ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

Л. Д. Лаппо, М. А. Попов

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ВЫСШИЙ БАЛЛ

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА к ЕГЭ

ЕГЭ



УНИВЕРСАЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ
С МЕТОДИЧЕСКИМИ РЕКОМЕНДАЦИЯМИ,
РЕШЕНИЯМИ И ОТВЕТАМИ

- Варианты экзаменационных заданий с ответами
- Тренировочные материалы с ответами
- Необходимый теоретический материал
- Методика выполнения заданий

ЕГЭ

ВЫСШИЙ БАЛЛ

Л. Д. Лаппо
М. А. Попов

Математика

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ
С МЕТОДИЧЕСКИМИ РЕКОМЕНДАЦИЯМИ,
РЕШЕНИЯМИ И ОТВЕТАМИ

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА К ЕГЭ

Варианты экзаменационных заданий с ответами
Тренировочные материалы с ответами
Необходимый теоретический материал
Методика выполнения заданий

Издательство
«ЭКЗАМЕН»
МОСКВА • 2017

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
Л24

Лаппо Л. Д.

Л24 ЕГЭ. Математика. Профильный уровень. Самостоятельная подготовка к ЕГЭ. Универсальные материалы с методическими рекомендациями, решениями и ответами / Л. Д. Лаппо, М. А. Попов. — М. : Издательство «Экзамен», 2017. — 351, [1] с. (Серия «ЕГЭ. Высший балл»)

ISBN 978-5-377-11175-7

Предлагаемое пособие содержит специальную методику для самостоятельной подготовки к ЕГЭ. Авторы методики — ведущие специалисты, принимающие непосредственное участие в разработке методических материалов для подготовки к выполнению контрольных измерительных материалов ЕГЭ.

Пособие по математике включает:

– необходимый теоретический материал;

– тренировочные материалы и материалы для самоконтроля;

– типовые варианты экзаменационных заданий с ответами.

Пособие адресовано старшеклассникам, оно также может быть использовано преподавателями школы и вуза для подготовки учащихся к экзаменам и проведения разных форм проверки знаний.

Приказом № 699 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных организациях.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

Формат 84x108/32. Гарнитура «Таймс».
Бумага газетная. Уч.-изд. л. 8,5. Усл. печ. л. 18,48.
Тираж 10 000 экз. Заказ № 2679/16.

ISBN 978-5-377-11175-7

© Лаппо Л. Д., Попов М. А., 2017
© Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

1. Выражения и преобразования 8
1.1. Корень степени *n* 8
Свойства арифметического корня 9
1.2. Степень с рациональным показателем 14
Свойства степени с рациональным показателем 14
1.3. Логарифм 19
Свойства логарифмов 19
Десятичные и натуральные логарифмы 24
1.4. Синус, косинус, тангенс, котангенс 25
Основное тригонометрическое тождество 26
Формулы сложения 29
Формулы двойного угла 31
Формулы приведения 32
1.5. Прогрессии 35
Арифметическая прогрессия 35
Геометрическая прогрессия 37
2. Уравнения и неравенства 40
2.1. Равносильность уравнений 40
Теоремы о равносильности уравнений 40
2.2. Общие приемы решения уравнений 41
Метод разложения на множители 41
Метод замены переменной 42
Использование свойств функций 42
Использование графиков 42
2.3. Решение уравнений 42
2.4. Системы уравнений с двумя переменными 52
2.5. Неравенства с одной переменной 66
3. Функции 74
3.1. Числовые функции и их свойства 74
Тригонометрические функции 74

Показательная функция 83
Логарифмическая функция....87
3.2. Производная функции....93
3.3. Исследование функций с помощью производной....100
Нахождение промежутков монотонности функции....100
Нахождение экстремумов функции, наибольшего и наименьшего значений функций....102
Построение графиков функций....105
3.4. Первообразная....109
4. Числа и вычисления....116
4.1. Проценты....116
4.2. Пропорции....117
4.3. Решение текстовых задач....118
Задачи на движение....118
Задачи на работу....121
Задачи на десятичную форму записи числа....123
Задачи на концентрацию, смеси и сплавы....125
5. Геометрические фигуры и их свойства. Измерение геометрических величин....127
5.1. Треугольник....127
Признаки равенства треугольников....127
Признаки подобия треугольников....128
5.2. Многоугольники....133
Параллелограмм....133
Трапеция....135
Правильные многоугольники....137
5.3. Окружность....138
Касательная к окружности и ее свойства. Центральный и вписанный углы. Длина окружности. Площадь круга....138
5.4. Векторы....142
5.5. Прямая и плоскость в пространстве....145
Угол между прямой и плоскостью....145
Угол между плоскостями. Двугранный угол....145

Угол между скрещивающимися прямыми 146
Расстояние между скрещивающимися прямыми 147
Расстояние от точки до прямой 147
5.6. Многогранники 147
Призма 147
Пирамида 151
Правильные многогранники 156
5.7. Тела вращения 158
Прямой круговой цилиндр 158
Прямой круговой конус 160
Шар и сфера 164
5.8. Комбинации многогранников и тел вращения 167
6. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей 173

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ
1. Выражения и преобразования 176
1.1. Корень степени *n*. 176
1.2. Степень с рациональным показателем 179
1.3. Логарифм 185
1.4. Синус, косинус, тангенс, котангенс 190
1.5. Прогрессии 197
2. Уравнения и неравенства 202
2.1. Решение уравнений 202
2.2. Системы уравнений с двумя переменными 214
2.3. Неравенства с одной переменной 216
3. Функции 223
3.1. Числовые функции и их свойства 223
3.2. Производная функции 249
3.3. Исследование функций с помощью производной 257
3.4. Первообразная 267
4. Числа и вычисления 272
5. Геометрические фигуры и их свойства. Измерение геометрических величин 277
5.1. Треугольник. Многоугольники. Окружность. Векторы 277

5.2. Многогранники. Тела вращения.
Комбинации многогранников и тел вращения.....280
6. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей.....287
Варианты экзаменационных заданий.....289
Вариант 1
Часть 1.....289
Часть 2.....291
Вариант 2
Часть 1.....294
Часть 2.....296
Вариант 3
Часть 1.....298
Часть 2.....300
Вариант 4
Часть 1.....303
Часть 2.....305
Вариант 5
Часть 1.....307
Часть 2.....309
Вариант 6
Часть 1.....311
Часть 2.....313
Вариант 7
Часть 1.....315
Часть 2.....317
Вариант 8
Часть 1.....319
Часть 2.....321
Вариант 9
Часть 1.....323
Часть 2.....325
Вариант 10
Часть 1.....327
Часть 2.....329

Решение варианта 5 331
Часть 1 331
Часть 2 334
Ответы к задачам для самостоятельного решения 342
1. Выражения и преобразования 342
2. Уравнения и неравенства 342
3. Функции 344
4. Числа и вычисления 345
5. Геометрические фигуры и их свойства. Измерение геометрических величин 345
6. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей 346
Ответы к вариантам экзаменационных заданий 347

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

1. ВЫРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1.1. Корень степени *n*

Определение. *Арифметический корень* из неотрицательного числа a n-й степени есть такое число b, что $b^n = a$, причем $a, b \geq 0, n \in \mathbb{N}$.

Арифметический корень n-й степени из неотрицательного числа a обозначают $\sqrt[n]{a}$.

Число a при этом называют *подкоренным выражением*.

Арифметический корень второй степени также называют *квадратным корнем* и пишут $\sqrt{a}$ вместо $\sqrt[2]{a}$. Арифметический корень третьей степени также называют *кубическим корнем*.

Для любого нечетного натурального числа $2k + 1$ уравнение $x^{2k+1} = a$ при $a < 0$ имеет единственный корень, причем отрицательный. Это число x называют *корнем нечетной степени* $2k + 1$ *из отрицательного числа* a и обозначают, как и арифметический корень, символом $\sqrt[2k+1]{a}$.

Пример 1. Найти арифметический корень 4-й степени из числа: 0; 1; 16; $\frac{16}{81}$; $\frac{256}{625}$; 0,0016.

Решение: По определению арифметический корень 4-й степени из неотрицательного числа — это такое неотрицательное число, четвертая степень которого равняется исходному числу. С учетом этого определения имеем:

$$\sqrt[4]{0} = 0; \quad \sqrt[4]{1} = 1; \quad \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2;$$

$$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \sqrt[4]{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{2}{3}; \quad \sqrt[4]{\frac{256}{625}} = \sqrt[4]{\left(\frac{4}{5}\right)^4} = \frac{4}{5};$$

$\sqrt[4]{0,0016} = \sqrt[4]{(0,2)^4} = 0,2.$

Ответ: $0, 1, 2, \frac{2}{3}; \frac{4}{5}; 0,2.$

Пример 2. Решить уравнение:

1) $x^4 = 81$; 2) $x^5 = -\frac{1}{32}$;

3) $5x^5 = -160$; 4) $2x^6 = 128$.

Решение:

В данном примере решениями уравнения четной степени являются два противоположных числа, равных соответственно арифметическому корню данной четной степени из исходного числа и числу, противоположному данному арифметическому корню.

Решением уравнения нечетной степени с отрицательной правой частью является корень данной нечетной степени из данного отрицательного числа.

С учетом вышесказанного решим данные уравнения:

1) $x^4 = 81$; $x = \pm\sqrt[4]{84} = \pm 3$; $x_1 = 3$; $x_2 = -3$;

2) $x^5 = -\frac{1}{32}$; $x = \sqrt[5]{-\frac{1}{32}} = \sqrt[5]{\left(-\frac{1}{2}\right)^5} = -\frac{1}{2}$;

3) $5x^5 = -160$; $x^5 = -32$; $x = \sqrt[5]{-32} = -2$;

4) $2x^6 = 128$; $x^6 = 64$; $x = \pm\sqrt[6]{64} = \pm 2$; $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

Ответ: 1) $3, -3$; 2) $-\frac{1}{2}$;

3) -2; 4) $2, -2$.

Свойства арифметического корня

Во всех приводимых ниже свойствах предполагается, что $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$, $c > 0$; $m, k, n \in \mathbb{N}$.

Свойство 1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.

Пример 3. Вычислить:

1) $\sqrt[3]{343 \cdot 0{,}125}$; 2) $\sqrt[3]{864 \cdot 216}$;

3) $\sqrt[4]{256 \cdot 0{,}0081}$; 4) $\sqrt[5]{32 \cdot 100\,000}$.

Решение: С учетом свойства 1 арифметического корня имеем:

1) $\sqrt[3]{343 \cdot 0{,}125} = \sqrt[3]{7^3 \cdot (0{,}5)^3} = \sqrt[3]{7^3} \cdot \sqrt[3]{0{,}5^3} = 7 \cdot 0{,}5$;

2) $\sqrt[3]{864 \cdot 216} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2^5 \cdot 2^3 \cdot 3^3} = 3^2 \cdot 2^2 \cdot \sqrt[3]{2^2} = 9 \cdot 4\sqrt[3]{4} =$
$= 36 \cdot \sqrt[3]{4}$;

3) $\sqrt[4]{256 \cdot 0{,}0081} = \sqrt[4]{2^8 \cdot (0{,}3)^4} = 2^2 \cdot 0{,}3 = 4 \cdot 0{,}3 = 1{,}2$;

4) $\sqrt[5]{32 \cdot 100000} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 10^5} = 2 \cdot 10 = 20$.

Ответ: 1) 3,5; 2) $36\sqrt[3]{4}$; 3) 1,2; 4) 20.

Свойство 2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{c}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{c}}$.

Пример 4. Вычислить:

1) $\sqrt[3]{\dfrac{64}{125}}$; 2) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}}$; 3) $\sqrt[3]{3\dfrac{3}{8}}$; 4) $\sqrt[5]{7\dfrac{19}{32}}$.

Решение: С учетом свойства 2 арифметического корня имеем:

1) $\sqrt[3]{\dfrac{64}{125}} = \sqrt[3]{\dfrac{4^3}{5^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{4^3}}{\sqrt[3]{5^3}} = \dfrac{4}{5}$; 2) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{\sqrt[4]{2^4}}{\sqrt[4]{3^4}} = \dfrac{2}{3}$;

3) $\sqrt[3]{3\dfrac{3}{8}} = \sqrt[3]{\dfrac{27}{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{2^3}} = \dfrac{3}{2}$; 4) $\sqrt[5]{7\dfrac{19}{32}} = \sqrt[5]{\dfrac{243}{32}} = \dfrac{\sqrt[5]{3^5}}{\sqrt[5]{2^5}} = \dfrac{3}{2}$.

Ответ: 1) $\dfrac{4}{5}$; 2) $\dfrac{2}{3}$; 3) $\dfrac{2}{3}$; 4) $\dfrac{3}{2}$.

Свойство 3. $\sqrt[k]{a^m} = \left(\sqrt[k]{a}\right)^m$.

Пример 5. Вычислить:

1) $\left(\sqrt[6]{7^3}\right)^2$; 2) $\left(\sqrt[10]{32}\right)^2$.

Решение: С учетом свойства 3 арифметического корня имеем:

1) $\left(\sqrt[6]{7^3}\right)^2 = \sqrt[6]{7^6} = 7$;

2) $\left(\sqrt[10]{32}\right)^2 = \left(\sqrt[10]{2^5}\right)^2 = \sqrt[10]{2^{10}} = 2$;

Ответ: 1) 7; 2) 2.

Свойство 4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

Пример 6. Вычислить:

1) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$; 2) $\sqrt{\sqrt{1024}}$;

3) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[9]{3^7}}$; 4) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[6]{5^5}}$.

Решение: С учетом свойства 4 арифметического корня имеем:

1) $\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{3^6} = 3$; 2) $\sqrt{\sqrt{1024}} = \sqrt[4]{2^{10}} = \sqrt[4]{2^8 \cdot 2^2} = 4\sqrt{2}$;

3) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[9]{3^7}} = \sqrt[9]{3^2 \cdot 3^7} = \sqrt[9]{3^9} = 3$;

4) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[6]{5^5}} = \sqrt[12]{25} \cdot \sqrt[12]{5^{10}} = \sqrt[12]{5^2 \cdot 5^{10}} = \sqrt[12]{5^{12}} = 5$.

Ответ: 1) 3; 2) $4\sqrt{2}$;
3) 3; 4) 5.

Пример 7. Вычислить:

1) $\dfrac{\sqrt[3]{49} \cdot \sqrt[3]{112}}{\sqrt[3]{250}}$; 2) $\dfrac{\sqrt[4]{54} \cdot \sqrt[4]{120}}{\sqrt[4]{5}}$;

3) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} + \sqrt[6]{27^2} - \sqrt{\sqrt[3]{64}}$.

Решение: В данном примере применяются свойства 1, 2 и 3 одновременно. В первую очередь применяем свойства 1 и 2, далее преобразуем подкоренное выражение, а затем применяем свойство 3 арифметического корня. С учетом вышесказанного решим данный пример:

1) $\dfrac{\sqrt[3]{49}\cdot\sqrt[3]{112}}{\sqrt[3]{250}}=\sqrt[3]{\dfrac{49\cdot 56}{125}}=\sqrt[3]{\dfrac{7^2\cdot 7\cdot 8}{5^3}}=\sqrt[3]{\dfrac{7^3\cdot 2^3}{5^3}}=$

$=\sqrt[3]{\left(\dfrac{14}{5}\right)^3}=\dfrac{14}{5}=2\dfrac{4}{5};$

2) $\dfrac{\sqrt[4]{54}\cdot\sqrt[4]{120}}{\sqrt[4]{5}}=\sqrt[4]{54\cdot 24}=\sqrt[4]{27\cdot 2\cdot 8\cdot 3}=\sqrt[4]{2^4\cdot 3^4}=2\cdot 3=6;$

3) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}+\sqrt[6]{27^2}-\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[4]{\dfrac{32}{2}}+3-\sqrt[6]{2^6}=\sqrt[4]{16}+3-2=$

$=2+1=3.$

Ответ: 1) $2\dfrac{4}{5}$; 2) 6; 3) 3.

Пример 8. Упростить выражение

1) $\sqrt[3]{2ab}\cdot\sqrt[3]{4a^2b}\cdot\sqrt[3]{27b}$; 2) $\sqrt[4]{abc}\cdot\sqrt[4]{a^3b^2c}\cdot\sqrt[4]{b^5c^2}$;

3) $\dfrac{\sqrt[5]{a^3b^2}\cdot\sqrt[5]{3a^2b^3}}{\sqrt[5]{3ab}}$; 4) $\dfrac{\sqrt[4]{8x^2y^5}\cdot\sqrt[4]{4x^3y}}{\sqrt[4]{2xy^2}}$.

Решение: Данный пример — на тождественные преобразования иррациональных выражений. В нем применяются все свойства арифметического корня.

1) $\sqrt[3]{2ab}\cdot\sqrt[3]{4a^2b}\cdot\sqrt[3]{27b}=\sqrt[3]{2^3\cdot a^3b^3\cdot 3^3}=2\cdot 3\cdot ab=6ab;$

2) $\sqrt[4]{abc}\cdot\sqrt[4]{a^3b^2c}\cdot\sqrt[4]{b^5c^2}=\sqrt[4]{a^4b^8c^4}=ab^2c;$

3) $\dfrac{\sqrt[5]{a^3b^2}\cdot\sqrt[5]{3a^2b^3}}{\sqrt[5]{3ab}}=\dfrac{\sqrt[5]{a^5b^5\cdot 3}}{\sqrt[5]{3ab}}=\sqrt[5]{a^4b^4}$;

4) $\dfrac{\sqrt[4]{8x^2y^5}\cdot\sqrt[4]{4x^3y}}{\sqrt[4]{2xy^2}}=\sqrt[4]{\dfrac{16\cdot x^5y^6}{xy^2}}=\sqrt[4]{16x^4y^4}=2xy$.

Ответ: 1) $6ab$; 2) ab^2c;
3) $\sqrt[5]{a^4b^4}$; 4) $2xy$.

Пример 9. Упростить выражение:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$; 2) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}+\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$.

Решение: Этот пример — также на тождественные преобразования иррациональных выражений. Но отличие его от примера **8** в том, что в данном примере применяются формулы сокращенного умножения, а именно:

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$;

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

С учетом этого преобразуем данные иррациональные выражения.

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}=\dfrac{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-$

$-\dfrac{\sqrt[4]{a}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}=\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}=\sqrt[4]{b}$;

2) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}+\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\dfrac{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}+$

$+\dfrac{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}+$

$+\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}=2\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{b^2}=2(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})$.

Ответ: 1) $\sqrt[4]{b}$; 2) $2\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\right)$.

1.2. Степень с рациональным показателем

Определение. Пусть m – целое, n – натуральное, $a > 0$, тогда $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, если $a = 0$, то $a^{\frac{m}{n}} = 0$ $(m \in \mathbb{N})$.

Пример 1. Вычислить:

1) $64^{\frac{1}{2}}$; 2) $27^{\frac{1}{3}}$; 3) $8^{\frac{2}{3}}$;

4) $81^{\frac{3}{4}}$; 5) $16^{-0,75}$; 6) $9^{-1,5}$.

Решение: С учетом определения степени с рациональным показателем имеем:

1) $64^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8$; 2) $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$;

3) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$; 4) $81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = 3^3 = 27$;

5) $16^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^{-3}} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$; 6) $9^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{9^{-3}} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$.

Ответ: 1) 8; 2) 3; 3) 4;

4) 27; 5) $\frac{1}{8}$; 6) $\frac{1}{27}$.

Свойства степени с рациональным показателем

Приведенные ниже свойства верны при $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$; p, q – рациональные числа.

Свойство 1. $a^p a^q = a^{p+q}$.

Пример 2. Вычислить:

1) $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}}$; 2) $5^{\frac{5}{7}} \cdot 5^{\frac{2}{7}}$.

Решение: С учетом свойства 1 степени с рациональным показателем имеем:

1) $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}} = 2^{\frac{15}{5}} = 2^3 = 8$; 2) $5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}} = 5$.

Ответ: 1) 8; 2) 5.

Свойство 2. $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$.

Пример 3. Вычислить:

1) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}}$; 2) $4^{\frac{1}{3}} : 4^{\frac{5}{6}}$.

Решение: С учетом свойства 2 степени с рациональным показателем имеем:

1) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}} = 9^{\frac{3}{6}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3$; 2) $4^{\frac{1}{3}} : 4^{\frac{5}{6}} = \frac{1}{2}$;

Ответ: 1) 3; 2) $\frac{1}{2}$.

Свойство 3. $\left(a^p\right)^q = a^{pq}$.

Пример 4. Вычислить:

1) $\left(7^{-3}\right)^{-\frac{2}{3}}$; 2) $\left(8^{\frac{1}{12}}\right)^{-4}$.

Решение: С учетом свойства 3 степени с рациональным показателем имеем:

1) $\left(7^{-3}\right)^{-\frac{2}{3}} = 7^2 = 49$; 2) $\left(8^{\frac{1}{12}}\right)^{-4} = 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$.

Ответ: 1) 49; 2) $\frac{1}{2}$.

Свойство 4. $(ab)^p = a^p b^p$; $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

Пример 5. Вычислить:

1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$; 2) $(0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}}$;

3) $8^{\frac{9}{7}} : 8^{\frac{2}{7}} - 3^{\frac{6}{5}} \cdot 3^{\frac{4}{5}}$; 4) $\left(5^{-\frac{2}{5}}\right)^{-5} + \left(\left(0,2\right)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4}$.

Решение: С учетом свойства 3 и свойства 4 степени с рациональным показателем имеем:

1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}=2^3+2^4=8+16=24$;

2) $(0{,}04)^{-\frac{3}{2}}-(0{,}125)^{-\frac{2}{3}}=\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}-\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}=25^{\frac{3}{2}}-8^{\frac{2}{3}}=$

$=5^3-2^2=125-4=121;$

3) $8^{\frac{9}{7}}:8^{\frac{2}{7}}-3^{\frac{6}{5}}\cdot 3^{\frac{4}{5}}=8-3^2=8-9=-1$;

4) $\left(5^{-\frac{2}{5}}\right)^{-5}+\left((0{,}2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4}=5^2+\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}=25+125=150$.

Ответ: 1) 24; 2) 121; 3) –1; 4) 150.

Пример 6. Вычислить:

1) $\left(2^{\frac{5}{3}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}-3^{\frac{5}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}\right)\cdot\sqrt[3]{6}$;

2) $\left(5^{\frac{1}{4}}:2^{\frac{3}{4}}-2^{\frac{1}{4}}:5^{\frac{3}{4}}\right)\cdot\sqrt[4]{1000}$.

Решение: Данный пример — на применение всех свойств степени с рациональным показателем.

1) $\left(2^{\frac{5}{3}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}-3^{\frac{5}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}\right)\cdot\sqrt[3]{6}=2^{-\frac{1}{3}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}\left(2^2-3^2\right)\cdot\sqrt[3]{2}:\sqrt[3]{3}=$

$=\frac{4-9}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}=-5;$

2) $\left(5^{\frac{1}{4}}:2^{\frac{3}{4}}-2^{\frac{1}{4}}:5^{\frac{3}{4}}\right)\cdot\sqrt[4]{1000}=\left(\frac{5^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{3}{4}}}-\frac{2^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{3}{4}}}\right)\cdot\sqrt[4]{10^3}=$

$=\frac{5-2}{10^{\frac{3}{4}}}\cdot 10^{\frac{3}{4}}=3.$

Ответ: 1) –5; 2) 3.

Пример 7. Упростить выражение:

1) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}\right)}$;

2) $\dfrac{b^{\frac{1}{5}}\cdot\left(\sqrt[5]{b^4}-\sqrt[5]{b^{-1}}\right)}{b^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{b^{-2}}\right)}$.

Решение: Данный пример — на тождественные преобразования степенных выражений.

1) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}\right)}=\dfrac{a^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}+a^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}}=\dfrac{a+a^2}{a+1}=\dfrac{a(a+1)}{a+1}=a$;

2) $\dfrac{b^{\frac{1}{5}}\cdot\left(\sqrt[5]{b^4}-\sqrt[5]{b^{-1}}\right)}{b^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{b^{-2}}\right)}=\dfrac{b^{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}}-b^{\frac{1}{5}-\frac{1}{5}}}{b^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}-b^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}}}=\dfrac{b-1}{b-1}=1$.

Ответ: 1) a; 2) 1.

Пример 8. Упростить выражение:

1) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$;

2) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$;

3) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a-b}-\dfrac{1}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$;

4) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{a+b}+\dfrac{1}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$.

Решение: Данный пример — также на тождественные преобразования степенных выражений, но в отличие от при-

мера 7 здесь применяются сокращенные формулы умножени
(см. пример 9, тема 1.1)

$$1)\ \frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\frac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}=\frac{\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-$$

$$-\frac{\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=$$

$$=\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{b^2}=2\sqrt[3]{ab};$$

$$2)\ \frac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\frac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}=$$

$$=\frac{\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-$$

$$-\frac{\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}=a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}-\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)=2b^{\frac{1}{3}};$$

$$3)\ \frac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a-b}-\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}=\frac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)}{a-b}=\frac{\sqrt[3]{ab}}{b-a};$$

$$4)\ \frac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{a+b}+\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{a+b}+\frac{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}{a+b}=$$

$$=\frac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}{a+b}=\frac{2\sqrt[3]{a}}{a+b}.$$

Ответ: 1) $2\sqrt[3]{ab}$; 2) $2b^{\frac{1}{3}}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{ab}}{b-a}$; 4) $\frac{2\sqrt[3]{a}}{a+b}$.

1.3. Логарифм

Определение. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, тогда уравнение $a^x = b$ имеет единственный корень. Он называется *логарифмом числа b по основанию a* и обозначается $\log_a b$.

Пример 1. Вычислить:

1) $\log_2 16$; 2) $\log_2 64$; 3) $\log_2 2$; 4) $\log_2 1$.

Решение: По определению логарифма имеем:

1) $2^{\log_2 16} = 16 = 2^4 \Rightarrow \log_2 16 = 4$;

2) $2^{\log_2 64} = 64 = 2^6 \Rightarrow \log_2 64 = 6$;

3) $2^{\log_2 2} = 2 = 2^1 \Rightarrow \log_2 2 = 1$;

4) $2^{\log_2 1} = 1 = 2^0 \Rightarrow \log_2 1 = 0$.

Ответ: 1) 4; 2) 6; 3) 1; 4) 0.

Свойства логарифмов

Свойство 1. Пусть $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a \neq 1$.
Тогда верно равенство $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$.

Пример 2. Вычислить:

1) $\log_{10} 5 + \log_{10} 2$; 2) $\log_{10} 8 + \log_{10} 125$;

3) $\log_{12} 2 + \log_{12} 72$; 4) $\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2}$.

Решение: Используя свойство 1 логарифмов, решим данный пример:

1) $\log_{10} 5 + \log_{10} 2 = \log_{10} 5 \cdot 2 = 1$;

2) $\log_{10} 8 + \log_{10} 125 = \log_{10} 8 \cdot 125 = \log_{10} 10^3 = 3$;

3) $\log_{12} 2 + \log_{12} 72 = \log_{12} 2 \cdot 72 = \log_{12} 12^2 = 2$;

4) $\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2} = \log_3 6 \cdot \frac{3}{2} = \log_3 3^2 = 2$.

Ответ: 1) 1; 2) 3; 3) 2; 4) 2.

Свойство 2. Пусть $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a \neq 1$, тогда верно $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$.

Пример 3. Вычислить:

1) $\log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16}$; 2) $\log_5 75 - \log_5 3$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} 54 - \log_{\frac{1}{3}} 2$; 4) $\log_8 \frac{1}{16} - \log_8 32$.

Решение: Используя свойство 2 логарифмов, решим данный пример:

1) $\log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16} = \log_2 \left(15 : \frac{15}{16}\right) = \log_2 2^4 = 4$;

2) $\log_5 75 - \log_5 3 = \log_5 \frac{75}{3} = \log_5 5^2 = 2$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} 54 - \log_{\frac{1}{3}} 2 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{54}{2} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = -3$;

4) $\log_8 \frac{1}{16} - \log_8 32 = \log_8 \frac{1}{16 \cdot 32} = \log_8 8^{-3} = -3$.

Ответ: 1) 4; 2) 2; 3) –3; 4) –3.

Свойство 3. Пусть $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$. Тогда для любого c существует $\log_a b^c$ и верно равенство $c\log_a b = \log_a b^c$.

Пример 4. Вычислить:

1) $\log_{13} \sqrt[5]{169}$; 2) $\log_{11} \sqrt[3]{121}$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{243}$; 4) $\log_2 \frac{1}{\sqrt[6]{128}}$.

Решение: Используя свойство 3 логарифмов, решим данный пример:

1) $\log_{13} \sqrt[5]{169} = \log_{13} 13^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5} \log_{13} 13 = \frac{2}{5}$;

2) $\log_{11} \sqrt[3]{121} = \log_{11} 11^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log_{11} 11 = \frac{2}{3}$;

3) $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt[4]{243}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{5}{4}}=-\frac{5}{4}\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}=-1\frac{1}{4}$;

4) $\log_2\frac{1}{\sqrt[6]{128}}=\log_2 2^{-\frac{7}{6}}=-\frac{7}{6}\log_2 2=-1\frac{1}{6}$.

Ответ: 1) $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $-1\frac{1}{4}$; 4) $-1\frac{1}{6}$.

Свойство 4. Пусть существует $\log_a b$. Тогда для любого $c>0$, $c\neq 1$ верно равенство $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$. При $b=c$ отсюда в частности следует: $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$.

Пример 5. Вычислить:

1) $\frac{\log_3 8}{\log_3 16}$; 2) $\frac{\log_5 27}{\log_5 9}$;

3) $\frac{\log_5 36-\log_5 12}{\log_5 9}$; 4) $\frac{\log_7 8}{\log_{15}-\log_7 30}$.

Решение: Используя свойство 4 логарифмов, решим данный пример:

1) $\frac{\log_3 8}{\log_3 16}=\frac{\log_3 2^3}{\log_3 2^4}=\frac{3\cdot\log_3 2}{4\cdot\log_3 2}=\frac{3}{4}$;

2) $\frac{\log_5 27}{\log_5 9}=\frac{\log_5 3^3}{\log_5 3^2}=\frac{3\log_5 3}{2\log_5 3}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$;

3) $\frac{\log_5 36-\log_5 12}{\log_5 9}=\frac{\log_5\frac{36}{12}}{\log_5 3^2}=\frac{\log_5 3}{2\log_5 3}=\frac{1}{2}$;

4) $\frac{\log_7 8}{\log_7 15-\log_7 30}=\frac{\log_7 2^3}{\log_7\frac{15}{30}}=\frac{3\cdot\log_7 2}{\log_7 2^{-1}}=\frac{3\cdot\log_7 2}{-1\cdot\log_7 2}=-3$.

Ответ: 1) $\frac{3}{4}$; 2) $1\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) -3.

Свойство 5. Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b.$$

Пример 6. Вычислить:

1) $\dfrac{\log_2 24 - \frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18 - \frac{1}{3}\log_3 72}$; 2) $\dfrac{\log_7 14 - \frac{1}{3}\log_7 56}{\log_6 30 - \frac{1}{2}\log_6 150}$.

Решение: Для решения данного примера необходимо использовать все свойства логарифмов.

1) $\dfrac{\log_2 24 - \frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18 - \frac{1}{3}\log_3 72} = \dfrac{\log_2 24 - \log_2 \sqrt{72}}{\log_3 18 - \log_3 \sqrt[3]{72}} = \dfrac{\log_2 \frac{24}{\sqrt{72}}}{\log_3 \frac{18}{\sqrt[3]{72}}} =$

$= \dfrac{\log_2 2^{\frac{3}{2}}}{\log_3 3^{\frac{4}{3}}} = \dfrac{\frac{3}{2}\log_2 2}{\frac{4}{3}\log_3 3} = \dfrac{9}{8} = 1\dfrac{1}{8}$;

2) $\dfrac{\log_7 14 - \frac{1}{3}\log_7 56}{\log_6 30 - \frac{1}{2}\log_6 150} = \dfrac{\log_7 14 - \log_7 \sqrt[3]{56}}{\log_6 30 - \log_6 \sqrt{150}} = \dfrac{\log_7 \frac{14}{\sqrt[3]{56}}}{\log_6 \frac{30}{\sqrt{150}}} =$

$= \dfrac{\log_7 7^{\frac{2}{3}}}{\log_6 6^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\frac{2}{3}\cdot\log_7 7}{\frac{1}{2}\cdot\log_6 6} = \dfrac{4}{3} = 1\dfrac{1}{3}$.

Ответ: 1) $1\dfrac{1}{8}$; 2) $1\dfrac{1}{3}$.

Пример 7. Вычислить:

1) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\log_{10} 2} - 8^{\log_2 3}$;

2) $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$.

Решение: Для решения данного примера необходимо использовать все свойства логарифмов, а также основное логарифмическое тождество.

1) $36^{\log_6 5}+10^{1-\log_{10}2}-8^{\log_2 3}=\left(6^{\log_6 5}\right)^2+\dfrac{10}{10^{\log_{10}2}}-\left(2^{\log_2 3}\right)^3=$

$=5^2+\dfrac{10}{2}-3^3=25+5-27=3;$

2) $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125}8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}=\left(9^{\frac{1}{2}-\log_9 4}+\left(125^{\log_{125}8}\right)^{\frac{2}{3}}\right)\times$

$\times\left(7^{\log_7 2}\right)^2=\left(\dfrac{3}{9^{\log_9 4}}+8^{\frac{2}{3}}\right)\cdot 2^2=\left(\dfrac{3}{4}+4\right)\cdot 4=3+16=19.$

Ответ: 1) 3; 2) 19.

Пример 8. Выразить через a и b:

1) $\log_{\sqrt{3}}50$, если $\log_3 15=a$, $\log_3 10=b$;

2) $\log_4 1250$, если $\log_2 5=a$.

Решение: В данном примере необходимо выразить логарифм числа по одному основанию через данные логарифмы другого числа по другому основанию. Для этого нужно, используя свойства логарифмов, преобразовать логарифм по одному основанию к логарифму по другому основанию, значение которого дано. Учитывая вышесказанное, решим этот пример:

1) $\log_{\sqrt{3}}50=\log_{\frac{1}{3^2}}50=2\log_3 50=2\left(\log_3 5+\log_3 10\right)=$

$=2\left(\log_3 3+\log_3 5+\log_3 10-1\right)=2\left(\log_3 15+\log_3 10-1\right)=2(a+b-1);$

2) $\log_4 1250=\log_{2^2}\left(5^4\cdot 2\right)=\dfrac{1}{2}\left(\log_2 5^4+\log_2 2\right)=$

$=2\log_2 5+\dfrac{1}{2}=2a+\dfrac{1}{2}.$

Ответ: 1) $2(a+b-1)$; 2) $2a+\dfrac{1}{2}$.

Десятичные и натуральные логарифмы

Определение. *Десятичный логарифм* числа — это логарифм этого числа по основанию 10.

Десятичный логарифм числа b обозначается $\lg b$.

Определение. *Натуральный логарифм* числа — это логарифм этого числа по основанию e, где e — иррациональное число, определяемое следующим образом:

$$e = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}+\ldots .$$

Приближенное значение числа $e \approx 2{,}7182818$.

Натуральный логарифм числа b обозначается $\ln b$.

Пример 9. Дано: $\lg 3 = m$, $\lg 5 = n$. Найти: $\log_{15} 30$.

Решение: Данный пример аналогичен предыдущему с тем лишь отличием, что известными являются значения десятичного логарифма.

$$\log_{15} 30 = \log_{15} 3 + \log_{15} 10 = \frac{\lg 3}{\lg 15}+\frac{\lg 10}{\lg 15}=\frac{\lg 3+1}{\lg 3+\lg 5}=\frac{m+1}{m+n}.$$

Ответ: $\dfrac{m+1}{m+n}$.

Пример 10. Выразить данный логарифм через натуральный и вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

1) $\log_7 5$; 2) $\log_8 15$; 3) $\log_{0,7} 9$; 4) $\log_{1,1} 0{,}23$.

Решение: Данный пример полностью аналогичен предыдущему с тем лишь отличием, что нужно преобразовать логарифм к натуральному и при решении необходимо использовать микрокалькулятор.

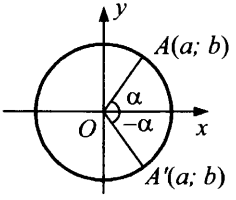
1) $\log_7 5 = \dfrac{\ln 5}{\ln 7} \approx -0{,}83$; 2) $\log_8 15 = \dfrac{\ln 15}{\ln 8} \approx 1{,}3$;

3) $\log_{0,7} 9 = \dfrac{\ln 9}{\ln 0{,}7} \approx -6{,}16$; 4) $\log_{1,1} 0{,}23 = \dfrac{\ln 0{,}23}{\ln 1{,}1} \approx -15{,}42$.

Ответ: 1) –0,83; 2) 1,3; 3) –6,16; 4) –15,42.

1.4. Синус, косинус, тангенс, котангенс

Рассмотрим круг с центром в $O(0; 0)$ и радиусом 1. Для любого $a \in \mathbb{R}$ можно провести радиус OA так, что радианная мера угла между OA и осью Ox равна a. Положительным считается направление против часовой стрелки. Пусть конец радиуса A имеет координаты $(a; b)$.



Определение. Число b, равное ординате конца единичного радиуса, построенного описанным способом, называется *синусом* числа α и обозначается $\sin\alpha$.

Определение. Число a, равное абсциссе конца единичного радиуса, построенного описанным способом, называется *косинусом* числа α и обозначается $\cos\alpha$.

Определение. Число $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ называется *тангенсом* числа α.

Определение. Число $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ называется *котангенсом* числа α.

Пример 1. Вычислить:

1) $\sin 3\pi - \cos\dfrac{3\pi}{2}$;

2) $\cos 0 - \cos 3\pi + \cos 3{,}5\pi$.

Решение: Этот пример использует определение синуса и косинуса угла через координаты конца единичного радиуса в единичной окружности. Для более наглядного представления вам необходимо нарисовать единичную окружность и отло-

жить на ней соответствующие точки, а затем посчитать их абсциссы для вычисления косинуса и ординаты для вычисления синуса.

1) $\sin 3\pi - \cos\frac{3\pi}{2} = 0 - 0 = 0$;

2) $\cos 0 - \cos 3\pi + \cos 3,5\pi = 1 - (-1) + 0 = 2$.

Ответ: 1) 0; 2) 2.

Пример 2. Вычислить:

1) $\operatorname{tg}\pi + \cos\pi$; 2) $\operatorname{tg}0^\circ - \operatorname{tg}180^\circ$.

Решение: Этот пример аналогичен предыдущему; для вычисления тангенса угла нужно поделить ординату точки на ее абсциссу.

1) $\operatorname{tg}\pi + \cos\pi = 0 - 1 = -1$; 2) $\operatorname{tg}0^\circ - \operatorname{tg}180^\circ = 0 - 0 = 0$.

Ответ: 1) –1; 2) 0.

Основное тригонометрическое тождество

Для любого угла α справедливо $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Из основного тригонометрического тождества следуют зависимости между синусом и косинусом одного угла:

$|\cos\alpha| = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$; $|\sin\alpha| = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$.

Пример 3. Какие значения может принимать:

1) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5}$; 2) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$;

3) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; 4) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Решение: Этот пример — на использование основного тригонометрического тождества, а точнее на использование следующих из него зависимостей между синусом и косинусом одного угла.

1) Найдем $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5}$:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{12}{25}} = \pm\frac{\sqrt{13}}{5};$$

2) Найдем $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}};$$

3) Найдем $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2}{3}$:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{4}{9}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3};$$

4) Найдем $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{1}{3}} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ответ: 1) $\pm\frac{\sqrt{13}}{5}$; 2) $\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$; 3) $\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$; 4) $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Соотношение между тангенсом и котангенсом одного аргумента: $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1$.

Соотношение между тангенсом и косинусом одного аргумента: $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Соотношение между котангенсом и синусом одного аргумента: $\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$ при $\alpha \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Другие соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента:

$$\cos^2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} \text{ при } \alpha \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \text{ для } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

Пример 4. Вычислить:

1) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

2) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{2}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение: В данном примере необходимо использовать соотношения между всеми тригонометрическими функциями одного аргумента.

1) Найти $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если

$$\cos\alpha = -\frac{3}{5} \text{ и } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi; \ \sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}; \ \operatorname{ctg} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{3}{4}.$$

2) Найти $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если

$$\sin\alpha = -\frac{2}{5} \text{ и } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}; \ \cos\alpha = -\sqrt{1 - \frac{4}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2}{\sqrt{21}}; \ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

Ответ: 1) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{3}{4}$;

2) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{21}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Пример 5. Могут ли одновременно выполняться равенства:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{24}}$;

2) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{5}$ и $\cos\alpha = \frac{3}{4}$?

Решение: В данном примере необходимо использовать зависимости между тригонометрическими функциями одного аргумента, а в качестве проверки, может или не может выполняться данное условие, проверять основное тригонометрическое тождество.

1) $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{24}}$; $\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sqrt{24}}{5}$;

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ — верно, значит, может.

2) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{5}$ и $\cos\alpha = \frac{3}{4}$; $\sin\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{15}{4\sqrt{7}}$;

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \frac{9}{16} + \frac{225}{112} = \frac{288}{112} \neq 1$ – значит, не может.

Ответ: 1) может; 2) не может.

Формулы сложения

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta.$

$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$; $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$;

$(\alpha \pm \beta) \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$, $k, n, m \in \mathbb{Z}$.

Пример 6. Вычислить

1) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$, если $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

2) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение: Для решения этого примера необходимо использовать зависимости между тригонометрическими функциями одного аргумента, а затем применять формулы сложения.

1) Найти $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}, 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

$\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$;

$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=$

$=\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{2}$;

2) Найти $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

$\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$;

$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}=$

$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{2}{3}=\frac{4-\sqrt{2}}{6}$.

Ответ: 1) $\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{4-\sqrt{2}}{6}$.

Пример 7. Вычислить:

$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\beta=-1$.

Решение: В этом примере используется зависимость между тангенсом и котангенсом одного аргумента, а также формулы сложения для тангенса.

Найти $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\beta=-1$;

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, $\operatorname{tg}\beta=-1$,

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\frac{1-\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}+1}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}}=\frac{1}{7}.$$

Ответ: $\frac{1}{7}$.

