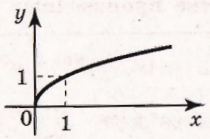
$(u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$

$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$

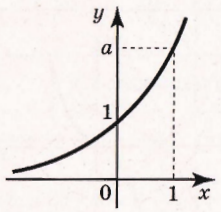
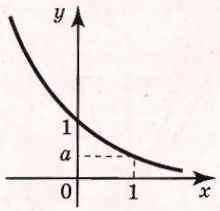


# ФУНКЦИИ

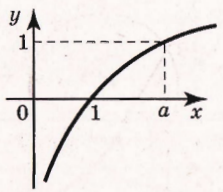
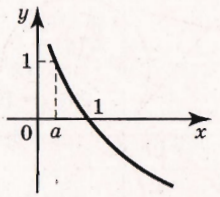
## Степенная функция $y = x^n$

| | $n$ — четное | $n$ — нечетное |
|---|---|---|
| $n > 0$ |  $D(y) = (-\infty; +\infty)$ $E(y) = [0; +\infty)$ |  $D(y) = (-\infty; +\infty)$ $E(y) = (-\infty; +\infty)$ |
| $n < 0$ |  $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ $E(y) = (0; +\infty)$ |  $D(y) = E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ |
| $0 < n < 1$ |  $D(y) = [0; +\infty)$; $E(y) = [0; +\infty)$ | |

## Показательная функция $y = a^x$
$(a > 0,\ a \neq 1)$

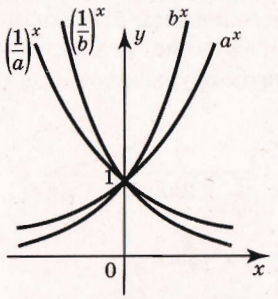
| $a > 1$ | $0 < a < 1$ |
|---|---|
|  |  |
| $D(y) = (-\infty; +\infty)$<br>$E(y) = (0; +\infty)$<br>Возрастающая функция | $D(y) = (-\infty; +\infty)$<br>$E(y) = (0; +\infty)$<br>Убывающая функция |

## Логарифмическая функция $y = \log_a x$
$(a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0)$

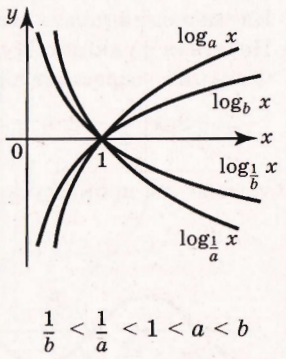
| $a > 1$ | $0 < a < 1$ |
|---|---|
|  |  |
| $D(y) = (0; +\infty)$<br>$E(y) = (-\infty; +\infty)$<br>Возрастающая функция | $D(y) = (0; +\infty)$<br>$E(y) = (-\infty; +\infty)$<br>Убывающая функция |



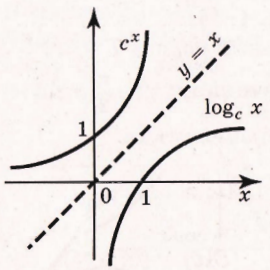
## Сравнение графиков показательной и логарифмической функций



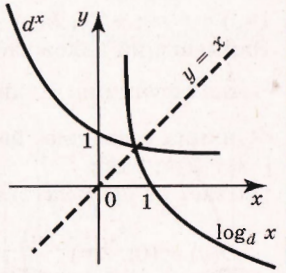
$\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 1 < a < b$



$\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 1 < a < b$



$c > 1$



$d < 1$

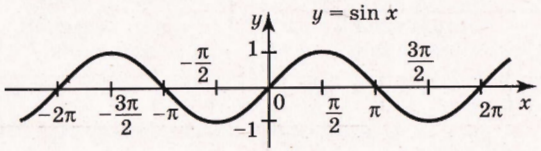
## Тригонометрические функции

### $y = \sin x$

$D(y) = (-\infty; +\infty)$; $E(y) = [-1; 1]$.
Наименьший положительный период $T = 2\pi$.
Нечетная функция. Нули функции: $x = \pi k$.
Функция возрастает на промежутках

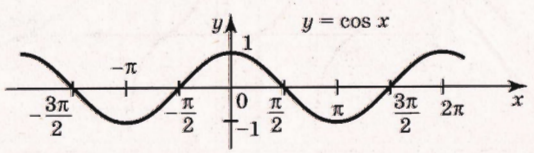
$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$;

убывает на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$.




### $y = \cos x$

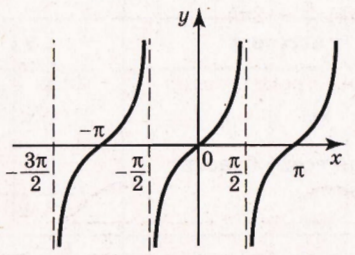
$D(y) = (-\infty; +\infty)$; $E(y) = [-1; 1]$.
Наименьший положительный период $T = 2\pi$.
Четная функция. Нули функции: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.
Функция возрастает на промежутках
$[-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$;
убывает на промежутках $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$.





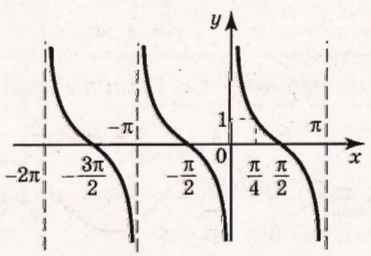

### $y = \operatorname{tg} x$

$D(y) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$; $E(y) = (-\infty; +\infty)$.
Наименьший положительный период $T = \pi$.
Нечетная функция.
Функция возрастает на каждом промежутке из области определения.
Асимптоты: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.




### $y = \operatorname{ctg} x$

$D(y) = (\pi k; 2\pi k)$; $E(y) = (-\infty; +\infty)$.
Наименьший положительный период $T = \pi$.
Нечетная функция.
Функция убывает на каждом промежутке из области определения.
Асимптоты: $x = \pi k$, $k \in Z$.



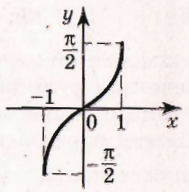
## Обратные тригонометрические функции

### $y = \arcsin x$

$D(y) = [-1; 1]$.

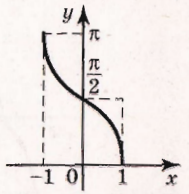
$E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Нечетная функция.
Возрастает на всей области определения.




### $y = \arccos x$

$D(y) = [-1; 1]$.
$E(y) = [0; \pi]$.
Убывает на всей области определения.

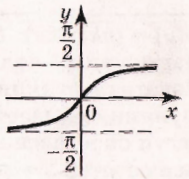



### $y = \operatorname{arctg} x$

$D(y) = (-\infty; +\infty)$.

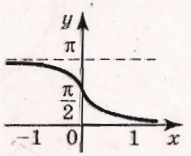
$E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Нечетная функция.
Возрастает на всей области определения.
Асимптоты: $x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{\pi}{2}$.




### $y = \operatorname{arcctg} x$

$D(y) = (-\infty; +\infty)$.
$E(y) = (0; \pi)$.
Убывает на всей области определения.
Асимптоты: $x = 0$ и $x = \pi$.