Формулы двойного угла

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ k, n\in\mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Пример 8. Вычислить $\sin 2\alpha$, если:

1) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; 2) $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

Решение: Для решения данного примера необходимо применять соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента и формулы двойного угла.

1) По условию $\sin\alpha=\frac{3}{5}, \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi;$

тогда $\cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5};$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{24}{25};$$

2) $\cos\alpha=-\frac{4}{5}, \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; тогда $\sin\alpha=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\frac{3}{5};$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}.$$

Ответ: 1) $-\frac{24}{25}$; 2) $\frac{24}{25}$.

Пример 9. Вычислить cos2α, если:

1) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; 2) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$.

Решение: Этот пример — только на использование формул для косинуса двойного угла.

1) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$;

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\frac{16}{25} - 1 = \frac{7}{25};$$

2) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$;

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\cdot\frac{9}{25} = \frac{7}{25}.$$

Ответ: 1) $\frac{7}{25}$; 2) $\frac{7}{25}$.

Пример 10. Вычислить tg 2α, если $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$.

Решение: Пример — на использование формулы тангенса двойного угла.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ — тогда $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$.

Ответ: $\frac{4}{3}$.

Формулы приведения

1) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$;

$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

Эти формулы позволяют избавляться от отрицательных углов.

2) $\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha$; $\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha$, $n \in \mathbb{Z}$;

$\operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{ctg}\alpha$; $n \in \mathbb{Z}$.

Формулы позволяют избавиться от рассмотрения углов, больших 2π.

3) $\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$; $\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$;

$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg}\alpha$.

4) $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos\alpha$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\sin\alpha$;

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\operatorname{ctg}\alpha$; $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\operatorname{tg}\alpha$.

Пример 11. Используя формулы приведения, вычислить:

1) $\cos150°$; 2) $\sin135°$;
3) $\operatorname{ctg}135°$; 4) $\cos120°$;
5) $\cos225°$; 6) $\sin210°$;
7) $\operatorname{ctg}240°$; 8) $\sin315°$.

Решение: Данный пример подразумевает использование формул приведения.

1) $\cos150° = \cos(180° - 30°) = -\cos30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\sin135° = \sin(90° + 45°) = \cos45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\operatorname{ctg}135° = \operatorname{ctg}(90° + 45°) = -\operatorname{tg}45° = -1$;

4) $\cos120° = \cos(90° + 30°) = -\sin30° = -\frac{1}{2}$;

5) $\cos225° = \cos(180° + 45°) = -\cos45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

6) $\sin210° = \sin(180° + 30°) = -\sin30° = -\frac{1}{2}$;

7) $\operatorname{ctg}240^\circ = \operatorname{ctg}(180^\circ + 60^\circ) = \operatorname{ctg}60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

8) $\sin 315^\circ = \sin(270^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: 1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) -1; 4) $-\frac{1}{2}$;

5) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $-\frac{1}{2}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 8) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Пример 12. Доказать тождество:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)} = \frac{2\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha}.$$

Решение: Данный пример — на тождественные преобразования тригонометрических выражений. Для доказательства тождества пользуемся свойствами тригонометрических функций, а также формулами сокращенного умножения.

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)} = \frac{2\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha};$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)} = \frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)} -$$

$$-\frac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)} = \frac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\sin\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha};$$

$$\frac{2\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha} = \frac{2\sqrt{2}\cdot\left(\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha\right)}{2\sin\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Левая и правая части совпадают — значит, тождество верно.

1.5. Прогрессии

Арифметическая прогрессия

Определение. *Арифметическая прогрессия (АП)* – числовая последовательность, такая, что каждый ее член равен предыдущему, сложенному с постоянным для всех членов прогрессии числом, называемым *разностью* АП. АП задается первым членом и разностью.

Формула n-го члена АП: $a_n = a_1 + (n-1)d$, где a_1 – первый член АП, d – разность АП.

По определению

$a_n = a_{n-1} + d = a_{n-2} + 2d = \ldots = a_1 + (n-1)d$.

Если каждый член АП больше предыдущего, то прогрессия возрастающая, если меньше предыдущего, то убывающая. У возрастающей АП: $d > 0$, у убывающей — $d < 0$.

Сумма n первых членов АП равна:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + (n-1)d)n}{2} = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Пример 1. В арифметической прогрессии найти:

1) a_{15}, если $a_1 = 2$, $d = 3$;

2) a_{20}, если $a_1 = 3$, $d = 4$;

3) a_{18}, если $a_1 = -3$, $d = -2$;

4) a_{11}, если $a_1 = -2$, $d = -4$.

Решение: При решении данного примера мы пользуемся выражением для n-го члена арифметической прогрессии через 1-й член, разность арифметической прогрессии и число n.

1) $a_n = a_1 + (n-1)d$, $n = 15$, поэтому

$a_{15} = a_1 + 14d = 2 + 14 \cdot 3 = 2 + 42 = 44$.

2) $a_n = a_1 + (n-1)d$, $n = 20$, тогда $a_{20} = a_1 + 19d$;

$a_{20} = 3 + 19 \cdot 4 = 3 + 76 = 79$.

3) $a_n = a_1 + (n-1)d$, $n = 18$, тогда $a_{18} = a_1 + 17d$;

$a_{18} = -3 + 17 \cdot (-2) = -37$.

4) $a_n = a_1 + (n-1)d$, $n = 11$, тогда $a_{11} = a_1 + 10d$;

$a_{11} = -2 + 10 \cdot (-4) = -42$.

Ответ: 1) 44; 2) 79; 3) –37; 4) –42.

Пример 2. Найти сумму двенадцати первых членов арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = -5$, $d = 0{,}5$; 2) $a_1 = \frac{1}{2}$, $d = -3$.

Решение: Для решения данного примера пользуемся формулой для суммы n членов арифметической прогрессии.

1) $a_1 = -5$; $d = 0{,}5$; $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$;

$$S_{12} = \frac{2 \cdot (-5) + 11 \cdot 0{,}5}{2} \cdot 12 = -27.$$

2) $a_1 = \frac{1}{2}$; $d = -3$; $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$;

$$S_{12} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} + 11 \cdot (-3)}{2} \cdot 12 = -192.$$

Ответ: 1) –27; 2) –192.

Пример 3. Найти a_1 и d арифметической прогрессии, если:

1) $a_7 = 21$, $S_7 = 205$;

2) $a_{11} = 92$, $S_{11} = 22$.

Решение:

1) $a_7 = 21$; $S_7 = 205$.

Так как $S_7 = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7$, то $205 = \frac{a_1 + 21}{2} \cdot 7$; $410 = 7a_1 + 147$;

$7a_1 = 263$.

Тогда $a_1 = 37\frac{4}{7}$.

Так как $a_7 = a_1 + 6d$, то $21 = 37\frac{4}{7} + 6d$; $6d = -16\frac{4}{7}$;

$d = -\frac{58}{21}$.

Итак, $d = -2\frac{16}{21}$.

2) $a_{11} = 92$; $S_{11} = 22$.

Так как $S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11$, то $22 = \frac{a_1 + 92}{2} \cdot 11$; $44 = (a_1 + 92) \cdot 11$;

$a_1 + 92 = 4$.

Тогда $a_1 = -88$.

Так как $a_{11} = a_1 + 10d$, то $92 = -88 + 10d$; $180 = 10d$.

Итак, $d = 18$.

Ответ: 1) $37\frac{4}{7}, -2\frac{16}{21}$; 2) –88, 18.

Геометрическая прогрессия

Определение. *Геометрическая прогрессия (ГП)* — числовая последовательность, у которой первый член отличен от нуля и каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на постоянное для всех членов число, называемое *знаменателем q ГП*. ГП задается своим первым членом и знаменателем.

Формула n-го члена ГП: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

По определению ГП: $b_n = b_{n-1} \cdot q = b_{n-2} \cdot q^2 = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Если каждый член ГП больше предыдущего, то прогрессия возрастающая, если меньше, то убывающая.

Сумма n первых членов ГП равна $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$ при $q \neq 1$.

Следствие. $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$ при $q \neq 1$.

ГП называется *бесконечно убывающей,* если $|q| < 1$.

Суммой бесконечно убывающей ГП называется число, к которому стремится сумма первых n членов ГП при n, стремящемся к ∞. Это число равно: $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Пример 4. Найти знаменатель геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 = 2$, $b_5 = 162$; 2) $b_1 = -128$, $b_7 = -2$;

3) $b_1 = 3$, $b_4 = 81$; 4) $b_1 = 250$, $b_4 = -2$.

Решение: Данный пример мы решаем, используя формулу n-го члена геометрической прогрессии.

1) $b_1 = 2$; $b_5 = 162$.

Так как $b_5 = b_1 \cdot q^4$, то $162 = 2 \cdot q^4$; $81 = q^4$; $3^4 = q^4$,

поэтому $q_1 = 3$, $q_2 = -3$.

2) $b_1 = -128$; $b_7 = -2$.

Так как $b_7 = b_1 \cdot q^6$, то $-2 = -128 \cdot q^6$, $q^6 = \frac{1}{64}$; $q_1 = \frac{1}{2}$, $q_2 = -\frac{1}{2}$.

3) $b_1 = 3$; $b_4 = 81$.

Так как $b_4 = b_1 \cdot q^3$, то $81 = 3 \cdot q^3$; $q^3 = 27$, поэтому $q = 3$;

4) $b_1 = 250$; $b_4 = -2$.

Так как $b_4 = b_1 \cdot q^3$, то $-2 = 250 \cdot q^3$; $q^3 = \frac{1}{125}$, поэтому $q = -\frac{1}{5}$.

Ответ: 1) ± 3; 2) $\pm\frac{1}{2}$; 3) 3; 4) $-\frac{1}{5}$.

Пример 5. Найти сумму семи первых членов геометрической прогрессии:

1) 5, 10, 20, …;

2) 2, 6, 18, … .

Решение: Решаем, используя формулу для суммы n первых членов геометрической прогрессии.

1) $b_1 = 5$; $q = 2$. Так как $S_7 = \frac{b_1(1-q^7)}{1-q}$, то

$$S_7 = \frac{5 \cdot (1-2^7)}{1-2} = -5(1-128) = 635;$$

2) $b_1 = 2$; $q = 3$. Так как $S_7 = \dfrac{b_1(1-q^7)}{1-q}$, то

$$S_7 = \frac{2\cdot(1-3^7)}{1-3} = 3^7 - 1 = 2187 - 1 = 2186.$$

Ответ: 1) 635; 2) 2186.

Пример 6. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

1) $12, 4, \frac{4}{3}, \ldots$; 2) $100, -10, 1, \ldots$.

Решение: Решаем, используя формулу для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

1) $b_1 = 12, q = \frac{1}{3}$;

$$S = \frac{b_1}{1-q};\ S = \frac{12}{1-\frac{1}{3}} = \frac{12\cdot 3}{2} = 18;$$

2) $b_1 = 100, q = -\frac{1}{10};\ S = \frac{b_1}{1-q};\ S = \frac{100}{1+\frac{1}{10}} = \frac{1000}{11} = 90\frac{10}{11}$.

Ответ: 1) 18; 2) $90\frac{10}{11}$.

2. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

2.1. Равносильность уравнений

Определение. Уравнения $f(x) = g(x)$ и $p(x) = h(x)$ называются *равносильными*, если совпадают множества их корней.

Теоремы о равносильности уравнений

Теорема 1. Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же выражение, которое имеет смысл при всех значениях неизвестного из области определения уравнения, то получится уравнение, равносильное данному (в частности, если какой-нибудь член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному)..

Теорема 2. Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ умножить на выражение $h(x)$, которое имеет смысл всюду в области определения уравнения $f(x) = g(x)$ и нигде в этой области не обращается в 0, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 3. Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 4. Если обе части уравнения неотрицательны в области определения уравнения, то при возведении обеих частей уравнения в четную степень получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 5. Уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)} (a > 0, a \neq 1)$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Теорема 6. Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x) (a > 0, a \neq 1)$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Пример 1. Придумайте три уравнения, равносильных уравнению:

1) $\sqrt{2x-1}=3$; 2) $\cos x=3$; 3) $\lg x^2=4$; 4) $x^{\frac{3}{5}}=1$.

Решение: Используем определение равносильности уравнений и теоремы о равносильности для составления уравнений, равносильных данным.

1) $\sqrt{2x-1}=3$; $x=5$; 1) $5x=25$; 2) $\frac{x}{5}=1$; 3) $\sqrt{x+4}=3$;

2) $\cos x=3$; решений нет;

1) $\sin x=5$; 2) $\cos x=-3$; 3) $\sin x=-10$;

3) $\lg x^2=4$; $x=\pm 100$; 1) $x^2=100^2$; 2) $\sqrt{x^2}=100$; 3) $|x|=100$;

4) $x^{\frac{3}{5}}=1$; $x=1$; 1) $x^{\frac{1}{5}}=1$; 2) $x^{\frac{1}{7}}=1$; 3) $3x^{\frac{1}{19}}=3$.

Пример 2. Объясните, почему равносильны уравнения:

1) $x^{37}-12x^2+1=0$ и $x^{37}+1=12x^2$;

2) $\sqrt[5]{x^2-2x-3}=2$ и $x^2-2x-3=32$.

Решение:

1) $x^{37}-12x^2+1=0$ и $x^{37}+1=12x^2$.

Данные уравнения равносильны, так как перенос слагаемого из одной части уравнения в другую со сменой знака не нарушает равносильности.

2) $\sqrt[5]{x^2-2x-3}=2$ и $x^2-2x-3=32$.

Данные уравнения равносильны, так как возведение обеих частей уравнения в нечетную степень не нарушает равносильности.

2.2. Общие приемы решения уравнений

Метод разложения на множители

Этот метод заключается в том, что уравнение $f(x)g(x)h(x)=0$ можно заменить совокупностью уравнений $f(x)=0$; $g(x)=0$; $h(x)=0$.

Решив уравнения совокупности, нужно взять только те решения, которые принадлежат области определения исходного уравнения, а остальные корни отбросить.

Метод замены переменной

Этот метод заключается в том, что если уравнение $f(x) = 0$ сводится к уравнению $h(g(x)) = 0$, то нужно ввести новую переменную $u = g(x)$, затем решить уравнение $h(u) = 0$, а в конце решить совокупность уравнений $g(x) = u_1$; $g(x) = u_2$; …; $g(x) = u_n$, где $u_1, \ldots, u_n$ – корни уравнения $h(u) = 0$.

Использование свойств функций

Пусть у нас имеется уравнение $f(x) = g(x)$.

Если одна из функций возрастает, а другая убывает, то исходное уравнение либо не имеет корней, либо имеет единственный корень, который иногда легко угадывается.

Использование графиков

Суть метода использования графиков для решения уравнения $f(x) = g(x)$ проста: нужно построить графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и найти все точки их пересечения, абсциссы которых и будут являться корнями нашего исходного уравнения.

2.3. Решение уравнений

Пример 1. Решите уравнение методом разложения на множители:

1) $2^x \cdot x - 4x - 4 + 2^x = 0$; 2) $3^x \cdot x - 3^{x+1} + 27 = 9x$.

Решение: Приведенные ниже уравнения решаются методом разложения на множители.

1) $2^x \cdot x - 4x - 4 + 2^x = 0$; $2^x(x + 1) - 4(x + 1) = 0$;
$(x + 1)(2^x - 4) = 0$; $x = 2$; $x = -1$.
2) $3^x \cdot x - 3^{x+1} + 27 - 9x = 0$; $3^x(x - 3) - 9(x - 3) = 0$;
$(x - 3)(3^x - 9) = 0$; $x = 2, x = 3$.
Ответ: 1) 2, –1; 2) 2, 3.

Пример 2. Решите уравнение методом разложения на множители:

1) $2x^2\sin x - 8\sin x + 4 = x^2$; 2) $2x^2\cos x + 9 = 18\cos x + x^2$.

Решение: Приведенные ниже уравнения также решаются методом разложения на множители.

1) $2x^2 \sin x - 8\sin x + 4 - x^2 = 0$;
$x^2(2\sin x - 1) - 4(2\sin x - 1) = 0$;

$(2\sin x - 1)(x - 2)(x + 2) = 0;$

$x = 2, x = -2, x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k;$

2) $2x^2\cos x + 9 = 18\cos x + x^2;$

$x^2(2\cos x - 1) - 9(2\cos x - 1) = 0;$

$(2\cos x - 1)(x - 3)(x + 3) = 0; x = \pm 3, x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n.$

Ответ: 1) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \pm 2$; 2) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \pm 3.$

Пример 3. Решите уравнение методом введения новой переменной:

1) $\sqrt{x^2 + 1 - 2x} - 6\sqrt{x - 1} = 7;$

2) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 6 = 5\sqrt{2 - x}.$

Решение: Приведенные ниже уравнения решаются методом замены переменной.

1) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} - 6\sqrt{x - 1} = 7$; ОДЗ: $x - 1 \geq 0, x \geq 1;$

$\sqrt{x - 1} = a \geq 0; a^2 - 6a - 7 = 0; a_1 = 7, a_2 = -1.$

$a = 7 \Rightarrow x = 50; a = -1$ — не подходит;

2) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 6 = 5\sqrt{2 - x}$; ОДЗ: $2 - x \geq 0, x \leq 2,$

$\sqrt{2 - x} = a \geq 0; a^2 - 5a - 6 = 0;$

$a = 6 \Rightarrow x = -34; a = -1$ — не подходит;

Ответ: 1) 50; 2) –34.

Пример 4. Решите уравнение методом введения новой переменной:

1) $2^x + 2^{1-x} = 3;$ 2) $25^{-x} - 50 = 5^{-x+1}.$

Решение: Приведенные ниже уравнения также решаются методом замены переменной.

1) $2^x + 2^{1-x} = 3; 2^x = a > 0;$

$a + \frac{2}{a} = 3$; $a^2 - 3a + 2 = 0$;

$a = 1 \Rightarrow x = 0$; $a = 2 \Rightarrow x = 1$;

2) $25^{-x} - 50 = 5^{-x+1}$; $5^{-x} = a > 0$; $a^2 - 5a - 50 = 0$;

$a = 10 \Rightarrow x = -\log_5 10$; $a = -5$ — не подходит.

Ответ: 1) 0, 1; 2) $-\log_5 10$.

Пример 5. Решите уравнение методом введения новой переменной:

1) $\lg^2 x^2 + \lg 10x - 6 = 0$; 2) $3^x + 3^{-x+1} = 4$;

3) $2\cos^2 x - 7\cos x - 4 = 0$; 4) $5^{2\sqrt{x}} + 125 = 6 \cdot 5^{\sqrt{x}+1}$.

Решение: Приведенные ниже уравнения также решаются методом замены переменной.

1) $\lg^2 x^2 + \lg 10x - 6 = 0$; ОДЗ: $x > 0$;

$a = \lg x$; $4a^2 + a - 5 = 0$;

$a = -\frac{5}{4} \Rightarrow x = 10^{-(5/4)}$; $a = 1 \Rightarrow x = 10$;

2) $3^x + 3^{-x+1} = 4$; $3^x = a > 0$;

$a^2 - 4a + 3 = 0$; $a = 3 \Rightarrow x = 1$; $a = 1 \Rightarrow x = 0$.

3) $2\cos^2 x - 7\cos x - 4 = 0$; $\cos x = a$, $|a| \le 1$;

$2a^2 - 7a - 4 = 0$; $a = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$;

$a = 4 > 1$ — не подходит;

4) $5^{2\sqrt{x}} + 125 = 6 \cdot 5^{\sqrt{x}+1}$; $5^{\sqrt{x}} = a > 0$;

$a^2 - 30a + 125 = 0$; $a = 5 \Rightarrow x = 1$; $a = 25 \Rightarrow x = 4$.

Ответ: 1) 10, $10^{-\frac{5}{4}}$; 2) 0, 1;

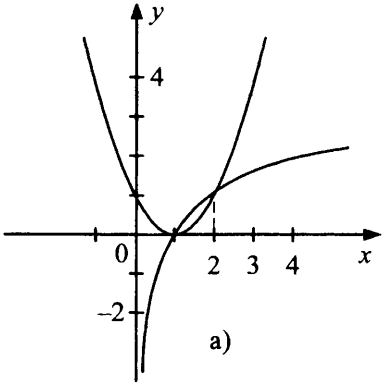
3) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; 4) 1, 4.

Пример 6. Решите уравнения, используя функционально-графические методы:

1) $(x-1)^2 = \log_2 x$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$.

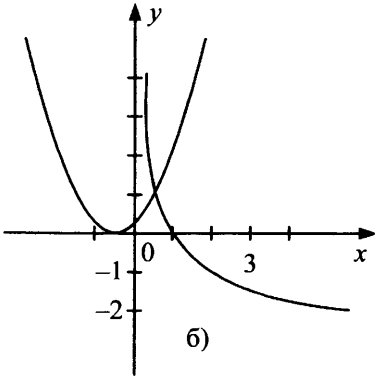
Решение: Данные уравнения решаются графическим методом.

1) $(x-1)^2 = \log_2 x$; $x = 1$; $x = 2$ (см. рис. а))



а)

2) $\log_{\frac{1}{2}} x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$; $x = \frac{1}{2}$ (см. рис. б)).



б)

Ответ: 1) 1, 2; 2) $\frac{1}{2}$.

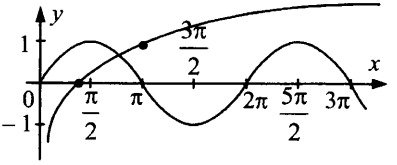
Пример 7. Сколько корней имеет уравнение:

1) $\log_\pi x = \sin x$; 2) $x^2 + 1 = \cos x$;

3) $\log_{3\pi} x = \cos x$; 4) $\sin x = \frac{1}{9}x$?

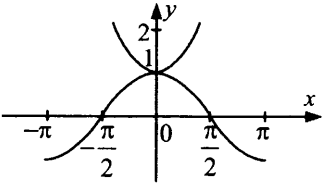
Решение: В данном примере для решения уравнений используются свойства графиков функций.

1) $\log_{\pi} x = \sin x$; 1 решение (см. рис. а));



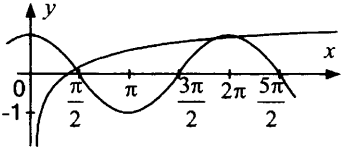
а)

2) $x^2 + 1 = \cos x$; 1 решение (см. рис. б));



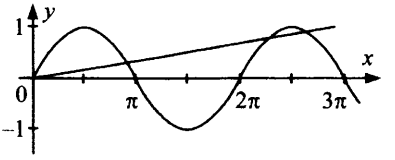
б)

3) $\log_{3\pi} x = \cos x$; $\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2}$, а $\log_{3\pi} x = 0$ при $x = 1$; $1 < \frac{\pi}{2}$. Далее $\cos 2\pi = 1$, а $\log_{3\pi} 2\pi < 1$. Отсюда схематичный график (рис. в). 3 решения (см. рис. в));



в)

4) $\sin x = x\frac{1}{9}$; $x = 0$ — решение, при $x > 0$ — 3 решения (см. рис. г)) и в силу нечетности обеих частей уравнения при $x < 0$ также 3 решения; т.е. всего 7 решений.



г)

О т в е т: 1) 1 решение; 2) 1 решение;
3) 3 решения; 4) 7 решений.

Нижеследующие примеры используют несколько методов решения уравнений одновременно.

Пример 8. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{2}$;

2) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{3}$.

Решение:

1) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{2}$;

ОДЗ: $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -1 \end{cases}$; $x \geq 1$; $2x+2\sqrt{x^2-1}=2$;

$\sqrt{x^2-1}=1-x$; $x \leq 1 \Rightarrow x=1$; проверка: $\sqrt{2}=\sqrt{2}$;

2) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{3}$; ОДЗ: $x \geq 1$; $2x+1=$

$=x-1+3+2\sqrt{3x-3}$;

$x-1=2\sqrt{3x-3}$; $\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}-2\sqrt{3}\right)=0$; $x=1, x=13$.

О т в е т: 1) 1; 2) 1, 13.

Пример 9. Решите уравнение:

1) $\cos 5x+\cos 7x-\cos 6x=0$;

2) $\sin 9x-\sin 5x+\sin 4x=0$.

Решение:

1) $\cos 5x+\cos 7x-\cos 6x=0$; $2\cos 6x\cos x-\cos 6x=0$;

$\cos 6x\,(2\cos x-1)=0$;

1) $\cos x = \frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

2) $\cos 6x = 0$; $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pm\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n$; $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}$;

2) $\sin 9x - \sin 5x + \sin 4x = 0$;

$2\sin 2x \cos 7x + 2\sin 2x \cos 2x = 0$;

$2\sin 2x (\cos 7x + \cos 2x) = 0$;

$\sin 2x \cos\frac{9x}{2} \cdot \cos\frac{5x}{2} = 0$; $x = \frac{\pi n}{2}$; $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{9}$,

$x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5}$; $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{9}$; $\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5}$.

Пример 10. Решите уравнение:

1) $2^x \cdot 5^{\frac{1+x}{x}} = 50$; 2) $3^x \cdot 2^{\frac{3}{x}} = 24$;

3) $3^{x-1} \cdot 625^{\frac{x-2}{x-1}} = 225$; 4) $5^x \cdot 2^{\frac{2+x}{x}} = 40$.

Решение: 1) $2^x \cdot 5^{\frac{1+x}{x}} = 50$; $2^x \cdot 5^{\frac{1}{x}} = 10$;

$\frac{1}{x} + x \log_5 2 = \log_5 10$; $x^2 \log_5 2 - x \log_5 10 + 1 = 0$;

$D = \log_5^2 10 - 4\log_5 2 = 1 + 2\log_5 2 + \log_5^2 2 - 4\log_5 2 =$
$= (1 - \log_5 2)^2 > 0$;

$x_1 = \frac{1 + \log_5 2 + 1 - \log_5 2}{2\log_5 2} = \log_2 5$,

$x_2 = \frac{1 + \log_5 2 - 1 + \log_5 2}{2\log_5 2} = 1$.

Ответ: 1; $\log_2 5$.

2) $3^x \cdot 2^{\frac{3}{x}} = 24$; $\frac{3}{x} + x\log_2 3 = 3 + \log_2 3$;

$x^2 \log_2 3 - (3 + \log_2 3)x + 3 = 0$;

$x_1 = \frac{3 + \log_2 3 \pm (3 - \log_2 3)}{2\log_2 3}$; $x_2 = \frac{6}{2\log_2 3} = 3\log_3 2$, $x = 1$.

О т в е т: $3\log_3 2$; 1.

3) $3^{x-1} \cdot 625^{\frac{x-2}{x-1}} = 225$;

$x - 1 + \left(1 + \frac{1}{1-x}\right)\log_3 625 = 2 + \log_3 25$;

$(x-1)^2 - (x-1)(2 - 2\log_3 5) - 4\log_3 5 = 0$;

1) $x - 1 = 2$; $x = 3$;

2) $x - 1 = -2\log_3 5$; $x = 1 - 2\log_3 5$.

О т в е т: 3; $1 - 2\log_3 5$.

4) $5^x \cdot 2^{\frac{2+x}{x}} = 40$; $5^x \cdot 2^{\frac{2}{x}} = 20$; $x + \frac{2}{x}\log_5 2 = 1 + \log_5 4$;

$x^2 - x(1 + 2\log_5 2) + 2\log_5 2 = 0$; $x = 1$, $x = 2\log_5 2$.

О т в е т: 1; $2\log_5 2$.

Пример 11. Решите уравнение:

1) $\ln(0{,}2^x - 7) = \ln(9 - 3 \cdot 0{,}2^x)$;

2) $9^{\log_3 x} - 12 \cdot 3^{\log_3 x} + 3^{\log_3 27} = 0$;

3) $e^{\lg(x-2)} - \frac{1}{e} = (e^{-1})^{\lg(x+1)}$;

4) $\log_5(2 + 3 \cdot 5^{-x}) = x + 1$.

Решение: 1) $\ln(0{,}2^x - 7) = \ln(9 - 3 \cdot 0{,}2^x)$;

ОДЗ: $\begin{cases} 0{,}2^x > 7, \\ 0{,}2^x < 3. \end{cases}$

О т в е т: нет решений.

2) $9^{\log_3 x} - 12 \cdot 3^{\log_3 x} + 3^{\log_3 27} = 0$; $\begin{cases} x > 0, \\ x^2 - 12x + 27 = 0. \end{cases}$

О т в е т: $x = 3, x = 9$.

3) $e^{\lg(x-2)} \cdot \frac{1}{e} = (e^{-1})^{\lg(x+1)}$; $\lg(x-2) - 1 = -\lg(x+1)$;

$\begin{cases} \lg(x^2 - x - 2) = 1, \\ x \geq 2, \\ x \geq -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - x - 2 = 10, \\ x \geq 2; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -3, \end{array}\right. \quad x = 4, \\ x \geq 2. \end{cases}$

О т в е т: 4.

4) $\log_5(2 + 3 \cdot 5^{-x}) = x + 1$; $\quad 2 + 3 \cdot 5^{-x} = 5 \cdot 5^x$;

$5 \cdot 5^{2x} - 2 \cdot 5^x - 3 = 0$;

1) $5^x = 1$; $x = 0$; $\quad$ 2) $5^x = -\left(\frac{3}{5}\right)$; нет решений.

О т в е т: 0.

Пример 12. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x^2 - 2x + 2} + \log_3 \sqrt{x^2 - 2x + 10} = 2$;

2) $(x-7)^6 + \log_5 \sqrt{x^2 - 14x + 74} = 1$.

Решение:

1) $\sqrt{x^2 - 2x + 2} + \log_3 \sqrt{x^2 - 2x + 10} = 2$;

функция $y = = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ принимает минимальное значение $y = 1$ при $x = 1$; функция $\log_3 \sqrt{x^2 - 2x + 10}$ принимает минимальное значение $y = 1$ при $x = 1$.

О т в е т: 1.

2) $(x-7)^6 + \log_5 \sqrt{x^2 - 14x + 74} = 1$; рассуждая аналогично предыдущему пункту, получим: $x = 7$.

О т в е т: 7.

Пример 13. Решите уравнение:

1) $\log_2(x^2-4x+8)=\sin\frac{5\pi x}{4}-\cos\frac{\pi x}{2}$;

2) $\log_3(x^2+4x+13)=\cos\pi x-\sin\frac{\pi x}{4}$.

Решение:

1) $\log_2(x^2-4x+8)=\sin\frac{5\pi x}{4}-\cos\frac{\pi x}{2}$;

функция $y=\log_2(x^2-4x+8)$ принимает минимальное значение $y=2$ при $x=2$ а при $x\neq 2$, $y>2$;

функция $y=\sin\frac{5\pi x}{4}-\cos\frac{\pi x}{2}$ принимает максимальное значение $y=2$ при $x=2$; при $x\neq 2$, $y\leq 2$.

О т в е т: 2.

2) $\log_3(x^2+4x+13)=\cos\pi x-\sin\frac{\pi x}{4}$; рассуждая аналогично предыдущему пункту, получим: $x=-2$.

О т в е т: –2.

Пример 14. Решите уравнение:

1) $\left|\frac{x-3}{2}+5\right|=4$ 2) $\left|1-\frac{x+2}{3}\right|=5$.

Решение:

1) $\left|\frac{x-3}{2}+5\right|=4$, $\frac{x-3}{2}+5=4$, или $\frac{x-3}{2}+5=-4$,

$x-3+10=8$, или $x-3+10=-8$, $x_1=1$, $x_2=-15$.

О т в е т: 1; –15.

2) $\left|1-\frac{x+2}{3}\right|=5$, $1-\frac{x+2}{3}=5$, или $1-\frac{x+2}{3}=-5$,

$1-x=15$ или $1-x=-15$, $x_1=-14$ или $-x=-16$, $x_2=16$.

Ответ: 16; –14.

Пример 15. При каких значениях a данное уравнение:

1) $ax - 2x = 3(x - 1)$;

2) $a(1 - x) + 2 = 3x - ax$;

3) $x(2 - a) - x = 5 + x$;

4) $5 + 3(x + 3a) = 9a + 5$;

5) $2a(x - 2) = a(2x - 4)$ — имеет единственное решение; не имеет решений; имеет бесконечное множество решений?

Решение:

1) $ax - 2x = 3(x - 1)$, $ax - 2x - 3x = -3$, $(a - 5)x = -3$;

при $a \neq 5$ — одно решение; при $a = 5$ — нет решений.

О т в е т: при $a \neq 5$ — одно решение;

при $a = 5$ — нет решений.

2) $a(1 - x) + 2 = 3x - ax$, $a - ax + 2 - 3x + ax = 0$, $3x = a + 2$,

при любых a — одно решение.

О т в е т: при любых a — одно решение.

3) $x(2 - a) - x = 5 + x$, $2x - ax - x - x = 5$, $-ax = 5$;

при $a \neq 0$ одно решение; при $a = 0$ — нет решений.

О т в е т: при $a \neq 0$ одно решение; при $a = 0$ — нет решений.

4) $5 + 3(x + 3a) = 9a + 5$, $3x + 9a = 9a$, $3x = 0$; при любых a — одно решение.

О т в е т: при любых a — одно решение.

5) $2ax - 4a = 2ax - 4a$;

$0 = 0$ — верно при любых a.

О т в е т: бесконечное множество решений — при любых a.

2.4. Системы уравнений с двумя переменными

Пример 1. Решите системы уравнений

1) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \\ 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 18; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8, \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 15; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=8, \\ \sqrt{x}+2\sqrt{y}=19; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt{xy}=12, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=7. \end{cases}$

Решение:

1) Данная система уравнений содержит 2 иррациональных уравнения. Она решается методом простого исключения переменных с последующим возведением полученных уравнений в квадрат.

$$\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=4, \\ 2\sqrt{x}+3\sqrt{y}=18; \end{cases} \quad \begin{cases} -2\sqrt{x}+2\sqrt{y}=-8, \\ 2\sqrt{x}+3\sqrt{y}=18, \end{cases} \quad 5\sqrt{y}=10,\ \sqrt{y}=2,$$

$y=4,\ \sqrt{x}-2=4,\ \sqrt{x}=6,\ x=36.$

О т в е т: (36; 4).

2) Данная система уравнений также содержит 2 иррациональных уравнения. Она сводится к квадратному уравнению относительно новой неотрицательной переменной $z=\sqrt{y}$. Из этого квадратного уравнения находятся значения переменной y, а по значениям переменной y находятся значения переменной x.

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8, \\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=15; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x}=8-\sqrt{y}, \\ \left(8-\sqrt{y}\right)\sqrt{y}=15; \end{cases} \quad 8\sqrt{y}-y-15=0.$$

$\sqrt{y}=z,\ z^2-8z+15=0,\ z_1=3,\ z_2=5,$

$\sqrt{y_1}=3,\ \sqrt{y_2}=5,\ y_1=9,\ y_2=25,\ \sqrt{x_1}=8-3,$

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+8}\le 0=8-5,$$

$x_1=25,\ x_2=9.$

О т в е т: (25; 9); (9; 25).

3) Данная система уравнений решается аналогично системе уравнений из примера 1).

$$\begin{cases} 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=8, \\ \sqrt{x}+2\sqrt{y}=19; \end{cases} \quad \begin{cases} 6\sqrt{x}-2\sqrt{y}=16, \\ \sqrt{x}+2\sqrt{y}=19. \end{cases} \quad 7\sqrt{x}\ 35, x=25,$$

$$5+2\sqrt{y}=19, 2\sqrt{y}\ =14,\ \sqrt{y}=7, y=49.$$

О т в е т: (25; 49).

4) Данная система уравнений решается аналогично системе уравнений 2).

$$\begin{cases} \sqrt{xy}=12 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=7; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x}=\dfrac{12}{\sqrt{y}}, \\ \dfrac{12}{\sqrt{y}}+\sqrt{y}-7=0. \end{cases} \quad \sqrt{y}=z,$$

$$\frac{12}{z}+z-7=0, 12+z^2-7z=0, z_1=3, z_2=4, \sqrt{y_1}=3, \sqrt{y_2}=4,$$

$$y_1=9, y_2=16,$$

$$\sqrt{x_1}=7-3,\ \sqrt{x_2}=7-4,\ \sqrt{x_1}=4,\ \sqrt{x_2}=3,\ x_1=16,$$

$$x_2=9.$$

О т в е т: (16; 9); (9; 16).

Пример 2. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} \sin x\cos y=0,25, \\ \sin y\cos x=0,75; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=-\dfrac{1}{3}, \\ \cos^2(\pi x)-\cos^2(\pi y)=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4\sin x\sin y=3, \\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sin^2 x=\cos x\cos y, \\ \cos^2 x=\sin x\sin y. \end{cases}$

Решение:

1) В этой системе уравнений имеется два тригонометрических уравнения. Сложив уравнения и вычтя из первого уравнения второе, мы получаем новую систему уравнений относительно переменных $x+y$ и $x-y$, которая решается обычными методами.

$$\begin{cases}\sin x\cos y=0,25,\\ \sin y\cos x=0,75.\end{cases}$$

Сложим уравнения, затем вычтем из первого второе уравнение:

$$\begin{cases}\sin x\cos y+\cos x\sin y=1,\\ \sin x\cos y-\cos x\sin y=-\dfrac{1}{2};\end{cases}\quad\begin{cases}\sin(x+y)=1,\\ \sin(x-y)=-\dfrac{1}{2};\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ x-y=(-1)^k\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\end{cases}$$

$$2x=\frac{\pi}{2}+2\pi n+(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{Z},$$

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi n+(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{Z},$$

$$2y=\frac{\pi}{2}+2\pi n-(-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{Z},$$

$$y=\frac{\pi}{4}+\pi n-(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}-\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{Z}.$$

О т в е т:

$$\left(\frac{\pi}{4}+\pi n+(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2};\frac{\pi}{4}+\pi n-(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}-\frac{\pi k}{2}\right),k\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{Z}.$$

2) Данная система содержит одно тригонометрическое и одно рациональное уравнение. Тригонометрическое уравнение системы разлагается на множители, после чего преобразовывается в уравнение равенства нулю двух сомножителей. Затем решаются четыре совокупности уравнений.

$$\begin{cases}x-y=\dfrac{1}{3},\\ \cos^2(\pi x)-\cos^2(\pi y)=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=-\dfrac{1}{3}, \\ (\cos\pi x-\cos\pi y)(\cos\pi x+\cos\pi y)=0; \end{cases}$$

$$-2\sin\frac{\pi x+\pi y}{2}\sin\frac{\pi x-\pi y}{2}\,2\cos\frac{\pi x+\pi y}{2}\cos\frac{\pi x-\pi y}{2}=0,$$

$\sin\dfrac{\pi x+\pi y}{2}=0$, или $\sin\dfrac{\pi x-\pi y}{2}=0$, или $\cos\dfrac{\pi x+\pi y}{2}=0$, или

$\cos\dfrac{\pi x-\pi y}{2}=0$; $\dfrac{\pi x+\pi y}{2}=\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$, $\dfrac{\pi x-\pi y}{2}=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$,

$\dfrac{\pi x+\pi y}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$, $\dfrac{\pi x-\pi y}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

1) $\begin{cases} x+y=2m,\ m\in\mathbb{Z}, \\ x-y=-\dfrac{1}{3}; \end{cases}$ $2x=2m-\dfrac{1}{3}$, $x=m-\dfrac{1}{6}$,

$y=m+\dfrac{1}{6}$, $m\in\mathbb{Z}$;

2) $\begin{cases} x-y=2k,\ k\in\mathbb{Z}, \\ x-y=-\dfrac{1}{3}; \end{cases}$ $k=-\dfrac{1}{6}$ — решений нет;

3) $\begin{cases} x+y=1+2l,\ l\in\mathbb{Z}, \\ x-y=-\dfrac{1}{3}; \end{cases}$ $2x=\dfrac{2}{3}+2l$, $x=\dfrac{1}{3}+l$,

$y=\dfrac{2}{3}+l$, $l\in\mathbb{Z}$;

4) $\begin{cases} x-y=1+2n,\ n\in\mathbb{Z}, \\ z-y=-\dfrac{1}{3}; \end{cases}$ $n=-\dfrac{2}{3}$ — нет решений.

Ответ: $\left(m-\dfrac{1}{6};\ m+\dfrac{1}{6}\right)$, $\left(\dfrac{1}{3}+l;\ \dfrac{2}{3}+l\right)$, $l\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{Z}$.

3) Данная система уравнений содержит два тригонометрических уравнения. Она решается подстановкой первого урав-

нения системы во второе с последующим сложением и вычитанием получившихся уравнений.

$$\begin{cases} 4\sin x\sin y = 3, \\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x\sin y = \dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y} = 3; \end{cases} \quad \frac{\frac{3}{4}}{\cos x\cos y} = 3,$$

$$\cos x\cos y = \frac{1}{4}, \quad \begin{cases} \sin x\sin y = \dfrac{3}{4}, \\ \cos x\cos y = \dfrac{1}{4}; \end{cases}$$

$$\sin x\sin y + \cos x\cos y = 1, \quad \cos(x-y) = 1,$$

$$\sin x\sin y - \cos x\cos y = \frac{1}{2}, \quad -\cos(x+y) = \frac{1}{2},$$

$$\cos(x+y) = -\frac{1}{2}, \; x+y = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \; k \in \mathbb{Z};$$

$$\begin{cases} x - y = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x + y = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n + 2\pi k, \; k \in \mathbb{Z}, \; n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n + \pi k, \; k \in \mathbb{Z}, \; n \in \mathbb{Z},$$

$$y = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n + \pi k - 2\pi n, \; k \in \mathbb{Z}, \; n \in \mathbb{Z},$$

$$y = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k - \pi n, \; k \in \mathbb{Z}, \; n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{3} + \pi k + \pi n; \; \dfrac{\pi}{3} + \pi k - \pi n\right)$,

$\left(-\dfrac{\pi}{3} + \pi k + \pi n; -\dfrac{\pi}{3} + \pi k - \pi n\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$.

4) Данная система также содержит два тригонометрических уравнения. Для ее решения необходимо сложить оба ее уравнения и воспользоваться основным тригонометрическим тождеством.

$$\begin{cases}\sin^2 x = \cos x \cos y, \\ \cos^2 x = \sin x \sin y;\end{cases}$$

$1 = \cos x \cos y + \sin x \sin y, \quad \cos(x - y) = 1,$

$x - y = 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \quad x = 2\pi n + y, \ n \in \mathbb{Z}; \quad \sin^2(2\pi n + y) =$

$= \cos(2\pi n + y)\cos y, n \in \mathbb{Z}, \ \sin^2 y = \cos^2 y, \ \sin^2 y - \cos^2 y = 0,$

$\operatorname{tg}^2 y = 1, \cos y \neq 0, \ \operatorname{tg} y = \pm 1, \ y = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z};$

$x = 2\pi n \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$

О т в е т: $\left(\frac{\pi}{4} + \pi k + 2\pi n; \ \frac{\pi}{4} + \pi k\right),$

$\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k + 2\pi n; \ -\frac{\pi}{4} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}.$

Пример 3. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases}9^{x+y} = 729, \\ 3^{x-y-1} = 1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2^x - 2^y = 16, \\ x + y = 9;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\left(\sqrt{5}\right)^{x-y} = 25, \\ 6^{6y-x-1} = 1;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}3^x + 3^y = 28, \\ x - y = 3.\end{cases}$

Решение:

1) Данная система уравнений содержит два показательных уравнения, она сводится к системе двух рациональных уравнений первой степени.

$$\begin{cases}9^{x+y} = 729, \\ 3^{x-y-1} = 1;\end{cases} \quad \begin{cases}9^{x+y} = 9^3, \\ 3^{x-y-1} = 3^0;\end{cases} \quad \begin{cases}x + y = 3, \\ x - y - 1 = 0;\end{cases}$$

$2x = 4, x = 2, y = 1.$

О т в е т: (2; 1).

2) Данная система уравнений содержит одно показательное и одно линейное уравнение. Выразив из второго уравнения одну переменную через вторую и подставив это выражение в первое уравнение системы, мы получим квадратное уравнение относительно новой переменной.

$$\begin{cases} 2^x - 2^y = 16, \\ x + y = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} 2^{9-y} - 2^y = 16, \\ x = 9 - y; \end{cases} \quad \frac{2^9}{2^y} - 2^y - 16 = 0.$$

$$2^y = z, \ \frac{512}{z} - z - 16 = 0, \quad 512 - z^2 - 16z = 0,$$

$$z^2 + 16z - 512 = 0, \ z_1 = 16, \ z_2 = -32;$$

$2^{y_1} = 16$, $2^{y_2} = -32$ — решений нет.

$y = 4, x = 5.$

О т в е т: (5; 4).

3) Данная система уравнений решается аналогично 1).

$$\begin{cases} \left(\sqrt{5}\right)^{x-y} = 25, \\ 6^{6y-x-1} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 5^{\frac{x-y}{2}} = 5^2 \\ 6^{6y-x-1} = 6^0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x-y}{2} = 2, \\ 6y - x - 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 4, \\ -x + 6y = 1; \end{cases}$$

$5y = 5, y = 1, x = 5.$

О т в е т: (5; 1).

4) Данная система уравнений решается аналогично 2) с тем лишь отличием, что мы получим в итоге не квадратное уравнение относительно показательной переменной, а линейное.

$$\begin{cases} 3^x + 3^y = 28, \\ x - y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 3^{3+y} + 3^y = 28, \\ x = 3 + y; \end{cases} \quad 27 \cdot 3^y + 3^y = 28, \ 28 \cdot 3^y = 28;$$

$y = 0, x = 3.$

О т в е т: (3; 0).

Пример 4. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 1, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 5, \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 7, \\ \lg x + \lg y = 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \log_2(x+1) = \log_2\left(y + \frac{1}{4}\right), \\ \log_2 x - 2\log_2\left(y - \frac{1}{2}\right) = 0. \end{cases}$

Решение:

1) Данная система уравнений содержит два логарифмических уравнения. Она решается методом введения новых переменных, в результате чего мы получим квадратную систему уравнений.

$$\begin{cases} \lg x - \lg y = 1, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 5; \end{cases} \quad \lg x = u,\ \lg y = v, \quad \begin{cases} u - v = 1, \\ u^2 + v^2 = 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 1 + v, \\ (1+v)^2 + v^2 = 5; \end{cases} \quad 1 + 2v + v^2 + v^2 = 5,\ 2v^2 + 2v - 4 = 0,$$

$$v^2 + v - 2 = 0,\ v_1 = -2,\ v_2 = 1;\ u_1 = -1,\ u_2 = 2;\ \lg x = -1,$$

$\lg y = -2$, $\lg x = 2$, $\lg y = 1$; $x_1 = 0{,}1$, $y_1 = 0{,}01$; $x_2 = 100$, $y_2 = 10$.

О т в е т: (0,1; 0,01); (100; 10).

2) Данная система также содержит два логарифмических уравнения. Она также сводится к квадратной системе уравнений.

$$\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 5, \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0,\ y > 0, \\ \log_2(x^2 + y^2) = \log_2 32, \\ \log_2 x + \log_2 y = \log_2 16; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0,\ y > 0, \\ x^2 + y^2 = 32, \\ xy = 16; \end{cases}$$

$$x = \frac{16}{y},\ \frac{256}{y^2} + y^2 = 32,\ y^4 - 32y^2 + 256 = 0,\ (y^2 - 16)^2 = 0,$$

$y_1 = 4, y_2 = -4, y > 0; x_1 = 4.$

О т в е т: (4; 4).

3) Данная система двух логарифмических уравнений при помощи сложения обоих уравнений системы приводится к логарифмическому уравнению с одной переменной.

$$\begin{cases}\lg x-\lg y=7,\\ \lg x+\lg y=5;\end{cases}\quad\begin{cases}x>0,\\ y>0;\end{cases}\quad 2\lg x=12,\ \lg x=6,\ x=10^6,$$

$$6+\lg y=5,\ \lg y=-1,\ y=\frac{1}{10}.$$

О т в е т: $(10^6;\ 0{,}1)$.

4) Данная система двух логарифмических уравнений сводится к квадратной системе, но нельзя также забывать при переходе от системы логарифмических уравнений к квадратной системе об области определения логарифмов.

$$\begin{cases}\log_2(x+1)=\log_2\left(y+\frac{1}{4}\right),\\ \log_2 x-2\log_2\left(y-\frac{1}{2}\right)=0;\end{cases}\quad\begin{cases}x>0,\\ x+1>0,\\ y+\frac{1}{4}>0,\\ y-\frac{1}{2}>0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x>0,\\ x>-1,\\ y>-\frac{1}{4},\\ y>\frac{1}{2};\end{cases}\quad\begin{cases}x>0,\\ y>\frac{1}{2};\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+1=y+\frac{1}{4},\\ x=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2;\end{cases}\quad\begin{cases}x-y=-\frac{3}{4},\\ x=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2;\end{cases}\quad\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-y=-\frac{3}{4};$$

$$y^2-y+\frac{1}{4}-y+\frac{3}{4}=0,\ y^2-2y+1=0,\ (y-1)^2=0,$$

$y=1,\ x=0{,}25.$ О т в е т: (0,25; 1).

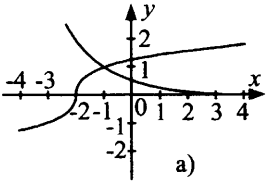
Пример 5. Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} y \cdot 2^{x+1} = 1, \\ \sqrt[3]{x+2} = y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = 2^{x-1}, \\ |x-3| = y+1. \end{cases}$

Решение: Данные системы решаются графическим мет

1) $\begin{cases} y \cdot 2^{x+1} = 1, \\ \sqrt[3]{x+2} = y; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2^{-x-1}, \\ y = \sqrt[3]{x+2}. \end{cases}$

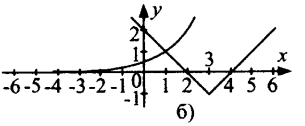
О т в е т: (–1; 1) (см. рис. а)).



а)

2) $\begin{cases} y = 2^{x-1}; \\ |x-3| = y+1; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2^{x-1}; \\ y = |x-3| - 1. \end{cases}$

О т в е т: (1; 1) (см. рис. б)).



б)

Пример 6. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} \log_2^2 y + \log_2 x \log_2 y - 2\log_2^2 x = 0, \\ 9x^2 y - xy^2 = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2\log_3^2 x + \log_3 x \log_3 y - \log_3^2 x = 0, \\ xy - \dfrac{x^2}{y} = 28. \end{cases}$

Решение:

1) В данной системе уравнений требуется поделить первое так называемое однородное уравнение системы на $\log_2^2 x$ и решить получившееся квадратное относительно новой переменной уравнение.

$$\begin{cases}\log_2^2 y+\log_2 x\log_2 y-2\log_2^2 x=0,\\ 9x^2y-xy^2=1;\end{cases}$$

ОДЗ: $x,y>0$; $\left(\dfrac{\log_2 y}{\log_2 x}\right)^2+\dfrac{\log_2 y}{\log_2 x}-2=0;$

1) $\log_2 y=\log_2 x;$ $\begin{cases}y=x,\\ 9x^3-x^3=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\ y=\dfrac{1}{2};\end{cases}$

2) $\log_2 y=-2\log_2 x;$ $\begin{cases}y=\dfrac{1}{x^2},\\ 9-\dfrac{1}{x^3}=1;\end{cases}$; $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\ y=4;\end{cases}$;

Ответ: $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{2};4\right).$

2) Для решения данной системы уравнений необходимо разложить первое уравнение системы на множители, а затем решить получившиеся совокупности уравнений.

$$\begin{cases}2\log_3^2 x+\log_3 x\log_3 y-\log_3^2 x=0,\\ xy-\dfrac{x^2}{y}=28;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\log_3 x(\log_3 x+\log_3 y)=0,\\ xy-\dfrac{x^2}{y}=28;\end{cases}$$

$\log_3 x=0,\ \log_3 xy=0;$ ОДЗ: $x,y>0$;

1) $\begin{cases} x = 1, \\ y - \dfrac{1}{y} = 28; \end{cases}$ $y^2 - 28y - 1 = 0;$

$y = 14 \pm \sqrt{197}$, т.к. $y > 0$, то $\begin{cases} y = 14 + \sqrt{197}, \\ x = 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{y}; \\ 1 - \dfrac{1}{y^3} = 28; \end{cases}$ $y = -\dfrac{1}{3}$ — не подходит;

О т в е т: $(1;\ 14 + \sqrt{197})$.

Пример 7. При каком значении a система уравнений:

1) $\begin{cases} x - 5y = 7, \\ ax - y = -3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y = a, \\ 2x + 4y = 5; \end{cases}$

имеет единственное решение; не имеет решений; имеет бесконечное множество решений?

Решение:

1) $\begin{cases} x - 5y = 7, \\ ax - y = -3; \end{cases}$ $\begin{cases} x - 5y = 7, \\ -5ax + 5y = 15; \end{cases}$

$x - 5ax = 22,\ x(1 - 5a) = 22;$

при $a \neq \dfrac{1}{5}$ — 1 решение; при $a = \dfrac{1}{5}$ — нет решений.

О т в е т: $a \neq \dfrac{1}{5}$ — 1 решение; при $a = \dfrac{1}{5}$ — нет решений.

2) $\begin{cases} x + 2y = a, \\ 2x + 4y = 5; \end{cases}$ если a = 2,5 — бесконечное множество решений; если $a \neq 2{,}5$ — нет решений.

О т в е т: $a = 2{,}5$ — бесконечное множество решений;

$a \neq 2{,}5$ — нет решений.

Пример 8. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{13}{6}, \\ x+y=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=1, \\ x^3-y^3=7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{y}{x}=2, \\ (x-1)^2+y^2=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^3+y^3=35, \\ x+y=5. \end{cases}$

Решение:

1) Это система двух рациональных уравнений. Решается ведением к квадратному уравнению.

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{13}{6}, \\ x+y=5; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{y}{5-y}+\dfrac{5-y}{y}=\dfrac{13}{6}, \\ x=5-y, \end{cases} \quad x\neq 0,\ y\neq 0,$$

$$\frac{6y^2+(5-y)^2\cdot 6-13y(5-y)}{y(5-y)\cdot 6}=0,$$

$$\frac{25y^2-125y+150}{y(5-y)}=0,$$

$$\begin{cases} y^2-5y+6=0, \quad y\neq 0, y\neq 5; \\ y(5-y)\neq 0; \quad y_1=2; y_2=3; x_1=3; x_2=2. \end{cases}$$

О т в е т: (3; 2); (2; 3).

2) Данная система решается аналогично 1).

$$\begin{cases} x-y=1, \\ x^3-y^3=7; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=1, \\ (x-y)(x^2+xy+y^2)=7; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=1, \\ x^2+xy+y^2=7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1+y, \\ (1+y)^2+(1+y)y+y^2=7; \end{cases}$$

$$1+2y+y^2+y+y^2+y^2-7=0;$$

$$y^2+y-2=0, \ (y-1)(y+2)=0;$$

$$y_1=1, \ y_2=-2;$$

$$x_1=2, x_2=-1.$$

О т в е т: (2; 1); (–1; –2).

3) Система решается аналогично 1).

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = 2, \\ (x-1)^2 + y^2 = 1; \end{cases} \quad x \neq 0, \quad \begin{cases} y = 2x, \\ (x-1)^2 + 4x^2 = 1; \end{cases}$$

$x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 1 = 0$, $5x^2 - 2x = 0$, $x(5x - 2) = 0$;

$x_1 = 0$ — не удовлетворяет условию; $x_2 = 0{,}4$, $y = 0{,}8$.

О т в е т: (0,4; 0,8).

4) Система решается аналогично 1).

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x + y = 5; \end{cases} \quad 5\left(x^2 - xy + y^2\right) = 35, \quad \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ x = 5 - y; \end{cases}$$

$$(5-y)^2 - (5-y)y + y^2 = 7,\ 25 - 10y + y^2 - 5y + y^2 + y^2 = 7,$$

$$3y^2 - 15y + 18 = 0,\ y^2 - 5y + 6 = 0,\ y_1 = 2,\ y_2 = 3;$$

$x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

О т в е т: (3; 2); (2; 3).

2.5. Неравенства с одной переменной

Пример 1. Решите неравенства:

1) $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)} \geq 0$;

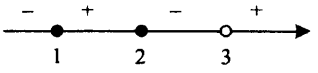
2) $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 8} \leq 0$;

3) $\dfrac{x-2}{(x-3)(x-5)} < 0$;

4) $\dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 5x - 6} > 0$.

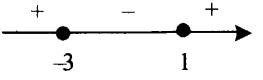
Решение: Все вышеприведенные неравенства решаются методом разложения числителя и знаменателя на множители с последующим применением метода интервалов.

1) $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)} \geq 0$.



О т в е т: $x \in [1; 2] \cup (3; +\infty)$.

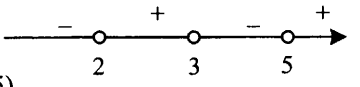
2) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-2x+8}\le 0$; $\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x^2-2x+8)}\le 0$, $x^2-2x+8>0$ при любом x, $(x-1)(x+3)\le 0$, $-3\le x\le 1$.



Ответ: $x\in[-3;\,1]$.

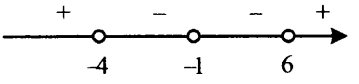
3) $\dfrac{x-2}{(x-3)(x-5)}<0$;

$(x-2)(x-3)(x-5)<0$.



Ответ: $x\in(-\infty;\,2)\cup(3;\,5)$.

4) $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-5x-6}>0$;



$\dfrac{(x+1)(x+4)}{(x-6)(x+1)}>0$, $(x+1)^2(x+4)(x-6)>0$.

Ответ: $x\in(-\infty;\,-4)\cup(6;\,\infty)$.

Пример 2. Решите неравенства:

1) $0{,}04^x-26\cdot 0{,}2^x+25\le 0$;

2) $9^x-84\cdot 3^{-2x}+\dfrac{1}{3}>0$;

3) $4^x-10\cdot 2^x+16<0$;

4) $2^{2x+1}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x+1}-\dfrac{5}{2}\ge 0$.

Решение: Все нижеприведенные неравенства решаются методом введения новой переменной.

1) $0{,}04^x-26\cdot 0{,}2^x+25\le 0$, $(0{,}2)^{2x}-26\cdot 0{,}2^x+25\le 0$;

$0{,}2^x=y$, то $y^2-26y+25\le 0$, $(y-25)(y-1)\le 0$, $1\le y\le 25$;

$1\le 0{,}2^x\le 25$, $5^0\le 5^{-x}\le 5^2$; $y=5^{-x}$ – возрастает, $0\le -x\le 2$.

Ответ: $x\in[-2;\,0]$.

2) $9^x-84\cdot 3^{-2x}+\dfrac{1}{3}>0$, $3^{2x}-84\cdot 3^{-2x}+\dfrac{1}{3}>0$, $3^{2x}=y$,

$y-\dfrac{84}{y}+\dfrac{1}{3}>0$, $y>0$, $3y^2+y-252>0$,

$\left(y+\frac{28}{3}\right)(y-9)>0 \quad y<-\frac{28}{3}$ или $y > 9$, $3^{2x} < -\frac{28}{3}$ — не имеет решений; или $3^{2x} > 9$, $3^{2x} > 3^2$; $y = 3^t$ — возрастает, $2x > 2, x > 1$.

Ответ: $x \in (1; +\infty)$.

3) $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$. $2^x = y, y > 0, y^2 - 10y + 16 < 0$,

$(y - 2)(y - 8) < 0$, $2 < y < 8$; $2 < 2^x < 8$, $2^1 < 2^x < 2^3$; $y = 2^t$ — возрастает, $1 < x < 3$.

Ответ: $x \in (1; 3)$.

4) $2^{2x+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} - \frac{5}{2} \geq 0$; $2^{2x+1} = y, y > 0$,

$y + \frac{1}{y} - \frac{5}{2} \geq 0, \quad 2y^2 - 5y + 2 \geq 0, \quad (y-2)\left(y-\frac{1}{2}\right) \geq 0, \quad y \leq \frac{1}{2}$

или $y \geq 2, \quad 2^{2x+1} \leq \frac{1}{2}$ или $2^{2x+1} \geq 2, \quad 2^{2x+1} \leq 2^{-1}$; $y = 2^t$ — возрастает, $2x + 1 \leq -1, \ 2x \leq -2, \ x \leq -1$; $2x + 1 \geq 1, \ 2x \geq 0, \ x \geq 0$.

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$.

Пример 3. Решите неравенства:

1) $\lg(x^2 + x - 6) - \lg(x + 3) \leq \lg 3$;

2) $\log_2 \frac{3x-1}{2-x} < 1$;

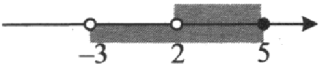
3) $\ln(x^2 + 3x - 10) - \ln(x - 2) \geq \ln 4$;

4) $\log_3 \frac{3x-5}{x+1} \leq 1$.

Решение:

1) $\lg(x^2 + x - 6) - \lg(x + 3) \leq \lg 3$;

ОДЗ: $\begin{cases} x^2 + x - 6 > 0, \\ x + 3 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -3, \\ x > 2, \end{array}\right. \\ x > -3. \end{cases} \quad x > 2;$



$$\lg\frac{(x^2+x-6)}{x+3}\le\lg 3;$$

$$\frac{x^2+x-6}{x+3}\le 3,\ \frac{x^2+x-6-3x-9}{x+3}\le 0,$$

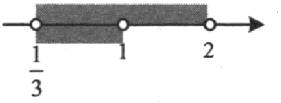
$$\frac{x^2-2x-15}{x+3}\le 0,\ \frac{(x-5)(x+3)}{x+3}\le 0,\ x\ne -3,\ x\le 5.$$

Ответ: (2; 5].

2) $\log_2\frac{3x-1}{2-x}<1;\ \frac{3x-1}{2-x}>0,\ \frac{1}{3}<x<2;$

$$\log_2\frac{3x-1}{2-x}<\log_2 2;\ \frac{3x-1}{2-x}<2,$$

ОДЗ: $\frac{3x-1-4+2x}{2-x}<0,\ \frac{5x-5}{2-x}<0,\ 5(x-1)(2-x)<0,\ x<1$ или $x>2.$

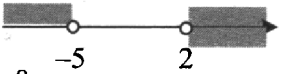


Ответ: $x\in\left(\frac{1}{3};1\right).$

3) $\ln(x^2+3x-10)-\ln(x-2)\ge\ln 4;$

ОДЗ: $\begin{cases}x^2+3x-10>0,\\ x-2>0;\end{cases}\ \begin{cases}(x-2)(x+5)>0,\\ x>2;\end{cases}\ x>2;$

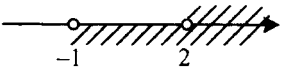
$y=\ln t$ — возрастает,



$$\frac{x^2+3x-10}{x-2}\ge 4,\ \frac{x^2+3x-10-4x+8}{(x-2)}\ge 0,$$

$$\frac{x^2-x-2}{(x-2)}\ge 0,$$

$$\frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)}\ge 0,$$



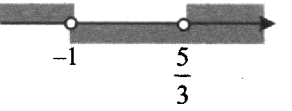
$x+1\ge 0,\quad x\ne 2,\quad x>-1,\quad x\ne 2.$

Ответ: $x\in(2;\infty).$

4) $\log_3 \frac{3x-5}{x+1} \le 1$; $\frac{3x-5}{x+1} > 0$,

$(3x-5)(x+1) > 0$,

$x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{3}; \infty\right)$;



$\log_3 \frac{3x-5}{x+1} \le \log_3 3$; $\frac{3x-5}{x+1} \le 3$,

$\frac{3x-5-3x-3}{x+1} \le 0$,

$x + 1 > 0, x > -1$.

Ответ: $x \in \left(\frac{5}{3}; \infty\right)$.

Пример 4. Решите неравенства, используя графики:

1) $3^x > 12 - 1{,}5x$;

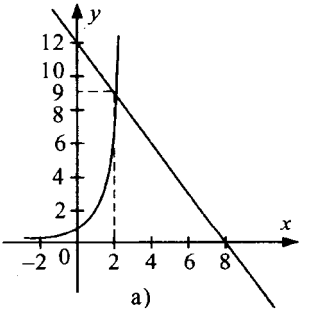
2) $2^x \ge \sqrt{x}$;

3) $3^x \le 12 - 1{,}5x$;

4) $2^x \le \sqrt{x}$.

Решение: Данные неравенства решаются графическим методом.

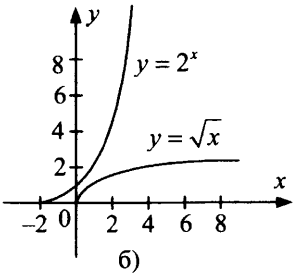
1) $3^x > 12 - 1{,}5x$; $x > 2$ (см. рис. а));



а)

Ответ: $(2; +\infty)$.

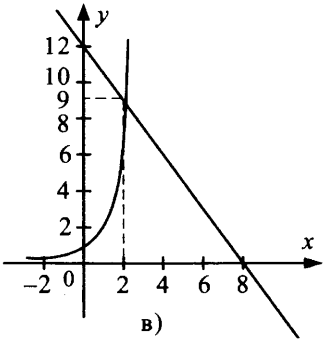
2) $2^x \geq \sqrt{x}$; $x \geq 0$ (см. рис. б));



б)

О т в е т: $[0; +\infty)$.

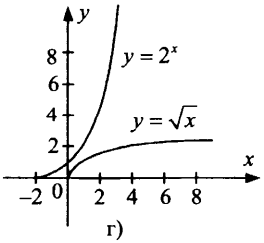
3) $3^x \leq 12 - 1{,}5x$; $x \leq 2$ (см. рис. в));



в)

О т в е т: $(-\infty; 2]$.

4) $2^x \leq \sqrt{x}$; нет решений (см. рис. г)).



г)

О т в е т: $\varnothing$.

Пример 5. Решите неравенство:
$|16-8x|<4x+2$.

Решение: Данное неравенство решается раскрытием модуля.

$$|16-8x|<4x+2;\ \begin{cases}16-8x<4x+2,\\16-8x>-4x-2;\end{cases}\ \begin{cases}x>\frac{7}{6},\\x<\frac{9}{2};\end{cases}$$

$x\in\left(\frac{7}{6};\ \frac{9}{2}\right)$.

Ответ: $\left(\frac{7}{6};\frac{9}{2}\right)$.

Пример 6. Решите систему неравенств:

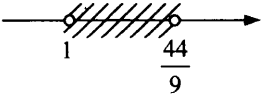
1) $\begin{cases}2x>3-\dfrac{13x-2}{11},\\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{2}{3}(x-7)<\dfrac{3x-20}{9};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{x+4}{3}\le\dfrac{x-1}{4}-2,\\1{,}5x-2{,}5<x;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{x}{3}\ge\dfrac{x-1}{4}-x-2,\\0{,}5x<2-x;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}2(3x-1)<3(4x+1)+16,\\4(2+x)<3x+8.\end{cases}$

Решение: Во всех вышеприведенных системах неравенств первое и второе неравенства не связаны друг с другом, поэтому требуется решить каждое из этих неравенств по отдельности, а затем выделить общие решения.

$$1)\ \begin{cases}2x>3-\dfrac{13x-2}{11},\\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{2}{3}(x-7)<\dfrac{3x-20}{9};\end{cases}\quad\begin{cases}22x>33-13x+2,\\3x+12(x-7)<2(3x-20);\end{cases}$$

$$\begin{cases}35x>35,\\9x<44;\end{cases}\quad\begin{cases}x>1,\\x<\dfrac{44}{9}.\end{cases}$$



Ответ: $x\in\left(1;\ 4\frac{8}{9}\right)$.

2) $\begin{cases} x-\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{x+4}{3}\le\dfrac{x-1}{4}-2, \\ 1{,}5x-2{,}5<x; \end{cases}$

$\begin{cases} 12x-6(x+1)-4(x+4)\le 3(x-1)-24, \\ 1{,}5x-x<2{,}5; \end{cases}$

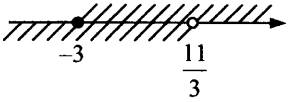
$\begin{cases} 12x-6x-6-4x-16\le 3x-3-24, \\ 0{,}5x<2{,}5; \end{cases}$ $\begin{cases} -x\le -5, \\ x<5; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 5, \\ x<5. \end{cases}$

О т в е т: нет решений.

3) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}-\dfrac{x}{3}\ge\dfrac{x-1}{4}-x-2, \\ 0{,}5x<2-x; \end{cases}$ $\begin{cases} 6(x+1)-4x\ge 3(x-1)-12x-24, \\ 0{,}5x+x<2; \end{cases}$

$\begin{cases} 6x+6-4x\ge 3x-3-12x-24, \\ 1{,}5x<2; \end{cases}$

$\begin{cases} 11x\ge -33, \\ x<\dfrac{20}{15}; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge -3, \\ x<\dfrac{4}{3}. \end{cases}$



О т в е т: $\left[-3;\ 1\dfrac{1}{3}\right)$.

4) $\begin{cases} 2(3x-1)<3(4x+1)+16, \\ 4(2+x)<3x+8; \end{cases}$

$\begin{cases} 6x-2<12x+3+16, \\ 8+4x<3x+8; \end{cases}$ $\begin{cases} -6x<21, \\ x<0; \end{cases}$

$\begin{cases} x>-3{,}5, \\ x<0. \end{cases}$

О т в е т: (–3,5; 0).

3. ФУНКЦИИ

3.1. Числовые функции и их свойства

Тригонометрические функции

1. Рассмотрим функцию $y = \sin x$.

Область определения: $D(\sin x) = \mathbb{R}$.

Область значений: $E(\sin x) = [-1; 1]$.

Наименьший положительный период: $T = 2\pi$.

Так как центральный угол, соответствующий полной окружности, равен 2π, то точки, соответствующие углам α, $(\alpha + 2\pi)$, $(\alpha + 4\pi)$ и т.д., совпадают.

Так как круг симметричен относительно любого своего диаметра, в частности относительно диаметра, лежащего на оси абсцисс, и равные по абсолютной величине углы при симметрии переходят в равные, то ординаты углов α и $(-\alpha)$ противоположны, т.е. $\sin(-x) = -\sin x$, т.е. функция $\sin x$ нечетная.

Точки пересечения с осями. Из $\sin x = 0$ получаем $x = \pi n$ — точки пересечения с осью Ox; из $\sin 0 = y$ получаем $y = 0$ — точка пересечения с осью $0y$.

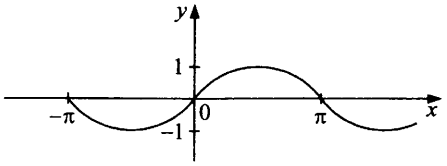
$\sin x > 0$ при $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$;

$\sin x < 0$ при $x \in (\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Наибольшее значение: $\sin x = 1$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Наименьшее значение: $\sin x = -1$ при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Функция возрастает на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$, убывает на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$, график функции асимптот не имеет.



2. Рассмотрим функцию $y = \cos x$.

$D(\cos x) = \mathbb{R}$, $E(\cos x) = [-1; 1]$.

Наименьший положительный период: $T = 2\pi$.

Построим на единичной окружности точки A и A', соответствующие углам α и $(-\alpha)$. Так как круг симметричен относительно Ox, а равные по абсолютной величине углы при симметрии переходят в равные углы, то точки A и A' симметричны относительно $0x$, следовательно, их абсциссы равны, т.е. $\cos(-x) = \cos x$, т.е. $\cos x$ — четная функция.

Пересечение с Ox: найдем из уравнения $\cos x = 0$, т.е. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Пересечение с Oy: $\cos 0 = y \Rightarrow y = 1$.

Промежутки знакопостоянства:

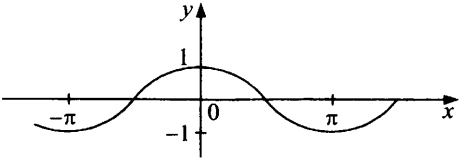
$\cos x > 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}$.

$\cos x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}$.

Наибольшее значение: $\cos x = 1$ при $x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Наименьшее значение: $\cos x = -1$ при $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Функция возрастает на промежутках $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n],\ n \in \mathbb{Z}$, убывает на промежутках $[2\pi n; \pi + 2\pi n],\ n \in \mathbb{Z}$, график функции асимптот не имеет.



3. Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$.

Область определения — все действительные числа кроме точек $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Область значений $E(\operatorname{tg} x) = (-\infty; +\infty)$.

Наименьший положительный период $T = \pi$:
для любого $x \in D(\operatorname{tg} x)$ справедливо

$\operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x$, следовательно, π — период функции.

Пусть $\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, т.е. π — наименьший положительный период.

$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$, функция нечетная.

Пересечение с осью абсцисс найдем из уравнения $\operatorname{tg} x = 0$, $x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; с осью ординат из $\operatorname{tg} 0 = y \Rightarrow y = 0$.

$\operatorname{tg} x > 0$ при $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}$;

$\operatorname{tg} x < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}$.

Функция не имеет наибольшего и наименьшего значений.

Свойство. Функция возрастает на каждом из интервалов

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

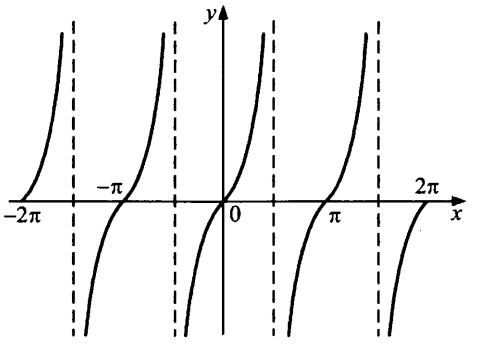
Доказательство. Рассмотрим промежуток $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Пусть $0 \le x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$. Здесь $\sin x$ возрастает, а $\cos x$ убывает, поэтому $0 \le \sin x_1 < \sin x_2 < 1;\ 1 \ge \cos x_1 > \cos x_2 > 0$.

Поделив почленно неравенства разных знаков, содержащие только положительные числа, получим $\frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2}$.

Аналогично доказывается возрастание на $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

График имеет вертикальные асимптоты $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.



4. Рассмотрим функцию $y = \operatorname{ctg} x$.

Область определения — все действительные числа кроме точек $x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, $E(\operatorname{ctg} x) = \mathbb{R}$.

Наименьший положительный период $T = \pi$. Функция нечетна, аналогично $\operatorname{tg} x$.

Пересечение с осью абсцисс найдем из

$$\operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Точек пересечения с Oy нет, т.к. при $x = 0$ функция не определена; $\operatorname{ctg} x > 0$ при $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$,

$k \in Z$; $\operatorname{ctg} x < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}$.

Функция не имеет наибольшего и наименьшего значений.

Функция убывает на каждом из интервалов $(\pi n;\ \pi + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$, доказательство аналогично доказательству для функции $\operatorname{tg} x$.

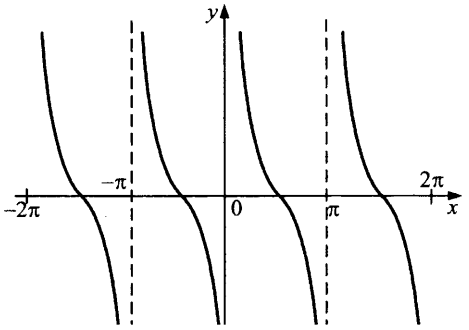


График функции имеет вертикальные асимптоты $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 1. Найти область определения функции

1) $y = \dfrac{1}{\cos x}$; 2) $y = \dfrac{2}{\sin x}$;

3) $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$; 4) $y = \operatorname{tg}5x$.

Решение: Пользуемся нашим знанием областей определения тригонометрических функций.

1) $y = \dfrac{1}{\cos x}$; $\cos x \neq 0$; $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;

2) $y = \dfrac{2}{\sin x}$; $\sin x \neq 0$; $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

3) $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$; $\cos = \dfrac{x}{3} \neq 0$; $\dfrac{x}{3} \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$; $x \neq \dfrac{3\pi}{2} + 3\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

4) $y = \operatorname{tg}5x$; $\cos 5x \neq 0$; $5x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$; $x \neq \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi}{5}k, k \in \mathbb{Z}$.

О т в е т: 1) $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; 2) $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

3) $x \neq \dfrac{3\pi}{2} + 3\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 4) $x \neq \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi}{5}k, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. Найти область определения функции:

1) $y = \sqrt{\sin x + 1}$; 2) $y = \sqrt{\cos x - 1}$;

3) $y = \lg \sin x$; 4) $y = \sqrt{2\cos x - 1}$;

5) $y = \sqrt{1 - 2\sin x}$; 6) $y = \ln \cos x$.

Решение: В данном примере рассматриваются области определения сложных функций.

1) $y = \sqrt{\sin x + 1}$; $\sin x + 1 \geq 0$; $\sin x \geq -1, x \in R$;

2) $y = \sqrt{\cos x - 1}$; $\cos x - 1 \geq 0$; $\cos x \geq 1; x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

3) $y = \lg \sin x$; $\sin x > 0$; $2\pi k < x < \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

4) $y = \sqrt{2\cos x - 1}$; $2\cos x - 1 \geq 0$

$\cos x \geq \frac{1}{2}$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

5) $y = \sqrt{1 - 2\sin x}$; $1 - 2\sin x \geq 0$;

$\sin x \leq \frac{1}{2}$; $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

6) $y = \ln \cos x$; $\cos x > 0$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: 1) $x \in \mathbb{R}$; 2) $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

3) $2\pi k < x < \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

4) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

5) $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

6) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 3. Найти множество значений функции:

1) $y = 2\sin^2 x - \cos 2x$; 2) $y = 1 - 8\cos^2 x \sin^2 x$;

3) $y = \frac{1 + 8\cos^2 x}{4}$; 4) $y = 10 - 9\sin^2 3x$;

5) $y = 1 - 2|\cos x|$; 6) $y = \sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Решение: В данном примере пользуемся уже известными нам областями значений тригонометрических функций.

1) $y = 2\sin^2 x - \cos 2x$; $y = 2\sin^2 x - (1 - 2\sin^2 x) = 4\sin^2 x - 1$, т.е. $-1 \le y \le 3$;

2) $y = 1 - 8\cos^2 x \sin^2 x$; $y = 1 - 2\sin^2 2x$, т.е. $-1 \le y \le 1$;

3) $y = \dfrac{1 + 8\cos^2 x}{4}$; $y = \dfrac{1}{4} + 2\cos^2 x$, т.е. $\dfrac{1}{4} \le y \le \dfrac{9}{4}$;

4) $y = 10 - 9\sin^2 3x$; $1 \le y \le 10$;

5) $y = 1 - 2|\cos x|$; $-1 \le y \le 1$;

6) $y = \sin x + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$;

$y = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$; $y = \sqrt{3}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$, т.е. $-\sqrt{3} \le y \le \sqrt{3}$.

О т в е т: 1) $-1 \le y \le 3$; 2) $-1 \le y \le 1$;
3) $\dfrac{1}{4} \le y \le \dfrac{9}{4}$; 4) $1 \le y \le 10$;
5) $-1 \le y \le 1$; 6) $-\sqrt{3} \le y \le \sqrt{3}$.

Пример 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3\cos 2x - 4\sin 2x$.

Решение:

$$y = 3\cos 2x - 4\sin 2x = 5\left(\frac{3}{5}\cos 2x - \frac{4}{5}\sin 2x\right) = 5\sin(\varphi - 2x),$$

где $\varphi = \arcsin\dfrac{3}{5}$, т.е. $y_{\text{наим}} = -5$, а $y_{\text{наиб}} = 5$.

О т в е т: $y_{\text{наим}} = -5$, а $y_{\text{наиб}} = 5$.

Пример 5. Доказать, что данная функция является периодической с периодом T, если:

1) $y = \sin 2x$, $T = \pi$; 2) $y = \cos\dfrac{x}{2}$, $T = 4\pi$;

3) $y = \operatorname{tg} 2x$, $T = \dfrac{\pi}{2}$; 4) $y = \sin\dfrac{4x}{5}$, $T = \dfrac{5}{2}\pi$.

Решение:

1) $y = \sin 2x$, $T = \pi$; $y(x + T) = \sin(2(x+\pi)) = \sin(2x + 2\pi) = \sin 2x = y(x)$;

2) $y = \cos\frac{x}{2}$, $T = 4\pi$;

$$y(x+T) = \cos\frac{x+4\pi}{2} = \cos\left(\frac{x}{2} + 2\pi\right) = \cos\frac{x}{2} = y(x);$$

3) $y = \operatorname{tg} 2x$, $T = \frac{\pi}{2}$;

$$y(x+T) = \operatorname{tg}\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = tg(2x + \pi) = tg\,2x = y(x);$$

4) $y = \sin\frac{4x}{5}, T = \frac{5}{2}\pi$;

$$y(x+T) = \sin\left(\frac{4}{5}\left(x + \frac{5}{2}\pi\right)\right) = \sin\left(\frac{4x}{5} + 2\pi\right) = \sin\frac{4x}{5} = y(x).$$

Пример 6. Определить, является ли данная функция четной или нечетной:

1) $y = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$; 2) $y = \dfrac{\sqrt{\sin^2 x}}{1+\cos 2x}$; 3) $y = \dfrac{\cos 2x - x^2}{\cos x}$;

4) $y = \dfrac{x^3 + \sin 2x}{\cos x}$; 5) $y = 3^{\cos x}$; 6) $y = x|\sin x|\sin^3 x$.

Решение:

1) $y = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$; $y(-x) = \dfrac{1-\cos(-x)}{1+\cos(-x)} = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} = y(x)$ — четная;

2) $y = \dfrac{\sqrt{\sin^2 x}}{1+\cos 2x}$; $y(-x) = \dfrac{\sqrt{\sin^2(-x)}}{1+\cos(-2x)} = \dfrac{\sqrt{(-\sin x)^2}}{1+\cos 2x} =$

$= \dfrac{\sqrt{\sin^2 x}}{1+\cos 2x} = y(x)$ — четная;

3) $y = \dfrac{\cos 2x - x^2}{\cos x}$; $y(-x) = \dfrac{\cos 2x - x^2}{\cos x} = y(x)$ — четная;

4) $y=\dfrac{x^3+\sin 2x}{\cos x}$; $y(-x)=\dfrac{-x^3-\sin 2x}{\cos x}=-y(x)$ — нечетная;

5) $y=3^{\cos x}$, $y(-x)=3^{\cos x}=y(x)$ – четная;

6) $y=x|\sin x|\sin^3 x$, $y(-x)=-x|\sin x|\cdot(-\sin^3 x)=y(x)$ – четная.

О т в е т: 1) четная; 2) четная; 3) четная; 4) нечетная; 5) четная; 6) четная.

Пример 7. Используя свойство возрастания или убывания функции $y=\cos x$, сравнить числа:

1) $\cos\dfrac{\pi}{7}$ и $\cos\dfrac{8\pi}{9}$; 2) $\cos\dfrac{8\pi}{7}$ и $\cos\dfrac{10\pi}{7}$;

3) $\cos\left(-\dfrac{6\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)$; 4) $\cos\left(-\dfrac{8\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\dfrac{9\pi}{7}\right)$;

5) cos 1 и cos3; 6) cos4 и cos5.

Решение: Используем свойства возрастания и убывания тригонометрических функций.

1) $\cos\dfrac{\pi}{7}$ и $\cos\dfrac{8\pi}{9}$. Так как функция cos$x$ убывает на $[0;\ \pi]$ и $\dfrac{\pi}{7}<\dfrac{8\pi}{9}$, то $\cos\dfrac{\pi}{7}>\cos\dfrac{8\pi}{9}$.

2) $\cos\dfrac{8\pi}{7}$ и $\cos\dfrac{10\pi}{7}$. Так как cos$x$ возрастает на $[\pi;\ 2\pi]$ и $\dfrac{8\pi}{7}<\dfrac{10\pi}{7}$, то $\cos\dfrac{8\pi}{7}<\cos\dfrac{10\pi}{7}$.

3) $\cos\left(-\dfrac{6\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)$. Так как cos$x$ возрастает на $[-\pi;\ 0]$ и $-\dfrac{6\pi}{7}<-\dfrac{\pi}{8}$, то $\cos\left(-\dfrac{6\pi}{7}\right)<\cos\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)$.