### Значения тригонометрических функций некоторых углов

| $\alpha$, рад | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha°$ | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 180° | 270° |
| $\sin\alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | −1 |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | −1 | 0 |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | не опр. | 0 | не опр. |
| $\operatorname{ctg}\alpha$ | не опр. | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | не опр. | 0 |

### Соотношения между обратными тригонометрическими функциями

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x$$

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

$$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$$

$$\operatorname{arcctg} x = \pi - \operatorname{arcctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$$

## Интеграл

**Неопределенный интеграл** — это выражение $F(x) + C$ для всех первообразных функций от данной функции $f(x)$:

$$F(x) + C = \int f(x)dx$$

**Основное свойство**

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

**Интегралы некоторых функций**

$$\int k\,dx = kx + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C$$

**Основные правила интегрирования**

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$



**Формула Ньютона-Лейбница**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

**Свойства определенного интеграла**

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Если $f(x)$ четная, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

Если $f(x)$ нечетная, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

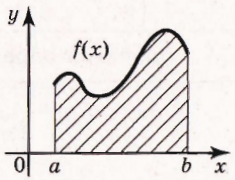
$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a),$$

где $M$ и $m$ — наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

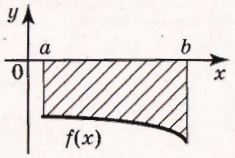
## Вычисления с помощью интеграла

### Площадь криволинейной трапеции

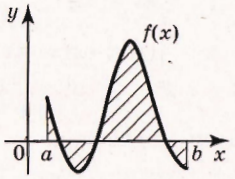
$$S = \int_a^b f(x)dx$$



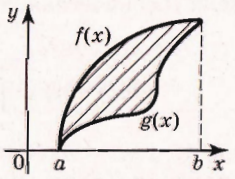

$$S = -\int_a^b f(x)dx$$




$$S = \int_a^b |f(x)|dx$$



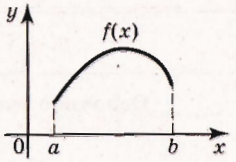

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$





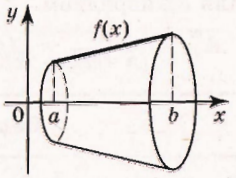

### Длина кривой

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$



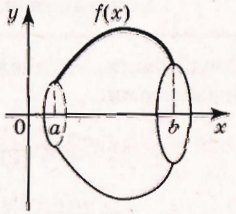

### Площадь поверхности вращения

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$




### Объем тела вращения

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$



## Комбинаторика

**Факториал**

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

**Основное свойство факториала**

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

**Размещения из $n$ по $m$ элементов**

Соединения, отличающиеся самими элементами или их порядком.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$$

**Перестановки**

Соединения, отличающиеся только порядком элементов.

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n; \quad P_n = A_n^n$$

**Сочетания из $n$ по $m$ элементов**

Соединения, отличающиеся только самими элементами.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{A_n^m}{P_m} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m}$$



**Свойства сочетаний**

$$C_n^m = C_n^{n-m} \qquad C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

**Бином Ньютона**

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 +$$

$$+ \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + b^n$$

$$C_n^1 = n; \quad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}; \quad C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

**Треугольник Паскаля**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n = 0$ | | | | 1 | | | | |
| $n = 1$ | | | 1 | | 1 | | | |
| $n = 2$ | | 1 | | 2 | | 1 | | |
| $n = 3$ | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | |
| $n = 4$ | | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 |
| $n = 5$ | 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | | 1 |
| $n = 6$ | | 1 | | 6 | | 15 | | 20 | | 15 | | 6 | | 1 |
| $n = 7$ | 1 | | 7 | | 21 | | 35 | | 35 | | 21 | | 7 | | 1 |

По этой схеме определяются биномиальные коэффициенты.

## Комплексные числа

$z = x + iy \quad (i^2 = -1)$

Re $z = x$ – *действительная часть* комплексного числа,

Im $z = y$ – *мнимая часть* коплексного числа.

**Комплексно-сопряженные числа**

$z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$

**Действия с комплексными числами**

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

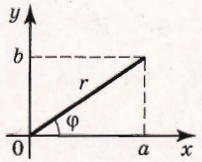
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0)$$

**Тригонометрическая форма записи комплексных чисел**

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$






**Модуль коплексного числа**

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

**Аргумент комплексного числа**

$\mathrm{Arg}\ z = \arg z + 2\pi k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$,

где $\arg z = \varphi$ — главное значение аргумента.

**Показательная форма записи комплексных чисел**

$$z = re^{i\varphi}$$

**Формула Эйлера**

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

**Произведение и частное комплексных чисел**

$$z_1 \cdot z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} =$$

$$= r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

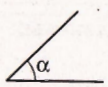
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

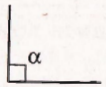
$(z_2 \neq 0)$

## Углы

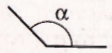
### Виды углов



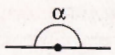

Острый угол $\alpha < 90°$




Прямой угол $\alpha = 90°$



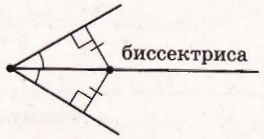

Тупой угол $\alpha > 90°$




Развернутый угол $\alpha = 180°$

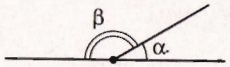
### Биссектриса угла

*Биссектриса угла* — луч, выходящий из вершины угла и делящий его пополам.




! Точки биссектрисы находятся на одинаковом расстоянии от сторон угла.

### Смежные углы

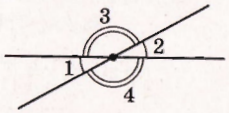



$\alpha$ и $\beta$ — смежные углы

$\alpha + \beta = 180°$

! Угол между биссектрисами смежных углов равен 90°.

### Вертикальные углы




Вертикальные углы: $\angle 1$ и $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$, причем $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.

! При пересечении двух прямых образуются 2 пары вертикальных углов и 4 пары смежных углов.

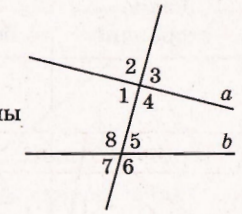


### Прямые и секущая

$\left.\begin{matrix}\angle 1 \text{ и } \angle 5\\ \angle 4 \text{ и } \angle 8\end{matrix}\right\}$ Накрест лежащие углы

$\left.\begin{matrix}\angle 1 \text{ и } \angle 8\\ \angle 4 \text{ и } \angle 5\end{matrix}\right\}$ Односторонние углы

$\left.\begin{matrix}\angle 1 \text{ и } \angle 7\\ \angle 2 \text{ и } \angle 8\\ \angle 3 \text{ и } \angle 5\\ \angle 4 \text{ и } \angle 6\end{matrix}\right\}$ Соответственные углы

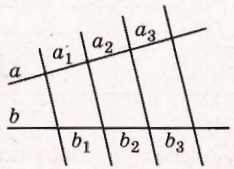



! $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$, $\angle 5 = \angle 7$, $\angle 6 = \angle 8$.

### Признаки параллельности прямых

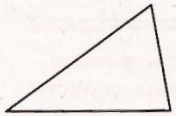
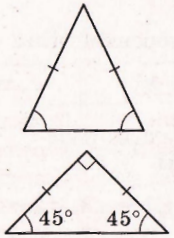
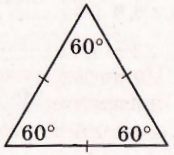
1) Если накрест лежащие углы равны, то $a \parallel b$.
2) Если соответственные углы равны, то $a \parallel b$.
3) Если сумма односторонних углов равна 180°, то $a \parallel b$.

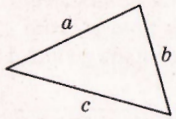
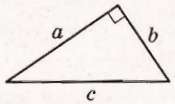
### Теорема Фалеса

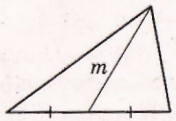
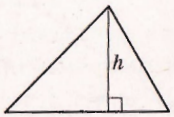



Если на прямой отложены равные отрезки ($a_1 = a_2 = a_3 = \ldots$), то параллельные прямые, проведенные через их концы и пересекающие другую прямую ($b$), отсекут на второй прямой равные между собой отрезки ($b_1 = b_2 = b_3 \ldots$).