4) $\cos\left(-\dfrac{8\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\dfrac{9\pi}{7}\right)$. Так как cos$x$ убывает на $[-2\pi;\ -\pi]$ и $-\dfrac{8\pi}{7}>-\dfrac{9\pi}{7}$, то $\cos\left(-\dfrac{8\pi}{7}\right)<\cos\left(-\dfrac{9\pi}{7}\right)$.

5) cos1 и cos3. Так как cos x убывает на $[0;\ \pi]$, а $1<3$, то cos1 > cos 3.

6) cos4 и cos5. Так как cos x возрастает на $[\pi; 2\pi]$ и $4 < 5$, то $\cos 4 < \cos 5$.

Ответ: 1) $\cos\frac{\pi}{7} > \cos\frac{8\pi}{9}$; 2) $\cos\frac{8\pi}{7} < \cos\frac{10\pi}{7}$;

3) $\cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right) < \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$; 4) $\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right) < \cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$;

5) $\cos 1 > \cos 3$; 6) $\cos 4 < \cos 5$.

Показательная функция

Пусть $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$; $x \in \mathbb{R}$, если $a = 1$, то $a^x = 1$ для любого x.

Пусть $a \neq 1$. Для любого $x \in \mathbb{R}$ можно найти рациональные p и q такие, что $q \le x \le p$. Тогда числом a^x будем считать такое число, что

$$\begin{cases} a^q \le y = a^x \le a^p, \text{ где } a > 1 \\ a^p \le y = a^x \le a^q, \text{ где } 0 < a < 1 \end{cases}$$

для всех p и q таких, что $q \le x \le p$.

Теорема 1. Если $a > 0$, $a \neq 1$, то $a^x > 0$ для любого x.

Следствие: если $y \le 0$, то уравнение $a^x = y$ не имеет корней.

Функция $y = a^x$ (при $a > 0$, $a \neq 1$) называется *показательной*, a — основание.

$D(a^x) = \mathbb{R}$, $E(a^x) = (0; +\infty)$.

Функция непериодическая, любое из своих значений она принимает ровно в одной точке. Функция не является ни четной, ни нечетной.

Пересечений с осью Ox нет; при $x = 0$, $y = a^0 = 1$, пересечение с осью Oy в точке (0; 1).

Функция положительна при всех x, не имеет наибольшего и наименьшего значений.

Функция монотонна; при $a > 1$ возрастает, при $0 < a < 1$ убывает.

Пусть $a > 1$, p и q — рациональные; $q < p$.

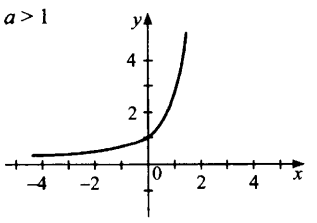
Тогда $a^p - a^q = a^q\left(a^{p-q} - 1\right)$; $a^q > 0$; следовательно, знак разности $a^p - a^q$ определяется знаком $a^{p-q} - 1$.

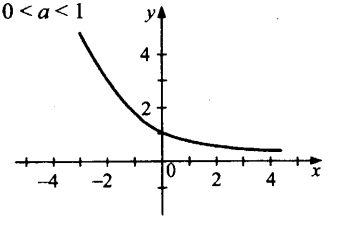
Пусть $p - q = \frac{m}{n} > 0$, тогда $a > 1 \Rightarrow a^m > 1 \Rightarrow \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n > 1 \Rightarrow$

$a^{\frac{m}{n}} > 1$, т.е. $a^{p-q} > 1 \Rightarrow a^p > a^q$.

Из определения степени числа с действительным показателем следует, что $a^p \geq a^q$ для $p > q$; $p,\ q \in \mathbb{R}$.

Равенства быть не может, т.к. уравнение $a^x = y$ всегда имеет единственный корень. Асимптота графика $y = a^x$ — ось Ox.



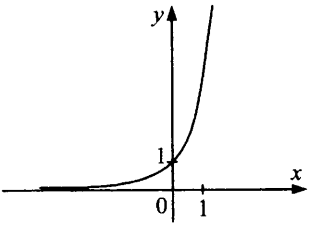


Пример 1. Построить график функции:

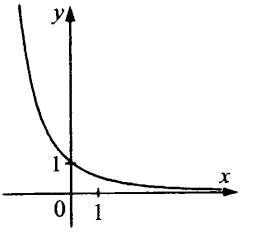
1) $y = 3^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Решение:

1)



2)



Пример 2. Найти координаты точек пересечения графиков функций:

1) $y = 2^x$ и $y = 8$;

2) $y = 3^x$ и $y = \frac{1}{3}$;

3) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ и $y = \frac{1}{16}$;

4) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y = 9$.

Решение:

1) $y = 2^x$ и $y = 8$; $2^x = 8$; $2^x = 2^3$; $x = 3$, значит точка пересечения графиков (3; 8).

2) $y = 3^x$ и $y = \frac{1}{3}$; $3^x = \frac{1}{3}$; $3^x = 3^{-1}$; $x = -1$, значит точка пересечения графиков $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$.

3) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ и $y = \frac{1}{16}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{16}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{4}\right)^2$; $x = 2$, значит точка пересечения графиков $\left(2; \frac{1}{16}\right)$.

4) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y = 9$; $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$; $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$; $x = -2$, значит точка пересечения графиков (– 2; 9).

Пример 3. Используя графики функций, решить неравенство:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 1$;

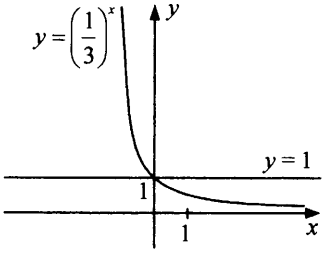
2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 1$;

3) $5^x > 5$;

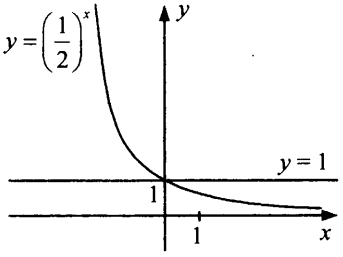
4) $5^x < \frac{1}{5}$.

Решение: Построим графики функций и наглядно решим неравенства.

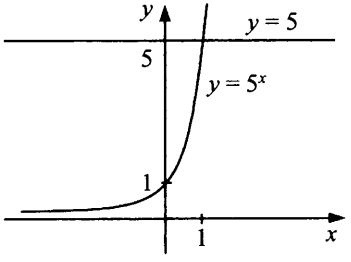
1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^0$, из графика видно, что $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 1$ при $x < 0$.



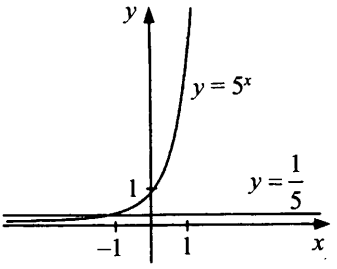
2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 1$, из графика видно, что $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 1$ при $x > 0$.



3) $5^x > 5$, из графика видно, что $5^x > 5$ при $x > 1$.



4) $5^x < \frac{1}{5} = 5^{-1}$, из графика видно, что $5^x < 5^{-1}$ при $x < -1$.



О т в е т: 1) $x < 0$; 2) $x > 0$; 3) $x > 1$; 4) $x < -1$.

Пример 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2^x$ на отрезке $[-1; 2]$.

Решение: Используем свойства показательной функции:

Так как функция 2^x — возрастающая функция, то на отрезке $[-1; 2]$ наименьшее значение она принимает при $x = -1$; а наибольшее при $x = 2$, значит наименьшее значение $y(-1) = 2^{-1} = 0{,}5$, а наибольшее $y(2) = 2^2 = 4$.

Пример 5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2^{|x|}$ на отрезке $[-1; 1]$.

Решение: Используем свойства показательной функции: поскольку функция $y = 2^{|x|}$ симметрична относительно оси ординат, а на отрезке $[0; 1]$ $2^{|x|} = 2^x$, функция 2^x — возрастающая, значит данная функция принимает наименьшее значение при $x = 0$, $y(0) = 2^0 = 1$ и наибольшее при $x = 1$ или $x = -1$, $y(-1) = 2^1 = 2$.

Логарифмическая функция

Функция вида $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, называется *логарифмической.*

$D(\log_a x) = (0; +\infty)$; $E(\log_a x) = \mathbb{R}$.

Функция не является периодической, четной или нечетной, так как определена только для $x > 0$.

Пересечение с осью Ox:

$\log_a x = 0 \Rightarrow x = 1$, точка $(1; 0)$.

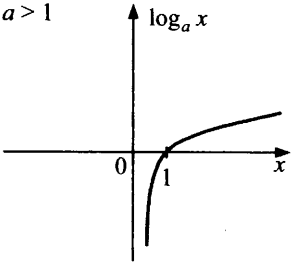
При $a > 1$ $y(x) > 0$ при $x > 1$, $y(x) < 0$ при $x \in (0; 1)$.

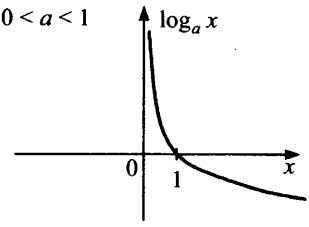
При $0 < a < 1$, $y(x) > 0$ при $x \in (0; 1)$, $y(x) < 0$ при $x \in (1; +\infty)$.

Функция не имеет наибольшего и наименьшего значений.

При $0 < a < 1$ функция убывает на всей области определения, при $a > 1$ — возрастает.

Асимптота графика функции — ось ординат $x = 0$.





Пример 1. Выяснить, является ли возрастающей или убывающей функция:

1) $y = \log_{0,075} x$;

2) $y = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$;

3) $y = \lg x$;

4) $y = \ln x$.

Решение: Используем свойства возрастания убывания логарифмической функции.

1) $y = \log_{0,075} x$ — убывающая, так как $0 < 0,075 < 1$;

2) $y = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$ — убывающая, так как $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$;

3) $y = \lg x = \log_{10} x$ — возрастающая, так как $10 > 1$;

4) $y = \ln x = \log_e x$ — возрастающая, так как $e > 1$.

Пример 2. Изобразить схематически график функции:

1) $y = \lg x$;

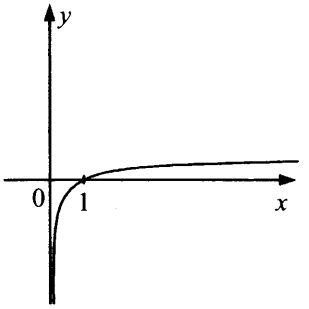
2) $y = \ln x$;

3) $y = \log_{0,4} x$;

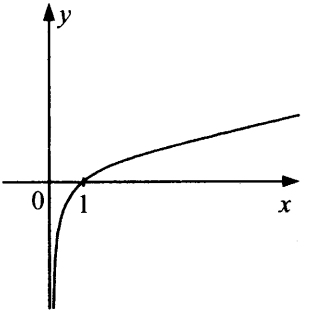
4) $y = \log_{\frac{1}{5}} x$.

Решение:

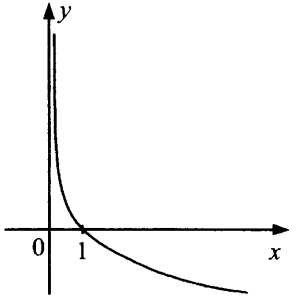
1)



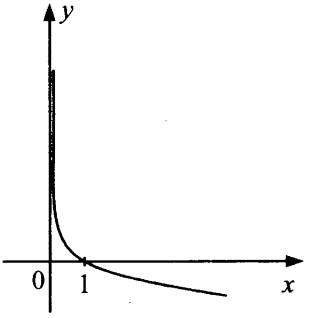
2)



3)



4)



Пример 3. Найти область определения функции:

1) $y = \log_4(x-1)$; 2) $y = \log_{0,3}(1+x)$;

3) $y = \log_3(x^2+2x)$; 4) $y = \log_{\sqrt{2}}(4-x^2)$.

Решение: Используем то, что нам известно об области определения логарифмической функции.

1) $y = \log_4(x-1)$ — область определения $x-1>0$; $x>1$;

2) $y = \log_{0,3}(1+x)$ — область определения $1+x>0$; $x>-1$;

3) $y = \log_3(x^2+2x)$ — область определения $x^2 + 2x > 0$; $x<-2$ и $x>0$;

4) $y = \log_{\sqrt{2}}(4-x^2)$ — область определения $4-x^2>0$; $-2<x<2$.

Пример 4. Доказать, что функция $y = \log_2\left(x^2 - 1\right)$ возрастает на промежутке $x > 1$.

Решение:

$y = \log_2(x^2 - 1)$ — область определения $x^2 - 1 > 0$; $x < -1$; $x > 1$, так как $x > 1$ — входит в область определения и основание логарифма $2 > 1$, то данная функция возрастает на промежутке $x > 1$.

Пример 5. Построить график функции, найти ее область определения и множество значений:

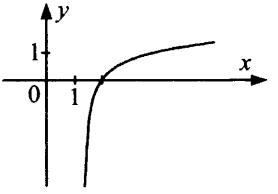
1) $y = \log_3(x-1)$; 2) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$;

3) $y = 1 + \log_3 x$; 4) $y = \log_{\frac{1}{3}} x - 1$;

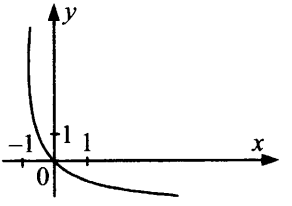
5) $y = 1 + \log_3\left(x-1\right)$.

Решение: Построим графики данных функций и по графикам найдем области определения и множества значений исходных функций.

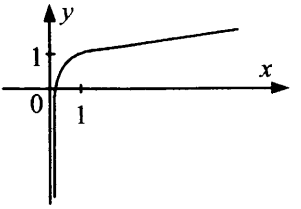
1) $y = \log_3(x-1)$ — область определения $x - 1 > 0$; $x > 1$; множество значений — множество $\mathbb{R}$.



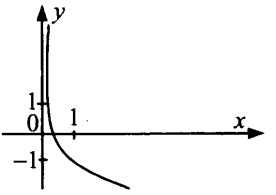
2) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$ — область определения $x + 1 > 0$; $x > -1$; множество значений — множество $\mathbb{R}$.



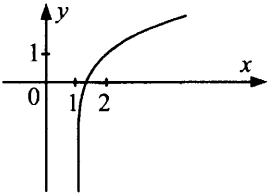
3) $y = 1 + \log_3 x$ — область определения $x > 0$; множество значений — множество $\mathbb{R}$.



4) $y = \log_{\frac{1}{3}} x - 1$ — область определения $x > 0$; множество значений — множество $\mathbb{R}$.



5) $y = 1 + \log_3 (x - 1)$ — область определения $x - 1 > 0$; $x > 1$; множество значений — множество $\mathbb{R}$.



О т в е т: 1) область определения $x > 1$; множество значений — множество $\mathbb{R}$;

2) область определения $x > -1$; множество значений — множество $\mathbb{R}$;

3) область определения $x > 0$;множество значений — множество $\mathbb{R}$;

4) область определения $x > 0$; множество значений — множество $\mathbb{R}$;

5) область определения $x > 1$; множество значений — множество $\mathbb{R}$.

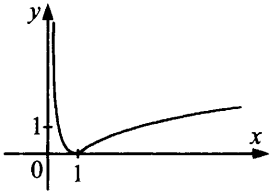
Пример 6. Построить график функции, найти ее область определения и множество значений, указать промежутки монотонности:

1) $y = |\log_3 x|$; 2) $y = \log_3 |x|$;

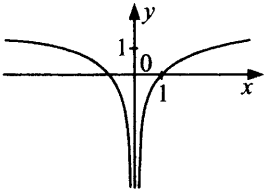
3) $y = \log_2 |3 - x|$; 4) $y = |1 - \log_2 x|$.

Решение: Построим графики данных функций и графически найдем требуемые в условии задачи ответы.

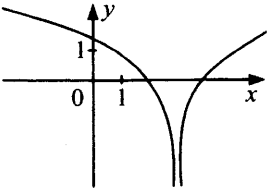
1) $y = |\log_3 x|$ — область определения — $x > 0$, множество значений $y \geq 0$; данная функция убывает при $0 < x \leq 1$, возрастает при $x > 1$.



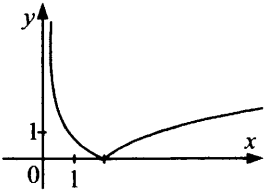
2) $y = \log_3 |x|$ — область определения — множество $\mathbb{R}$, кроме $x = 0$; множество значений — множество $\mathbb{R}$, данная функция убывает при $x < 0$, возрастает при $x > 0$.



3) $y = \log_2 |3 - x|$ — область определения — множество $\mathbb{R}$, кроме $x = 3$; множество значений — множество $\mathbb{R}$, данная функция убывает при $x < 3$, возрастает при $x > 3$.



4) $y = |1 - \log_2 x|$ — область определения — $x > 0$, множество значений — $y \geq 0$, данная функция убывает при $0 < x \leq 2$, возрастает при $x \geq 2$.



Ответ: 1) область определения— $x > 0$, множество значений $y \geq 0$; данная функция убывает при $0 < x \leq 1$, возрастает при $x > 1$;

2) область определения — множество $\mathbb{R}$, кроме $x = 0$; множество значений — множество $\mathbb{R}$, данная функция убывает при $x < 0$, возрастает при $x > 0$;

3) область определения — множество $\mathbb{R}$, кроме $x = 3$; множество значений — множество $\mathbb{R}$, данная функция убывает при $x < 3$ возрастает при $x > 3$;

4) область определения — $x > 0$; множество значений — $y \geq 0$, данная функция убывает при $0 < x \leq 2$, возрастает при $x \geq 2$.

3.2. Производная функции

Определение. Пусть некоторая функция $f(x)$ определена на некотором промежутке I, x_0 — точка этого промежутка, число $h \neq 0$ таково, что $x_0 + h$ также принадлежит промежутку I. Тогда *производной функции* $f(x)$ *в точке* x_0

называется предел разностного отношения $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ при $h \to 0$ (если этот предел существует).

Производная функции $f(x)$ в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$.

Если функция $f(x)$ имеет производную в некоторой точке x_0, то данная функция называется *дифференцируемой в этой точке.*

Если функция $f(x)$ имеет производную во всех точках некоторого промежутка, то данная функция называется *дифференцируемой на этом промежутке.*

Геометрический смысл производной некоторой дифференцируемой функции заключается в том, что значение производной функции в некоторой точке равняется угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику этой функции в данной точке.

Уравнение касательной к графику функции $f(x)$, дифференцируемой в точке x_0, имеет вид $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Производные элементарных функций

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$y = c$	$y' = 0$	$y = ax + b$	$y' = a$
$y = x^2$	$y' = 2x$	$y = x^3$	$y' = 3x^2$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$

Если в точке x существуют производные функций $u(x), v(x)$, то справедливы соотношения:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'; \quad (u \cdot v)' = u'v + uv'; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

Пример 1. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = x^3, x_0 = 1$; 2) $f(x) = \sin x, x_0 = \frac{\pi}{4}$;

3) $f(x) = \ln x, x_0 = 1$; 4) $f(x) = e^x, x_0 = \ln 3$.

Решение: Пользуясь геометрическим смыслом производной функции, найдем искомые угловые коэффициенты касательных:

1) $f'(x) = 3x^2$; $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) = 3 \cdot 1^2 = 3$;

2) $f'(x) = \cos x$; $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $f'(x) = \frac{1}{x}$; $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) = \frac{1}{1} = 1$;

4) $f'(x) = e^x$; $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) = e^{\ln 3} = 3$.

О т в е т: 1) 3; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) 1; 4) 3.

Пример 2. Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = 0$:

1) $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$; 2) $f(x) = \sin 2x - \ln(x+1)$.

Решение: Пользуемся известным нам уравнением касательной к графику функции в данной точке:

1) $f(0) = 0 + \frac{1}{0+1} = 1, f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}, f'(0) = 1 - \frac{1}{(0+1)^2} = 0,$

$y = 0 \cdot (x - 0) + 1, \quad y = 1;$

2) $f(0) = \sin 0 - \ln 1 = 0 \qquad f'(x) = 2\cos 2x - \frac{1}{x+1},$

$f'(0) = 2\cos 0 - \frac{1}{1} = 1, \qquad y = 0 + 1 \cdot (x - 0), \qquad y = x.$

О т в е т: 1) $y = 1$; 2) $y = x$.

Пример 3. Найти точки графика функции $y = f(x)$, в которых касательная к этому графику параллельна прямой $y = kx$:

1) $f(x) = e^x + e^{-x}, k = \frac{3}{2}$; 2) $f(x) = \sqrt{3x+1}, k = \frac{3}{4}$;

3) $f(x) = \sin 2x, k = 2$; 4) $f(x) = x + \sin x, k = 0$.

Решение: Найдем угловые коэффициенты касательных к графикам данных функций и приравняем их к исходным (тогда касательная будет параллельна данной прямой). Далее решим полученное уравнение.

1) $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x); f'(x) = e^x - e^{-x}, f'(x) = \frac{3}{2}$, т.е. $e^x - e^{-x} = \frac{3}{2}$, $2e^{2x} - 3e^x - 2 = 0$ — это квадратное уравнение относительно e^x, $D = 9 + 16 = 25; e^x = \frac{3 \pm 5}{4} = 2 \Rightarrow x = \ln 2, e^x = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$, но $e^x > 0$;

$f(\ln 2) = e^{\ln 2} + e^{-\ln 2} = 2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$, искомая точка: $\left(\ln 2; 2\frac{1}{2}\right)$.

2) $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x)$; $f'(x) = \frac{1 \cdot 3}{2\sqrt{3x+1}}; f'(x) = \frac{3}{4}$,

т.е. $\frac{3}{2\sqrt{3x+1}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \sqrt{3x+1} = 2$,

$3x + 1 = 4, x = 1$ $f(1) = \sqrt{3 \cdot 1 + 1} = 2$ искомая точка (1,2).

3) $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x), f'(x) = 2\cos 2x, f'(x) = 2$, тогда $2\cos 2x = 2$, $\cos 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$, $\sin(2\pi n) = 0$, искомые точки: $(\pi n; 0), n \in \mathbb{Z}$.

4) $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x), f'(x) = 1 + \cos x, f'(x) = 0$, т.е. $1 + \cos x = 0$, $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $f(\pi + 2\pi n) = \pi + 2\pi n + \sin(\pi + 2\pi n) = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; искомые точки: $(\pi + 2\pi n; \pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$.

О т в е т: 1) $\left(\ln 2; 2\frac{1}{2}\right)$; 2) (1,2); 3) $(\pi n; 0), n \in \mathbb{Z}$;

4) $(\pi + 2\pi n; \pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$.

Физический смысл производной заключается в том, что производная от координаты по времени есть скорость (при

движении материальной точки, заданном координатным законом движения).

Пример 4. Определить скорость тела, движущегося по закону $s(t) = t^2 + 2$, в момент времени:

1) $t = 5$; 2) $t = 10$.

Решение: Пользуясь физическим смыслом производной, решим данный пример:

$s(t) = t^2 + 2$. Найдем $v(t)$:

1) $s(t + h) - s(t) = (t + h)^2 + 2 - t^2 - 2 = t^2 + 2th + h^2 + 2 - t^2 - 2 = 2th + h^2$;

2) $v_{ср} = \dfrac{s(t+h)-s(t)}{h} = \dfrac{2th + h^2}{h} = 2t + h$;

3) $v(t) = \lim\limits_{h \to 0} v_{ср} = \lim\limits_{h \to 0} (2t + h) = 2t$.

1) $t = 5$, $v(5) = 2 \cdot 5 = 10$; 2) $t = 10$, $v(10) = 2 \cdot 10 = 20$.

О т в е т: 1) 10; 2) 20.

Пример 5. Найти производную функции:

1) $x^2 + \dfrac{1}{x^3}$; 2) $x^3 + \dfrac{1}{x^2}$;

3) $2\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}$; 4) $3\sqrt[6]{x} + 7\sqrt[14]{x}$.

Решение: Пользуясь тем, что производная суммы двух функций есть сумма производных этих функций, решим этот пример:

1) $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^3}\right)' = 2x - \dfrac{3}{x^4}$;

2) $\left(x^3 + \dfrac{1}{x^2}\right)' = 3x^2 - \dfrac{2}{x^3}$;

3) $\left(2\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}\right)' = 2 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{4}} - \dfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt[4]{x^3}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

4) $\left(3\sqrt[6]{x} - 7\sqrt[14]{x}\right)' = 3 \cdot \dfrac{1}{6} \cdot x^{-\frac{5}{6}} + 7 \cdot \dfrac{1}{14} \cdot x^{-\frac{13}{14}} = \dfrac{1}{2\sqrt[6]{x^5}} + \dfrac{1}{2\sqrt[14]{x^{13}}}$.

О т в е т: 1) $2x - \dfrac{3}{x^4}$; 2) $3x^2 - \dfrac{2}{x^3}$;

3) $\dfrac{1}{2\sqrt[4]{x^3}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; 4) $\dfrac{1}{2\sqrt[6]{x^5}} + \dfrac{1}{2\sqrt[14]{x^{13}}}$.

Пример 6. Найти производную функции:

1) $(x^2-x)(x^3+x)$; 2) $(x+2)\sqrt[3]{x}$; 3) $(x-1)\sqrt{x}$.

Решение: Пользуясь формулой для производной произведения двух функций, получим:

1) $((x^2-x)(x^3+x))' = (x^2-x)'(x^3+x) + (x^2-x)(x^3+x)' =$
$= (2x-1)(x^3+x) + (x^2-x)(3x^2+1) = 2x^4 + 2x^2 - x^3 - x + 3x^4 + x^2 -$
$- 3x^3 - x = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x;$

2) $\left((x+2)\sqrt[3]{x}\right)' = (x+2)'\sqrt[3]{x} + (x+2)\left(\sqrt[3]{x}\right)' = 1\cdot\sqrt[3]{x} +$

$+(x+2)\cdot\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{x} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{4\sqrt[3]{x}}{3} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{4x+2}{3\sqrt[3]{x^2}};$

3) $\left((x-1)\sqrt{x}\right)' = (x-1)'\sqrt{x} + (x-1)\left(\sqrt{x}\right)' =$

$= 1\cdot\sqrt{x} + (x-1)\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}.$

Ответ: 1) $5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x$; 2) $\frac{4x+2}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 3) $\frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$.

Пример 7. Найти производную функции:

1) $\frac{x^5+x^3+x}{x+1}$; 2) $\frac{\sqrt{x}+x^2+1}{x-1}$.

Решение: Пользуясь формулой для производной частного двух функций, получим:

1) $\left(\frac{x^5+x^3+x}{x+1}\right)' = \frac{\left(x^5+x^3+x\right)'(x+1) - \left(x^5+x^3+x\right)(x+1)'}{(x+1)^2} =$

$= \frac{\left(5x^4+3x^2+1\right)(x+1) - \left(x^5+x^3+x\right)\cdot 1}{(x+1)^2} =$

$= \frac{5x^5+3x^3+x+5x^4+3x^2+1-x^5-x^3-x}{(x+1)^2} =$

$= \frac{4x^5+5x^4+2x^3+3x^2+1}{(x+1)^2}.$

$$2)\left(\frac{\sqrt{x}+x^2+1}{x-1}\right)'=\frac{\left(\sqrt{x}+x^2+1\right)'(x-1)-\left(\sqrt{x}+x^2+1\right)(x-1)'}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+2x\right)(x-1)-\left(\sqrt{x}+x^2+1\right)\cdot 1}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}+2x^2-\frac{1}{2\sqrt{x}}-2x-\sqrt{x}-x^2-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}-1}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{2x^2\sqrt{x}-4x\sqrt{x}-x-2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}.$$

Ответ: 1) $\dfrac{4x^5+5x^4+2x^3+3x^2+1}{(x+1)^2}$;

2) $\dfrac{2x^2\sqrt{x}-4x\sqrt{x}-x-2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$.

Производная функции вида $y=f(ax+b)$ равна $y'=af'(ax+b)$.

Функция вида $f(g(x))$ называется *сложной* функцией.

Производная сложной функции находится по формуле:

$$y'=f(g(x))'=f'(g(x))\cdot g'(x).$$

Пример 8. Найдите производную функции:

1) $y=(4x-9)^7$; 2) $y=\left(\dfrac{x}{3}+2\right)^{12}$;

3) $y=(5x+1)^9$; 4) $y=\left(\dfrac{x}{4}-2\right)^{14}$.

Решение: Пользуясь формулой для производной функции вида $y=f(ax+b)$, найдем производные данных функций:

1) $y=(4x-9)^7$, $y'=7(4x-9)^6\cdot 4=28(4x-9)^6$;

2) $y=\left(\dfrac{x}{3}+2\right)^{12}$, $y'=12\left(\dfrac{x}{3}+2\right)^{11}\cdot\dfrac{1}{3}=4\left(\dfrac{x}{3}+2\right)^{11}$.

3) $y = (5x + 1)^9$, $y' = 45(5x + 1)^8$;

4) $y = \left(\frac{x}{4} - 2\right)^{14}$, $y' = \frac{7}{2}\left(\frac{x}{4} - 2\right)^{13}$.

Ответ: 1) $28(4x - 9)^6$; 2) $4\left(\frac{x}{3} + 2\right)^{11}$;

3) $45(5x + 1)^8$; 4) $\frac{7}{2}\left(\frac{x}{4} - 2\right)^{13}$.

Пример 9. Найдите производную функции:

1) $y = \cos(5x + 9)$; 2) $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)$;

3) $y = \cos(9x - 10)$; 4) $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

Решение: Решение аналогично решению примера 8.

1) $y = \cos(5x + 9)$, $y' = -5\sin(5x + 9)$;

2) $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)$, $y' = 4\sin\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)$;

3) $y = \cos(9x - 10)$, $y' = -9\sin(9x - 10)$;

4) $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$; $y' = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

Ответ: 1) $-5\sin(5x + 9)$; 2) $4\sin\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)$;

3) $-9\sin(9x - 10)$; 4) $\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

3.3. Исследование функций с помощью производной

Нахождение промежутков монотонности функции

Если $f'(x) > 0$ на некотором промежутке, то функция возрастает на этом промежутке.

Если $f'(x) < 0$ на некотором промежутке, то функция убывает на этом промежутке.

Пример 1. Найти интервалы возрастания и убывания функции:

1) $y = \frac{1}{x+2}$; 2) $y = 1 + \frac{2}{x}$;

3) $y = -\sqrt{x-3}$; 4) $y = 1 + 3\sqrt{x-5}$.

Решение:

1) $y' = -\frac{1}{(x+2)^2}$, $x \neq -2$, $y' > 0$: $-\frac{1}{(x+2)^2} > 0$ — не выполняется ни при каких $x \in \mathbb{R}$, так как $(x + 2)^2 > 0$; $y' < 0$: $-\frac{1}{(x+2)^2} < 0$ — выполняется при всех $x \in \mathbb{R}$, исключая $x = -2$, функция убывает при $x < -2$, $x > -2$;

2) $y' = -\frac{2}{x^2}$, $x \neq 0$, $y' > 0$: $-\frac{2}{x^2} > 0$ — не выполняется ни при каких $x \in \mathbb{R}$, так как $x^2 > 0$; $y' < 0$: $-\frac{2}{x^2} < 0$ — выполняется при всех $x \in \mathbb{R}$, исключая $x = 0$, функция убывает при $x < 0$, $x > 0$;

3) $y' = -\frac{1}{2\sqrt{x-3}}$, $x > 3$, $y' > 0$: $-\frac{1}{2\sqrt{x-3}} > 0$ — не выполняется ни при каких $x \in \mathbb{R}$, так как $\sqrt{x-3} > 0$; $y' < 0$: $-\frac{1}{2\sqrt{x-3}} < 0$ — выполняется при всех $x > 3$, функция убывает при $x > 3$;

4) $y' = \frac{3}{2\sqrt{x-5}}$, $x > 5$, $y' > 0$: $\frac{3}{2\sqrt{x-5}} > 0$ — выполняется при всех $x > 5$; $y' < 0$: $\frac{3}{2\sqrt{x-5}} < 0$ — не выполняется ни при каких $x \in \mathbb{R}$, так как $\sqrt{x-5} > 0$; функция возрастает при $x > 5$.

Ответ: 1) функция убывает при $x < -2$, $x > -2$;

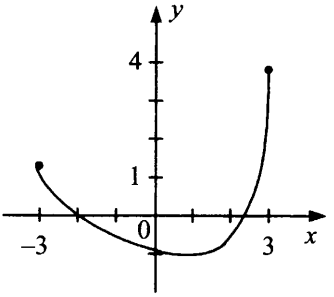
2) функция убывает при $x < 0$, $x > 0$;

3) функция убывает при $x > 3$;

4) функция возрастает при $x > 5$.

Пример 2. Изобразить эскиз графика непрерывной функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[a; b]$, если $a = -3$, $b = 3$, $f(-3) = 1$, $f(3) = 4$, $f(2) < 0$, $f'(2) = 0$, $f'(x) < 0$ при $-3 < x < 2$, $f'(x) > 0$ при $2 < x < 3$.

Решение:



Нахождение экстремумов функции, наибольшего и наименьшего значений функции

Определение. Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что при всех $x \neq x_0$ из этой окрестности $f(x) < f(x_0)$.

Определение. Точка x_0 называется *точкой минимума* функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что при всех $x \neq x_0$ из этой окрестности $f(x) > f(x_0)$.

Точки максимума и минимума функции в совокупности называются *точками экстремума* этой функции.

Теорема. Пусть $f(x)$ — дифференцируемая функция, тогда если x_0 — точка экстремума этой функции, то $f'(x_0) = 0$.

Те точки, в которых производная функции равна нулю, называются стационарными.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b), $x_0 \in (a, b)$ и $f'(x_0) = 0$. Тогда:

1) если при переходе через точку x_0 функции $f(x)$ ее производная меняет знак с «+» на «–», то x_0 — точка максимума функции $f(x)$.

2) если при переходе через точку x_0 функции $f(x)$ ее производная меняет знак с «–» на «+», то x_0 — точка минимума функции $f(x)$.

Пример 1. Определите промежутки монотонности и точки экстремума функции:

1) $y = \sin x - \frac{1}{2}x$; 2) $y = \frac{x}{2} - \cos x$;

3) $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \cos x$.

Решение: Пользуясь сформулированными выше свойствами, имеем:

1) $y = \sin x - \frac{1}{2}x$, $y' = \cos x - \frac{1}{2}$, $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$;

$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ – min; $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ – max; y возрастает при $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right]$, убывает: $x \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right]$.

2) $y = \frac{x}{2} - \cos x$; $y' = \frac{1}{2} + \sin x$; $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$;

$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ – min; $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$ – max;

возрастает: $x \in \left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right]$,

убывает: $x \in \left[\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right]$.

3) $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \cos x$; $y' = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x$; $x = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k$;

$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ – max; $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ – min;

убывает: $x \in \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right]$;

возрастает: $x \in \left[\frac{3\pi}{4}+2\pi n; \frac{9\pi}{4}+2\pi n\right]$.

Ответ: 1) $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$ – min; $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n$ – max;

возрастает: $x \in \left[-\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi n\right]$,

убывает: $x \in \left[\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right]$.

2) $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n$ – min; $x=\frac{7\pi}{6}+2\pi n$ – max;

возрастает: $x \in \left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right]$,

убывает: $x \in \left[\frac{7\pi}{6}+2\pi n; \frac{11\pi}{6}+2\pi n\right]$.

3) $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$ – max; $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n$ – min;

возрастает: $x \in \left[\frac{3\pi}{4}+2\pi n; \frac{9\pi}{4}+2\pi n\right]$,

убывает: $x \in \left[\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right]$.

Пример 2. Определите промежутки монотонности и точки экстремума функции: $y=\left|x^3-3x\right|$.

Решение: Решение данного примера полностью аналогично решению предыдущего примера.

1) $y=\left|x^3-3x\right|$, $y=\left|x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)\right|$

1) $x \in \left[-\sqrt{3}; 0\right] \cup \left[\sqrt{3}; +\infty\right)$, $y'=3x^2-3$, $x=\pm 1$,

возрастает: $(-\sqrt{3}; -1] \cup \left[\sqrt{3}; +\infty\right)$, убывает: $[-1; 0]$,

$x=-1$ — max;

2) $x \in \left(-\infty; -\sqrt{3}\right] \cup \left[0; \sqrt{3}\right]$, $y=3x-x^3$, $y'=3-3x^2$, $x=\pm 1$,

возрастает: $[0;1]$, убывает: $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right]\cup\left[1;+\sqrt{3}\right)$,

$x=1$ – max.

Ответ: $x\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right]\cup[-1;0]\cup\left[1;\sqrt{3}\right]$ — убывает,

$x\in\left[-\sqrt{3};-1\right]\cup[0;1]\cup\left[\sqrt{3};+\infty\right)$ — возрастает,

$x=\pm\sqrt{3}, x=0$ – min, $x=\pm1$ — max.

Построение графиков функций

Для построения графика некоторой функции сначала нужно исследовать свойства функции при помощи ее производной и затем, используя эти свойства, построить график исходной функции.

Для построения графика четной (нечетной) функции достаточно исследовать свойства этой функции и построить ее график при $x > 0$, а затем симметрично отразить график функции относительно оси ординат (начала координат соответственно).

Пример 1. Построить график функции:

1) $y = x^3 - 3x^2 + 4$;

2) $y = 2 + 3x - x^3$;

3) $y = -x^3 + 4x^2 - 4x$.

Решение:

1) $y = x^3 - 3x^2 + 4$;

1. Область определения — множество R;

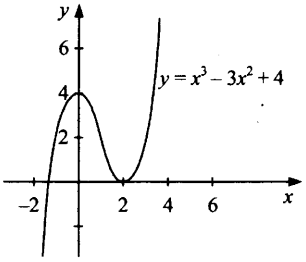
2. $y' = 3x^2 - 6x$;

3. $y' = 0$, $3x(x-2) = 0$, $x = 0$, $x = 2$;

4. $y' > 0$, $x < 0$, $x > 2$ — возрастает; $y' < 0$, $0 < x < 2$ — убывает;

5. $x = 0$ – точка max, так как при переходе через нее меняется знак y' с «+» на «–». $y(0) = 4$, $x = 2$ – точка min, так как при переходе через нее меняется знак y' с «–» на «+». $y(2) = 8 - 12 + 4 = 0$.

x	$x<0$	0	$0<x<2$	2	$x>2$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗



2) $y = 2 + 3x - x^3$;

1. Область определения — множество $\mathbb{R}$;

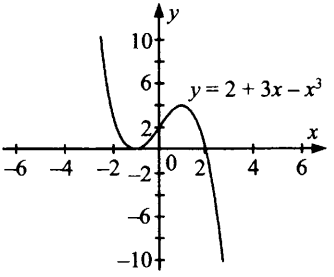
2. $y' = 3 - 3x^2$;

3. $y' = 0$; $3(1 - x^2) = 0$; $x^2 - 1 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = -1$;

4. $y' > 0$; $x^2 < 1$; $-1 < x < 1$; $y' < 0$; $x^2 > 1$; $x < -1$; $x > 1$;

5. $x = -1$ — точка минимума $f(-1) = 2 - 3 + 1 = 0$, $x = 1$ — точка максимума $f(1) = 2 + 3 - 1 = 4$.

x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	↘	0	↗	4	↘



3) $y = -x^3 + 4x^2 - 4x$;

1. Область определения — $\mathbb{R}$;

2. $y' = -3x^2 + 8x - 4$;

3. $y' = 0$; $3x^2 - 8x + 4 = 0$, $\frac{D}{4} = 16 - 12 = 4$;

$x_1 = \frac{4+2}{3} = 2$, $x_2 = \frac{4-2}{3} = \frac{2}{3}$;

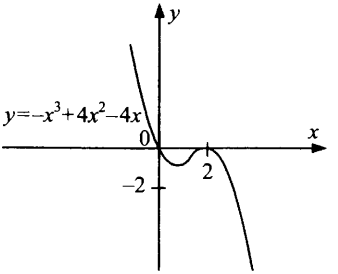
4. $y' > 0;\ 3x^2 - 8x + 4 < 0,\ \frac{2}{3} < x < 2,$

$y' < 0;\ 3x^2 - 8x + 4 > 0,\ x < \frac{2}{3},\ x > 2;$

5. $x = \frac{2}{3}$ — точка min $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27} + \frac{16}{9} - \frac{8}{3} = -\frac{32}{27}$,

$x = 2$ – точка max $f(2) = -8 + 16 - 8 = 0$.

x	$x < \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} < x < 2$	2	$x > 2$
$f'(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	↘	$-\frac{32}{27}$	↗	0	↘



Пример 2. Построить график функции:

1) $y = 3x^5 - 5x^3$;

2) $y = 4x^5 - 5x^4$;

3) $y = \frac{1}{10}x^5 - \frac{5}{6}x^3 + 2x$.

Решение:

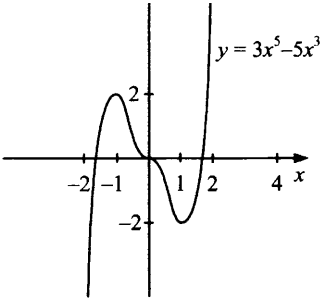
1) $y = 3x^5 - 5x^3$;

1. Область определения – $\mathbb{R}$;

2. $y' = 15x^4 - 15x^2$;

$y' = 0;\ 15x^2(x^2 - 1) = 0,\ x = 0,\ x = \pm 1.$

x	$x<-1$	-1	$-1<x<0$	0	$0<x<1$	1	$x>1$
$f'(x)$	+	0	–	0	–	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	0	↘	–2	↗
		max				min	

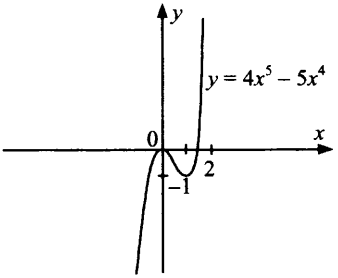


2) $y = 4x^5 - 5x^4$;

1. Область определения — $\mathbb{R}$; 2. $y' = 20x^4 - 20x^3$;

$y' = 0$; $20x^3(x-1) = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

x	$x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	–1	↗
		max		min	



3) $y = \frac{1}{10}x^5 - \frac{5}{6}x^3 + 2x$;

1. Область определения — $\mathbb{R}$;

2. $y' = \frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + 2$, $y' = 0$;

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, $D = 25 - 16 = 9$,

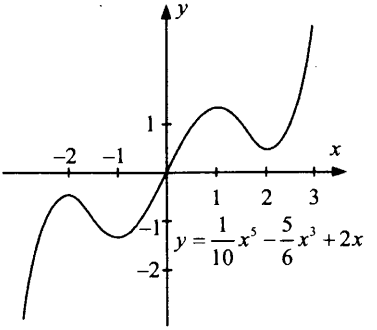
$x^2 = \frac{5+3}{2} = 4$, $x = \pm 2$;

$x^2 = \frac{5-3}{2} = 1$, $x = \pm 1$,

$y(-x) = -\frac{1}{10}x^5 + \frac{5}{6}x^3 - 2x = -y(x)$ — нечетная функция, симметричная относительно начала координат.