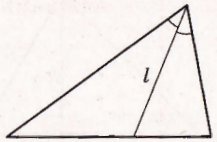
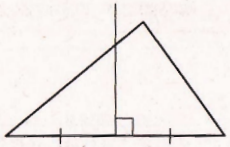
## Треугольник

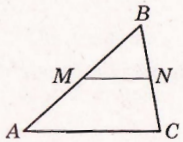
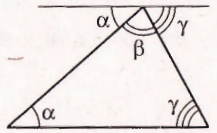
| Разносторонний | Равнобедренный | Равносторонний |
|---|---|---|
|  |  |  |

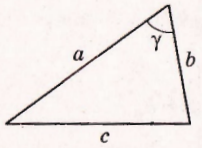
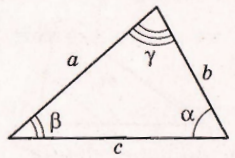
| Неравенство треугольника | Теорема Пифагора |
|---|---|
|  $a + b > c$<br>$a + c > b$<br>$b + c > a$ |  $c^2 = a^2 + b^2$ |

| Медиана | Высота |
|---|---|
|  Точка пересечения медиан — центр тяжести. |  Точка пересечения высот — ортоцентр. |



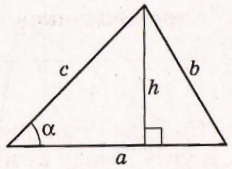
| Биссектриса | Серединный перпендикуляр |
|---|---|
|  Точка пересечения биссектрис — центр вписанной окружности. |  Точка пересечения серединных перпендикуляров — центр описанной окружности. |

| Средняя линия | Сумма углов |
|---|---|
|  $MN$ — средняя линия<br>$MN \parallel AC$; $MN = \frac{1}{2}AC$ |  $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ |

| Теорема косинусов | Теорема синусов |
|---|---|
|  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$ |  $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ |

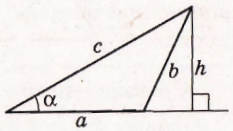
## Площадь треугольника

$S = \frac{1}{2}ah$




$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,
где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$

$S = \frac{1}{2}ac\sin\alpha$

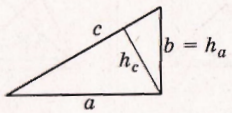



$S = pr$, $r$ — радиус вписанной окружности

$S = \frac{abc}{4R}$, $R$ — радиус описанной окружности

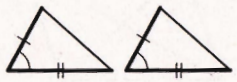
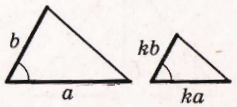
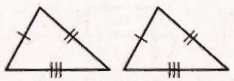
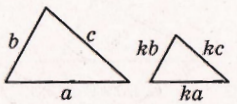
В прямоугольном треугольнике:

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$$



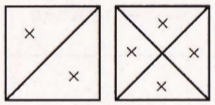



## Равные и подобные треугольники

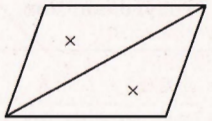
| Признаки равенства треугольников | Признаки подобия треугольников |
|---|---|
| По двум сторонам и углу между ними  | По двум углам  |
| По стороне и двум прилежащим к ней углам  | По двум сторонам и углу между ними   |
| По трем сторонам  | По трем сторонам   |

## Примеры равных треугольников

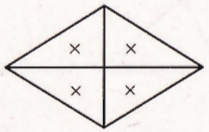
В квадрате

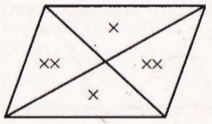


В параллелограмме

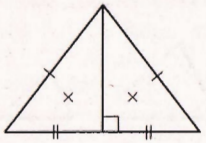


В ромбе

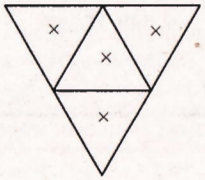




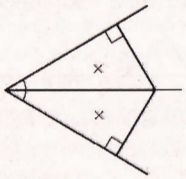
В равнобедренном треугольнике



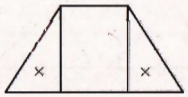
В равностороннем треугольнике



В углу



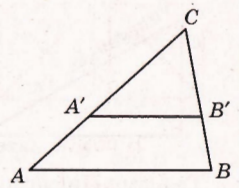
В равнобедренной трапеции



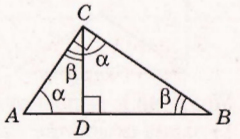


## Примеры подобных треугольников

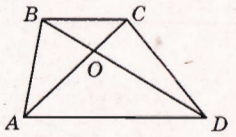
В произвольном треугольнике:
если $AB \parallel A'B'$,
то $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C$.




В прямоугольном треугольнике:
если $\angle ACB = 90°$ и $CD \perp AB$,
то $\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD$.

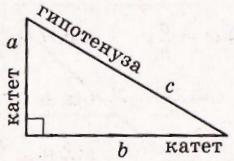



В произвольной трапеции:
если $AD \parallel BC$,
то $\triangle AOD \sim \triangle COB$.



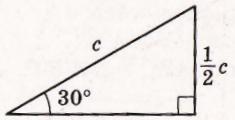

**!** Площади подобных треугольников относятся как квадраты длин соответствующих сторон (или других линейных элементов).

## Прямоугольный треугольник

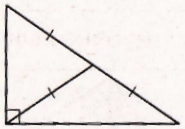



Теорема Пифагора

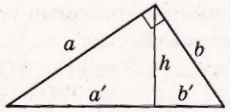
$c^2 = a^2 + b^2$



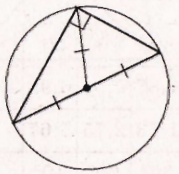

*Катет против угла в* 30° равен половине гипотенузы.



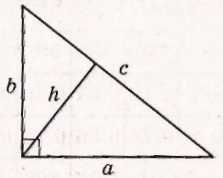
Медиана к гипотенузе:
1) равна половине гипотенузы;
2) делит треугольник на два равнобедренных треугольника.




Высота, проведенная к гипотенузе:
1) равна $h = \sqrt{a'b'}$;
2) делит треугольник на два, подобных ему треугольника.



*Центр описанной окружности* лежит на середине гипотенузы.

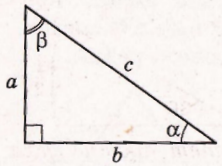



*Площадь*

$S = \frac{1}{2}ab \quad S = \frac{1}{2}ch$



## Тригонометрические функции в прямоугольном треугольнике




$\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$

$\cos\beta = \frac{a}{c}$ $\sin\beta = \frac{b}{c}$

$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$ $\operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}$

## Решение прямоугольных треугольников

$a = c\sin\alpha = b\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{\operatorname{ctg}\alpha}$

$b = c\cos\alpha = \frac{a}{\operatorname{tg} a} = a\operatorname{ctg}\alpha$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\alpha + \beta = 90°$

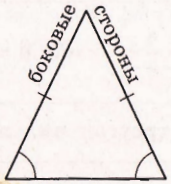
## Приближенные значения тригонометрических функций некоторых углов

| $\alpha°$ | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha \approx$ | 0,17 | 0,34 | 0,50 | 0,64 | 0,77 | 0,87 | 0,94 | 0,98 | $\approx \cos\alpha$ |
| $\operatorname{tg}\alpha \approx$ | 0,18 | 0,36 | 0,58 | 0,84 | 1,19 | 1,73 | 2,75 | 5,67 | $\approx \operatorname{ctg}\alpha$ |
| | 80° | 70° | 60° | 50° | 40° | 30° | 20° | 10° | $\alpha°$ |

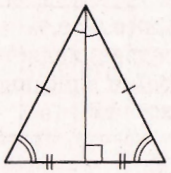
Для малых положительных чисел
$\sin\alpha \approx \alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$.

## Равнобедренный треугольник

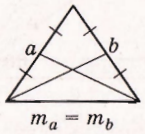
1) Углы при основании равны.



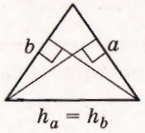

2) Медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.



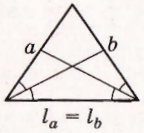
3) Медианы биссектрисы и высоты, проведенные к боковым сторонам, равны.




$m_a = m_b$

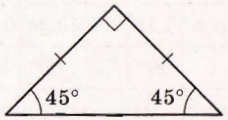



$h_a = h_b$



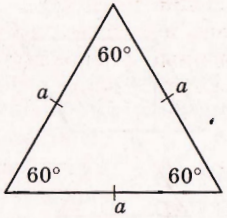

$l_a = l_b$

4) Углы при основании равнобедренного прямоугольного треугольника равны 45°.

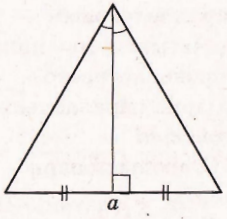





## Равносторонний треугольник




Все стороны равны.
Все углы равны.