Продолжим рассуждение на (0; +∞)

x	0	(0; 1)	1	(1; 2)	2	(2; +∞)
$f'(x)$	+	+	0	–	0	+
$f(x)$	0	↗	$\frac{19}{15}$	↘	$\frac{8}{15}$	↗
			max		min	



3.4. Первообразная

Определение. Пусть на некотором промежутке выполняется $F'(x) = f(x)$, тогда функция $y = F(x)$ называется *первообразной* для функции $y = f(x)$.

Теорема 1. Пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на некотором промежутке, тогда функция $F(x) + C$ тоже является первообразной для $f(x)$ на том же промежутке, где C — произвольная константа.

Теорема 2. Пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, $G(x)$ — для $g(x)$, тогда $F(x) + G(x)$ — первообразная для $f(x) + g(x)$.

Пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, k — константа, тогда $kF(x)$ — первообразная для $kf(x)$.

Пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, k, b — константы, $k \neq 0$, тогда $\frac{1}{k}F(kx + b)$ — первообразная для $f(kx + b)$.

Первообразные элементарных функций

$f(x)$	$F(x)$
0	C
1	$x+C$
x	$\frac{x^2}{2}+C$
$x^n,\ n\neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$
$\frac{1}{x},\ x>0$	$\ln x+C$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+C$
e^x	e^x+C
$\sin x$	$-\cos x+C$
$\cos x$	$\sin x+C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x+C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x+C$

Пример 1. Найти все первообразные функции:

1) $\sin(2x+3)$; 2) $\cos(3x+4)$;

3) $\cos\left(\frac{x}{2}-1\right)$; 4) $\sin\left(\frac{x}{4}+5\right)$;

5) $e^{\frac{x+1}{2}}$; 6) e^{3x-5}; 7) $\frac{1}{2x}$; 8) $\frac{1}{3x-1}$.

Решение: Пользуясь таблицей первообразных элементарных функций и свойствами первообразных, получим:

1) $f(x)=\sin(2x+3)$, тогда

$$F(x)=\frac{1}{2}\left(-\cos\left(2x+3\right)\right)+C=-\frac{\cos\left(2x+3\right)}{2}+C;$$

2) $f(x)=\cos(3x+4)$, тогда $F(x)=\frac{1}{3}\sin\left(3x+4\right)+C$;

3) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} - 1\right)$, тогда $F(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2} - 1\right) + C$;

4) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{5} + 5\right)$, тогда $F(x) = -4\cos\left(\frac{x}{4} + 5\right) + C$;

5) $f(x) = e^{\frac{x+1}{2}}$, тогда $F(x) = 2e^{\frac{x+1}{2}} + C$;

6) $f(x) = e^{3x-5}$, тогда $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x-5} + C$;

7) $f(x) = \frac{1}{2x}$, тогда $F(x) = \frac{1}{2}\ln 2x + C$;

8) $f(x) = \frac{1}{3x-1}$, тогда $F(x) = \frac{1}{3}\ln(3x - 1) + C$.

Ответ: 1) $-\frac{\cos(2x+3)}{2} + C$; 2) $\frac{1}{3}\sin(3x+4) + C$;

3) $2\sin\left(\frac{x}{2} - 1\right) + C$; 4) $-4\cos\left(\frac{x}{4} + 5\right) + C$;

5) $2e^{\frac{x+1}{2}} + C$; 6) $\frac{1}{3}e^{3x-5} + C$;

7) $\frac{1}{2}\ln 2x + C$; 8) $\frac{1}{3}\ln(3x - 1) + C$.

Пример 2. Найти одну из первообразных функции:

1) $e^{2x} - \cos 3x$; 2) $e^{\frac{x}{4}} + \sin 2x$;

3) $2\sin\frac{x}{5} - 5e^{2x+\frac{1}{3}}$; 4) $3\cos\frac{x}{7} + 2e^{3x-\frac{1}{2}}$;

5) $\sqrt{\frac{x}{5}} + 4\sin(4x+2)$; 6) $\frac{4}{\sqrt{3x+1}} - \frac{3}{2x-5}$.

Решение: Данный пример решается аналогично предыдущему с тем лишь отличием, что константу C можно опустить.

1) $f(x) = e^{2x} - \cos 3x$, тогда $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{3}\sin 3x$;

2) $f(x) = e^{\frac{x}{4}} + \sin 2x$, тогда $F(x) = 4e^{\frac{x}{4}} - \frac{1}{2}\cos 2x$;

3) $f(x) = 2\sin\frac{x}{5} - 5e^{2x+\frac{1}{3}}$, тогда $F(x) = -10\cos\frac{x}{5} - \frac{5}{2}e^{2x+\frac{1}{3}}$;

4) $f(x) = 3\cos\frac{x}{7} + 2e^{3x-\frac{1}{2}}$, тогда $F(x) = 21\sin\frac{x}{7} + \frac{2}{3}e^{3x-\frac{1}{2}}$;

5) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{5}} + 4\sin(4x+2)$, тогда

$$F(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{5}\cdot\frac{3}{2}} - \frac{4}{4}\cos(4x+2) = \frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{5}} - \cos(4x+2);$$

6) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{3x+1}} - \frac{3}{2x-5}$, тогда

$$F(x) = \frac{4\cdot(3x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\cdot 3} - \frac{3\cdot\ln(2x-5)}{2} = \frac{8}{3}\sqrt{3x+1} - \frac{3}{2}\ln(2x-5).$$

Ответ: 1) $\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{3}\sin 3x$; 2) $4e^{\frac{x}{4}} - \frac{1}{2}\cos 2x$;

3) $-10\cos\frac{x}{5} - \frac{5}{2}e^{2x+\frac{1}{3}}$; 4) $21\sin\frac{x}{7} + \frac{2}{3}e^{3x-\frac{1}{2}}$;

5) $\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{5}} - \cos(4x+2)$; 6) $\frac{8}{3}\sqrt{3x+1} - \frac{3}{2}\ln(2x-5)$.

Пример 3. Найти одну из первообразных функции:

1) $\sin x\cos x$;

2) $\sin x\cos 3x - \cos x\sin 3x$.

Решение:

1) $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$, тогда $F(x) = -\frac{1}{4}\cos 2x$;

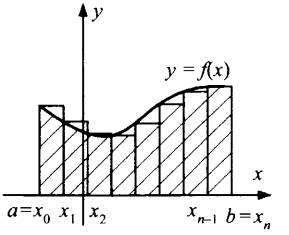
2) $f(x) = \sin(x - 3x) = -\sin 2x$, тогда $F(x) = \frac{1}{2}\cos 2x$.

Ответ: 1) $-\frac{1}{4}\cos 2x$; 2) $\frac{1}{2}\cos 2x$.

Пусть нам необходимо найти площадь фигуры, ограниченной графиком $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$. Для простоты предполагаем, что $f(x) > 0$ на $[a; b]$.

Разобьем отрезок $[a; b]$ на n равных частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. На каждом из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ построим прямоугольник высоты $f(x_{k-1})$. Сумма площадей всех прямоугольников:

$$\Sigma(a,b) = \frac{b-a}{n} \cdot \left(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) \right).$$



При неограниченном увеличении n существует предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} \Sigma(a,b)$, который является искомой площадью. Этот предел называется определенным интегралом $f(x)$ от a до b и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$.

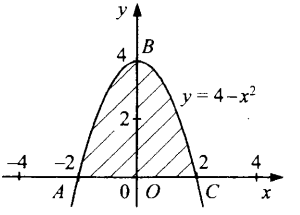
Теорема 1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то справедлива формула: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ — первообразная для $f(x)$. Это формула Ньютона–Лейбница.

Пример 4. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью Ox и параболой:

1) $y = 4 - x^2$;
2) $y = 1 - x^2$;
3) $y = -x^2 + 4x - 3$.

Решение:

1) $y = 4 - x^2$;



S_{ABC} — искомая площадь криволинейной трапеции;

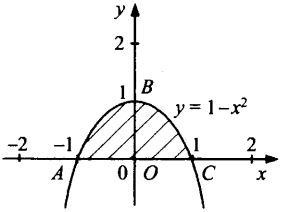
1) $4 - x^2 = 0, x = \pm 2, a = -2,$

$b = 2;$

2) $S_{ABC} = \int\limits_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-2}^{2} = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} =$

$= 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3};$

2) $y = 1 - x^2;$



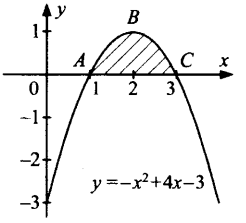
S_{ABC} — искомая площадь криволинейной трапеции;

1) $1 - x^2 = 0,$

$x = \pm 1, a = -1, b = 1;$

2) $S_{ABC} = \int\limits_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = 2 - \frac{2}{3} = 1\frac{1}{3};$

3) $y = -x^2 + 4x - 3,$



S_{ABC} — искомая площадь криволинейной трапеции;

1) $-x^2 + 4x - 3 = 0,$

$x^2 - 4x + 3 = 0;$

$D/4 = 4 - 3 = 1;$

$x_1 = 3, x_2 = 1, a = 1, b = 3;$

2) $S_{ABC} = \int_1^3 \left(-x^2 + 4x - 3\right) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 3x \right)\Big|_1^3 = -9 + 18 - 9 +$

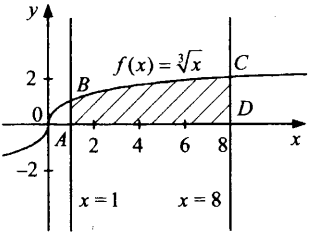
$+ \frac{1}{3} - 2 + 3 = 1\frac{1}{3}$.

Ответ: 1) $10\frac{2}{3}$; 2) $1\frac{1}{3}$; 3) $1\frac{1}{3}$.

Пример 5. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, осью Ox и графиком функции $y = f(x)$:

1) $a = 1$, $b = 8$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$;

2) $a = 4$, $b = 9$, $f(x) = \sqrt{x}$.



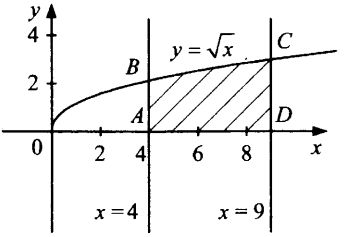
Решение:

1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 1$, $b = 8$,

S_{ABCD} — искомая площадь криволинейной трапеции,

$$S_{ABCD} = \int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx = \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4}\Big|_1^8 = \frac{3}{4}(16 - 1) = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4};$$

2) $f(x) = \sqrt{x}$ $a = 4$, $b = 9$,



S_{ABCD} — искомая площадь криволинейной трапеции;

$$S_{ABCD} = \int_4^9 \sqrt{x}\,dx = \frac{2x\sqrt{x}}{3}\Big|_4^9 = \frac{2}{3}(27 - 8) = \frac{38}{3} = 12\frac{2}{3}.$$

Ответ: 1) $11\frac{1}{4}$; 2) $12\frac{2}{3}$.

4. ЧИСЛА И ВЫЧИСЛЕНИЯ

4.1. Проценты

Определение. *Процентом числа a* называется сотая его часть.

Простой процентный рост: $S_n = \left(1 + \frac{pn}{100}\right) S$, где S — начальная сумма вклада, p % — месячный процент, n — число месяцев.

Сложный процентный рост: $S_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n S$.

Пример 1. Сумма в 1 тыс. руб. уменьшается ежемесячно на 5% от первоначальной суммы. Через сколько месяцев эта сумма сократится до: 1) 750 руб.; 2) 500 руб.; 3) 250 руб.; 4) 50 руб.?

Решение: Данный пример на простой процентный рост.

$S_n = \left(1 + \frac{pn}{100}\right) S$; $S_n = S + \frac{pnS}{100}$; $S_n - S = \frac{pnS}{100}$;

$n = \frac{(S_n - S) \cdot 100}{pS}$. Далее по условию: p % = 5 % от 1000 руб. составляют $\frac{1000 \cdot 5}{100} = 50$ р. На эту величину сумма в 1000 р. ежемесячно уменьшается, следовательно в формуле ее надо взять со знаком «–». Имеем

1) $\frac{(750 - 1000) \cdot 100}{-50 \cdot 1000} = \frac{(1000 - 750) \cdot 100}{5 \cdot 1000} = 5$ (мес.);

2) $\frac{(1000 - 500) \cdot 100}{5 \cdot 1000} = 10$ (мес.);

3) $\frac{(1000 - 250) \cdot 100}{5 \cdot 1000} = 15$ (мес.);

4) $\frac{(1000 - 50) \cdot 100}{5 \cdot 1000} = 19$ (мес.).

Ответ: через 5 мес.; через 10 мес.; через 15 мес.; через 19 мес.

Пример 2. Какая сумма будет на счете через 4 года, если на него положены 2000 руб. под 30 % годовых и ежегодно выплаты процентов добавляются к вкладу?

Решение: Данный пример — на сложный процентный рост.

$\left(1+\frac{30}{100}\right)^4 \cdot 2000 = 5712{,}2$ (руб.).

Ответ: 5712,2 (руб.).

4.2. Пропорции

Определение. *Пропорцией* называется верное равенство двух отношений. Пропорции записывают следующим образом: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Основное свойство пропорции: равенство $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ — является пропорцией тогда и только тогда, когда $ad = bc$.

Пример 1. Найдите такие значения x и y, чтобы каждое из двух равенств было верным:

1) $\frac{x}{y}=\frac{3}{8}$ и $\frac{y}{25}=\frac{6{,}4}{5}$;

2) $x : 1\frac{2}{3} = y : 3\frac{1}{3}$ и $y : 1{,}5 = 0{,}2 : 0{,}75$.

Решение:

1) $\frac{x}{y}=\frac{3}{8}$ и $\frac{y}{25}=\frac{6{,}4}{5}$;

$5y = 6{,}4 \cdot 25$;

$y = 6{,}4 \cdot 5 = 32$;

$\frac{x}{32}=\frac{3}{8}$;

$8x = 3 \cdot 32$;

$x = 12$.

Ответ: $x = 12, y = 32$.

2) $x : 1\frac{2}{3} = y : 3\frac{1}{3}$,

$y : 1{,}5 = 0{,}2 : 0{,}75$;

$0{,}75y = 1{,}5 \cdot 0{,}2$;

$y = 0{,}4$;

$x : 1\frac{2}{3} = 0{,}4 : 3\frac{1}{3}$;

$3\frac{1}{3}x = 1\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}$; $\frac{10}{3}x=\frac{2}{3}$, $x=\frac{1}{5}$.

Ответ: $x=\frac{1}{5}$, $y=\frac{2}{5}$.

Определение. Две величины называются *пропорциональными,* если при изменении одной из них в несколько раз другая изменяется в такое же количество раз.

Определение. Две величины называются *обратно пропорциональными,* если при увеличении одной из них в несколько раз другая уменьшается в такое же количество раз.

Пример 2. Какие из приведенных ниже формул являются прямой пропорциональностью, обратной пропорциональностью или не являются ни тем, ни другим:

1) $P = 5{,}2b$; 2) $a = 8q + 1$; 3) $K = \frac{n}{2}$; 4) $c = 4 : d$;

5) $a = \frac{8}{b}$; 6) $S = vt$; 7) $M = 10 : S$; 8) $ab = 18$;

9) $G = \frac{1}{4k}$; 10) $S = a^2$.

Решение: Прямая пропорциональность: 1, 3, 6.

Обратная пропорциональность: 4, 5, 7, 8, 9.

Не являются ни тем, ни другим: 2, 10.

4.3. Решение текстовых задач

Задачи на движение

Пример 1. Из пункта A в пункт B, расположенный в 24 км от A, одновременно отправились велосипедист и пешеход. Велосипедист прибыл в пункт B на 4 ч раньше пешехода. Известно, что если бы велосипедист ехал с меньшей на 4 км/ч скоростью, то на путь из A в B он затратил бы вдвое меньше времени, чем пешеход. Найдите скорость пешехода.

Решение:

Скорость велосипедиста	x
Скорость пешехода	y

$x; y > 0$;

$$\begin{cases}\dfrac{24}{y}-\dfrac{24}{x}=4,\\ \dfrac{24}{x-4}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{24}{y};\end{cases}\quad\begin{cases}24x-24y=4xy,\\ 2y=x-4;\end{cases}\quad\begin{cases}6x-6y=xy,\\ x=2y+4;\end{cases}$$

$6(2y+4)-6y=(2y+4)y;$

$12y+24-6y=2y^2+4y,\quad 2y^2-2y-24=0,\quad y^2-y-12=0;$

$y_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\dfrac{1\pm 7}{2};$

$y_1=\dfrac{1-7}{2}=-3$ — не удовлетворяет условию; $y=4, x=12.$

Ответ: 4 км/ч.

Пример 2. От пристани A отправились одновременно вниз по течению реки катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 км, затем повернул обратно и вернулся в A через 14 ч. Найдите скорость катера в стоячей воде и скорость течения реки, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 км от A.

Решение:

Заметим, что из условия задачи следует, что $x \neq y$.

	Скорость (км/ч)
Скорость реки	$x,\ x>0$
Собственная скорость катера	$y,\ y>0$
Скорость по течению	$y+x$
Скорость против течения	$y-x$

$$\begin{cases}\dfrac{96}{y+x}+\dfrac{96}{y-x}=14,\\ \dfrac{24}{x}=\dfrac{96}{(x+y)}+\dfrac{96-24}{y-x};\end{cases}\quad\begin{cases}\dfrac{96}{y+x}+\dfrac{96}{y-x}=14,\\ \dfrac{24}{x}+\dfrac{24}{y-x}=\dfrac{96}{x+y}+\dfrac{96}{y-x};\end{cases}$$

$$\frac{24(y-x)+24x}{x(y-x)}=14;\quad\begin{cases}24y=14x(y-x),\\ 96(y-x)+96(y+x)=14(y^2-x^2);\end{cases}$$

$$\begin{cases}24y=14x(y-x), & (1)\\ 192y=14(y-x)(y+x); & (2)\end{cases}$$

Разделим (2) на (1): $\frac{y+x}{x}=8$,

$y+x=8x;\ y=7x,\quad 24y=14x(y-x);\quad 24\cdot 7x=14x(7x-x);$

$24\cdot 7x=2\cdot 7\cdot 6x^2,\ 12x=6x^2,\ x\neq 0;$

$x=2,\qquad y=14.$

Ответ: 14 км/ч; 2 км/ч.

Пример 3. Из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно выезжают велосипедист и автобус. Время, затрачиваемое велосипедистом на проезд из A в B, на 2 ч 40 мин больше времени, которое тратит автобус на проезд из B в A, а сумма этих времен в $5\frac{1}{3}$ раза больше времени, прошедшего от начала движения велосипедиста и автобуса до момента их встречи. Какое время велосипедист затрачивает на проезд из A в B, а автобус — на проезд из B в A?

Решение:

	Скорость	**Время**
Велосипедист	x км/ч	a (ч)
Автобус	y км/ч	b (ч)

Путь — 1;

$$\begin{cases} a-b=2\frac{40}{60}, \\ a+b=5\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right); \end{cases} \quad \begin{cases} a=b+\frac{8}{3}, \\ (a+b)^2=\frac{16}{3}ab; \end{cases}$$

$$\left(2b+\frac{8}{3}\right)^2=\frac{16}{3}\left(b+\frac{8}{3}\right)b;$$

$$4b^2+\frac{32}{3}b+\frac{64}{9}=\frac{16}{3}b^2+\frac{128b}{9};$$

$36b^2+96b+64-48b^2-128b=0;$

$-12b^2-32b+64=0;\qquad 3b^2+8b-16=0;$

$$b=\frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{3}=\frac{-4\pm 8}{3};$$

$b_1 = -4$ — не удовлетворяет условию; $b = \frac{4}{3}$, $a = 4$.

Ответ: $\frac{4}{3}$ ч и 4 ч.

Задачи на работу

Пример 1. Двум землекопам было поручено вырыть канаву за 3 ч 36 мин. Однако первый приступил к работе тогда, когда второй уже вырыл треть канавы и перестал копать. В результате канава была вырыта за 8 ч. За сколько часов каждый землекоп может вырыть канаву один?

Решение:

	Вся канава	Производительность за 1 ч
I землекоп	x ч	$\frac{1}{x}$
II землекоп	y ч	$\frac{1}{y}$

Вся канава — 1;

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 3\frac{36}{60}=1, \\ \frac{x}{3}+\frac{2}{3}y=8; \end{cases} \quad \begin{cases} 36(x+y)=10xy, \\ x=24-2y; \end{cases}$$

$36(24 - y) = 10y(24 - 2y)$; $\quad 9(24 - y) = 5y(12 - y)$;

$216 - 9y = 60y - 5y^2$; $\quad 5y^2 - 69y + 216 = 0$;

$$y = \frac{69 \pm \sqrt{4761 - 4320}}{10} = \frac{69 \pm 21}{10};$$

$y_1 = 9$, $x_1 = 6$; $y_2 = 4{,}8$ ч, $x_2 = 14{,}4$ ч.

Ответ: 9 ч, 6 ч или 4 ч 48 мин, 14 ч 24 мин.

Пример 2. 60 деталей первый рабочий изготавливает на 3 ч быстрее, чем второй. За сколько часов второй рабочий изготовит 90 деталей, если работая вместе, они изготавливают за 1 ч 30 деталей.

Решение:

	За 1 ч
I рабочий	x деталей
II рабочий	y деталей

$$\begin{cases} \dfrac{60}{x}+3=\dfrac{60}{y}, \\ x+y=30; \end{cases} \quad \begin{cases} 60(x-y)=3xy, \\ x=30-y; \end{cases} \quad \begin{cases} 20(x-y)=xy, \\ x=30-y; \end{cases}$$

$20(30-2y)=y(30-y)$, $600-40y=30y-y^2$,

$y^2-70+600=0$, $\quad y_{1,2}=\dfrac{35\pm\sqrt{1225-600}}{1}=35\pm 25$;

$y_1=60$ — не удовлетворяет условию, $y=10$,

$\dfrac{90}{10}=9$ ч.

Ответ: 9 ч.

Пример 3. В бассейн проведены две трубы — подающая и отводящая, причем через первую бассейн наполняется на 2 ч дольше, чем через вторую опорожняется. При заполненном на 1/3 бассейне были открыты обе трубы, и бассейн оказался пустым через 8 ч. За сколько часов, действуя отдельно, первая труба наполняет, а вторая опорожняет бассейн?

Решение:

	За 1 ч
I труба	наполняет a-ю часть
II труба	опорожняет b-ю часть

1 — весь бассейн;

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a}-2=\dfrac{1}{b}, \\ \dfrac{1}{3}+8a-8b=0; \end{cases} \quad \begin{cases} a-b=-2ab, \\ b=\dfrac{1}{24}+a; \end{cases}$$

$$a-\frac{1}{24}-a=-2a\left(\frac{1}{24}+a\right); \quad 2a^2+\frac{1}{12}a-\frac{1}{24}=0;$$

$$48a^2+2a-1=0; \qquad a_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{48}=\frac{-1\pm 7}{48};$$

$a_1 = -\frac{1}{6}$ — не удовлетворяет условию; $a = \frac{1}{8}$, $b = \frac{1}{6}$;

I труба наполнит басейн за 8 ч;

II труба опорожнит бассейн за 6 ч.

Ответ: 8 ч и 6 ч.

Задачи на десятичную форму записи числа

Пример 1. Найдите двузначное число, зная, что число его единиц на 2 больше числа десятков, а произведение искомого числа на сумму его цифр равно 280.

Решение:

$\overline{ab}$ — двузначное число, $\overline{ab} = 10a + b$, $a \in \{1; 2; ...; 9\}$; $b \in \{0; 1; 2; ...; 9\}$

$$\begin{cases} b - a = 2, \\ (10a + b)(a + b) = 280; \end{cases} \quad \begin{cases} b = 2 + a, \\ (10a + 2 + a)(a + 2 + a) = 280; \end{cases}$$

$(11a + 2)(2a + 2) = 280;$ $\quad 22a^2 + 26a + 4 - 280 = 0;$

$22a^2 + 26a - 276 = 0;$ $\quad 11a^2 + 13a - 138 = 0;$

$$a_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 44 \cdot 138}}{22} = \frac{-13 \pm 79}{22};$$

$a_1 = -\frac{92}{22}$ — не удовлетворяет условию, $a = \frac{66}{22} = 3$, $b = 5$.

Ответ: $\overline{ab} = 35$.

Пример 2. Двузначное число в 4 раза больше суммы своих цифр, а квадрат этой суммы в 2,25 раза больше самого числа. Найдите это число.

Решение:

$\overline{ab} = 10a + b$, $a \in \{1; 2; ...; 9\}$; $b \in \{0; 1; 2; ...; 9\}$;

$$\begin{cases} 10a + b = 4(a + b), \\ (a + b)^2 = 2{,}25(10a + b); \end{cases} \quad \begin{cases} 6a = 3b, \\ (a + b)^2 = 2{,}25(10a + b); \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2a, \\ (a + 2a)^2 = 2{,}25 \cdot 12a; \end{cases}$$

$9a^2 = 27a$, $a \neq 0$, $\quad 9a = 27$, $a = 3$, $b = 6$, $\overline{ab} = 36$.

Ответ: $\overline{ab} = 36$.

Пример 3. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 3. Найдите это число, если разность квадратов его цифр по модулю в 2 раза больше квадрата разности его цифр.

Решение:

$\overline{ab} = 10a + b,\ a \in \{1; 2; ...; 9\},\ b \in \{0; 1; 2; ...; 9\};$

$$\begin{cases} 10a + b = 3a + 3b + 3, \\ |a^2 - b^2| = 2(a-b)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} b = \dfrac{7a-3}{2}, \\ |a^2 - b^2| = 2(a-b)^2; \end{cases}$$

$$\left| a^2 - \left(\frac{7a-3}{2}\right)^2 \right| = 2\left(a - \frac{7a-3}{2}\right)^2;$$

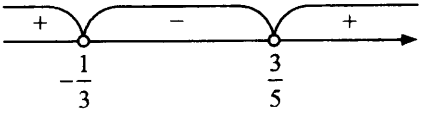
$|4a^2 - 49a^2 + 42a - 9| = 2(2a - 7a + 3)^2;$

$|-45a^2 + 42a - 9| = 2(3 - 5a)^2 = 18 - 60a + 50a^2;$

$45a^2 - 42a + 9 = 0$. Исследуем на знак:

$$a_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 405}}{45} = \frac{21 \pm 6}{45};$$

$$a_1 = \frac{27}{45} = \frac{3}{5};\ a_2 = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}.$$



$a \in \{1; 2; ...; 9\},\ -45a^2 + 42a - 9 < 0;$

$|-45a^2 + 42a - 9| = 45a^2 - 42a + 9;$

$45a^2 - 42a + 9 = 18 - 60a + 50a^2;$

$5a^2 - 18a + 9 = 0;\quad a_{1,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{81 - 45}}{5} = \dfrac{9 \pm 6}{5};$

$a_1 = \dfrac{3}{5}$ — не удовлетворяет условию, $a = 3,\ b = \dfrac{7 \cdot 3 - 3}{2} = 9;$

$\overline{ab} = 39.$

Ответ: $\overline{ab} = 39.$

Задачи на концентрацию, смеси и сплавы

Пример 1. Из 40 т железной руды выплавляют 20 т стали, содержащей 6% примесей. Каков процент примесей в руде?

Решение:

1) $\frac{20 \cdot 6}{100} = 1{,}2$ т — примеси в стали;

2) 40 – 20 = 20 т — отделенные примеси в процессе выплавки стали;

20 + 1,2 = 21,2 т — примеси в руде;

$\frac{21{,}2}{40} \cdot 100\% = \frac{212}{4} = 53\%$ — примеси в руде.

Ответ: 53%.

Пример 2. Плотность первого металла на 4 г/см^3 больше плотности второго металла. Из 6 кг первого металла и 4 кг второго изготовили сплав, деталь из которого имеет массу 0,5 кг. Если бы такая же по объему деталь была изготовлена только из второго металла, то ее масса была бы на 20% меньше. Найдите плотность второго металла.

Решение:

	Плотность	Масса	Объем
I металл	$(x + 4)$ г/см^3	6 кг	$\frac{60}{(x+4)}$
II металл	x г/см^3	4 кг	$\frac{4000}{x}$
Новый сплав		10 кг	

Плотность нового сплава:

$$\frac{10000}{\frac{6000}{x+4}+\frac{4000}{x}} = \frac{10000}{\frac{10000x+16000}{x(x+4)}} = \frac{10000 \cdot (x+4) \cdot x}{1000(10x+16)} =$$

$$= \frac{10(x+4) \cdot x}{10x+16}.$$

Объем изготовленной детали ($v = m/\rho$):

$$500 : \frac{10(x+4)\cdot x}{10x+16} = \frac{500(10x+16)}{10(x+4)\cdot x} = \frac{50(10x+16)}{x(x+4)} \text{ (см}^3\text{)}.$$

Далее:

$$\frac{50(10x+16)}{x(x+4)} \cdot x = 500 \cdot 0{,}8; \quad \frac{10x+16}{x+4} = 8;$$

$10x + 16 = 8x + 32$; $2x = 16$; $x = 8$ г/см^3.

Ответ: 8 г/см^3

Пример 3. Из двух растворов с различным процентным содержанием спирта массой m г и n г отлили по одинаковому количеству раствора. Каждый из отлитых растворов долили в остаток от другого раствора, после чего процентное содержание спирта в обоих полученных растворах стало одинаковым. Сколько раствора было отлито из каждого сосуда?

Решение:

	Масса	**Спирт %**	**Отлили**	**Осталось**
I раствор	m (г)	x %	p (г)	$m - p$
II раствор	n (г)	y %	p (г)	$n - p$

p — отлили.

После переливания массы растворов не изменились, и процентное содержание спирта в обоих растворах, а значит и доли спирта в них, стали одинаковы, т.е. количество спирта:

$$\frac{\left(\frac{px}{100} + \frac{(n-p)\cdot y}{100}\right)}{n} = \frac{\left(\frac{py}{100} + \frac{(m-p)\cdot x}{100}\right)}{m};$$

$m(px + ny - py) = (py + mx - px)n$;

$mpx + mny - mpy = npy + nmx - npx$;

$(m + n)px + mn(y - x) - (m + n)py = 0$;

$(m + n) \cdot p(x - y) - mn(x - y) = 0$; $(x - y)((m + n)p - mn) = 0$;

$x \neq y$; $p(m + n) = mn$, $\quad p = \frac{mn}{m+n}$;

Ответ: $\frac{mn}{m+n}$.

5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ И ИХ СВОЙСТВА. ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

5.1. Треугольник

Признаки равенства треугольников

Определение. Два треугольника называются **равными**, если их можно наложить друг на друга так, чтобы они совпали.

1) (Первый признак равенства треугольников — по двум сторонам и углу между ними).

Если в ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

2) (Второй признак равенства треугольников — по стороне и прилежащим к ней углам).

Если в ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ $BC = B_1C_1$, $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

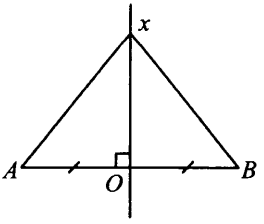
3) (Третий признак равенства треугольников — по трем сторонам).

Если в ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Пример 1. Через середину O отрезка AB проведена прямая, перпендикулярная прямой AB. Докажите, что каждая точка X этой прямой одинаково удалена от точек A и B.

Решение:

Возьмем на прямой произвольную точку X и соединим ее с точками A и B.

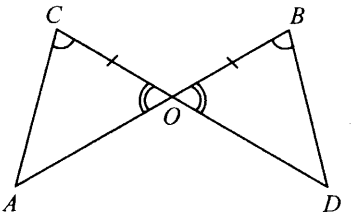


Рассмотрим полученные треугольники. В $\Delta AOX = \Delta BOX$ — $AO = OB$, т.к. O — середина отрезка AB; $\angle AOX = \angle BOX = 90^\circ$, т.к. $AB \perp XO$; OX — общая сторона.

Таким образом, $\Delta AOX = \Delta BOX$ по 1-му признаку равенства треугольников. В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны. Отсюда — $AX = BX$.

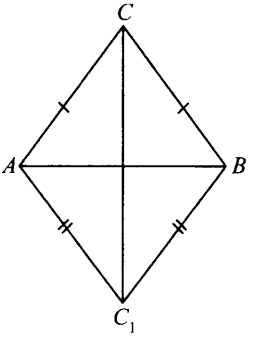
Что и требовалось доказать.

Пример 2. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O. Докажите равенство треугольников ACO и DBO, если известно, что угол ACO равен углу DBO и $BO = CO$.



Решение: Т.к. $CO = BO$, $\angle ACO = \angle DBO$, а $\angle AOC = \angle DOB$ (как вертикальные углы), то $\Delta ACO = \Delta DBO$ по 2-му признаку равенства треугольников.

Пример 3. Треугольники ABC и ABC_1 равнобедренные с общим основанием AB. Докажите равенство треугольников ACC_1 и BCC_1.



Решение: В ΔACC_1 и ΔBCC_1:

$AC = CB$, $AC_1 = C_1B$ (т.к. ΔACB и ΔABC_1 — равнобедренные),

CC_1 — общая.

Таким образом, $\Delta ACC_1 = \Delta BCC_1$ по 3-му признаку равенства треугольников.

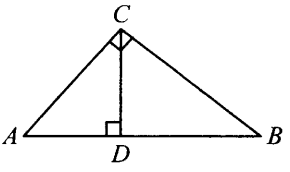
Признаки подобия треугольников

1) (Первый признак подобия треугольников — по двум углам). Два треугольника являются подобными, если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника.

2) (Второй признак подобия треугольников — по двум сторонам и углу между ними). Два треугольника являются подобными, если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы между этими сторонами равны.

3) (Третий признак подобия треугольников — по трем сторонам). Два треугольника являются подобными, если все стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника.

Пример 4. Докажите, что высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобные исходному.



Решение: Пусть ΔABC — прямоугольный, $\angle C = 90°$, CD — высота.

Рассмотрим ΔABC и ΔACD:

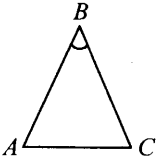
1) $\angle ACB = \angle CDA = 90°$.

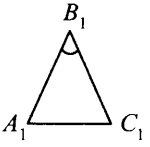
2) $\angle CAB = \angle DAC$ (общий угол).

Значит, $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ (по двум углам).

Аналогично доказывается, что $\Delta ABC \sim \Delta CBD$.

Пример 5. Углы B и B_1 треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Стороны треугольника ABC, прилежащие к углу B, в 2,5 раза больше сторон треугольника $A_1B_1C_1$, прилежащих к углу B_1. Найдите AC и A_1C_1, если их сумма равна 4,2 м.





Решение: $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = 2{,}5$ и $\angle B = \angle B_1$, так что $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (по второму признаку подобия треугольников) с коэффициентом подобия, равным 2,5. Пусть $A_1C_1 = x$ м, следовательно, $AC = 2{,}5x$ м, но $A_1C_1 + AC = 4{,}2$ м,

Так что $x + 2{,}5x = 4{,}2$; $3{,}5x = 4{,}2$, $x = 1{,}2$ м. Тогда $A_1C_1 = 1{,}2$ м, следовательно $AC = 4{,}2 - A_1C_1 = 4{,}2 - 1{,}2 = 3$ м.

Ответ: $A_1C_1 = 1{,}2$ м, $AC = 3$ м.

Пример 6. Подобны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, если:

1) $AB = 1$ м, $AC = 1{,}5$ м, $BC = 2$ м; $A_1B_1 = 10$ см, $A_1C_1 = 15$ см, $B_1C_1 = 20$ см;

2) $AB = 1$ м, $AC = 2$ м, $BC = 1{,}5$ м; $A_1B_1 = 8$ дм, $A_1C_1 = 16$ дм, $B_1C_1 = 12$ дм;

3) $AB = 1$ м, $AC = 2$ м, $BC = 1{,}25$ м; $A_1B_1 = 10$ см, $A_1C_1 = 20$ см, $B_1C_1 = 30$ см.

Решение: Треугольники будут подобны, если будет выполняться равенство:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

1) $\frac{100}{10} = \frac{150}{15} = \frac{200}{20} = 10$ — треугольники подобны;

2) $\frac{10}{8} = \frac{20}{16} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$ — треугольники подобны;

3) $\frac{100}{10} = \frac{200}{20} = \frac{125}{30}$ — неверно, поэтому треугольники не подобны.

Сумма внутренних углов треугольника равна 180 градусов.

Неравенство треугольника: во всяком треугольнике каждая его сторона меньше суммы двух других его сторон.

Пример 7. В треугольнике одна сторона равна 1,9 м, а другая — 0,7 м. Найдите третью сторону, зная, что ее длина равна целому числу метров.

Решение: В треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон, но больше их разности. Пусть x — третья сторона треугольника, $a = 1{,}9$ м, $b = 0{,}7$ м — две другие стороны. Тогда $a - b < x < a + b$, так что $1{,}9 - 0{,}7 < x < 1{,}9 + 0{,}7$;

$1{,}2 < x < 2{,}6$.

Так как x — целое число, то $x = 2$.

Ответ: 2 м.

Теорема Пифагора: В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Пример 8. У прямоугольного треугольника заданы катеты a и b. Найдите гипотенузу, если:

1) $a = 3$, $b = 4$; 2) $a = 1$, $b = 1$; 3) $a = 5$, $b = 6$.

Решение: Если c — гипотенуза, a и b — катеты, то по теореме Пифагора,

$c^2 = a^2 + b^2$; $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Далее

1) $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$;

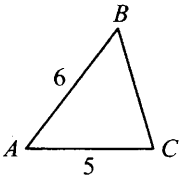
2) $c = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \approx 1{,}4$;

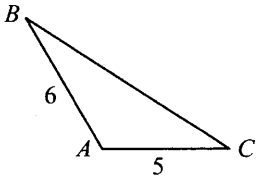
3) $c = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61} \approx 7{,}8$.

Ответ: 1) 5; 2) $\sqrt{2} \approx 1{,}4$; 3) $\sqrt{61} \approx 7{,}8$.

Теорема косинусов: Квадрат любой стороны треугольника равен разности между суммой квадратов двух других сторон и удвоенным произведением этих сторон на косинус угла между ними.

Пример 9. У треугольника две стороны равны 5 м и 6 м, а синус угла между ними равен 0,6. Найдите третью сторону.





Решение: Пусть $AB = 6$ м, $AC = 5$ м; $\sin\angle A = 0{,}6$. Имеем:

$\cos^2\angle A = 1 - \sin^2\angle A$,

$\cos\angle A = \pm\sqrt{1 - \sin^2 A} = \pm\sqrt{1 - 0{,}36} = \pm\sqrt{0{,}64} = \pm 0{,}8$.

Далее, по теореме косинусов

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle A$ получаем, что

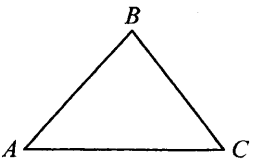
1) $BC^2 = 36 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 0{,}8 = 61 - 48 = 13$ м^2 и $BC = \sqrt{13}$ м;

2) $BC^2 = 36 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot 6(-0{,}8) = 61 + 48 = 109$ м^2 и $BC = \sqrt{109}$ м.

Ответ: 1) $\sqrt{13}$ м; 2) $\sqrt{109}$ м.

Теорема синусов: Отношения сторон треугольника к синусам противолежащих углов равны между собой.

Пример 10. У треугольника ABC $AB = 15$ см, $AC = 10$ см. Может ли $\sin\angle B = \frac{3}{4}$?



Решение: По теореме синусов: $\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{AC}{\sin\angle B}$, откуда имеем:

$$\sin\angle B = \frac{AC\cdot\sin\angle C}{AB} = \frac{10}{15}\cdot\sin\angle C = \frac{2}{3}\cdot\sin\angle C.$$

Если $\sin\angle B = \frac{3}{4}$, то $\sin\angle C = \frac{3}{4}:\frac{2}{3} = \frac{9}{8}$, но $-1 < \sin\angle C < 1$, а $\frac{9}{8} > 1$, так что $\sin\angle B$ не может быть равен $\frac{3}{4}$.

Ответ: не может.

Площадь треугольника равна половине произведения одной из его сторон на проведенную к этой стороне высоту:

$$S = \frac{1}{2}ah.$$

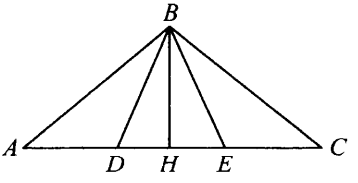
Площадь любого треугольника равна половине произведения любых двух его сторон на синус угла между ними.

Формула Герона для площади треугольника:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b, c — длины сторон треугольника, а $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника.

Пример 11. Разделите данный треугольник на три равновеликие части прямыми, проходящими через одну вершину.

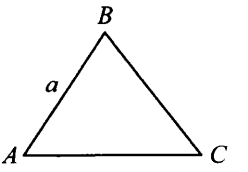


Решение: Разделим AC на $AD = DE = EC$. Тогда

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}AD\cdot BH,\ S_{DBE} = \frac{1}{2}DE\cdot BH,\ S_{EBC} = \frac{1}{2}EC\cdot BH.$$

Так что $S_{ABD} = S_{DBE} = S_{EBC}$.

Пример 12. Найдите площадь равностороннего треугольника со стороной a.