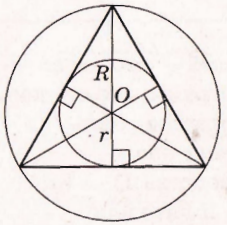

Любая медиана является также высотой и биссектрисой.
Все медианы (высоты, биссектрисы) равны между собой.

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



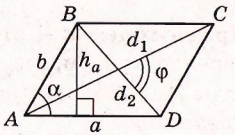

Точка пересечения медиан (высот, биссектрис) является центром и вписанной, и описанной окружностей, причем $R = 2r$.

## Параллелограмм

**Параллелограмм** — это четырехугольник, стороны которого попарно параллельны.

*Свойства*

1) Стороны попарно равны.
2) Диагонали делятся точкой пересечения пополам.
3) Противоположные углы равны.




$AB \parallel CD$

$BC \parallel AD$

Периметр: $P = 2(a + b)$.

Площадь: $S = ah_a =$

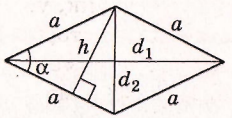
$= ab \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$.

### Виды параллелограммов

**Ромб** — это параллелограмм, все стороны которого равны.

*Свойства*

Свойства 1) — 3).
4) Диагонали перпендикулярны.
5) Диагонали — биссектрисы углов.
6) В любой ромб можно вписать окружность.




Периметр: $P = 4a$.

Площадь: $S = ah =$

$= a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2$.

Радиус вписанной окружности:

$r = \frac{1}{2} h = \frac{1}{2} a \sin \alpha$.

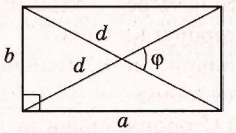


### Виды параллелограммов (*продолжение*)

**Прямоугольник** — это параллелограмм, все углы которого прямые.

*Свойства*

Свойства 1) — 3).
7) Диагонали равны.
8) Около любого прямоугольника можно описать окружность.




Периметр: $P = 2(a + b)$.

Площадь:

$S = ab = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi$.

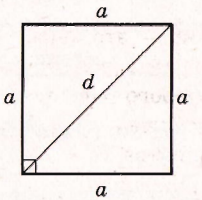
Радиус описанной окружности:

$R = \frac{1}{2} d = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$.

**Квадрат** — это прямоугольник, у которого все стороны равны (или ромб с прямыми углами).

*Свойства*

Свойства 1) — 3).
Свойства 4) — 6).
Свойства 7) — 8).




$P = 4a$

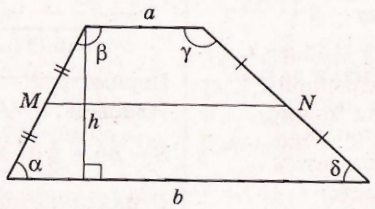
$S = a^2 = \frac{1}{2} d^2$

$d = a\sqrt{2} \quad r = \frac{1}{2} a$

$R = \frac{1}{2} d$

## Трапеция

**Трапеция** — это четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие — непараллельны.




$MN$ — средняя линия

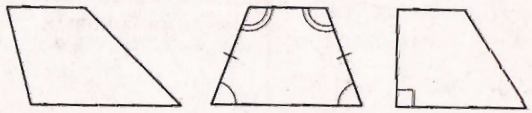
$MN = \frac{1}{2}(a + b)$

Площадь: $S = \frac{1}{2}(a + b)h$.

Свойство углов: $\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180°$.

### Виды трапеций

Произвольная | Равнобедренная | Прямоугольная

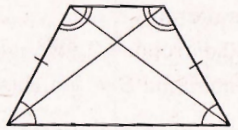




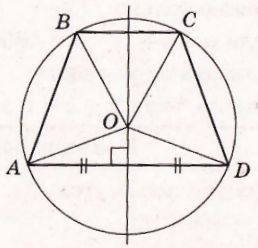
### Свойства равнобедренной трапеции

1) Диагонали равны.

2) Углы при одном основании равны.



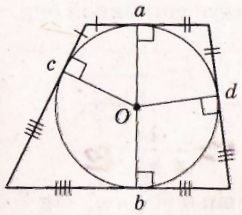
3) Около любой равнобедренной трапеции можно описать окружность (ее центр лежит на серединном перпендикуляре к основанию).




4) В равнобедренную трапецию можно вписать окружность, если средняя линия равна боковой стороне.

### Трапеция и окружность

*Описать окружность* можно **только** около равнобедренной трапеции.




*Вписать окружность* можно **только** в трапецию, у которой сумма длин оснований равна сумме длин боковых сторон:

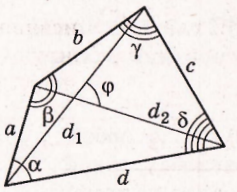
$$a + b = c + d.$$

## Многоугольники

### Произвольный выпуклый четырехугольник

Свойство углов:
$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$.

Площадь: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$.




Описать окружность можно только, если $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$.

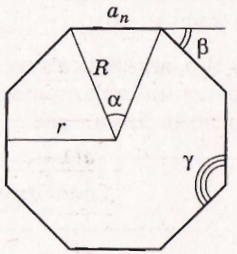
Вписать окружность можно, если $a + c = b + d$.

### Правильный $n$-угольник

Центральный угол
$\alpha = 360° : n$.

Внешний угол
$\beta = 360° : n$.

Внутренний угол
$\gamma = 180° - \beta$.




$a_n = 2\sqrt{R^2 - r^2} =$

$= 2R \sin \frac{\alpha}{2} = 2r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

Радиус описанной окр.

$$R = \frac{a_n}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$R = \frac{a}{2 \sin \frac{180}{n}}$

Радиус вписанной окр.

$$r = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

$r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180}{n}}$

Площадь

$$S = \frac{1}{2} n a_n r = n r^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} n R^2 \sin \alpha = \frac{1}{4} n a_n^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

### Правильные многоугольники

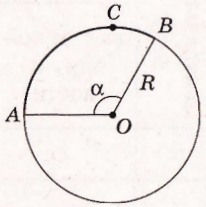
| Число сторон | Центральный угол | Радиус вписанной окружности | Радиус описанной окружности | Площадь |
|---|---|---|---|---|
| $n$ | $\alpha$ | $r$ | $R$ | $S$ |
| 3 | 60° | $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ | $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ |
| 4 | 90° | $\frac{a}{2}$ | $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ | $a^2$ |
| 6 | 120° | $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ | $a$ | $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ |
| 8 | 135° | $\frac{a(1+\sqrt{2})}{2}$ | $\frac{a\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}$ | $2a^2(1+\sqrt{2})$ |
| 12 | 150° | $\frac{a(2+\sqrt{3})}{2}$ | $a \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}$ | $3a^2(2+\sqrt{3})$ |

## Окружность




Длина окружности:

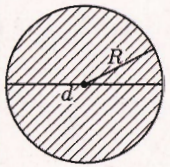
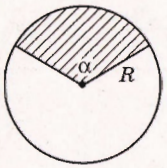
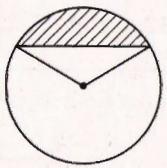
$C = 2\pi R = \pi d$



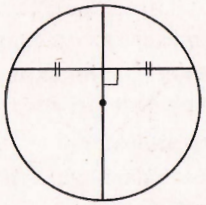
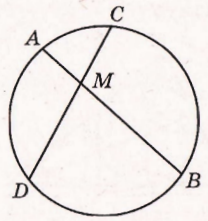
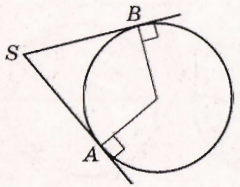
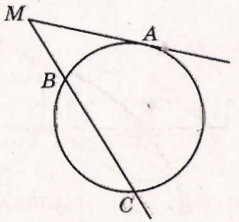

Длина дуги:

$ACB = \alpha R = \frac{\pi\varphi^\circ}{180^\circ} \cdot R,$

где $\alpha$ — величина угла в радианах,
$\varphi$ — в градусах.

| Круг | Сектор | Сегмент |
|---|---|---|
|   Площадь круга: $S = \pi R^2 = \frac{\pi d^2}{4}$ |   Площадь сектора: $S = \frac{1}{2} R^2 \alpha$ |  Площадь сегмента равна площади сектора без треугольника. |

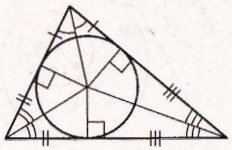


| Свойства хорд | |
|---|---|
| Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам.  | $AM \cdot MB = CM \cdot MD$   |
| **Свойства касательных** | **Секущая и касательная** |
| Радиус, проведенный к точке касания, перпендикулярен касательной.   $SA = SB$ Отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны. | $MA^2 = MB \cdot MC$   |

## Вписанная окружность

В любой треугольник можно вписать окружность.
Центр ее — точка пересечения биссектрис.

Радиус $r = \frac{S}{p}$ ($S$ — площадь, $p$ — полупериметр).



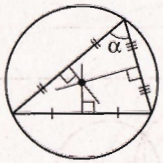
! Точки касания отсекают на сторонах треугольника попарно равные отрезки.

! Центр вписанной окружности равноудален от сторон треугольника.

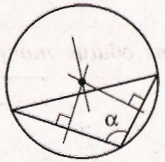
## Описанная окружность

Около любого треугольника можно описать окружность.
Центр ее — точка пересечения серединных перпендикуляров.

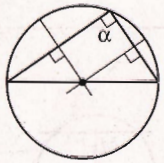
Радиус $R = \frac{abc}{4S}$ ($a$, $b$, $c$ — длины сторон $\Delta$, $S$ — его площадь).




$\alpha < 90°$
центр — внутри



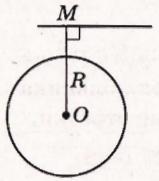
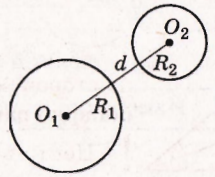
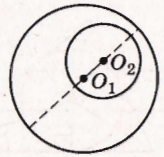
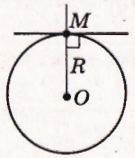
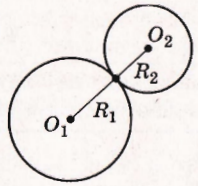
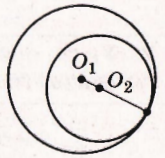
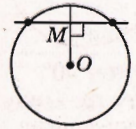
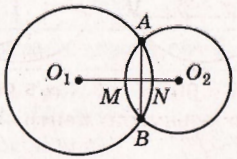

$\alpha > 90°$
центр — вне




$\alpha = 90°$
центр — на гипотенузе

! Центр описанной окружности равноудален от вершин треугольника.



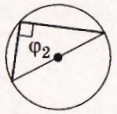
| Прямая и окружность | Две окружности |
|---|---|
| *Нет общих точек* | |
|   $R < OM$ |   $R_1 + R_2 < d$   $R_1 - R_2 > d$ |
| *Одна общая точка* | |
|   $R = OM$ |   $R_1 + R_2 = d$   $R_1 - R_2 = d$ |
| *Две общие точки* | |
|   $R > OM$ |   $MN = R_1 + R_2 - d$ |

## Углы в окружности

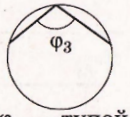
**Вписанные углы**




$\varphi_1$ — острый

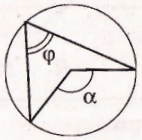



$\varphi_2$ — прямой

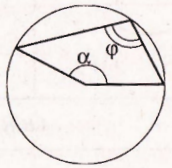



$\varphi_3$ — тупой

**Измерение углов**

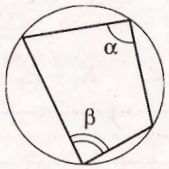



$\varphi = \frac{1}{2}\alpha$




$\varphi = 180° - \frac{1}{2}\alpha$

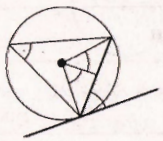
! Углы, опирающиеся на одну дугу, либо равны, либо дают в сумме 180°.




$\alpha + \beta = 180°$



**Угол между касательной и хордой**



равен вписанному углу, опирающемуся на ту же хорду (или половине центрального угла).



## Декартовы координаты на плоскости

$A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$

**Расстояние между точками**

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

**Координаты середины отрезка $AB$**

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

**Уравнение прямой на плоскости**

*Общее уравнение*: $ax + by + c = 0$.
Если $a = 0$, прямая параллельна $Ox$;
если $b = 0$, прямая параллельна $Oy$;
если $c = 0$, прямая проходит через начало координат.
*С угловым коэффициентом*: $y = kx + b$,
$k$ — тангенс угла наклона прямой к оси $Ox$.

**Взаимное расположение прямых**

$y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$
Условие параллельности: $k_1 = k_2$.
Условие перпендикулярности: $k_1 \cdot k_2 = -1$.

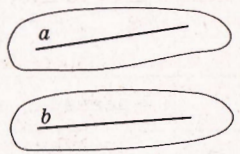
**Уравнение окружности**

| С центром $O(0; 0)$: | с центром в $A(a; b)$: |
|---|---|
| $x^2 + y^2 = R^2$ | $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ |

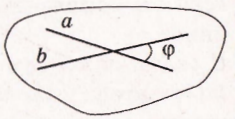
## Углы в пространстве

### Угол между прямыми

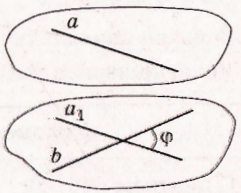
1) Угол между параллельными прямыми.
Если $a \parallel b$, то $\angle(a, b) = 0$.




2) Угол между пересекающимися прямыми.
$\angle(a, b) = \varphi$.




3) Угол между скрещивающимися прямыми.
Если $a$ и $b$ — скрещиваются, то $\angle(a, b) = \angle(a_1, b) = \varphi$, где $a_1 \parallel a$.



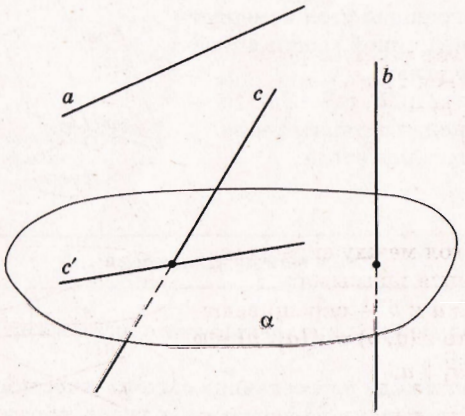



### Угол между прямой и плоскостью

1) Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой этой плоскости.
Если $a \parallel \alpha$, то $\angle(a, \alpha) = 0°$.

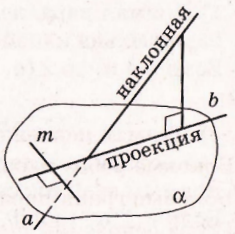
2) Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости.
Если $b \perp \alpha$, то $\angle(b, \alpha) = 90°$.

3) Прямая пересекает плоскость под углом, не равным 90°.
Тогда $\angle(c, \alpha) = \angle(c, c')$,
где $c'$ — проекция $c$ на $\alpha$.



### Теорема о трех перпендикулярах

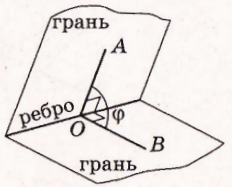
Если прямая на плоскости перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость, то она перпендикулярна и наклонной.
(Если $m \perp b$, то $m \perp a$.)




Если прямая перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и ее проекции на ту же плоскость.
(Если $m \perp a$, то $m \perp b$.)

### Двугранный угол

Двугранный угол измеряется величиной своего линейного угла:
$\angle\varphi = \angle AOB$, где $AO$ и $OB$ — перпендикулярны ребру двугранного угла.




### Угол между плоскостями

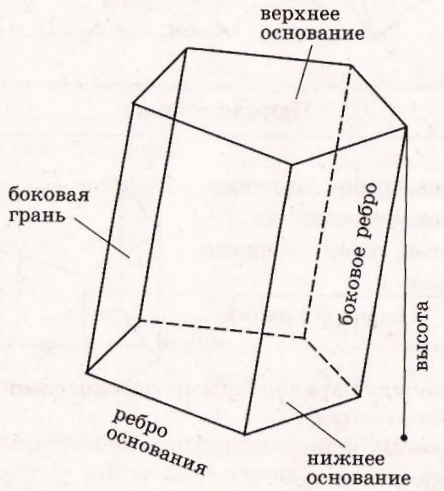
Угол между параллельными плоскостями равен 0°.
Угол между пересекающимися плоскостями равен меньшему из двугранных углов, образовавшихся при пересечении плоскостей.