Решение: Пусть ΔABC — равносторонний, $AB = a$.

Тогда $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$, следовательно

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle A = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

Пример 13. Стороны треугольника a, b, c. Найдите высоту треугольника, опущенную на сторону c.

Решение: Пусть h_c — высота. Тогда

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} c \cdot h_c.$$

С другой стороны по формуле Герона

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где: $p = \frac{a+b+c}{2}$.

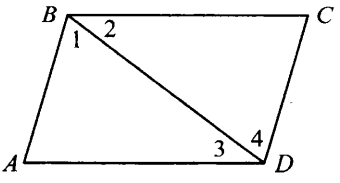
Так что $h_c = \frac{2S_{\Delta ABC}}{c} = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Ответ: $\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

5.2. Многоугольники

Параллелограмм

Определение. *Параллелограмм — 4-угольник, в котором противоположные стороны попарно параллельны.*



Теорема 1 (свойство сторон и углов параллелограмма).

Пусть $ABCD$ — параллелограмм. Тогда $AB = CD$, $BC = AD$, $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ и $\angle A + \angle B = 180°$.

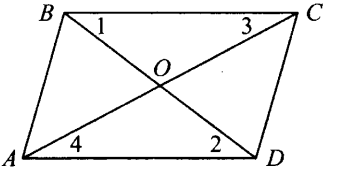
Теорема 2 (признаки параллелограмма).

Если в выпуклом 4-угольнике $ABCD$: или 1) $AB = CD$ и $BC = AD$, или 2) $AB = CD$ и $AB \parallel CD$, то $ABCD$ — параллелограмм.

Теорема 3 (свойство диагоналей).

Пусть $ABCD$ — параллелограмм, $AC \cap BD = O$.

Тогда $AO = OC$ и $BO = OD$.

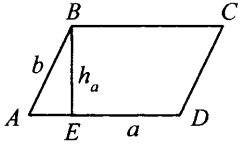


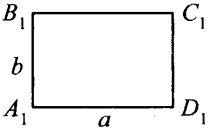
Теорема 4. (признак параллелограмма).

Пусть $ABCD$ — 4-угольник, AC, BD — его диагонали, $AC \cap BD = O$, $AO = OC$, $BO = OD$. Тогда $ABCD$ — параллелограмм.

Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, опущенную на эту сторону.

Пример 1. Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если площадь его равна половине площади прямоугольника.





Решение: Пусть $ABCD$ — параллелограмм с острым углом A. $A_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник. Тогда $AD = A_1D_1 = a$, $AB = A_1B_1 = b$.

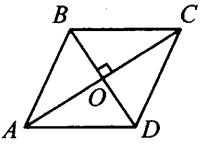
1) $S_{A_1B_1C_1D_1} = ab$, $S_{ABCD} = ah_a = \frac{1}{2}S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2}ab$.

Тогда $h_a = \frac{b}{2}$.

2) В ΔABE $\angle E = 90°$, так что $\sin\angle A = \frac{h_a}{b} = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}$, значит $\angle A = 30°$.

О т в е т: 30°.

Пример 2. Докажите, что площадь ромба равна половине произведения диагоналей.



Решение: Пусть $ABCD$ — ромб, AC и BD — диагонали.

Имеем

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot BO + \frac{1}{2} AC \cdot DO =$$

$$= \frac{1}{2} AC(BO + DO) = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{AC \cdot BD}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

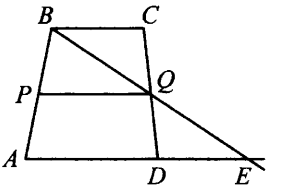
Трапеция

Определение. *Трапеция — это 4-угольник, в котором две противоположные стороны параллельны (основания трапеции), а две другие — нет (боковые стороны трапеции).*

Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.

Определение. *Средняя линия трапеции — это отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон.*

Теорема. Пусть PQ — средняя линия трапеции $ABCD$.

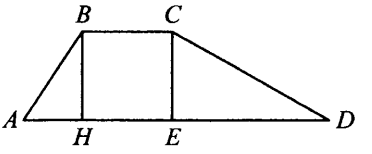


Тогда $PQ \parallel AD$, $PQ \parallel BC$,

$$PQ = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

Площадь трапеции равна произведению ее средней линии на высоту.

Пример 1. Найдите площадь трапеции, у которой параллельные стороны 60 см и 20 см, а непараллельные — 13 см и 37 см.



Решение: Пусть $ABCD$ — трапеция, AD и BC — основания; $AD = 60$ см; $BC = 20$ см; $AB = 13$ см; $CD = 37$ см.

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH.$$

Пусть $AH = x$, $HE = BC = 20$, тогда $ED = AD - AH - HE = 60 - 20 - x = (40 - x)$.

В ΔABH $\angle H = 90°$, по теореме Пифагора имеем:

$BH^2 = AB^2 - AH^2 = 169 - x^2$.

В ΔCDE $\angle E = 90°$, по теореме Пифагора:

$CE^2 = CD^2 - DE^2 = 1369 - (40 - x)^2 = 1369 - 1600 + 80x - x^2 = 80x - x^2 - 231$.

Но $BH^2 = CE^2$, так что $169 - x^2 = 80x - x^2 - 231$, $80x = 169 + 231$, $80x = 400$, $x = 5$.

Значит, $AH = 5$, тогда

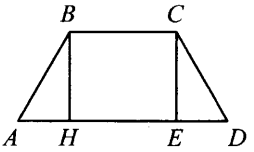
$BH^2 = 169 - 25$, $BH = \sqrt{144}$, $BH = 12$.

Следовательно,

$$S_{ABCD} = \frac{60 + 20}{2} \cdot 12 = 40 \cdot 12 = 480 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 480 см^2.

Пример 2. В равнобокой трапеции основания равны 10 см и 24 см, боковая сторона 25 см. Найдите площадь трапеции.



Решение: Пусть $ABCD$ — трапеция, $AB = CD = 25$ см, $AD = 24$ см, $BC = 10$ см.

$\Delta ABH = \Delta CED$ ($\angle H = \angle E = 90°$, $AB = CD$, $BH = CE$). Тогда

$AH = ED = (AD - BC) : 2 = (24 - 10) : 2 = 7$.

Тогда по теореме Пифагора:

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{625 - 49} = \sqrt{576} = 24.$$

Следовательно,

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH = \frac{24 + 10}{2} \cdot 24 = 17 \cdot 24 = 408 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 408 см^2.

Пример 3. В равнобокой трапеции большее основание равно 44 см, боковая сторона 17 см и диагональ 39 см. Найдите площадь трапеции.

Решение: Пусть $ABCD$ — трапеция.

Найдем площадь ΔACD по формуле Герона:

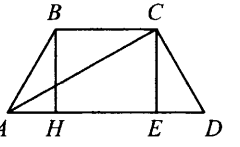
$S_{ACD} = \sqrt{50 \cdot 11 \cdot 33 \cdot 6} = 11 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 330$.

Далее: $CE = \dfrac{2S_{ACD}}{AD} = \dfrac{660}{44} = 15$,

$ED = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{32 \cdot 2} = 8$,

$BC = AD - 2ED = 44 - 16 = 28$, тогда

$S_{ABCD} = \dfrac{44 + 28}{2} \cdot 15 = 540$ (см^2).



Ответ: 540 см^2.

Правильные многоугольники

Определение. *Многоугольник называется выпуклым*, если этот многоугольник целиком находится в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону.

Сумма всех внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180^\circ(n-2)$.

Выпуклый многоугольник называется правильным, если все его стороны и углы равны.

Пример 1. Углы выпуклого четырехугольника пропорциональны числам 1, 2, 3, 4. Найдите их.

Решение: По теореме о сумме углов многоугольника имеем:

$S_4 = 180^\circ \cdot (n-2) = 180^\circ \cdot (4-2) = 180^\circ \cdot 2 = 360^\circ$.

Пусть градусная мера 1-го угла k°, 2-го — $2k^\circ$, 3-го — $3k^\circ$ и 4-го — $4k^\circ$. Так как сумма всех углов 360°, получим уравнение:

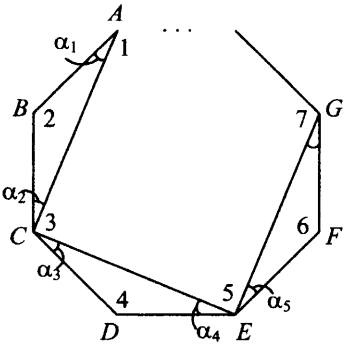
$k + 2k + 3k + 4k = 360^\circ$; $10k = 360^\circ$; $k = 36^\circ$.

Значит, 1-й угол — 36°, 2-й — 72°, 3-й — 108°, 4-й — 144°.

Пример 2. Докажите, что взятые через одну вершины правильного $2n$-угольника являются вершинами правильного n-угольника.

Решение: Обозначим через 1, 2, 3, ..., $2n$–3, $2n$–2, $2n$–1, $2n$ вершины правильного $2n$-угольника. Объединим их по две и составим n пар (1, 2); (3, 4); (5, 6); ...; ($2n$–3, $2n$–2); ($2n$–1, $2n$).

Соединим последовательно отрезками первую вершину каждой пары с первой вершиной последующей пары (1 — с 3, 3 — с 5, ..., $2n$–3 — с $2n$–1), получим ломаную, состоящую из (n–1) звеньев. Соединим далее отрезком ($2n$–1)-ю вершину с 1-й и построим n-угольник.



Рассмотрим ΔABC и ΔCDE.

$AB = CD$, $BC = DE$ (как стороны правильного многоугольника); $\angle B = \angle D$ (как углы правильного многоугольника). Значит, $\Delta ABC = \Delta CDE$ (по 1-му признаку), отсюда $AC = CE$. Аналогично доказывается, что все стороны построенного n-угольника равны.

Рассмотренные треугольники равные и равнобедренные, поэтому $\angle\alpha_1 = \angle\alpha_2 = \angle\alpha_3 = \angle\alpha_4 = \angle\alpha_5 = \ldots$.

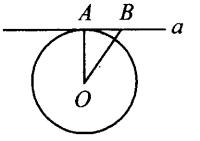
Далее: $\angle ACE = \angle BCD - \angle\alpha_2 - \angle\alpha_3$; $\angle CEG = \angle DEF - \angle\alpha_4 - \angle\alpha_5$; $\angle BCD = \angle DEF$, т.к. $2n$-угольник правильный, следовательно $\angle ACE = \angle CEG$. Аналогично доказывается равенство между собой остальных внутренних углов построенного n-угольника, следовательно, этот n-угольник правильный, что и требовалось доказать.

5.3. Окружность

Касательная к окружности и ее свойства. Центральный и вписанный углы. Длина окружности. Площадь круга

Определение. *Окружность — множество всех точек, равноудаленных от данной точки (центра окружности).* Радиус окружности — отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром. Секущая — прямая, проходящая через 2 точки окружности. Хорда — отрезок, соединяющий 2 точки окруж-

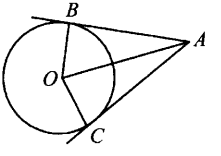
ности. Диаметр — хорда, проходящая через центр. Касательная — прямая, лежащая в одной плоскости с окружностью и имеющая с ней только одну общую точку (точку касания).



Теорема 1. (свойство касательной). Пусть прямая a касается окружности с центром в O в точке A. Тогда $OA \perp a$.

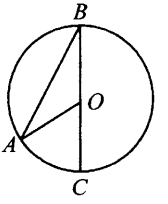
Теорема 2. Пусть A лежит вне окружности, AB и AC — касательные.

Тогда $AB = AC$ и $\angle BAO = \angle OAC$.



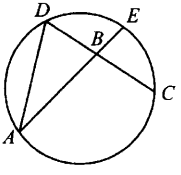
Теорема 3. (обратная к теореме 1). Пусть OA — радиус окружности, $a \perp OA$, $A \in a$. Тогда a — касательная.

Определение. *Центральный угол — угол, образованный двумя радиусами окружности. Вписанный угол — угол, образованный двумя хордами, проведенными из одной точки окружности.*



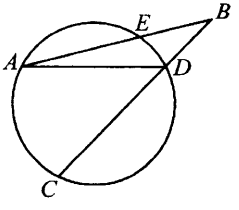
Теорема 1. Пусть $\angle ABC$ — вписанный в окружность с центром O.

Тогда $\angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AC}$.



Теорема 2. Пусть AE и DC — хорды, пересекающиеся внутри круга.

Тогда $\angle ABC = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{AC} + \overset{\smile}{DE})$.

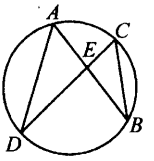


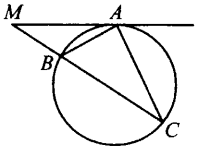
Теорема 3. Пусть AE и CD — отрезки секущих, пересекающихся вне круга в точке B.

Тогда $\angle ABC = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{AC} - \overset{\smile}{DE})$.

Теорема 4. Пусть AB и CD — хорды окружности, $AB \cap CD = E$.

Тогда $AE \cdot BE = CE \cdot DE$.

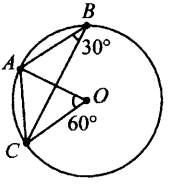




Теорема 5. Пусть точка M — вне круга, MA — касательная, MC — секущая. Тогда $MA^2 = MB \cdot MC$ (квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть).

Длина окружности: $l = 2\pi R$, где l — длина окружности, а R — ее радиус. Круг с центром в точке O радиуса R — это множество таких точек X, что $OX \leq R$. Площадь круга: $S = \pi R^2$, где S – площадь круга, а R — его радиус.

Пример 1. Точки A, B, C лежат на окружности. Чему равна хорда AC, если угол ABC равен 30°, а диаметр окружности 10 см?



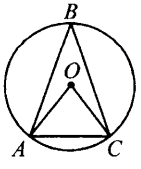
Решение: Так как вписанный угол $ABC = 30°$, то соответствующий ему центральный угол будет 60°, то есть $\angle AOC = 60°$.

Рассмотрим ΔAOC. Так как $AO = OC$ (как радиусы окружности), а $\angle O = 60°$, то ΔAOC — равносторонний, значит $AC = AO = OC = R = 5$ см.

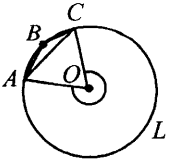
Ответ: $AC = 5$ см.

Пример 2. Точки A, B, C лежат на окружности. Чему равен угол ABC, если хорда AC равна радиусу окружности? (Два случая.)

I случай



II случай



Решение: 1) $\angle AOC$ является центральным для $\angle ABC$.

Так как $AC = AO = OC$, то ΔAOC равносторонний, следовательно $\angle AOC = 60°$, а

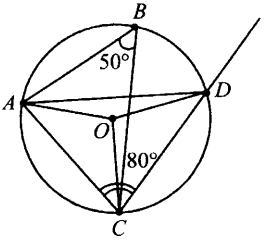
$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = 30°.$$

2) $\angle AOC$ в ΔAOC равен 60°, значит дуга ABC равна 60°, а дуга ALC равна 300°.

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\cdot 300° = 150°.$$

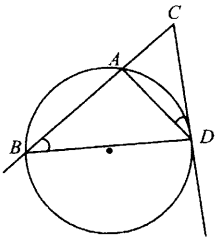
Ответ: $\angle ABC = 30°$ или 150°.

Пример 3. Хорды окружности AD и BC пересекаются. Угол ABC равен 50°, угол ACD равен 80°. Найдите угол CAD.



Решение: $\angle ADC = \angle ABC = 50°$ — как вписанные, опирающиеся на одну хорду. Тогда $\angle CAD = 180° - \angle ADC - \angle ACD = 180° - 50° - 80° = 50°$.

Ответ: 50°.



Пример 4. Докажите, что произведение отрезков секущей окружности равно квадрату отрезка касательной, проведенной из той же точки: $AC \cdot BC = CD_2$.

Решение: $\angle ABD = \angle ADC$.

Рассмотрим ΔCBD и ΔACD.

$\angle CBD = \angle CDA = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AD}$; $\angle C$ — общий,

поэтому $\Delta CBD \sim \Delta ACD$ по двум углам, значит: $\frac{BC}{CD} = \frac{CD}{AC}$, откуда имеем: $CD^2 = AC \cdot BC$. Что и требовалось доказать.

Пример 5. Вычислите длину окружности, если радиус равен: 1) 10 м; 2) 15 м.

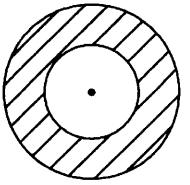
Длина окружности вычисляется по формуле:

$$l = 2\pi R.$$

Решение: 1) $R = 10$ м, $l = 2\pi R \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 = 62{,}8$ м;

2) $R = 15$ м, $l = 2\pi R \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 15 = 94{,}2$ м.

Ответ: 62,8 м; 94,2 м.



Пример 6. Найдите площадь кругового кольца, заключенного между двумя окружностями с одним и тем же центром и радиусами: 1) 4 см и 6 см; 2) 5,5 м и 6,5 м; 3) a и b, $a > b$.

Решение: $S_{\text{кольца}} = S_{\text{кр}^1} - S_{\text{кр}^2} = \pi R_1^{\,2} - \pi R_2^{\,2} =$
$= \pi(R_1^{\,2} - R_2^{\,2})$.

Так что

1) $S_{\text{кольца}} = \pi(36 - 16) = 20\pi$ см^2;

2) $S_{\text{кольца}} = \pi(6{,}5^2 - 5{,}5^2) = \pi(6{,}5 - 5{,}5)(6{,}5 + 5{,}5) = 12\pi$ см^2;

3) $S_{\text{кольца}} = \pi(a^2 - b^2)$ см^2.

5.4. Векторы

Определение. *Вектором* называется *направленный отрезок,* т.е. отрезок, для которого указано, какой из его концов является началом, а какой концом.

Два вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называют *одинаково направленными*, если две полупрямые AB и CD направлены одинаково.

Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называют *противоположно направленными*, если две полупрямые AB и CD направлены противоположно.

Абсолютной величиной (модулем) вектора называют длину отрезка, который изображает вектор. Обозначается $\left|\vec{a}\right|$.

Нулевым вектором называется такой вектор, начало которого совпадает с его концом.

Два вектора *равны*, если они совмещаются параллельным переносом.

Равные векторы одинаково направлены и равны по модулю, и обратно: если два вектора одинаково направлены и равны по модулю, то они равны.

Пусть точка $A_1(x_1;y_1)$ — начало вектора $\vec{a}$, а точка $A_2(x_2; y_2)$ — его конец. Тогда *координатами вектора* $\vec{a}$ называются числа $a_1 = x_2 - x_1$ и $a_2 = y_2 - y_1$.

Суммой двух векторов $\vec{a}(a_1;a_2)$ *и* $\vec{b}(b_1;b_2)$ называется вектор $\vec{c}$ $(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$.

Произведением вектора $\overrightarrow{(a_1,a_2)}$ *на число* α называется вектор $\overrightarrow{(\alpha a_1, \alpha a_2)}$.

Скалярным произведением векторов $\overrightarrow{(a_1,a_2)}$ и $\overrightarrow{(b_1,b_2)}$ называется число $a_1b_1+a_2b_2$.

Теорема. Скалярное произведение векторов равно произведению их модулей на косинус угла между этими векторами.

Пример 1. Абсолютная величина вектора $\vec{a}$ (5; m) равна 13, а вектора $\vec{b}$ (n; 24) равна 25. Найти n и m.

Решение: Абсолютной величиной вектора называется длина отрезка, изображающего вектор, $\vec{a}$ $(a_1; a_2)$.

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$13 = \sqrt{5^2 + m^2}$, $169 = 25 + m^2$, $m^2 = 144$, $m = \pm 12$.

$25 = \sqrt{n^2 + 24^2}$, $25^2 = n^2 + 24^2$, $625 = n^2 + 576$, $n^2 = 49$, $n = \pm 7$.

Ответ: $m = \pm 12$; $n = \pm 7$.

Пример 2. Найдите вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ и его абсолютную величину, если 1) $\vec{a}$ (1; – 4), $\vec{b}$ (–4; 8); 2) $\vec{a}$ (–2; 7), $\vec{b}$ (4; – 1).

Решение: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$;

1) $\vec{a}$ (1; – 4), $\vec{b}$ (–4; 8), $\vec{c}$ (1 – (–4); – 4–8);

$\vec{c}$ (5; – 12), $|\vec{c}| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$;

2) $\vec{a}$ (–2; 7), $\vec{b}$ (4; – 1), $\vec{c}$ (–2 –4; 7–(–1)), $\vec{c} = (-6; 8)$;

$|\vec{c}| = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$.

Ответ: 1) $\vec{c}(5;-12)$, $|\vec{c}| = 13$; $\vec{c}(-6;8)$, $|\vec{c}| = 10$.

Пример 3. Даны векторы $\vec{a}$ (3; 2) и $\vec{b}$ (0; –1). Найдите вектор $\vec{c} = -2\vec{a} + 4\vec{b}$ и его абсолютную величину.

Решение: $\vec{a}$ (3; 2), $\vec{b}$ (0; – 1);

$\vec{c} = -2\vec{a} + 4\vec{b}$;

$-2\vec{a} = (-2 \cdot 3; -2 \cdot 2) = (-6; -4); 4\vec{b} = (4 \cdot 0; 4 \cdot (-1)) = (0; -4)$;

$\vec{c} = (-6 + 0; -4 + (-4))$;

$\vec{c} = (-6; -8), |\vec{c}| = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10.$

Ответ: (–6; –8); 10.

Пример 4. Докажите, что векторы $\vec{a}$ (m; n) и $\vec{b}$ ($-n$; m) перпендикулярны или равны нулю.

Решение: Векторы перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = m \cdot (-n) + n \cdot m = 0 \Rightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha = 0$.

Если $|\vec{a}|, |\vec{b}| \neq 0$, то $\cos\alpha = 0$, $\alpha = 90°$ и векторы $\vec{a}(m, n)$ и $\vec{b}(-n, m)$ перпендикулярны.

Если $|\vec{a}| = 0$, то $m^2 + n^2 = 0 \Rightarrow m = n = 0$, $\vec{a} = \vec{b} = \vec{0}$.

Аналогично, если $|\vec{b}| = 0$, то $\vec{a} = \vec{b} = \vec{0}$.

Пример 5. Векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярны. Докажите, что $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Решение: Так как ($\vec{a} + \vec{b}$) и ($\vec{a} - \vec{b}$) перпендикулярны, то ($\vec{a} + \vec{b}$)·($\vec{a} - \vec{b}$) = 0. То есть $\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = 0$.

$\vec{a}^2 = \vec{b}^2$, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Что и требовалось доказать.

Пример 6. Даны четыре точки A (1; 1), B (2; 3), C (0; 4), D (–1; 2). Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник.

Решение: A (1; 1), B (2; 3), C (0; 4), D (–1; 2).

1) $\overrightarrow{AB}$ (2–1; 3–1) = $\overrightarrow{AB}$ (1; 2), $\overrightarrow{DC}$ (0 + 1; 4–2) = $\overrightarrow{DC}$ (1; 2);

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Значит, $ABCD$ — параллелограмм.

2) $\overrightarrow{AD}$ (–1–1; 2–1) = (–2; 1);

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = -2 + 2 = 0$.

Значит, $\angle BAD = 90°$, $ABCD$ — прямоугольник.

5.5. Прямая и плоскость в пространстве

Угол между прямой и плоскостью

Пусть α — плоскость, a — пересекающая эту плоскость прямая. *Проекцией прямой a на плоскость* α называется прямая a', которая является множеством оснований перпендикуляров, опущенных из всех точек прямой a на плоскость α.

Углом между прямой a и плоскостью α называется угол между прямыми a и a'.

Угол между плоскостями. Двугранный угол

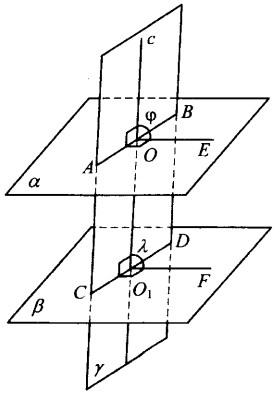
Пусть две плоскости пересекаются. *Двугранным углом* называется фигура, образованная двумя полуплоскостями и общей ограничивающей их прямой.

Эти полуплоскости называются *гранями двугранного угла*, а ограничивающая эти плоскости прямая — *ребром* данного *двугранного угла.*

Проведем плоскость, перпендикулярную ребру; она пересечет данные плоскости по двум полупрямым.

Образованный этими полупрямыми угол называется *линейным углом двугранного угла.*

Определение. *Углом между пересекающимися плоскостями* называется линейный угол двугранного угла, образованного этими плоскостями



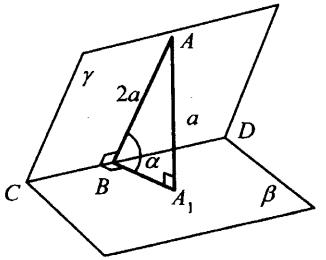
Пример 1. Докажите, что плоскость, пересекающая параллельные плоскости, пересекает их под равными углами.

Решение: Пусть даны плоскости $\alpha \parallel \beta$ и γ пересекает их по прямым AB и CD соответственно.

Тогда $AB \parallel CD$ (по свойствам параллельных плоскостей).

Проведем в плоскости γ прямую c, перпендикулярную к $AB \| CD$ и из точек O и O_1 восставим параллельные перпендикуляры OE и O_1F к прямым AB и CD.

Из рисунка заметим, что углы φ и λ — искомые. Это линейные углы двугранных углов, образованных плоскостями α, β и γ; $\angle\varphi = \angle\lambda$, так как это соответственные углы при параллельных прямых OE и OF и секущей c. Что и требовалось доказать.



Пример 2. Найдите угол между плоскостями β и γ, если точка, взятая на одной из них, отстоит от прямой пересечения плоскостей вдвое дальше, чем от второй плоскости.

Решение: Пусть β и γ пересекаются по прямой CD, $A \in \gamma$. Проведем $AB \perp CD$ и $AA_1 \perp \beta$. Тогда искомый угол ABA_1 равен α. Пусть $AA_1 = a$, тогда $AB = 2a$.

Треугольник ABA_1 прямоугольный, поэтому

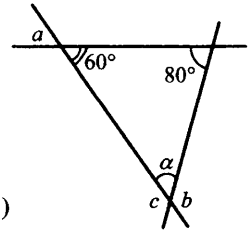
$\sin\alpha = \frac{AA_1}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$, так что $\alpha = 30°$.

Угол между скрещивающимися прямыми

Определение. *Углом между скрещивающимися прямыми* называется угол между прямыми, которые параллельны исходным и пересекаются.

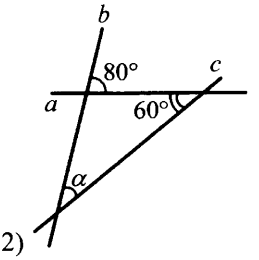
Пример 3. Прямые a, b, c параллельны одной и той же плоскости. Чему равен угол между прямыми b и c, если углы этих прямых с прямой a равны 60° и 80°?

1)



Решение: Существуют прямые a', b' и c', параллельные прямым a, b и c, лежащие в одной плоскости. Углы между a', b', c' равны углам между a, b и c.

1) $\alpha + 60° + 80° = 180°$; $\alpha = 40°$.



2)

2) $\alpha + 60° = 80°$; $\alpha = 20°$.

Расстояние между скрещивающимися прямыми

Определение. *Общим перпендикуляром* двух скрещивающихся прямых называют отрезок, концы которого лежат на этих прямых и который перпендикулярен каждой из них.

Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми называется длина общего перпендикуляра этих двух прямых.

Расстояние от точки до прямой

Определение. *Расстоянием от точки до прямой* называется длина перпендикуляра, опущенного от данной точки на данную прямую.

5.6. Многогранники

Призма

Определение. *Призмой* называется многогранник, состоящий из двух равных выпуклых плоских многоугольников $A_1A_2 \ldots A_n$ и $B_1B_2 \ldots B_n$, лежащих в параллельных плоскостях, и параллелограммов $A_1A_2B_2B_1$; $A_2A_3B_3B_2$; …; $A_nA_1B_1B_n$. Много-

угольники называются *основаниями призмы*, а отрезки, которые соединяют соответствующие вершины этих многоугольников, — *боковыми ребрами.*

Свойство 1. Боковые ребра призмы параллельны и равны.

Определение. *Высотой призмы* называется расстояние между основаниями.

Определение. *Боковыми гранями призмы* $A_1A_2 \ldots A_n$ и $B_1B_2 \ldots B_n$ называются четырехугольники $A_1B_1B_2A_2$; $A_2B_2B_3A_3$, ..., $A_{n-1}B_{n-1}B_nA_n$. *Площадью боковой поверхности призмы* называется сумма площадей всех ее боковых граней.

Теорема 1. Объем призмы равен произведению площади основания на высоту:

$$V = S \cdot H.$$

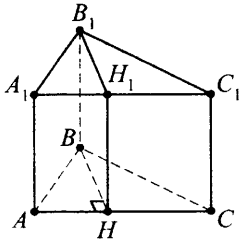
Теорема 2. Площадь поверхности призмы равна сумме двух площадей основания и площади боковой поверхности.

$$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок.}}$$

Определение. *Прямой призмой* называется призма, основания которой перпендикулярны боковым ребрам.

Теорема 3. Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту

$$V = P_{\text{осн}} \cdot H.$$



Пример 1. В прямой треугольной призме стороны основания равны 10 см, 17 см и 21 см, а высота призмы — 18 см. Найдите площадь сечения, проведенного через боковое ребро, и меньшую высоту основания.

Решение: Данным сечением является прямоугольник BHH_1B_1 со сторонами $BB_1 = 18$ см и BH, где BH — меньшая высота ΔABC.

Далее, площадь основания с одной стороны равна:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \sqrt{24(24-10)(24-17)(24-21)} = 84.$$

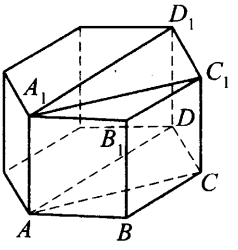
С другой стороны $S = \frac{1}{2} AC \cdot BH$, так что

$$BH = \frac{2S}{AC} = \frac{2 \cdot 84}{21} = 8.$$

Тогда искомая площадь сечения равна

$S_1 = BB_1 \cdot BH = 18 \cdot 8 = 144$ (см^2).

Ответ: 144 см^2.



Пример 2. Основанием призмы является правильный шестиугольник со стороной a, а боковые грани — квадраты. Найдите диагонали призмы и площади ее диагональных сечений.

Решение: Диагональные сечения призмы — это прямоугольники AA_1D_1D и AA_1C_1C. Далее, $AA_1 = a$, $AD = 2a$ (диаметр описанной окружности) и $AC = a\sqrt{3}$ (по теореме косинусов из ΔABC).

Так что площади сечений равны:

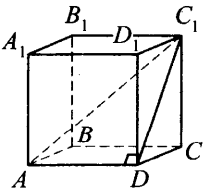
$S_1 = AA_1 \cdot AC = a \cdot a\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}$ и $S_2 = AA_1 \cdot AD = a \cdot 2a = 2a^2$.

Диагонали призмы вычисляются по теореме Пифагора:

$$AD_1 = \sqrt{AA_1^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{5a^2} = a\sqrt{5} = d_1,$$

$$AC = \sqrt{AA_1^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = \sqrt{4a^2} = 2a = d_2.$$

Ответ: $S_1 = a^2\sqrt{3}$; $S_2 = 2a^2$; $d_1 = a\sqrt{5}$; $d_2 = 2a$.



Пример 3. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 3,5 см, а диагональ боковой грани 2,5 см. Найдите объем призмы.

Решение: Так как по условию призма правильная, то $CC_1 \perp DC$ и $DC \perp AD$. Так что по теореме о трех перпендикулярах $C_1D \perp AD$. Далее, в прямоугольном ΔAC_1D по теореме Пифагора находим:

$$AD = \sqrt{AC_1^2 - DC_1^2} = \sqrt{3{,}5^2 - 2{,}5^2} = \sqrt{6}.$$

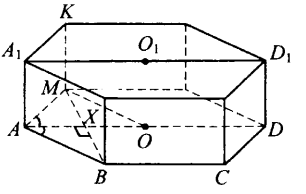
Тогда в прямоугольном ΔDC_1C по теореме Пифагора найдем:

$$C_1C = \sqrt{DC_1^2 - DC^2} = \sqrt{DC_1^2 - AD^2} = \sqrt{2,5^2 - 6} = 0,5.$$

Далее, $V = S_{ABCD} \cdot CC_1 = AD^2 \cdot CC_1 = 6 \cdot 0,5 = 3$ (см^3).

Ответ: $V = 3$ см^3.

Пример 4. В правильной шестиугольной призме площадь наибольшего диагонального сечения 4 м^2, а расстояние между двумя противоположными боковыми гранями 2 м. Найдите объем призмы.



Решение: Наибольше диагональное сечение — это AA_1D_1D. Тогда AD — диаметр окружности, описанной около правильного шестиугольника.

Так что $AD = 2R$ и $AB = AM = R$.

$\angle MAB$ найдем по формуле:

$$\angle MAB = \frac{180^\circ \cdot (n-2)}{n} = \frac{180^\circ \cdot (6-2)}{6} = 120^\circ.$$

Тогда $\angle MAX = \frac{1}{2}\angle MAB = 60^\circ$ и $MX = \frac{1}{2}MB = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

Далее, в прямоугольном ΔAMX

$$AM = \frac{MX}{\sin \angle MAX} = \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Так что $R = AM = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Значит, $AD = 2R = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

А поскольку $S_{AA_1D_1D} = AA_1 \cdot AD = 4$ м^2, то $AA_1 = \frac{4 \cdot 3}{4\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Далее, площадь основания равна площади шести равносторонних треугольников, т.е.

$$S_{\text{осн}} = 6 \cdot S_{AMO} = 6 \cdot \frac{1}{2} AM \cdot AO \cdot \sin 60^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 2\sqrt{3}.$$

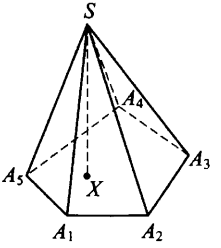
Тогда $V = S_{\text{осн}} \cdot AA_1 = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6$ (м^3).

О т в е т: 6 м^3.

Пирамида

О п р е д е л е н и е. *Пирамида* — многогранник, состоящий из плоского выпуклого многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$, называемого *основанием пирамиды,* точки S, не лежащей в плоскости основания, называемой *вершиной пирамиды*, и треугольников SA_1A_2; SA_2A_3; …, SA_nA_1, называемых боковыми гранями пирамиды. Отрезки, которые соединяют вершину пирамиды с вершинами основания, называются *боковыми ребрами.*

О п р е д е л е н и е. Опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания перпендикуляр называется *высотой пирамиды. Площадью боковой поверхности пирамиды* называется сумма площадей всех ее боковых граней.



Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма площадей всех ее граней и площади основания.

Правильная пирамида — пирамида, основанием которой является правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ее высотой.

Треугольная пирамида называется *тетраэдром.*

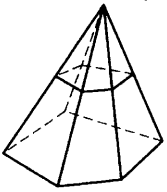
Тетраэдр, все грани которого являются равносторонними треугольниками, называется *правильным тетраэдром.*

Теорема. Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту

$$V = \frac{1}{3}SH.$$

Усеченная пирамида

Теорема. Плоскость, пересекающая пирамиду и параллельная основанию, отсекает подобную пирамиду.



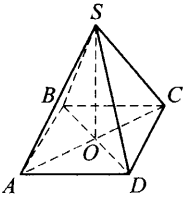
Определение. Часть пирамиды без ее отсеченной части называется *усеченной пирамидой.*

Теорема. Объем усеченной пирамиды равен

$V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$, где h — высота усеченной пирамиды, S_1, S_2 — площади ее оснований.

Пример 1. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см. Каждое боковое ребро пирамиды равно 13 см.

Вычислите высоту пирамиды.



Решение: Так как $SA = SB = SC = SD$, то прямоугольные треугольники ASO, BSO, CSO и DSO равны по гипотенузе и общему катету SO.

Тогда $AO = BO = CO = DO$. В прямоугольнике есть единственная точка, равноудаленная от вершин (докажите) точка пересечения диагоналей, а значит точка O является точкой пересечения AC и BD.

В ΔABD:

$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (см).

Тогда $OD = \frac{1}{2} BD = 5$ (см).

Далее, в ΔSOD по теореме Пифагора

$SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см).

О т в е т: 12 см.

Пример 2. У четырехугольной усеченной пирамиды стороны одного основания равны 6, 7, 8, 9 см, а меньшая сторона другого основания равна 5 см. Найдите остальные стороны этого основания.

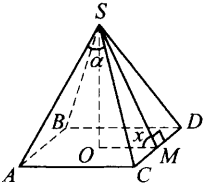
Решение: У усеченной пирамиды основания подобны. Зная меньшие стороны нижнего и верхнего оснований, найдем коэффициент подобия: $k = \frac{5}{6}$.

Тогда соответствующие стороны другого основания равны

$7 \cdot k = 7 \cdot \frac{5}{6} = \frac{35}{6}$ (см), $8 \cdot k = 8 \cdot \frac{5}{6} = \frac{20}{3}$ (см) и

$9 \cdot k = 9 \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{2}$ (см).

Пример 3. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α. Найдите двугранный угол x при основании пирамиды.



Решение: Высота SO правильной четырехугольной пирамиды проходит через центр пересечения диагоналей AD и BC.

Проведем $SM \perp DC$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $OM \perp DC$.

Значит, OM — радиус окружности, вписанной в квадрат, поэтому $OM = \frac{AB}{2}$. В равнобедренном ΔDSC $\angle DSC = \alpha$. Высота SM является медианой и биссектрисой, так что

$\angle CSM = \frac{\alpha}{2}$, а $CM = \frac{CD}{2}$. В ΔSMC: $SM = \frac{CM}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{CD}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

Так как $\angle SMO$ является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостью основания и боковой гранью, то $\angle SMO = x$ и из ΔSMO:

$$\cos x = \cos \angle SMO = \frac{OM}{SM} = \frac{CD \cdot 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2 \cdot CD} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Так что $x = \arccos\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$.

Пример 4. По стороне основания a и боковому ребру b найдите объем правильной пирамиды: 1) треугольной, 2) четырехугольной, 3) шестиугольной.

Решение: В правильной пирамиде высота проходит через центр окружности, описанной около основания. Тогда:

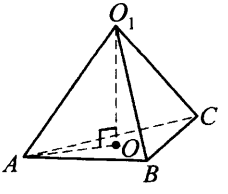
1) Площадь основания равна площади равностороннего треугольника: $S_{\text{осн}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Радиус описанной окружности $AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Тогда в ΔAO_1O:

$$OO_1 = \sqrt{AO_1^2 - AO^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{3b^2 - a^2}{3}}.$$

Так что

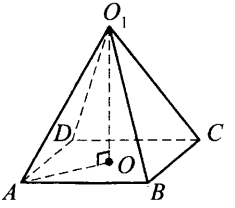
$$V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot OO_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\frac{3b^2 - a^2}{3}} = \frac{a^2}{12} \cdot \sqrt{3b^2 - a^2}.$$



2) Основание — квадрат с площадью $S_{\text{осн}}=a^2$. Радиус описанной окружности AO равен половине диагонали квадрата: $AO=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Далее, в ΔAOO_1:

$$OO_1=\sqrt{AO_1^2-AO^2}=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}=\sqrt{\frac{2b^2-a^2}{2}}.$$

Так что $V=\dfrac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot OO_1=\dfrac{1}{3}\cdot a^2\cdot\sqrt{\dfrac{2b^2-a^2}{2}}=\dfrac{a^2}{6}\sqrt{4b^2-2a^2}$.



3) Площадь основания равна площади правильного шестиугольника, то есть площади шести равносторонних треугольников со стороной a.

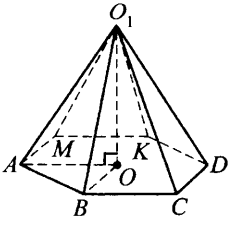
$$S_{\text{осн}}=6\cdot S_{\Delta ABO}=6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}.$$

Далее, радиус описанной окружности равен стороне основания $AO=a$.

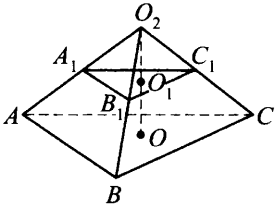
Тогда в ΔAOO_1: $OO_1=\sqrt{AO_1^2-AO^2}=\sqrt{b^2-a^2}$.

Так что

$$V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot OO_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}\cdot\sqrt{b^2-a^2}=\frac{a^2}{2}\cdot\sqrt{3(b^2-a^2)}.$$



Пример 5. В пирамиде с площадью основания S_1 проведено сечение, параллельное основанию, на расстоянии h от него. Площадь сечения S_2. Найдите высоту пирамиды.



Решение: Сечение отсекает от данной пирамиды подобную пирамиду $O_2A_1B_1C_1$. Так как площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия, то $k = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$.

Линейные размеры подобных фигур относятся как коэффициент подобия.

Так что $\frac{OO_2}{OO_2 - h} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$; $OO_2\left(\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}\right) = -h\sqrt{S_1}$.

Итак, $OO_2 = \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}$.

Правильные многогранники

Определение. *Выпуклый многогранник* называется *правильным,* если все его грани — правильные многоугольники с одинаковым числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одинаковое число ребер.

1. Выпуклый многогранник со сторонами — правильными треугольниками и такой, что в каждой его вершине сходится по три ребра, называется *правильным тетраэдром.*

2. Выпуклый многогранник со сторонами — правильными треугольниками и такой, что в каждой его вершине сходится по четыре ребра, называется *октаэдром.*

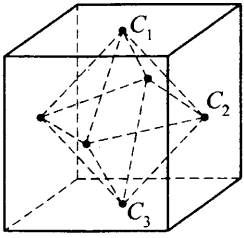
3. Выпуклый многогранник со сторонами — правильными треугольниками и такой, что в каждой его вершине сходится по пять ребер, называется *икосаэдром*.

4. Выпуклый многогранник со сторонами — квадратами и такой, что в каждой его вершине сходится по три ребра, называется *кубом*.