## МНОГОГРАННИКИ

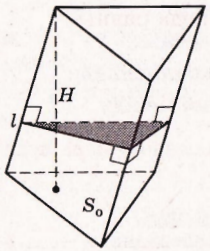
### Призма

Основания призмы — равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях.
Боковые ребра параллельны друг другу.
Боковые грани параллелограммы.
Ребра оснований попарно параллельны.
Высота призмы — расстояние между плоскостями оснований.



## Наклонная призма

Боковые ребра не перпендикулярны основаниям.
Боковые грани — параллелограммы.
Перпендикулярное сечение — это сечение плоскостью, перпендикулярной боковому ребру.




$P_\perp$ — периметр перпендикулярного сечения,
$S_\perp$ — его площадь.

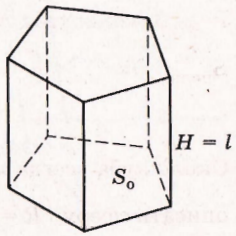
Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = P_\perp \cdot l$.

Площадь полной поверхности: $S_{полн} = 2S_o + S_{бок}$.

Объем: $V = S_o \cdot H = S_\perp \cdot l$.

## Прямая призма

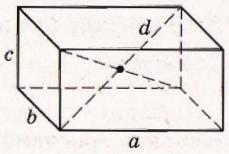
Боковые ребра перпендикулярны основаниям.
Боковые грани — прямоугольники.
Высота равна боковому ребру.
$S_{бок} = P_o \cdot H$ ($P_o$ — периметр основания).
$S_{полн} = 2S_o + S_{бок}$.
Объем: $V = S_o \cdot H$.






## Прямоугольный параллелепипед

Прямоугольный параллелепипед — это прямая призма, в основании которой — прямоугольник.
Все грани — прямоугольники.




Все диагонали параллелепипеда равны.

$S_{полн} = 2(ab + bc + ac)$
$V = abc$

Около прямоугольного параллелепипеда всегда можно описать сферу $\left(R = \frac{d}{2}\right)$.

## Куб

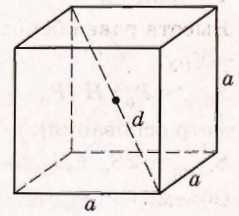
Куб — это прямоугольный параллелепипед, все ребра которого равны.

Все грани — квадраты.

$S_{полн} = 6a^2$

$V = a^3$

Около куба всегда можно описать сферу $\left(R = \frac{d}{2}\right)$ и в куб всегда можно вписать сферу $\left(r = \frac{a}{2}\right)$.



## Пирамида

Основание пирамиды — многоугольник.

Боковые грани — треугольники с общей вершиной.

Высота $H$ — отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины пирамиды на плоскость ее основания.

Апофема $k$ — высота боковой грани.

Угол $\alpha$ — угол наклона боковой грани к плоскости основания.

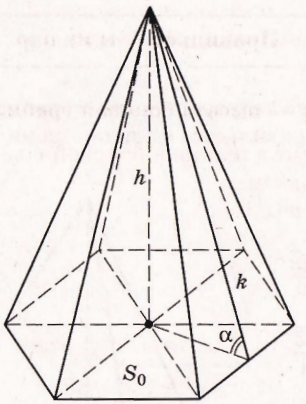
Объем: $V = \frac{1}{3} S_o H$.






## Правильная пирамида

Правильная пирамида — это пирамида, в основании которой лежит правильный многоугольник, а вершина пирамиды проектируется в центр основания.




$S_{бок} = kp_o$, где $k$ — апофема, $p_o$ — полупериметр основания.

$S_{бок} = \frac{S_o}{\cos \alpha}$.

Все боковые грани — равные равнобедренные треугольники.

Все боковые ребра равны.

Все апофемы равны.

Около правильной пирамиды всегда можно описать сферу.

## Тетраэдр

Тетраэдр — это треугольная пирамида.
У тетраэдра все грани — треугольники.
Около любого тетраэдра можно описать сферу, и в любой тетраэдр можно вписать сферу.

## Правильный тетраэдр

Правильный тетраэдр — это тетраэдр, все грани которого правильные (равносторонние) треугольники.

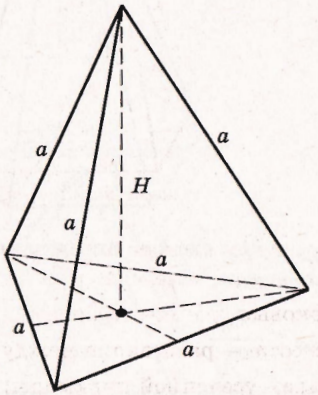
$S_{\text{полн}} = a^2\sqrt{3}$

$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

$H = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

$r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$

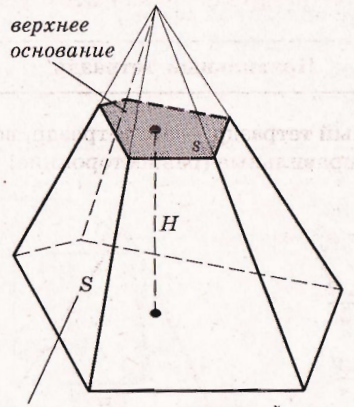



Около правильного тетраэдра всегда можно описать сферу $\left(R = \frac{3}{4}H\right)$ и в него всегда можно вписать сферу $\left(r = \frac{1}{4}H\right)$.



## Усеченная пирамида

Плоскость, параллельная основанию пирамиды, рассекает ее на два многогранника — усеченную пирамиду и пирамиду, подобную исходной.




Верхнее и нижнее основания усеченной пирамиды — подобные многоугольники.

Боковые грани — трапеции.

Высота — расстояние между основаниями.

Объем усеченной пирамиды:

$V = \frac{1}{3}H(S + \sqrt{S \cdot s} + s)$, где $S$ и $s$ — площади оснований, $H$ — высота.

*Правильная усеченная пирамида* — часть правильной пирамиды.

Ее боковые грани — равнобедренные трапеции.

## Правильные многогранники

*Обозначения*:
$a$ — ребро,
$V$ — объем,
$S$ — площадь боковой поверхности,
$R$ — радиус описанной сферы,
$r$ — радиус вписанной сферы,
$H$ — высота.

### Куб

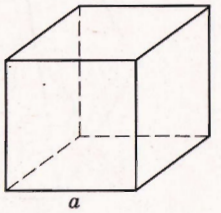
$V = a^3$

$S = 6a^2$

$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$r = \frac{a}{2}$

$H = a$




### Тетраэдр

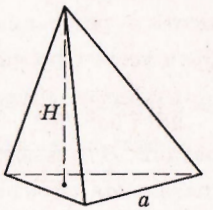
$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

$S = a^2\sqrt{3}$

$R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

$r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$

$H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$





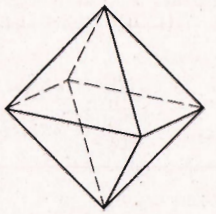

### Октаэдр

$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

$S = 2a^2\sqrt{3}$

$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$



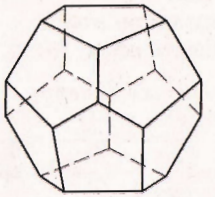
### Додекаэдр

$V = \frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{4}$

$S = 3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$

$R = \frac{a\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4}$

$r = \frac{a\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{20}$



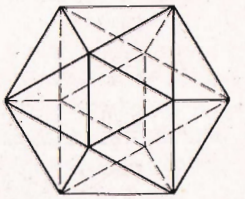
### Икосаэдр

$V = \frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}$

$S = 5a^2\sqrt{3}$

$R = \frac{a\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$

$r = \frac{a\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}$



# ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

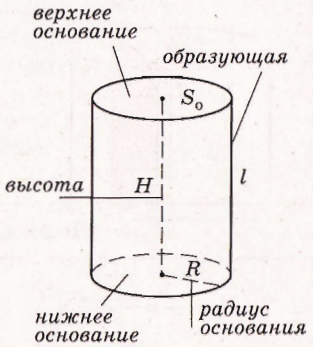
## Цилиндр

$S_о = \pi R^2$

$S_{бок} = 2\pi RH = 2\pi Rl$

$S_{полн} = 2\pi R^2 + 2\pi RH$

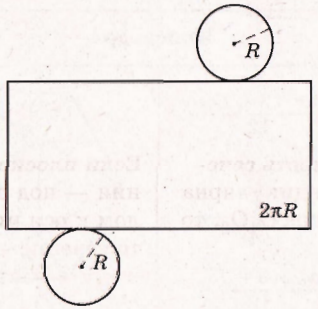
$V = S_о \cdot H = \pi R^2 H$




Около цилиндра всегда можно описать сферу. Ее радиус равен половине диагонали осевого сечения.

В цилиндр можно вписать сферу, если его осевое сечение — квадрат ($2R = H$) $R_ш = \frac{H}{2}$.

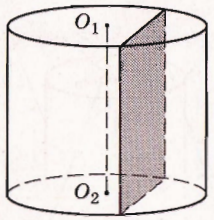
### Развертка цилиндра

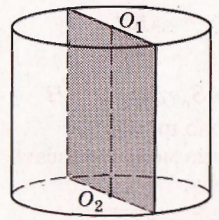




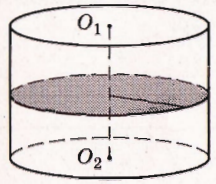

### Сечения цилиндра

Если плоскость сечения параллельна оси цилиндра $O_1O_2$, то сечение — прямоугольник.

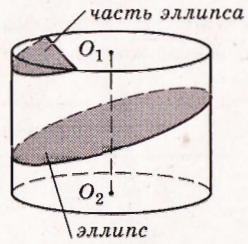



*осевое сечение* $S_{сеч} = 2RH$




Если плоскость сечения перпендикулярна оси цилиндра $O_1O_2$, то сечение — круг.




Если плоскость сечения — под острым углом к оси цилиндра, то сечение — эллипс или его часть.

## Конус

$S_{бок} = \pi Rl$

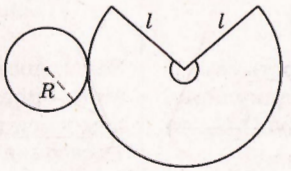
$S_{полн} = \pi R(l + R)$

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$




В конус всегда можно вписать сферу и около него всегда можно описать сферу.

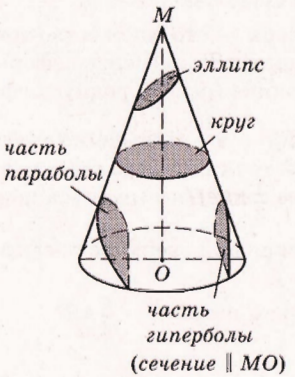
### Развертка конуса



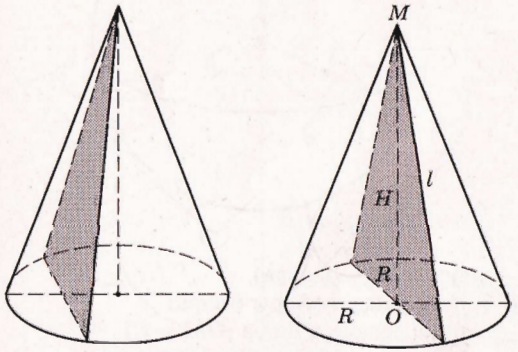



### Сечения конуса

Если плоскость сечения перпендикулярна оси конуса $MO$, то сечение — круг.




Если плоскость сечения проходит через вершину конуса, то сечение — равнобедренный треугольник.




*осевое сечение* $S = RH$

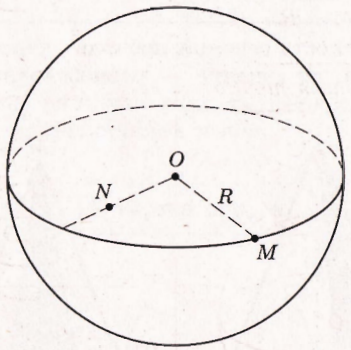
## Сфера и шар

**Сфера** — это множество точек, удаленных от данной точки (центра сферы) на одинаковое расстояние (равное радиусу сферы).

**Шар** — это множество точек, удаленных от данной точки (центра шара) на расстояние, не большее заданного (радиуса шара).

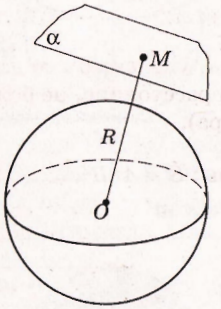
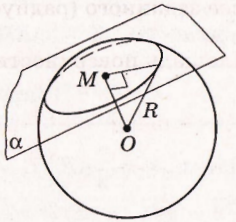
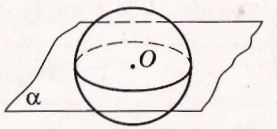
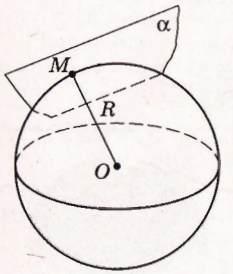
Площадь поверхности сферы: $S = 4\pi R^2$.

Объем шара: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.




$O$ — центр сферы (шара)
$OM = R$ — радиус сферы (шара)
$M$ — точка сферы и шара ($OM = R$)
$N$ — точка шара ($ON < R$)



| Сфера (шар) и плоскость | |
|---|---|
| *Нет общих точек* | *Множество общих точек* |
|   $OM > R$ | Сфера и плоскость: в пересечении — окружность.   |
| *Одна общая точка* | $OM < R$, α — секущая плоскость.   |
|   $OM = R$ α — касательная плоскость | Шар и плоскость: в пересечении — круг. Площадь диаметрального сечения (проходящего через диаметр) $S = \pi R^2$. |

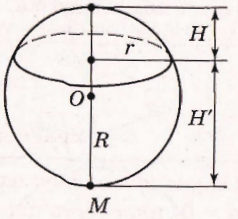
## Шаровой сегмент

Секущая плоскость разбивает шар на два шаровых сегмента высотой $H$ и $H'$.

*Объем сегмента*:

$$V = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right).$$

*Площадь сферической поверхности*: $S = 2\pi RH$.



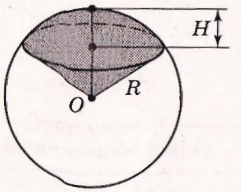

## Шаровой сектор

*Объем*: $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$.

*Площадь сферической поверхности* равна площади сферической поверхности соответствующего шарового сегмента.

*Площадь полной поверхности*:

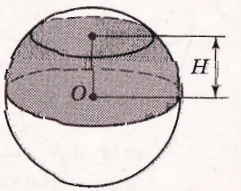
$S = \pi R(2H + \sqrt{2RH - H^2})$.




## Шаровой слой

**Шаровой слой** — это часть шара между двумя параллельными секущими плоскостями.

*Объем* и *площадь* можно найти как разность объемов (площадей) двух шаровых сегментов.






# Декартовы координаты в пространстве

## Расстояние между точками

$A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

## Уравнение плоскости

*Общее уравнение*: $ax + by + cz + d = 0$.

$a = 0$, плоскость параллельна прямой $Ox$;
$b = 0$, плоскость параллельна прямой $Oy$;
$c = 0$, плоскость параллельна прямой $Oz$;
$d = 0$, плоскость проходит через начало координат;
$a = b = 0$, плоскость параллельна плоскости $xOy$;
$a = c = 0$, плоскость параллельна плоскости $xOz$;
$b = c = 0$, плоскость параллельна плоскости $yOz$.