5. Выпуклый многогранник со сторонами — правильными пятиугольниками и такой, что в каждой его вершине сходится по пять ребер, называется *додекаэдром*.

Других правильных многогранников не существует.

Пример. Докажите, что центры граней куба являются вершинами октаэдра, а центры граней октаэдра являются вершинами куба.



Решение: Обозначим центры граней куба C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6.

Каждая грань куба граничит с четырьмя другими, так что каждая из точек C_i будет соединена с четырьмя другими. Так как расстояния между центрами граней, имеющих общее ребро, в кубе одинаковы, то получим фигуру, имеющую 6 вершин, в каждой из которых сходится по 4 ребра, и все грани представляют собой правильные треугольники.

Значит, эта фигура — октаэдр.

Наоборот:

Обозначим центры граней октаэдра C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8.

Каждая грань октаэдра граничит с тремя другими, так что центр каждой грани будет соединен ребрами с тремя соседними центрами. Так как расстояния между центрами граней, имеющих общее ребро, одинаковы, то получится фигура,

имеющая восемь вершин; из каждой вершины выходят по три одинаковых ребра и все грани представляют собой квадраты.

Значит, эта фигура — куб.

Что и требовалось доказать.

5.7. Тела вращения

Прямой круговой цилиндр

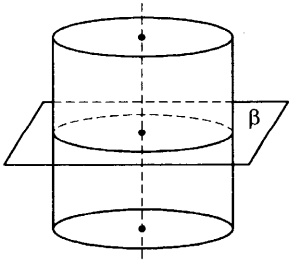
Определение. *Цилиндр* — это тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями, пересекающими эту поверхность (цилиндрическая поверхность — это поверхность, получаемая таким поступательным движением прямой в пространстве, что каждая выделенная точка прямой (образующей) движется вдоль окружности).

Круги, получившиеся в пересечениях цилиндрической поверхности с плоскостями, называются *основаниями цилиндра,* а отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей кругов, — *образующими цилиндра.*

Определение. Если образующие цилиндра перпендикулярны плоскостям оснований, то цилиндр называется *прямым.*

Свойство 1. Образующие любого цилиндра параллельны и равны.

Свойство 2. Сечение цилиндра плоскостью, параллельной плоскости основания и пересекающей боковую поверхность, является кругом, равным основанию.

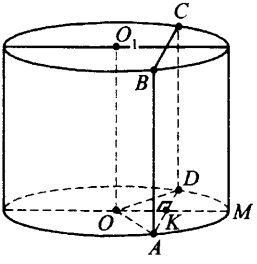


Теорема 1. Объем прямого кругового цилиндра равен $\pi R^2 h$, где R — радиус основания цилиндра, а h — высота цилиндра.

Теорема 2. Площадь боковой поверхности прямого кругового цилиндра равна $2\pi Rh$.

Теорема 3. Площадь полной поверхности прямого кругового цилиндра равна $2\pi R^2 + 2\pi Rh$.

Пример 1. Высота цилиндра 6 см, радиус основания 5 см. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 см от нее.



Решение: В равнобедренном ΔAOD $OK \perp AD$; так что $OK = 4$ (см). Далее, по теореме Пифагора в ΔAOK:

$AK = \sqrt{OA^2 - OK^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (см), а $AD = 2AK = 6$ (см).

Тогда $S_{ABCD} = AD \cdot AB = 6 \cdot 6 = 36$ (см^2).

О т в е т: 36 см^2.

Пример 2. Во сколько раз надо увеличить высоту цилиндра, не меняя его основание, чтобы объем увеличился в n раз? Во сколько раз надо увеличить радиус основания цилиндра, не меняя высоту, чтобы объем увеличился в n раз?

Решение: Объем цилиндра равен $V = S_{\text{осн}} \cdot h$.

Тогда, если $\frac{V'}{V_0} = n$, то $\frac{S' \cdot h'}{S_0 \cdot h_0} = n$ и $S' = S_0$, то $h' = nh_0$.

То есть, если не менять основание, то для того, чтобы объем увеличить в n раз, надо высоту цилиндра увеличить в n раз.

Далее, если $\frac{V'}{V_0} = n$, и $h' = h_0$,

то $\frac{S' \cdot h'}{S_0 \cdot h_0} = \frac{\pi (R')^2}{\pi R_0^2} = \left(\frac{R'}{R_0}\right)^2 = n$, так что $R' = \sqrt{n} \cdot R_0$.

То есть чтобы при неизменной высоте увеличить объем цилиндра в n раз, надо радиус основания увеличить в $\sqrt{n}$ раз.

Ответ: в n раз и в $\sqrt{n}$ раз.

Прямой круговой конус

Определение. *Конус* — это тело, полученное вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов. Получившийся при вращении круг называется *основанием конуса,* общая точка гипотенузы и катета, вокруг которого производилось вращение, — *вершиной конуса.*

Высота конуса — перпендикуляр, опущенный из вершины на плоскость основания (т.е. катет исходного треугольника, вокруг которого осуществлялось вращение).

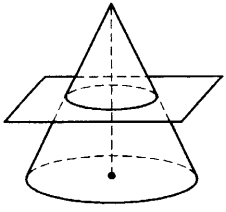
Осью прямого кругового конуса называется прямая, содержащая его высоту.

Теорема. Объем конуса равен одной третьей произведения площади основания на высоту: $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$.

Усеченный конус

Проведем сечение конуса плоскостью, параллельной основанию.

Нижняя часть конуса называется *усеченным конусом.*

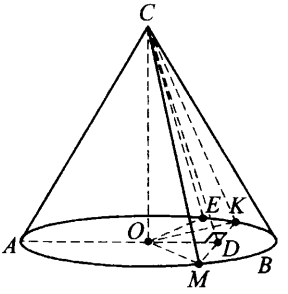


Объем усеченного конуса равен $V = \frac{1}{3}h(\pi R^2 + \pi Rr + \pi r^2)$,

h — высота усеченного конуса, а R, r — радиусы оснований.

h — высота усеченного конуса, а R, r — радиусы оснований.

Пример 1. Высота конуса 20, радиус его основания 25. Найдите площадь сечения, проведенного через вершину, если расстояние от него до центра основания конуса равно 12.



Решение: Проведем $OD \perp MK$ в равнобедренном ΔOMK. По теореме о трех перпендикулярах $CD \perp MK$ проведем $OE \perp CD$ в ΔCOD.

Тогда OE — данное расстояние от центра основания конуса до плоскости MCK $OE = 12$.

Так что в ΔCOD: $\sin\angle OCE = \frac{OE}{OC} = \frac{12}{20} = 0{,}6$.

Тогда $\cos\angle OCE = \sqrt{1 - \sin^2\angle OCE} = \sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8$.

Так что $\operatorname{tg}\angle OCE = \frac{\sin\angle OCE}{\cos\angle OCE} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$.

Далее, $OD = CO \cdot \operatorname{tg}\angle OCE = 20 \cdot 0{,}75 = 15$,

$CD = = \sqrt{OD^2 + CO^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$.

В ΔOMD по теореме Пифагора

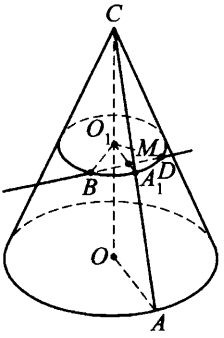
$MD = \sqrt{OM^2 - OD^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$,

так что $MK = 2MD = 40$.

$$S_{MCK} = \frac{1}{2} MK \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 25 = 500.$$

О т в е т: 500.

Пример 2. Образующая конуса 13 см, высота 12 см. Конус пересечен прямой, параллельной основанию, расстояние от нее до основания равно 6 см, а до высоты — 2 см. Найдите отрезок прямой, заключенный внутри конуса.



Решение: Из ΔCOA по теореме Пифагора

$$OA = \sqrt{CA^2 - CO^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$$

Проведем плоскость, параллельную основанию и содержащую данную прямую BD. Тогда проведенная плоскость отсечет от конуса подобный конус.

Далее, $\Delta CO_1A_1 \sim \Delta COA$.

Тогда $\frac{O_1A_1}{OA} = \frac{CO_1}{CO}$,

т.е. $O_1A_1 = \frac{OA \cdot CO_1}{CO} = \frac{5 \cdot (12-6)}{12} = 2{,}5$ (см).

Далее в ΔBO_1D проведем $O_1M \perp BD$.

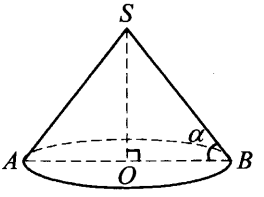
Тогда в прямоугольном ΔBO_1M

$BM = \sqrt{BO_1^2 - O_1M^2} = \sqrt{2{,}5^2 - 2^2} = 1{,}5$ (по теореме Пифагора).

Так что $BD = 2 \cdot BM = 2 \cdot 1{,}5 = 3$ (см).

О т в е т: 3 см.

Пример 3. Длина образующей конуса равна l, а длина окружности основания — C. Найдите объем конуса.



Решение: Формула для длины окружности

$C = 2\pi R$.

Так что $OB = R = \dfrac{C}{2\pi}$.

Далее в прямоугольном ΔSBO по теореме Пифагора получаем:

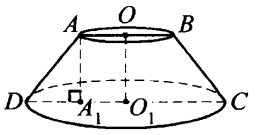
$$SO = \sqrt{BS^2 - OB^2} = \sqrt{l^2 - \frac{C^2}{4\pi^2}} = \frac{\sqrt{4\pi^2 l^2 - C^2}}{2\pi}.$$

Тогда $V = \dfrac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \dfrac{1}{3} \pi R^2 \cdot SO = \dfrac{1}{3} \pi \cdot \dfrac{C^2}{4\pi^2} \cdot \dfrac{\sqrt{4\pi^2 l^2 - C^2}}{2\pi} =$

$= \dfrac{C^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 l^2 - C^2}$.

О т в е т: $\dfrac{C^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 l^2 - C^2}$.

Пример 4. Радиусы оснований усеченного конуса R и r, образующая наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем.



Решение: Проведем высоту OO_1. Тогда AOO_1D — прямоугольная трапеция. Проведем $AA_1 \perp DO_1$.

AOO_1A_1 — прямоугольник, так что

$AO = A_1O_1 = r$.

Тогда $DA_1 = DO_1 - A_1O_1 = R - r$.

Далее, в прямоугольном треугольнике ΔDAA_1 $\angle ADA_1 = 45°$, так что $\angle DAA_1 = 90° - \angle ADA_1 = 45°$. Поэтому ΔDAA_1 — равнобедренный и $AA_1 = DA_1 = R - r = OO_1$ — высота конуса. Тогда

$$V = \frac{1}{3}\pi OO_1 \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2) = \frac{1}{3}\pi(R - r)(R^2 + Rr + r^2) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi(R^3 - r^3).$$

Ответ: $V = \frac{1}{3}\pi(R^3 - r^3)$*.

Шар и сфера

Определение. Тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем заданного от некоторой данной точки, называется *шаром*. Эта точка — *центр шара*, а заданное расстояние — *радиус*.

Определение. Граница шара называется *сферой*.

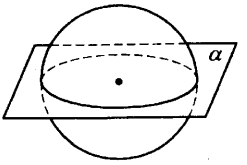
Определение. Отрезок, который соединяет две точки сферы и проходит через центр шара, называется *диаметром*.

Свойство 1. Любое сечение шара плоскостью есть круг. Центром этого круга является основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

Определение. Плоскость, которая проходит через центр шара, называется *диаметральной плоскостью*. Сечение ею шара — *большим кругом*, а сечение сферы — *большой окружностью*.

---

* Мы получили формулу для объема усеченного конуса в том случае, когда его высота равна разности радиусов оснований.



Теорема. Любая диаметральная плоскость шара является его плоскостью симметрии. Центр шара является его центром симметрии.

Определение. Плоскость, проходящая через точку R сферы и перпендикулярно радиусу, проведенному в эту точку, называется *касательной плоскостью*. Точка R называется *точкой касания*.

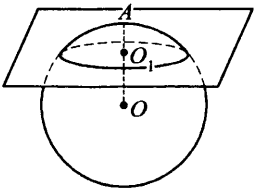
Теорема. Касательная плоскость пересекается с шаром в единственной точке — в точке касания.

Теорема. Линией пересечения двух сфер является окружность.

Теорема. Объем шара равен

$$\frac{4}{3}\pi R^3.$$

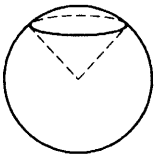
Определение. *Шаровым сегментом* называется часть шара, отсекаемая от него плоскостью.



$O_1A = H$ — высота шарового сегмента.

Свойство. Объем шарового сегмента равен $\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right)$, где H – высота шарового сегмента.

Определение. *Шаровым сектором* называется тело, которое получается из шарового сегмента и конуса, основанием которого является сечение плоскостью данного шара.



Свойство. Объем шарового сектора равен $\frac{2}{3}\pi R^2 H$.

Теорема. Площадь сферы радиуса R вычисляется по следующей формуле: $S = 4\pi R^2$.

Пример 1. Чугунный шар регулятора имеет массу 10 кг. Найдите диаметр шара (плотность чугуна 7,2 г/см^3).

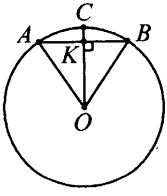
Решение: Плотность ρ = 7,2 г/см^3 = 7200 кг/м^3. Далее, объем шара $V = \frac{m}{\rho} = \frac{10}{7200} = \frac{1}{720}$.

Так как $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi d^3}{6}$,

то $d = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi 720}} = \sqrt[3]{\frac{1}{120\pi}} \approx 0{,}14$ (м).

Ответ: 0,14 (м).

Пример 2. Чему равен объем шарового сектора, если радиус окружности его основания 60 см, а радиус шара 75 см?



Решение: Рассмотрим осевое сечение шара.

В прямоугольном ΔOBK OB = 75см, KB = 60 см (по условию).

Тогда по теореме Пифагора

$OK = \sqrt{OB^2 - BK^2} = \sqrt{75^2 - 60^2} = 45$ (см).

Так что высота шарового сегмента $CK = CO - OK = 75 - 45 = 30$.

И объем одного сегмента:

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi CO^2 \cdot KC = \frac{2}{3}\pi \cdot 75^2 \cdot 30 = 112\,500\pi = 112{,}5\pi \text{ (дм}^3\text{)}.$$

Ответ: $112{,}5\,\pi$ дм^3.

Пример 3. Площади поверхностей двух шаров относятся как $m:n$. Как относятся их объемы?

Решение: Площадь поверхности шара вычисляется по формуле $S = 4\pi R^2$.

Тогда, если $\frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_2^2} = \frac{m}{n}$, то $\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{m}{n}}$; так что

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 = \left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right)^3 = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Ответ: $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{3}{2}}$.

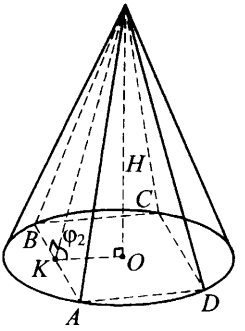
5.8. Комбинации многогранников и тел вращения

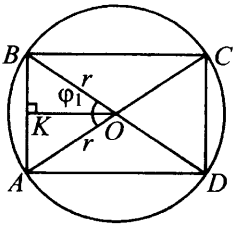
Пример 1. В конус вписана пирамида, основанием которой является прямоугольник. Меньшая сторона прямоугольника равна A, а острый угол между его диагоналями равен φ_1. Боковая грань, содержащая меньшую сторону основания, составляет с плоскостью основания двугранный угол φ_2. Найдите объем конуса.

Решение: Пусть PO — это высота конуса, $PO = H$, $AB < AD$.

Построим $OK \perp AB$.

По теореме о трех перпендикулярах PK перпендикулярен AB.





$$\frac{PO}{OK} = \operatorname{tg}\varphi_2,\ \frac{H}{OK} = \operatorname{tg}\varphi_2,$$

$H = OK \cdot \operatorname{tg}\varphi_2$.

В основании пирамиды:

$AB = a$, $BO = OD = AO = OC$ — по свойству диагоналей прямоугольника, $BO = R$.

В треугольнике ABO:

$$\angle ABO = \angle BAO = \frac{180° - \varphi_1}{2} = 90° - \frac{\varphi_1}{2}.$$

По теореме синусов запишем:

$$\frac{a}{\sin\varphi_1} = \frac{R}{\sin(90° - \frac{\varphi_1}{2})};$$

$$R = \frac{a \cdot \sin(90° - \frac{\varphi_1}{2})}{\sin\varphi_1} = \frac{a \cdot \cos\frac{\varphi_1}{2}}{2 \cdot \sin\frac{\varphi_1}{2} \cdot \cos\frac{\varphi_1}{2}} = \frac{a}{2\sin\frac{\varphi_1}{2}}.$$

Из треугольника BKO:

$$OK = R \cdot \cos\frac{\varphi_1}{2} = \frac{a \cdot \cos\frac{\varphi_1}{2}}{2 \cdot \sin\frac{\varphi_1}{2}}.$$

$$H = OK \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{a \cdot \cos\frac{\varphi_1}{2}}{2 \cdot \sin\frac{\varphi_1}{2}} \cdot \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{a \cdot \operatorname{tg}\varphi_2}{2\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}};$$

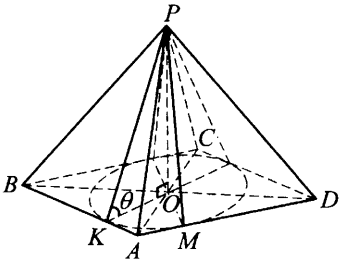
$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a^2}{4\sin^2\frac{\varphi_1}{2}} \cdot \frac{a \cdot \operatorname{tg}\varphi_2}{2\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}} =$$

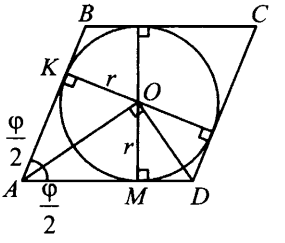
$$= \frac{\pi a^3 \operatorname{tg}\varphi_2}{24\sin^2\frac{\varphi_1}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi a^3 \operatorname{tg}\varphi_2}{24\sin^2\frac{\varphi_1}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}}$.

Пример 2. Основанием пирамиды является ромб со стороной A и острым углом φ. В пирамиду вписан конус, образующая которого составляет с плоскостью основания угол θ. Найдите объем конуса.

Решение: Пусть PO — высота пирамиды, обозначим $PO = H$. PK — образующая конуса, которая лежит в плоскости APB, $OK \perp AB$.





В основании пирамиды рассмотрим:

$ABCD$ — ромб, $AB = a$.

$$S_{ABCD} = 4S_{AOD} = 2S_{ABC};\ S_{ABCD} = 2\left(\frac{1}{2}a \cdot a \cdot \sin\varphi\right) = a^2 \sin\varphi;$$

$$S_{AOD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot OM = \frac{1}{2}ar.$$

Пришли к уравнению:

$a^2 \sin\varphi = 4 \cdot \frac{1}{2} ar$, откуда $r = \frac{1}{2} a \sin\varphi$.

Из прямоугольного треугольника POK: $\frac{PO}{OK} = \operatorname{tg}\theta$ ($\angle PKO$ — угол, который образующая конуса РК составляет с ее проекцией OK).

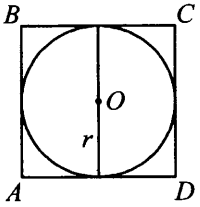
$\frac{H}{OK} = \operatorname{tg}\theta$, $H = r \cdot \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2} a \cdot \sin\varphi \cdot \operatorname{tg}\theta$. $V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \pi r^2 H =$

$= \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{a^2 \sin^2 \varphi}{4} \cdot \frac{1}{2} a \sin\varphi \cdot \operatorname{tg}\theta = \frac{\pi a^3}{24} \sin^3\varphi \cdot \operatorname{tg}\theta$.

Ответ: $\frac{\pi a^3}{24} \sin^3\varphi \cdot \operatorname{tg}\theta$.

Пример 3. В цилиндр вписан шар. Найдите отношение объемов цилиндра и шара.

Решение: Рассмотрим осевое сечение.



Пусть сторона квадрата равна x, следовательно радиус шара $r = \frac{x}{2}$.

$V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{4\pi x^3}{3 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{\pi x^3}{6}$.

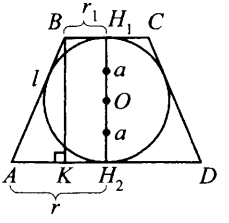
Радиус основания цилиндра равен $\frac{x}{2}$, высота цилиндра равна x, следовательно $V_{цил} = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot x = \frac{\pi x^3}{4}$ $\frac{V_{цил}}{V_ш} = \frac{\frac{\pi x^3}{4}}{\frac{\pi x^3}{6}} =$

$= \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Пример 4. В усеченный конус, радиусы оснований которого равны r и r_1, вписан шар. Найдите отношение объемов усеченного конуса и шара.

Решение: Рассмотрим осевое сечение конуса.



H_1, H_2 — центры оснований, $ABCD$ — сечение, которое является равнобедренной трапецией.

$BH_1 = r_1$, $AH_2 = r$.

Обозначим радиус вписанного шара a.

$V_ш = \frac{4}{3}\pi a^3$.

Высота конуса есть диаметр шара, $H_1H_2 = 2a$.

$V_{кон} = \frac{1}{3}\pi \cdot H_1H_2(r^2 + r_1^2 + rr_1) = \frac{1}{3}\pi \cdot 2a(r^2 + r_1^2 + rr_1)$.

$$\frac{V_{кон}}{V_ш} = \frac{\frac{2\pi a}{3}(r^2 + r_1^2 + rr_1)}{\frac{4}{3}\pi a^2} = \frac{r^2 + r_1^2 + rr_1}{2a^2}.$$

В описанном 4-угольнике суммы противоположных сторон равны.

$BC + AD = AB + CD = 2AB$.

Обозначим $AB = l$, следовательно $2r_1 + 2r = 2l$, $l = r_1 + r$.

Построим ВК перпендикулярно AD.

$AK = r - r_1$, $BK = H_1H_2 = 2a$.

Из прямоугольного треугольника ABK:

$$2a = \sqrt{l^2 - AK^2} = \sqrt{(r_1 + r)^2 - (r - r_1)^2} =$$

$$= \sqrt{r_1^2 + r^2 + 2r_1r - r^2 - r_1^2 + 2rr_1} = \sqrt{4r_1r} = 2\sqrt{r_1r},\ a = \sqrt{r_1r}.$$

Подставляя выражение для a в формулу (1), получаем:

$$\frac{V_{\text{кон}}}{V_{\text{ш}}} = \frac{r^2 + r_1^2 + rr_1}{2rr_1}.$$

Ответ: $\dfrac{r^2 + r_1^2 + rr_1}{2rr_1}$.

6. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Элементы комбинаторики

Поочередный выбор (т.е. выбор с учетом порядка)

Пусть из общего количества n объектов необходимо отобрать группу из m объектов *с учетом порядка их следования*. Каждый способ выбора этих объектов называется *размещением без повторения*. Количество различных способов такого выбора:

$$A_n^m = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

В частности, если $m = n$ и подобный выбор идентичен расположению n объектов в определенном порядке следования друг за другом, то способы такого расположения называются *перестановками* и общее число перестановок равно:

$$P_n = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1 = n!$$

Пусть теперь n — количество различных видов объектов, и нам нужно отобрать m объектов *с учетом порядка их следования*, при этом объект каждого вида можно использовать несколько раз. Такие способы выбора называются *размещениями с повторениями*, и их количество равно:

$$\overline{A}_n^m = n^m$$

Одновременный выбор (т.е. выбор без учета порядка)

Пусть из общего количества n объектов необходимо отобрать группу из m объектов *без учета порядка их следования*. Каждый способ выбора этих объектов называется *сочетанием*. Количество различных способов такого выбора:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Бином Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \cdots + C_n^k a^{n-k}b^k + \cdots + C_n^n b^n.$$

Числа сочетаний C_n^k называют также *биномиальными коэффициентами*.

Элементы теории вероятностей

Событие, являющееся результатом некоторого испытания (эксперимента), которое при выполнении некоторого набора условий может как произойти, так и не произойти, называется *случайным событием* (обычно обозначаются латинскими буквами $A, B, C, \ldots$). Событие, которое в результате испытания наступит обязательно, называют *достоверным* (обозначается Ω); событие, которое никогда не может наступить — *невозможным* (обозначается $\varnothing$).

Сумма двух событий A и B — это событие $C = A + B = \{\text{произойдет хотя бы одно из событий } A; B\}$.

Произведение событий A и B — это событие $C = A \cdot B = \{\text{произойдет и событие } A \text{ и событие } B\}$.

Событие $\overline{A} = \{\text{событие } A \text{ не произойдет}\}$ называется *противоположным* событию A.

События A и B называются *несовместными*, если в данном испытании они не могут наступить одновременно, т.е. $A \cdot B = \varnothing$.

События A и B называются *независимыми*, если наступление одного из них в данном испытании никак не влияет на наступление другого. В противоположном случае события называются *зависимыми*.

Вероятность — это числовая характеристика степени объективной возможности наступления данного события.

Классическое определение вероятности. Пусть достоверное событие $\Omega = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, где $A_i (i = 1,2,\ldots n)$ — элементарные, равновозможные и попарно несовместные события. Тогда вероятность события A равна отношению числа m элементарных событий, благоприятствующих событию A, к числу n всех равновозможных элементарных событий:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Теорема сложения вероятностей

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

В частности,

1. если A и B несовместные события, то $P(A+B)=P(A)+P(B)$;
2. $P(\overline{A})=1-P(A)$.

Теорема умножения вероятностей

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B),$$

где $P(A|B)$ — вероятность события A, найденная при условии того, что событие B уже наступило (так называемая *условная вероятность*).

В частности, если события A и B независимы, то $P(AB)=P(A)P(B)$.

ЗАДАЧИ
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. ВЫРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1.1. Корень степени *n*

1) Найдите значение выражения $\sqrt[3]{27 \cdot 125 \cdot 8}$.

1) 15; 3) 30;
2) 60; 4) 18.

2) Найдите значение выражения $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{27}$.

1) 6; 3) 10;
2) 12; 4) 18.

3) Найдите значение выражения $\sqrt[3]{\frac{343}{8} \cdot \frac{27}{125}}$.

1) 21; 3) 13;
2) 3,5; 4) 2,1.

4) Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[4]{48} \cdot \sqrt{245}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{3}}$.

1) 14; 3) 15;
2) 8; 4) 0,4.

5) Найдите значение выражения $\sqrt[3]{3^3} + \sqrt{7^2} - \sqrt[3]{6^6}$.

1) –26; 3) 46;
2) –20; 4) 18.

6) Найдите значение выражения $\left(\sqrt[13]{\sqrt{11}}\right)^{26} + \left(\sqrt[5]{\sqrt{2}}\right)^{15}$.

1) 13; 3) 258;
2) 129; 4) –15.

7) Найдите значение выражения $\sqrt{\sqrt[3]{2^6 \cdot 6^{12}}}$.

1) 12; 3) 24;
2) 72; 4) 288.

8) Найдите значение выражения $\sqrt[4]{2^8 \cdot 3^{12}}$.

1) 36; 2) 6; 3) 24; 4) 108.

9) Найдите значение выражения $\sqrt[17]{\frac{36^{34}}{4^{51}}}-\sqrt[3]{\frac{1}{2^6}}$.

1) 17; 3) 20;
2) –3; 4) 35.

10) Найдите значение выражения $\sqrt{\sqrt[3]{3^{11}}\cdot\sqrt[3]{3}}+\sqrt[7]{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13^{13}}}$.

1) 22; 3) –10;
2) 16; 4) 256.

11) Найдите значение выражения $\sqrt[3]{\frac{\sqrt[15]{17^{46}}}{\sqrt[15]{17}}}-\sqrt[7]{\frac{\sqrt[4]{5^{57}}}{\sqrt[4]{5}}}$.

1) 22; 3) –108;
2) 12; 4) –8.

12) Найдите значение выражения $\left(\sqrt[18]{4^3\cdot 27^2}\right)^3$.

1) 8; 3) 6;
2) 18; 4) 144.

13) Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[24]{2^{36}\cdot 81^6\cdot 49^{12}}}{\sqrt{2}}$.

1) 84; 3) $\sqrt{3}$;
2) 42; 4) $\sqrt[4]{21}$.

14) Вычислите: $\sqrt[3]{216\cdot 0{,}001}$.

1) 0,6; 3) 0,006;
2) 6; 4) 60.

15) Вычислите: $\sqrt[4]{81\cdot 0{,}0625}$.

1) 0,15; 3) 15;
2) 1,5; 4) 150.

16) Вычислите: $\sqrt{25:0{,}04}\cdot\sqrt[3]{27:125}$.

1) 15; 3) 45;
2) 30; 4) 60.

17) Вычислите: $\frac{1}{\sqrt{25\cdot 0{,}09}}\cdot\sqrt[3]{125\cdot 0{,}027\cdot 64}$.

1) 2; 2) 1; 3) 4; 4) 8.

18) Вычислите: $\frac{\sqrt[3]{216 \cdot 0{,}125}}{\sqrt[5]{243}}$.

1) 2;
2) 1;
3) 0,6;
4) 0,5.

19) Вычислите: $\sqrt[3]{64 \cdot 0{,}125}$.

1) 4;
2) 8;
3) 0,5;
4) 2.

20) Вычислите: $\sqrt[3]{0{,}001 \cdot 27}$.

1) 0,3;
2) 0,03;
3) 0,027;
4) 3.

21) Вычислите: $\sqrt[4]{0{,}0016 \cdot 81}$.

1) 0,36;
2) 18;
3) 4;
4) 0,6.

22) Вычислите: $\sqrt[3]{64 \cdot 0{,}001}$.

1) 0,08;
2) 0,4;
3) 0,04;
4) 0,16.

23) Вычислите: $\sqrt[4]{0{,}0081 \cdot 16}$.

1) 0,12;
2) 1,2;
3) 0,6;
4) 3,6.

24) Вычислите: $\sqrt[3]{24 \cdot 9}$.

1) 12;
2) 6;
3) 18;
4) 3.

25) Вычислите: $\sqrt[4]{24 \cdot 54}$.

1) 4;
2) 6;
3) 12;
4) 3.

26) Вычислите: $\sqrt[3]{80 \cdot 100}$.

1) 20;
2) 5;
3) 10;
4) 8.

27) Вычислите: $\sqrt[4]{144 \cdot 144}$.

1) 6;
2) 4;
3) 18;
4) 12.

28) Вычислите: $\sqrt[5]{48 \cdot 162}$.

1) 9; 3) 6;

2) 3; 4) 5.

29) Вычислите: $\sqrt[3]{98 \cdot 28}$.

1) 14; 3) 2;

2) 7; 4) 6.

30) Вычислите: $\sqrt[4]{162 \cdot 648}$.

1) 9; 3) 12;

2) 18; 4) 4.

31) Вычислите: $\sqrt[3]{45 \cdot 75}$.

1) 10; 3) 15;

2) 25; 4) 5.

32) Вычислите: $\sqrt[4]{45 \cdot 1125}$.

1) 5; 3) 9;

2) 25; 4) 15.

33) Вычислите: $\sqrt[3]{175 \cdot 245}$.

1) 25; 3) 5;

2) 35; 4) 49.

1.2. Степень с рациональным показателем

34) Найдите значение выражения $7^{\frac{1}{7}} \cdot 7^{\frac{2}{7}} \cdot 7^{\frac{4}{7}} - 5^{\frac{1}{9}} \cdot 5^{\frac{3}{9}} \cdot 5^{\frac{5}{9}}$.

1) $\sqrt{7} + \sqrt{5}$; 3) 2;

2) 12; 4) $7^{\frac{1}{7}} - 5^{\frac{1}{9}}$.

35) Найдите значение выражения $\dfrac{3^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}} - 3^{\frac{1}{3}}$.

1) 0; 3) $2 \cdot 3^{\frac{2}{3}}$;

2) $3 - \sqrt[3]{3}$; 4) 6.

36) Найдите значение выражения $\left(125^{\frac{7}{15}}\right)^{\frac{15}{21}} + \left(8^{\frac{7}{15}}\right)^{\frac{15}{21}}$.

1) 1768; 2) 7; 3) 1; 4) $5\sqrt[7]{10}$.

37) Найдите значение выражения $(27\cdot 4)^{\frac{1}{6}} - 3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}$.

1) $2\sqrt{6}$;
3) $-\sqrt[6]{12}$;
2) 12;
4) 0.

38) Найдите значение выражения $\left(\frac{125}{16}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left(\frac{256}{25}\right)^{\frac{1}{8}}$.

1) 2,5;
3) $\sqrt{5}$;
2) 10;
4) 1.

39) Найдите значение выражения

$123^{\frac{5}{6}}\cdot(123)^{\frac{2}{3}} : 123^{\frac{1}{2}} - 10^{\frac{7}{8}}\cdot 10^{\frac{3}{4}}\cdot 10^{\frac{3}{8}}$.

1) 23;
3) 0;
2) 113;
4) –877.

40) Найдите значение выражения

$$\frac{\left(49^{\frac{1}{3}}\cdot 64^{\frac{1}{18}}\right)^3}{7} + \frac{\left(36^3\cdot 81^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{18}.$$

1) 92;
3) 2;
2) 50;
4) 0.

41) Найдите значение выражения $\frac{28^{\frac{1}{2}} + 63^{\frac{1}{2}}}{5} - 7^{\frac{1}{2}}$.

1) $\sqrt{7}$;
3) $\sqrt{3}-\sqrt{7}$;
2) 36;
4) 0.

42) Найдите значение выражения $\frac{135^{\frac{1}{3}} - 40^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{3}}} + 125^{\frac{1}{3}}$.

1) $2\sqrt[3]{5}$;
3) 6;
2) 25;
4) 0.

43) Найдите значение выражения

$$\left(8^{\frac{1}{2}}\cdot 27^{\frac{1}{2}}\cdot 64^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\left(128^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{5}{7}}.$$

1) 0;
2) –64;
3) 10;
4) 100.

44) Упростите выражение $\dfrac{l^{\frac{4}{7}}-9}{l^{\frac{2}{7}}+3}+3$.

1) $-2l^{\frac{2}{7}}$;
3) 0;
2) 6;
4) $l^{\frac{2}{7}}$.

45) Упростите выражение $\dfrac{k+8}{k^{\frac{2}{3}}-2k^{\frac{1}{3}}+4}-k^{\frac{1}{3}}$.

1) $-2k^{\frac{1}{3}}$;
3) $k^{\frac{2}{3}}+4$;
2) 2;
4) $k^{\frac{1}{3}}+2$.

46) Упростите выражение $2a+\dfrac{a^3+21a^2+147a+343}{(a+7)^2}-7$.

1) $3a$;
3) -14;
2) a^2+49;
4) $2a-6$.

47) Упростите выражение $\dfrac{z^3-125}{z^2+5z+25}+\dfrac{z^3+125}{z^2-5z+25}$.

1) z^2;
3) $2z$;
2) -250;
4) 0.

48) Упростите выражение $\left(a^{\frac{1}{3}}+2\right)^3-12a^{\frac{1}{3}}-6a^{\frac{2}{3}}$.

1) $a+8-12a^{\frac{1}{3}}-6a^{\frac{2}{3}}$;
3) $-24a^{\frac{1}{3}}-12\cdot a^{\frac{2}{3}}$;
2) 4;
4) $a+8$.

49) Упростите выражение $\left(a^{\frac{1}{2}}+7\right)^2-\left(a^{\frac{1}{2}}-7\right)^2$.

1) $28a^{\frac{1}{2}}$;
3) 98;
2) 0;
4) $a+49$.

50) Упростите выражение $\left(c^{\frac{1}{3}}-3\right)^3+\left(c^{\frac{1}{3}}+3\right)^3$.

1) $2c^{\frac{1}{3}}$;
3) -18;
2) $2c+54c^{\frac{1}{3}}$;
4) $c^{\frac{2}{3}}-9$.

51) Представьте выражение $a^{\frac{7}{3}} : a^{-\frac{2}{3}}$ в виде степени с основанием a.

1) $a^{\frac{5}{3}}$; 2) a^3; 3) $a^{-\frac{14}{9}}$; 4) $a^{-\frac{7}{2}}$.

52) Представьте выражение $a^{\frac{1}{5}} \cdot a^{-\frac{6}{5}}$ в виде степени с основанием a.

1) a^{-1}; 2) $a^{\frac{7}{5}}$; 3) $a^{-\frac{6}{25}}$; 4) a^{-6}.

53) Представьте выражение $\left(a^{\frac{3}{2}} : a^{\frac{7}{2}}\right) \cdot a^4$ в виде степени с основанием a.

1) a^9; 2) a; 3) a^2; 4) a^3.

54) Представьте выражение $\left(a^{\frac{2}{3}} : a^{-\frac{5}{3}}\right) \cdot a^{\frac{5}{3}}$ в виде степени с основанием a.

1) a^4; 2) $a^{-\frac{50}{27}}$; 3) $a^{\frac{2}{3}}$; 4) a^2.

55) Представьте выражение $\left(a^{\frac{3}{2}} : a^{-\frac{7}{2}}\right) \cdot a^3$ в виде степени с основанием a.

1) a; 2) a^3; 3) a^8; 4) $a^{-\frac{9}{4}}$.

56) Представьте выражение $a^{\frac{7}{2}} \cdot a^{-\frac{3}{2}}$ в виде степени с основанием a.

1) a^2; 2) a^5; 3) $a^{-\frac{21}{4}}$; 4) a^{-2}.

57) Представьте выражение $a^{\frac{7}{6}} : a^{-\frac{5}{6}}$ в виде степени с основанием a.

1) $a^{\frac{1}{3}}$; 2) $a^{-\frac{35}{36}}$; 3) a^2; 4) $a^{-\frac{7}{5}}$.

58) Представьте выражение $a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{3}}$ в виде степени с основанием a.

1) $a^{-\frac{4}{9}}$; 2) a^1; 3) $a^{\frac{5}{3}}$; 4) $a^{-\frac{5}{3}}$.

59) Представьте выражение $a^{\frac{11}{4}} : a^{\frac{3}{4}}$ в виде степени с основанием a.

1) a^2; 2) $a^{\frac{14}{4}}$; 3) $a^{\frac{33}{16}}$; 4) $a^{\frac{14}{16}}$.

60) Представьте выражение $a^{\frac{6}{5}} \cdot a^{-\frac{1}{5}}$ в виде степени с основанием a.

1) $a^{\frac{7}{5}}$; 2) $a^{-\frac{6}{5}}$; 3) a^1; 4) $a^{-\frac{6}{25}}$.

61) Представьте в виде степени выражение $4^{\frac{1}{6}} \cdot 4^{\frac{11}{6}}$.

1) $16^{\frac{11}{36}}$; 2) $4^{\frac{11}{36}}$; 3) 16^2; 4) 4^2.

62) Представьте в виде степени выражение $3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{10}{3}}$.

1) $9^{\frac{20}{9}}$; 2) $3^{\frac{20}{9}}$; 3) 3^4; 4) 9^4.

63) Представьте в виде степени выражение $5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}}$.

1) 5^1; 2) 25^1; 3) $5^{\frac{10}{49}}$; 4) $5^{\frac{1}{2}}$.

64) Представьте в виде степени выражение $4^{\frac{2}{13}} \cdot 4^{1\frac{11}{13}}$.

1) 162; 2) 4^2; 3) $4^{1\frac{22}{13}}$; 4) $4^{1\frac{22}{169}}$.

65) Представьте в виде степени выражение $6^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{8}{3}}$.

1) $6^{\frac{8}{9}}$; 2) 36^3; 3) 6^3; 4) 6.

66) Представьте в виде степени выражение $3^{\frac{2}{7}} \cdot 3^{\frac{33}{7}}$.

1) 3^5; 2) 35; 3) $3^{\frac{66}{49}}$; 4) 9^5.

67) Представьте в виде степени выражение $7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{5}{2}}$.

1) 7^3; 2) $7^{\frac{5}{4}}$; 3) 3; 4) 2.

68) Представьте в виде степени выражение $2^{\frac{5}{7}} \cdot 2^{\frac{16}{7}}$.

1) 42; 2) 2^3; 3) $2\frac{80}{49}$; 4) $2^{\frac{21}{14}}$.

69) Представьте в виде степени выражение $4^{\frac{1}{5}} \cdot 4^{\frac{9}{5}}$.

1) $4^{\frac{9}{5}}$; 3) 4^2;

2) $4^{\frac{9}{25}}$; 4) $16^{\frac{9}{25}}$.

70) Представьте в виде степени выражение $5^{\frac{1}{8}} \cdot 5^{\frac{15}{8}}$.

1) 5^2; 3) $5^{\frac{15}{64}}$;

2) 25^2; 4) $25^{\frac{15}{16}}$.

71) Вычислите: $\left(2{,}1\sqrt[4]{16\sqrt[3]{4}} + 1{,}9\sqrt{4\sqrt[6]{4}}\right)^{-\frac{6}{19}}$.

72) Вычислите: $\left(1{,}5\sqrt[3]{25\sqrt{5}} + 3{,}5\sqrt{5\sqrt[3]{25}}\right)^{-\frac{6}{11}}$.

73) Вычислите: $\left(0{,}3\sqrt[4]{27\sqrt{3}} + 2{,}7\sqrt{3\sqrt[4]{27}}\right)^{\frac{16}{15}}$.

74) Вычислите: $\left(1{,}1\sqrt{8\sqrt{2}} + 0{,}9\sqrt{4\sqrt{8}}\right)^{\frac{12}{11}}$.

75) Вычислите: $\left(2{,}2\sqrt{36\sqrt{6}} + 3{,}8\sqrt[4]{36\sqrt{6^6}}\right)^{-\frac{4}{9}}$.

76) Вычислить: $\left(1{,}02 \cdot \sqrt{7 \cdot \sqrt[3]{49}} + 5{,}98\sqrt[3]{49\sqrt{7}}\right)^{-\frac{12}{11}}$.

77) Вычислите: $\left(2{,}3\sqrt[5]{3\sqrt[3]{3}} + 0{,}7\sqrt[15]{81}\right)^{\frac{15}{19}}$.

78) Вычислите: $\left(1{,}5\sqrt[5]{4\sqrt[3]{16}} + 2{,}5\sqrt[3]{4}\right)^{-\frac{3}{8}}$.