## Координаты середины отрезка $AB$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

## Взаимное расположение плоскостей

*Угол между плоскостями*

$$\cos\varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

*Условие параллельности*

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

*Условие перпендикулярности*

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

## Векторы

| Координаты вектора |
|---|
| Начало $A(x_1; y_1; z_1)$ и конец $B(x_2; y_2; z_2)$: $\overline{AB}\,(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ |
| **Длина вектора** |
| $\bar{a}\,(x; y; z) \quad \lvert\bar{a}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ |
| **Сумма векторов** |
| $\bar{a}\,(x_1; y_1; z_1)$ и $\bar{b}\,(x_2; y_2; z_2)$ $\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}\,(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$ |
| **Свойства сложения** |
| $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a} \qquad \bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$ $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$ |
| **Умножение вектора на число** |
| $\lambda \cdot \bar{a}\,(x; y; z) = \bar{c}\,(\lambda x; \lambda y; \lambda z)$ |
| **Свойства умножения** |
| $(\lambda\mu)\bar{a} = \lambda(\mu\bar{a})$ $\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b} \quad (\lambda + \mu)\bar{a} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a}$ $0 \cdot \bar{a} = \lambda \cdot \bar{0} = \bar{0}$ |



| Скалярное произведение векторов |
|---|
| $\bar{a}\,(x_1; y_1; z_1)$ и $\bar{b}\,(x_2; y_2; z_2)$ $\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 =$ $= \lvert\bar{a}\rvert \cdot \lvert\bar{b}\rvert \cdot \cos(\widehat{a, b})$ |
| **Свойства скалярного произведения** |
| $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ $\bar{a} \cdot \bar{a} \geqslant 0$ $\bar{a} \cdot \bar{a} = \lvert\bar{a}\rvert^2$ $\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$ $(\lambda\bar{a}) \cdot \bar{b} = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b})$ |
| **Угол между векторами** |
| $\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\lvert\bar{a}\rvert \cdot \lvert\bar{b}\rvert}$ |
| **Условие коллинеарности векторов** |
| $\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow x_1 : x_2 = y_1 : y_2 = z_1 : z_2$ или $x_1 = \lambda x_2, \quad y_1 = \lambda y_2, \quad z_1 = \lambda z_2$ |
| **Условие ортогональности векторов** |
| $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ или $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$ |

# СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ

## Квадраты натуральных чисел от 11 до 99

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 121 | 144 | 169 | 196 | 225 | 256 | 289 | 324 | 361 |
| 2 | 441 | 484 | 529 | 576 | 625 | 676 | 729 | 784 | 841 |
| 3 | 961 | 1024 | 1089 | 1156 | 1225 | 1296 | 1369 | 1444 | 1521 |
| 4 | 1681 | 1764 | 1849 | 1936 | 2025 | 2116 | 2209 | 2304 | 2401 |
| 5 | 2601 | 2704 | 2809 | 2916 | 3025 | 3136 | 3249 | 3364 | 3481 |
| 6 | 3721 | 3844 | 3969 | 4096 | 4225 | 4356 | 4489 | 4624 | 4761 |
| 7 | 5041 | 5184 | 5329 | 5476 | 5625 | 5776 | 5929 | 6084 | 6241 |
| 8 | 6561 | 6724 | 6889 | 7056 | 7225 | 7396 | 7569 | 7744 | 7921 |
| 9 | 8281 | 8464 | 8649 | 8836 | 9025 | 9216 | 9409 | 9604 | 9801 |

## Кубы натуральных чисел от 1 до 10

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^3$ | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 256 | 343 | 512 | 729 | 1000 |



## Простые числа от 2 до 997

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 |
| 23 | 29 | 31 | 37 | 41 | 43 | 47 | 53 |
| 59 | 61 | 67 | 71 | 73 | 79 | 83 | 89 |
| 97 | 101 | 103 | 107 | 109 | 113 | 127 | 131 |
| 137 | 139 | 149 | 151 | 157 | 163 | 167 | 173 |
| 179 | 181 | 191 | 193 | 197 | 199 | 211 | 223 |
| 227 | 229 | 233 | 239 | 241 | 251 | 257 | 263 |
| 269 | 271 | 277 | 281 | 283 | 293 | 307 | 311 |
| 313 | 317 | 331 | 337 | 347 | 349 | 353 | 359 |
| 367 | 373 | 379 | 383 | 389 | 397 | 401 | 409 |
| 419 | 421 | 431 | 433 | 439 | 443 | 449 | 457 |
| 461 | 463 | 467 | 479 | 487 | 491 | 499 | 503 |
| 509 | 521 | 523 | 541 | 547 | 557 | 563 | 569 |
| 571 | 577 | 587 | 593 | 599 | 601 | 607 | 613 |
| 617 | 619 | 631 | 641 | 643 | 647 | 653 | 659 |
| 661 | 673 | 677 | 683 | 691 | 701 | 709 | 719 |
| 727 | 733 | 739 | 743 | 751 | 757 | 761 | 769 |
| 773 | 787 | 797 | 809 | 811 | 821 | 823 | 827 |
| 829 | 839 | 853 | 857 | 859 | 863 | 877 | 881 |
| 883 | 887 | 907 | 911 | 919 | 929 | 937 | 941 |
| 947 | 953 | 967 | 971 | 977 | 983 | 991 | 997 |

## Степени чисел 2, 3 и 5

| $n$ | $2^n$ | $3^n$ | $5^n$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 5 |
| 2 | 4 | 9 | 25 |
| 3 | 8 | 27 | 125 |
| 4 | 16 | 81 | 625 |
| 5 | 32 | 243 | 3125 |
| 6 | 64 | 729 | 15 625 |
| 7 | 128 | 2187 | 78 125 |
| 8 | 256 | 6561 | 390 625 |
| 9 | 512 | 19 683 | 1 953 125 |
| 10 | 1024 | 59 049 | 9 765 625 |

## Степени чисел 6, 7, 8 и 9

| $n$ | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 36 | 49 | 64 | 81 |
| 3 | 216 | 343 | 512 | 729 |
| 4 | 1296 | 2401 | 4096 | 6561 |
| 5 | 7776 | 16 807 | 32 768 | 59 049 |



## Греческий алфавит

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | α | альфа | N | ν | ню |
| B | β | бета | Ξ | ξ | кси |
| Γ | γ | гамма | O | o | омикрон |
| Δ | δ | дельта | Π | π | пи |
| E | ε | эпсилон | P | ρ | ро |
| Z | ζ | дзета | Σ | σ | сигма |
| H | η | эта | T | τ | тау |
| Θ | θ | тета | Y | υ | ипсилон |
| I | ι | йота | Φ | ϕ | фи |
| K | κ | каппа | X | χ | хи |
| Λ | λ | лямбда | Ψ | ψ | пси |
| M | μ | мю | Ω | ω | омега |

## Латинский алфавит

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | a | а | N | n | эн |
| B | b | бе | O | o | о |
| C | c | це | P | p | пэ |
| D | d | де | Q | q | ку |
| E | e | е | R | r | эр |
| F | f | эф | S | s | эс |
| G | g | же | T | t | тэ |
| H | h | аш | U | u | у |
| I | i | и | V | v | вэ |
| J | j | жи | W | w | дубль-вэ |
| K | k | ка | X | x | икс |
| L | l | эль | Y | y | игрек |
| M | m | эм | Z | z | зет |

*Справочное издание*

# МАТЕМАТИКА В ТАБЛИЦАХ
## 5–11 классы

***Редакция «Образовательные проекты»***

Ответственный редактор *М. Г. Циновская*
Технический редактор *А. Л. Шелудченко*
Корректор *И. Н. Мокина*
Оригинал-макет подготовлен *ООО «Бета-Фрейм»*

Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2;
953005 — литература учебная

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.001683.02.10 от 05.02.2010 г.

**ООО «Издательство Астрель»**
129085, Москва, пр-д Ольминского, д. 3а

**ООО «Издательство АСТ»**
141100, РФ, Московская обл., г. Щёлково, ул. Заречная, д. 96

Наши электронные адреса: www.ast.ru
E-mail: astpub@aha.ru

Отпечатано с готовых файлов заказчика в ОАО «ИПК «Ульяновский Дом печати». 432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14

---

**По вопросам приобретения книг обращаться по адресу:**
129085, Москва, Звездный бульвар, дом 21, 7 этаж
Отдел реализации учебной литературы
«Издательской группы АСТ»
Справки по телефонам: (495)615-53-10, 232-17-04