79) Вычислите: $\left(3{,}7\sqrt[3]{64\sqrt{8}} + 4{,}3\sqrt{8\sqrt[3]{64}}\right)^{\frac{2}{11}}$.

80) Вычислите: $\left(1{,}2\sqrt[7]{2\sqrt{32}} + 0{,}8\sqrt{2}\right)^2$.

1.3. Логарифм

81) Найдите значение выражения $\log_7 28 - \log_7 4$.

1) 1;
2) $\log_7 24$;
3) 0;
4) 7.

82) Найдите значение выражения $\log_{53}2 + \log_{53}3 + \log_{53}7$.

1) 12;
2) 1;
3) $\log_{53}42$;
4) $\log_{53}12$.

83) Найдите значение выражения $\log_{23}\frac{2}{3} + \log_{23}6 - \log_{23}4$.

1) $\log_{46}10$;
2) $\log_{23}4$;
3) 6
4) 0.

84) Найдите значение выражения $\log_3 90 - \log_3 2 - \log_3 5$.

1) $\log_3 83$;
2) 2;
3) $-\log_3 10$;
4) -7.

85) Найдите значение выражения $2\log_{72}3 + 3\log_{72}2$.

1) 1;
2) $5\log_{72}5$;
3) 0;
4) $\log_{36}7$.

86) Найдите значение выражения $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{21}}9 + \log_{21}49$.

1) 1;
2) $2\log_7 3$;
3) 2;
4) -5.

87) Найдите значение выражения $\log_6 5 \cdot \log_5 8 + \log_6 27$.

1) 1;
2) $\log_{30}48$;
3) $2\log_7 23$;
4) 3.

88) Найдите значение выражения $4\frac{\log_7 2}{\log_7 80} + \log_{80}5$.

1) 2;
2) 1;
3) $-3\log_7 75$;
4) $5\log_{21}15$.

89) Найдите значение выражения $\log_7(3^3 \cdot 7^5) - 2\log_7 3 - 5$.

1) $\log_7 3$; 2) -4; 3) 0; 4) $-2\log_{21} 25$.

90) Найдите значение выражения $\log_{15} 5^3 + \log_{15} 3^4 + \log_{15} 5^6 3^5$.

1) $4\log_{15} 45$; 2) $\log_3 15$; 3) 9; 4) -7.

91) Найдите значение выражения $\log_5 \sqrt{7} + 2\log_{25} \sqrt{7}$.

1) 0;
2) $-\log_5 245$;
3) $0{,}5$;
4) $\log_5 7$.

92) Найдите значение выражения $\frac{1}{2}\log_2 48 - \log_4 3$.

1) $5\log_2 9$;
2) 2;
3) $-2\log_4 3$;
4) 0.

93) Найдите значение выражения $11^{\log_{11\sqrt{11}} 125 - \log_{121} 9}$.

1) $8\frac{1}{3}$;
2) 1;
3) -121;
4) $\log_3 7$.

94) Найдите значение выражения

$$\frac{3}{4}\log_2 6 - \log_{16} 27 + 13^{\frac{3}{2}\log_{13\sqrt{13}} 18}.$$

1) $6\log_2 3$;
2) 0;
3) $18{,}75$;
4) $-3\log_{13} 7$.

95) Найдите значение выражения

$\log_{105} 12 + \log_{105} 5 + \log_{105} 7 - \log_{105} 4$.

1) 0;
2) 1;
3) $2\log_{105} 20$;
4) -3.

96) Найдите значение выражения

$(\log_{26} 5^{\log_5 169} + \log_{26} 4)^2 - 17^{4\log_{289} 3}$

1) $\log_{26} 10$;
2) 1;
3) $-\log_{13} 9$;
4) -5.

97) Найдите значение выражения $2^{\log_{17}375\cdot\log_5 17-\log_5 3}$.

1) 8; 3) $-\log_5 25$;
2) $\log_2 17$; 4) 17.

98) Найдите значение выражения
$(\log_3 11\cdot\log_{11}3+\log_{19}12\cdot\log_2 19-\log_2 12)^2+7$.
1) $\log_3 5+\log_5 17$; 3) 1;
2) 8; 4) -13.

99) Найдите значение выражения $(\lg 900-2\lg 3)(\ln 49\cdot\log_7 e+1)$.
1) 0; 2) $\lg 27$; 3) 6; 4) $\ln 7\cdot\lg 9$.

100) Найдите значение выражения $13^{\ln 400\cdot\lg e-2\lg 2}$.

1) 1; 3) $\lg(\ln 4)$;
2) $\ln 13$; 4) 169.

101) Найдите значение выражения $\log_6 2+\log_6 3+\log_6 6$.

1) 1; 3) 3;
2) 0; 4) 2.

102) Найдите значение выражения $\log_7 21-\log_7 3+\log_3 9$.

1) 11; 3) 3;
2) -1; 4) 2.

103) Найдите значение выражения $(\log_3 72-\log_3 18)\log_4 3+2$.

1) 1; 3) 3;
2) 2; 4) 4.

104) Найдите значение выражения $\log_{30}5+\log_{30}12-\log_{30}2+4$.

1) 2; 3) 4;
2) 3; 4) 5.

105) Найдите значение выражения $\log_5 25-\log_5 0{,}2+3$.

1) 4; 3) 6;
2) 5; 4) 11.

106) Найдите значение выражения $3+\log_{30}3+\log_{30}10$.

1) 3; 3) 16;
2) 33; 4) 4.

107) Найдите значение выражения $\log_6 18 - \log_6 3 + 2$.

1) 3; 3) 8;

2) 17; 4) 2.

108) Найдите значение выражения $\log_{27} 81 - \log_{27} 3 + 4$.

1) 82; 3) 4;

2) $6\frac{1}{3}$; 4) 5.

109) Найдите значение выражения $3 + \log_4 2 - \log_4 8$.

1) 1; 3) 9;

2) 2; 4) –1.

110) Найдите значение выражения $\log_7 98 + 2 - \log_7 2$.

1) 4; 3) 96;

2) 98; 4) 49.

111) Найдите значение выражения

$(\log_{\sqrt[3]{3}} 9 + \log_7 21 - \log_7 3) \cdot 5^{\log_5 2}$.

112) Найдите значение выражения

$\left(\log_{\sqrt[3]{5}} 25 - \log_2 4 - 4\left(\log_3 \sqrt{3}\right)^2\right) \cdot 3^{\frac{1}{\log_2 3}}$.

113) Найдите значение выражения

$(\log_3 6 - \log_3 2)^{\sqrt{\log_3 9}} - (\log_7 14 - \log_7 2)^{\sqrt{\log_9 3}}$.

114) Найдите значение выражения

$\left(\log_3 \sqrt{27} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\log_{\sqrt{3}} 27 - \log_4 2 + \frac{1}{2}\right)^2$.

115) Найдите значение выражения

$2 \cdot (\log_{\sqrt{7}} 49 - \log_3 \sqrt{27}) \cdot (\log_6 216 - 3\log_4 4)$.

116) Найдите значение выражения

$\left(\log_2 10 + \log_{\sqrt[4]{2}} 2 - \log_2 5\right) \cdot 2^{\log_2 3}$.

117) Найдите значение выражения

$$\left(\log_6 4+\log_6 9\right)\cdot\left(3^{\log_3 2}\cdot\log_{\sqrt{2}} 2\right).$$

118) Найдите значение выражения

$$\log_{7\sqrt{2}}\sqrt{2}\cdot(3^{\log_3 4}-\log_3 18+\log_3 2).$$

119) Найдите значение выражения

$$\log_{\sqrt[3]{7}}\sqrt[5]{7}\left(2^{\log_2 11}-\log_2 4-\log_2 16\right).$$

120) Найдите значение выражения

$$2^{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}}\cdot\log_{\sqrt[8]{3}}\sqrt[3]{3}\cdot\left(\log_3 2-\log_3 54\right).$$

121) Найдите значение выражения $4-\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\frac{1}{6}}5}$.

1) $3\frac{1}{6}$;
3) -1;
2) 4;
4) 3.

122) Найдите значение выражения $3+\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}3}$.

1) $3\frac{1}{8}$;
3) $3\frac{1}{2}$;
2) 6;
4) 4.

123) Найдите значение выражения $6-(0,25)^{\log_{0,25}2}$.

1) 5,75;
3) 4;
2) 5;
4) 5,9375.

124) Найдите значение выражения $6+(0,8)^{\log_{0,8}1}$.

1) 6,8;
3) 7;
2) 6;
4) 5,2.

125) Найдите значение выражения $(1,7)^{\log_{1,7}2}+4$.

1) 6;
3) 6,89;
2) 5,7;
4) 7,4.

126) Найдите значение выражения $6-0{,}9^{\log_{0,9}8}$.

1) 5; 3) 5,1;
2) –2; 4) –1,2.

127) Найдите значение выражения $1+0{,}4^{\log_{0,4}2}$.

1) 1,4; 3) 3;
2) 1,16; 4) 2.

128) Найдите значение выражения $0{,}6^{\log_{0,6}3}+3$.

1) 3,216; 3) 4;
2) 6; 4) 3,6.

129) Найдите значение выражения $0{,}8^{\log_{0,8}2}+0{,}36$.

1) 1; 3) 1,36;
2) 1,96; 4) 2,36.

130) Найдите значение выражения $0{,}1^{\log_{0,1}2}-0{,}1$.

1) 1,9; 3) –0,09;
2) 0,1; 4) 2.

1.4. Синус, косинус, тангенс, котангенс

131) Упростите выражение
$\sin^6\alpha + 3\sin^4\alpha\cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^4\alpha + \cos^6\alpha$.

1) $\sin 2\alpha$; 3) 8;
2) $\cos^3\alpha$; 4) 1.

132) Упростите выражение $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}+2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{4}$.

1) $3\sqrt{3}$; 3) –0,5;
2) 4; 4) 0.

133) Упростите выражение $2\sin^2\frac{\pi}{6}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}+\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}\right)\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$.

1) 1; 3) 2;
2) $-\sqrt{3}$; 4) 6.

134) Упростите выражение $20\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos^2\alpha\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^4\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

1) 10;
2) $5\cos\alpha$;
3) $\sin^2\alpha$;
4) –5.

135) Упростите выражение $\dfrac{1+\operatorname{tg}^6\frac{\pi}{3}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}^4\frac{\pi}{3}}$.

1) $-\sqrt{3}$;
2) 1;
3) –6;
4) 4.

136) Упростите выражение $\dfrac{1-\sin^4\alpha}{\sin^2\alpha(1+\sin^2\alpha)}$.

1) –2;
2) $\operatorname{ctg}^2\alpha$;
3) $\cos\alpha$;
4) 1.

137) Упростите выражение $\dfrac{\sin^2\alpha(1+3\operatorname{ctg}^2\alpha+3\operatorname{ctg}^4\alpha+\operatorname{ctg}6\alpha)}{(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)^2}$.

1) 1;
2) $\cos^3\alpha$;
3) $2\operatorname{tg}\alpha$;
4) 6.

138) Упростите выражение $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\beta}$.

1) 1;
2) $\sin\alpha$;
3) 0;
4) $\sin\beta\cos\alpha$.

139) Упростите выражение

$$\frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta-2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta+\cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta}{\sin 2(\alpha-\beta)}.$$

1) $\operatorname{ctg}2(\alpha-\beta)$;
2) $\sin(\alpha+\beta)$;
3) 0;
4) 1.

140) Упростите выражение $(\sin^2x-\cos^2x)^2+\sin^2 2x$.

1) 1;
2) $2\sin^2 2x$;
3) $\cos x$;
4) 2.

141) Упростите выражение $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha}$.

1) $\sin(\alpha-\beta)$; 3) $\cos\beta$;
2) 3; 4) 1.

142) Упростите выражение

$$\frac{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta+2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}{\cos(\alpha-\beta)}.$$

1) $\cos(\alpha-\beta)$; 3) 0;
2) 4; 4) $2\sin(\alpha+\beta)$.

143) Упростите выражение $\dfrac{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)(1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta)}{1-\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta}$.

1) 3; 2) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$; 3) 1; 4) $\sin\alpha$.

144) Упростите выражение $\dfrac{\operatorname{tg}^3x-\operatorname{tg}^3y}{(1+\operatorname{tg}x\ \operatorname{tg}y)(\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}x\ \operatorname{tg}y+\operatorname{tg}^2y)}$.

1) 1; 3) $\operatorname{tg}(x-y)$;
2) $3\sin x$; 4) $2\cos(x+y)$.

145) Упростите выражение $\dfrac{\cos^4 2\alpha-\sin^4 2\alpha}{\cos 4\alpha}-(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)^2$.

1) $2\cos 4\alpha$; 3) 0;
2) $\cos^2 2\alpha$; 4) $\sin 4\alpha$.

146) Упростите выражение $\left(\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}x}-\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}x}\right)\left(\cos^2x-\sin^2x\right)$.

1) 1; 3) $\sin 2x$;
2) $\cos^2 x$; 4) $2\operatorname{tg}4x$.

147) Найдите значение выражения

$$4\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+4\sin\frac{7\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}.$$

1) 4; 3) –3;
2) 2; 4) $2\sqrt{2}$.

148) Найдите значение выражения

$$\frac{\sin\frac{11\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{11\pi}{6}\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{12}-\cos\frac{2\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{12}}.$$

1) 1; 3) 0;

2) $2\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{2}$.

149) Упростите выражение $\dfrac{\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)-\cos\frac{3\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{12}-\sin\frac{5\pi}{4}}$.

1) 1; 2) 0,5; 3) –4; 4) $\sqrt{3}$.

150) Упростите выражение $\dfrac{\sin\frac{\pi}{12}+\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)}{\sin\frac{5\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}}$.

1) 0; 2) $2\sqrt{3}$; 3) –1; 4) $\sqrt{3}$.

151) Упростите выражение $\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4}\right)\sin\frac{x}{4}$.

152) Упростите выражение

$$\frac{\sin 12x+\sin 8x+\sin 10x+\sin 9x+\sin 11x}{\cos 12x+\cos 8x+\cos 10x+\cos 9x+\cos 11x}.$$

153) Упростите выражение $\dfrac{1+\sin 2x}{\cos 2x\cdot\operatorname{tg}\left(x-\frac{5\pi}{4}\right)}$.

154) Упростите выражение

$$\left(1+\frac{1}{\sin x}+\operatorname{ctg}x\right)\left(1-\frac{1}{\sin x}+\operatorname{ctg}x\right)\sin x.$$

155) Упростите выражение $\dfrac{\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{ctg}2x+1}{\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}x}$.

156) Упростите выражение

$$\frac{\cos^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)\left(\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)}.$$

157) Упростите выражение $\frac{1-\operatorname{ctg}^2(-x)}{\operatorname{tg}^2(x-\pi)-1}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}{\operatorname{ctg}(\pi+x)}$.

158) Упростите выражение

$$\frac{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{\sin^2\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}-1\right)\left(\operatorname{tg}^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)+1}.$$

159) Упростите выражение $\frac{1+\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{ctg}^2\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{1+\sin^2\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)+\operatorname{tg}^2\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)}$.

160) Упростите выражение $\frac{\sin^2\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)}{\frac{1}{\cos^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}-1}+\frac{\cos^2\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}{\frac{1}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}-1}$.

161) Упростите выражение $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1$.

1) 0;
2) 1;
3) $\sin 2\alpha$;
4) $\cos 2\alpha$.

162) Упростите выражение $\left(\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}-\sin\alpha\right)^2-1$.

1) 0;
2) $-\cos^2\alpha$;
3) $\operatorname{tg}^2\alpha$;
4) -1.

163) Упростите выражение $(\cos 2\alpha + 1)\operatorname{tg}^2\alpha - 1$.

1) $\cos 2\alpha$;
2) $\operatorname{tg}\alpha$;
3) $\operatorname{ctg}\alpha$
4) $-\cos 2\alpha$.

164) Упростите выражение

$$\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)-\sin^2\alpha.$$

1) $\cos\alpha$;
2) $\sin\alpha$;
3) $\cos^2\alpha$;
4) $\sin^2\alpha$.

165) Упростите выражение

$$\left(\frac{\sin^3\alpha\cos^2\alpha+\sin^5\alpha}{\cos^3\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha+1\right)\cdot\cos^2\alpha.$$

1) 1;
2) $\operatorname{tg}^2\alpha$;
3) $\operatorname{ctg}^2\alpha$;
4) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

166) Упростите выражение

$$\frac{\sin^3\alpha\cos\alpha+\cos^3\alpha\sin\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

1) 1;
2) $\operatorname{tg}\alpha$;
3) $\operatorname{ctg}\alpha$;
4) $\sin\alpha$.

167) Упростите выражение $\dfrac{\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$.

1) $\operatorname{tg}^2\alpha$;
2) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;
3) $\operatorname{ctg}^2\alpha$;
4) 1.

168) Упростите выражение $\dfrac{\sin^4\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos\alpha}$.

1) $\cos\alpha$;
2) $\sin^2\alpha$;
3) $\dfrac{1}{\cos\alpha}$;
4) $\operatorname{tg}\alpha$.

169) Упростите выражение $\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^3\alpha\sin\alpha+\cos\alpha\sin^3\alpha}$.

1) $\sin\alpha$;
2) $\cos\alpha$;
3) $\operatorname{tg}\alpha$;
4) $\operatorname{ctg}\alpha$.

170) Упростите выражение $\dfrac{\sin^3\alpha-\sin\alpha\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}$.

1) $\dfrac{1}{\sin\alpha}$;
2) $\operatorname{tg}\alpha$;
3) $\sin\alpha$;
4) 1.

171) Найдите значение выражения $\dfrac{2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{5\cos(\pi+\alpha)}$, если $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$.

172) Найдите значение выражения $\dfrac{3\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{2\cos(\pi-\alpha)}$, если $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$.

173) Найдите значение выражения $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}$, если $\alpha=-\dfrac{4\pi}{7}$.

174) Найдите значение выражения $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{2\operatorname{tg}(\alpha+2\pi)}$, если $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$.

175) Найдите значение выражения $\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{3\cos(\pi-\alpha)}$, если $\alpha=\dfrac{2\pi}{5}$.

176) Найдите значение выражения $\dfrac{2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}$, если $\alpha=\dfrac{4\pi}{5}$.

177) Найдите значение выражения $\dfrac{\cos(2\pi+\alpha)}{2\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$, если $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$.

178) Найдите значение выражения $\dfrac{2\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{7\,\mathrm{ctg}(\pi-\alpha)}$, если $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$.

179) Найдите значение выражения $\dfrac{\mathrm{tg}(2\pi-\alpha)}{\dfrac{1}{2}\mathrm{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$, если $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$.

180) Найдите значение выражения $\dfrac{2\cos(\pi+\alpha)}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$, если $\alpha=\dfrac{2\pi}{9}$.

1.5. Прогрессии

181) Найдите сумму девяти первых членов арифметической прогрессии, у которой пятый член равен 10.

182) Сумма первого и седьмого членов возрастающей арифметической прогрессии равна 14, а произведение третьего и шестого ее членов равно 10. Найдите сумму 8 первых членов этой прогрессии.

183) Найдите разность арифметической прогрессии, если известно, что сумма 9 ее первых членов равна 3069, а первый ее член равен 429.

184) Найдите первый член арифметической прогрессии, если известно, что сумма 11 ее первых членов равна 165, а ее разность равна 7.

185) Найдите разность арифметической прогрессии, если известно, что сумма 15 ее первых членов равна 3300, а первый ее член равен 311.

186) Найдите знаменатель бесконечной геометрической прогрессии, если известно, что ее сумма равна 18, а ее первый член равен 12.

187) Найдите первый член геометрической прогрессии, если известно, что сумма 6 первых ее членов равна 6552, а знаменатель равен 3.

188) Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если известно, что сумма 4 ее первых членов равна 8736, а ее первый член равен 56.

189) Найдите третий член бесконечной геометрической прогрессии, если известно, что ее сумма равна 66, а ее первый член равен 33.

190) Найдите четвертый член геометрической прогрессии, если известно, что сумма 5 ее первых членов равна 713, а ее знаменатель равен 2.

191) Пятый член арифметической прогрессии равен 14, а сумма первых десяти членов этой же арифметической прогрессии равна 155. Найдите произведение третьего и пятого членов этой прогрессии.

192) Третий член арифметической прогрессии равен 5. А сумма первых десяти членов равна 75. Найдите сумму квадратов второго и четвертого членов этой арифметической прогрессии.

193) Первый член бесконечной убывающей геометрической прогрессии равен 8, а ее сумма равна 16. Найдите сумму третьего и четвертого членов этой геометрической прогрессии.

194) Третий член геометрической прогрессии с положительным знаменателем равен 9, а сумма первого члена со

вторым равна 4. Найдите пятый член этой геометрической прогрессии.

195) В геометрической прогрессии с положительным знаменателем третий член равен 4, а пятый 16. Найдите сумму первых 10 членов этой геометрической прогрессии.

196) Восьмой член арифметической прогрессии равен 24, а пятый член этой же арифметической прогрессии равен 15. Найдите сумму первого и десятого членов этой прогрессии.

197) Пятнадцатый член арифметической прогрессии равен 37, а сумма пятого и шестого равна 36. Найдите произведение первых двух членов прогрессии.

198) Третий член арифметической прогрессии в три раза меньше шестого, а сумма второго и пятого равна 16. Определите первый член прогрессии.

199) Пятый член арифметической прогрессии равен 15, а сумма четвертого и одиннадцатого членов равна 40. Найдите произведение второго и третьего членов прогрессии.

200) Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии равна 240, а сумма первых десяти членов этой прогрессии равна 555. Найдите сумму второго, шестого и седьмого членов этой прогрессии.

201) Известно, что второй и третий члены возрастающей арифметической прогрессии являются решениями неравенства $(x-1)(\log_x 2-1)\cdot 2^{x-3}\cdot e^{x^2}<0$, а остальные члены не являются. Найдите множество всех возможных значений первого члена таких прогрессий.

202) Известно, что второй, третий и четвертый члены возрастающей арифметической прогрессии являются ре-

шениями неравенства $(x-2)(\log_2 x-3)\cdot 2^{2x-3}\cdot e^{3x^2}<0$, а остальные члены не являются. Найдите множество всех возможных значений первого члена таких прогрессий.

203) Известно, что второй и третий члены возрастающей арифметической прогрессии являются решениями неравенства $(x-1)(\log_3 x-1)\cdot 2^{x-3}\cdot e^{x^2}<0$, а остальные члены не являются. Найдите множество всех возможных значений первого члена таких прогрессий.

204) Известно, что второй и третий члены возрастающей арифметической прогрессии являются решениями неравенства $(x-4)(\log_5 2x-2)\cdot 2^{4x-3}\cdot e^{5x^2}<0$, а остальные члены не являются. Найдите множество всех возможных значений первого члена таких прогрессий.

205) Известно, что второй и третий члены возрастающей арифметической прогрессии являются решениями неравенства $(x-3)(\log_2 x-2)\cdot 2^{x+3}\cdot e^{-x^2}<0$, а остальные члены не являются. Найдите множество всех возможных значений первого члена таких прогрессий.

206) Известно, что второй и третий члены возрастающей арифметической прогрессии являются решениями неравенства $x(\log_5 x-1)\cdot 2^{-x-1}\cdot e^{x^2-1}<0$, а остальные члены не являются. Найдите множество всех возможных значений первого члена таких прогрессий.

207) Известно, что второй и третий члены возрастающей арифметической прогрессии являются решениями неравенства $(2x-1)(\log_3 x-2)\cdot 2^{1,5x-3}\cdot e^{-\frac{x}{3}}<0$, а остальные члены не являются. Найдите множество всех возможных значений первого члена таких прогрессий.

208) Известно, что второй и третий члены возрастающей арифметической прогрессии являются решениями неравенства $(2x-3)(\log_4 x-1)\cdot 2^{5x+3}\cdot e^{-\frac{x}{7}}<0$, а остальные члены не являются. Найдите множество всех возможных значений первого члена таких прогрессий.

209) Известно, что второй и третий члены возрастающей арифметической прогрессии являются решениями неравенства $(2x-2)(\log_5 x-1)\cdot 2^{-x-4}\cdot e^{-\frac{x}{2}+1}<0$, а остальные члены не являются. Найдите множество всех возможных значений первого члена таких прогрессий.

210) Известно, что второй и третий члены возрастающей арифметической прогрессии являются решениями неравенства $(x-4)(\log_2 x-4)\cdot 2^{x+7}\cdot e^{-\frac{x}{2}-2}<0$, а остальные члены не являются. Найдите множество всех возможных значений первого члена таких прогрессий.

2. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

2.1. Решение уравнений

1) Решите уравнение x-$2\sqrt{x+2}+3=0$.

1) -1;
3) -7;
2) 3;
4) 0.

2) Решите уравнение $(x-7)^{\frac{3}{2}}-12(x-7)+48\sqrt{x-7}-64=0$.

1) -4;
3) 0;
2) 23;
4) 37.

3) Решите уравнение $\sin x\cdot\cos x-\sin x+3\cos x-3=0$.

1) $(-1)k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$;
3) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$;
2) 3;
4) $2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

4) Решите уравнение $\sin^2 y-\sin y-2=0$.

1) 7;
3) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$;
2) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$;
4) $2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

5) Решите уравнение $2^{x^2-1}\cdot 3^x+6\cdot 2^{x^2-1}-3^x-6=0$.

1) ± 1;
3) 3;
2) 0;
4) ± 7.

6) Решите уравнение $7^{x-5}\cdot 5^{x^2}-49\cdot 5^{x^2}+3\cdot 7^{x-5}-147=0$.

1) ± 2;
3) -3;
2) 7;
4) 13.

7) Решите уравнение $\log_2(x^2-5)-2=0$.

1) ± 6;
3) ± 3;
2) 0;
4) $\pm\sqrt{5}$.

8) Решите уравнение $4\log_9^2(6-x)-4\log_9(6-x)+1=0$.

1) ± 7;
3) $\pm\sqrt{17}$;
2) 12;
4) 3.

9) Решите уравнение

$\sqrt{(x\sqrt{2}+2\sqrt{2}-1)(x\sqrt{2}+2\sqrt{2}+1)} = x^2+4x+4$.

1) ± 7;
3) $-3; -1$;
2) $5\sqrt{5}$;
4) 3.

10) Решите уравнение $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$.

1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
3) 3;
2) $(-1)k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
4) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

11) Решите уравнение $\frac{2^{x+3}-1}{7} = \frac{4}{2^{x+2}}$.

1) 0;
3) 17;
2) ± 2;
4) -6.

12) Решите уравнение $\lg^2 x + 2\log_{100} x - 6 = 0$.

1) ± 7;
3) -2; 6;
2) 100; 0,001;
4) 10.

13) Решите уравнение $\sqrt{x} = |x-4| + 2$.

1) 13;
3) 4;
2) -27;
4) ± 2.

14) Решите уравнение $\cos x - 1 = x^2$.

1) 7π;
3) -8;
2) ± 2;
4) 0.

15) Решите уравнение $3^x = (x-1)^2 + 3$.

1) ± 7;
3) -3;
2) 1;
4) 19.

16) Решите уравнение $\lg(x-1) = |x-101| + 2$.

1) 18;
3) -27;
2) ± 13;
4) 101.

17) Решите уравнение $\sqrt{x} - |x-6| = 0$.

1) 4, 9;
3) 17;
2) ± 3;
4) 2.

18) Решите уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\sqrt{x}=0$.

1) $-\pi$;
2) 2; 4;
3) 0; 1;
4) 3.

19) Решите уравнение $4x-|x-2|-3=0$.

1) ± 3;
2) 1;
3) -8;
4) 9.

20) Решите уравнение $15^x-\log_7(x+1)-1=0$.

1) ± 1;
2) 7;
3) 0;
4) -13.

21) Решите уравнение $1+\frac{6}{\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{x^2-1}$.

22) Решите уравнение $\frac{1}{x}-5+\sqrt{\frac{1+x}{x}}=0$.

23) Решите уравнение $10^{50+\lg x}-x^{\frac{1}{3}(\lg x+8)}=0$.

24) Решите уравнение $10^{x^2+1}-15-10^{1-x^2}=0$.

25) Решите уравнение $2\frac{2}{3}+\frac{1}{\sin^2 2x}-\frac{1}{\cos^2 2x}=0$.

26) Решите уравнение $x^2-10x\lg x=0$.

27) Решите уравнение $\log_3(9^x-6)-\log_3(2\cdot 3^x-3)=0$.

28) Решите уравнение $9^{\sqrt{x-2}}-7\cdot 3^{\sqrt{x-2}}=18$.

29) Найдите все решения уравнения $(\sin^2 x+1)\cos x=(2-\cos^2 x)$.

1) $2\pi n,\ n\in Z$;
2) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$;
3) $\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$;
4) $\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$.

30) Найдите все решения уравнения

$(x^2 + 1)\cos x = \frac{1}{2}(x^2 + \sin^2 x + \cos^2 x)$.

1) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$;

2) πn, $n \in Z$;

3) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$;

4) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

31) Найдите все решения уравнения

$((\log_2 x)^2 + 1)\cos^2 x = \left(1 + \frac{1}{(\log_x 2)^2}\right)$.

1) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$;

2) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$;

3) $2\pi n$, $n \in Z$;

4) πn, $n \in Z$.

32) Найдите все решения уравнения
$(\sin x \cdot \operatorname{ctg} x - 1)^2 - \cos^2 x = 0$.

1) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$;

2) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$;

3) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$;

4) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

33) Найдите все решения уравнения
$\sin x(1 + \cos^2 x) = \cos x(\operatorname{ctg}^2 x \cdot \sin^2 x + 1)$.

1) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$;

2) $\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$;

3) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$;

4) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$.

34) Найдите все решения уравнения $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}$.

1) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

2) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

3) πn, $n \in \mathbb{Z}$;

4) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

35) Найдите все решения уравнения $\operatorname{ctg}^2 x + 1 = \frac{1}{\sin x}$.

1) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
3) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
2) $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
4) $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

36) Найдите все решения уравнения $\sin x = \operatorname{ctg}^2 x - \frac{1}{\sin^2 x}$.

1) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
3) $\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
2) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
4) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

37) Найдите все решения уравнения $\operatorname{tg}^3 x = \frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x$.

1) $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
3) $\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
2) $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
4) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

38) Найдите все решения уравнения

$\operatorname{ctg}^2 x - \sin x = \frac{1}{\sin^2 x} - 2$.

1) $\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
3) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
2) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
4) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

39) Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\lg(x - 3) - \lg(7 - x) = \lg 3$.

1) $(-7;0)$;
3) $(5;8)$;
2) $(0;3)$;
4) $(11;14)$.

40) Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\log_2(x + 1) - \log_2(8 - x) = 2$.

1) $(-3;1)$;
3) $(6;8)$;
2) $(1;6)$;
4) $(8;11)$.

41) Найдите корень уравнения $\lg(7 + x) - \lg(3 - x) = \lg 4$.

1) 1; 3) 2;
2) –1; 4) –2.

42) Найдите корень уравнения $\lg(x^2 + x) - \lg x = \lg 3$.
1) 0; 3) 2;
2) 1; 4) 3.

43) Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\log_2(7 + x) - \log_2(1 - x) = 2$.
1) [–7; –4]; 3) [–1; 2];
2) [–4; –1]; 4) [2; 5].

44) Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\ln(x + 1) - \ln(5 - x) = \ln 2$.
1) (–1; 2); 3) (4; 7);
2) (2; 4); 4) (–3; –1).

45) Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\lg(x + 2) + \lg 5 = \lg(4 - x)$.
1) (–10; –8); 3) (–4; 0);
2) (–7; –5); 4) (1; 5).

46) Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\ln(1 + x) - \ln 2 = \ln(3 - 2x)$.
1) (–5; –3); 3) (4; 7);
2) (–2; 3); 4) (–3; 0).

47) Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\lg 1 + \lg(3 + x) = \lg(7 - x)$.
1) (–2; 0); 3) (1,7; 4);
2) (0; 1,5); 4) (3; 7).

48) Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\log_5(t + 5) - \log_5(t - 11) = \log_5 5$.
1) (–5; 0); 3) (3; 8);
2) (0; 3); 4) (10; 16).

49) Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения $\sqrt{x - 2} = 8 - x$.
1) [0; 2,5]; 3) [5,5; 7];
2) [2,5; 5,5]; 4) [7; 11].

50) Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения $\sqrt{7-x}=x-1$.

1) [–2; 0];
2) [0; 2];
3) [2; 4];
4) [4; 7].

51) Найдите решения уравнения $\sqrt{3-x}=x-1$.

1) 0;
2) 1;
3) 2;
4) 3.

52) Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения $\sqrt{x^2+x}=x+2$.

1) [–7; –4];
2) [–4; 0];
3) [0; 2];
4) [2; 5]

53) Найдите корень уравнения $\sqrt{2-x}=x$.

1) 0;
2) 1;
3) –1;
4) 2.

54) Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения $\sqrt{3x-5}=-x+5$.

1) [1,5; 3,5];
2) [4; 9];
3) [9,5; 12];
4) [13; 15].

55) Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения $3-x=\sqrt{4x-7}$.

1) [–3; 0];
2) [1,5; 2,5];
3) [4; 7];
4) [9; 10].

56) Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения $3-x=\sqrt{23-x}$.

1) [–2; 0];
2) [1; 5];
3) [6; 8];
4) [10; 11].

57) Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения $\sqrt{11-x}=x+1$.

1) [–1; 0];
2) [0; 2];
3) [2,1; 4];
4) [5; 11].

58) Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения $\sqrt{8x+33}=3-2x$

1) $[-3;-1]$; 3) $[2{,}5;\ 3{,}5]$;

2) $[0;\ 2]$; 4) $[4;\ 8]$.

59) Укажите число корней уравнения $\cos 2x + \sin^2 x = 0$ на промежутке $[0;3\pi]$.

60) Укажите число корней уравнения $2\operatorname{tg}x\cos^2 x + \cos 2x = 0$ на промежутке $[0;\ 2\pi]$.

61) Укажите число корней уравнения $\sin^2 x + 2\sin x + 1 = 0$ на промежутке $[-7\pi;\ 6\pi]$.

62) Укажите число корней уравнения $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2$ на промежутке $[0;\ 3\pi]$.

63) Укажите число корней уравнения $2\sin x\cos x + 2\cos^2 x - 1 = 0$ на промежутке $[0;\ \pi]$.

64) Укажите число корней уравнения
$\cos 6x + \sin 6x \cdot \operatorname{tg} 3x + \sin 6x = 1$ на промежутке $[0;\ \pi]$.

65) Укажите число корней уравнения
$\dfrac{2\operatorname{tg}3x}{\sin 6x} - \cos 6x = \operatorname{tg}^2 3x$ на промежутке $[-\pi;\ \pi]$.

66) Укажите число корней уравнения
$\sin 2x + 4\cos x - 2\sin x - 4 = 0$ на промежутке $[0;\ 5\pi]$.

67) Укажите число корней уравнения
$\sin 6x \cdot \operatorname{ctg} 3x - \cos 6x = \sin 5x$ на промежутке $[0;\ \pi]$.

68) Укажите число корней уравнения
$\cos^4 2x - \sin^4 2x - \cos 4x = \operatorname{tg} 3x$ на промежутке $[-\pi;\ \pi]$.

69) Решите уравнение $\log_2(x+1) + \dfrac{1}{\log_x 2} = \log_2 30$.

70) Решите уравнение $e^{3x} + e^x - 2 = 0$

71) Решите уравнение $\dfrac{2^x - 1}{2^{2x} + 2^x - 3} = 1$.

72) Решите уравнение $\left(\frac{1}{\log_2 x}+\log_2 x^4\right)=4.$

73) Решите уравнение $\sqrt{1+\log_2 x}=5-\log_2 x.$

74) Решите уравнение $\sqrt{4\log_2\sqrt{x}+17}=1+\frac{1}{\log_x 2}.$

75) Решите уравнение $\sqrt{\log_x\left(64x^{25}\right)}=3\left(\log_x\sqrt[3]{2}+1\right).$

76) Решите уравнение $\sqrt{\log_5 x^6+13}=\frac{1}{\log_x 5}+3.$

77) Решите уравнение $\sqrt{\frac{6}{\log_{16} x}+\log_{\sqrt{x}} x^5}=\frac{1}{\log_{16x^3} x}.$

78) Решите уравнение $\frac{1}{\log_x 3}+1=\sqrt{\log_9 x^4+10}.$

79) Решите уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\frac{1}{2}.$

1) $-\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in\mathbb{Z};$
2) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z};$
3) $\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z};$
4) $(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in\mathbb{Z}.$

80) Решите уравнение $\sin x=\frac{1}{2}.$

1) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in\mathbb{Z};$
2) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in\mathbb{Z};$
3) $\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z};$
4) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}.$

81) Решите уравнение $\cos x=\frac{1}{2}.$

1) $\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z};$
2) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z};$
3) $(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in\mathbb{Z};$
4) $\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in\mathbb{Z}.$

82) Решите уравнение $\operatorname{tg} x = 1$.

1) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
3) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
2) $\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
4) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

83) Решите уравнение $\cos x = \sqrt{3} \sin x$.

1) $\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
3) $\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
2) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
4) $(-1)^k \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

84) Решите уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) $(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
3) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
2) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
4) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

85) Решите уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
3) $(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
2) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
4) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

86) Решите уравнение $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos x$.

1) $\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
3) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
2) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
4) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

87) Решите уравнение $\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin x$.

1) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
3) $\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
2) $\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
4) $\frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

88) Решите уравнение $\cos^2 x = \sin^2 x$.

1) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$;
3) $\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$;

2) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k\in\mathbb{Z}$;
4) $\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

89) Решите уравнение $\sqrt{x+21}=x+1$.

90) Решите уравнение $\sqrt{2x+3}=x$.

91) Решите уравнение $\sqrt{2-x}=x+10$.

92) Решите уравнение $\sqrt{4-2x}=2x+2$.

93) Решите уравнение $\sqrt{3x+4}=x-2$.

94) Решите уравнение $\sqrt{3+6x}=x+2$.

95) Решите уравнение $\sqrt{15-2x}=x$.

96) Решите уравнение $\sqrt{x-3}=3-x$.

97) Решите уравнение $\sqrt{3-2x}=x-\frac{3}{2}$.

98) Решите уравнение $\sqrt{5x+11}=5-x$.

99) Решите уравнение $\log_{2,3}(3x+1)-\log_{2,3}7=\log_{2,3}4$.

100) Решите уравнение $\log_{1,5}(2x+3)-\log_{1,5}2=\log_{1,5}3$.

101) Решите уравнение $\log_{0,1}(4-x)+\log_{0,1}2=\log_{0,1}8$.

102) Решите уравнение $\log_3(4x+1)+\log_3 0{,}5=\log_3 1{,}5$.

103) Решите уравнение $\log_{0,4}(2+x)+\log_{0,4}3=\log_{0,4}6$.

104) Решите уравнение $\log_{2,4}(x-1)-\log_{2,4}0{,}5=\log_{2,4}2$.

105) Решите уравнение $\log_{1,2}(3+2x)-\log_{1,2}2=\log_{1,2}0{,}5$.

106) Решите уравнение $\log_{3,5}(2+4x)+\log_{3,5}0{,}5=\log_{3,5}3$.

107) Решите уравнение $\log_4\frac{1}{3}x-\log_4 3=\log_4 2$.

108) Решите уравнение $\log_2\left(\frac{x}{2}+1\right)+\log_2 5=\log_2 6$.

109) Решите уравнение $0,1^{2x+1} = \sqrt{103+3x}$.

110) Решите уравнение $0,3^{x+1} = \sqrt{2+x}$.

111) Решите уравнение $3^{4-x} = \sqrt{x-3}$.

112) Решите уравнение $0,1^{-x} = \sqrt{x+1}$.

113) Решите уравнение $(0,25)^{2-x} = \sqrt{19-x}$.

114) Решите уравнение $(0,5)^{x-1} = \sqrt{x}$.

115) Решите уравнение $5^{1-x} = \sqrt{x}$.

116) Решите уравнение $3^{1-2x} = \sqrt{x+9}$.

117) Решите уравнение $(0,1)^{1-x} = \sqrt{2-x}$.

118) Решите уравнение $0,2^{3-2x} = \sqrt{27-x}$.

119) Решите уравнение $\cos x \cdot \operatorname{ctg} x - 2\operatorname{ctg} x - \sin x = 0$.

120) Решите уравнение $\sin^2 y - \sin y - 2 = 0$.

121) Решите уравнение $2\frac{2}{3} + \frac{1}{\sin^2 2x} - \frac{1}{\cos^2 2x} = 0$.

122) Решите уравнение: $(\sin^2 x + 1)\cos x = (2 - \cos^2 x)$.

123) Решите уравнение $(\sin x \cdot \operatorname{ctg} x - 1)^2 - \cos^2 x = 0$.

124) Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{\sin 2x}{\cos^2 x}$.

125) Решите уравнение $\operatorname{ctg}^2 x + 1 = \frac{1}{\sin x}$.

126) Решите уравнение $\sin x = \operatorname{ctg}^2 x - \frac{1}{\sin^2 x}$.

127) Решите уравнение $\operatorname{ctg}^2 x - \sin x = \frac{1}{\sin^2 x} - 2$.

128) Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x$.

2.2. Системы уравнений с двумя переменными

129) Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x-2}+5=y, \\ y^2-10\sqrt{x-2}=2x+5. \end{cases}$

130) Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{y+3}-7=x, \\ 2y-2x^2=8. \end{cases}$

131) Решите систему уравнений
$\begin{cases} \sin x-2\sin^2 y\cdot\cos^2 y=1, \\ \sin^4 y+\cos^4 y+\sin x-1=\cos y. \end{cases}$

132) Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin y-x+2=0, \\ x^2=6\sin y+7. \end{cases}$

133) Решите систему уравнений $\begin{cases} 36^{xy}+2\cdot 6^{xy}=48, \\ \dfrac{1}{x}+2y=6. \end{cases}$

134) Решите систему уравнений $\begin{cases} 9^x=725+2^y, \\ 25+2^{0,5\cdot y}-3^x=0. \end{cases}$

135) Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_9 x-\log_3 y=0, \\ x^2-2y^2=63. \end{cases}$

136) Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_3 x+\log_9 y=5, \\ \log_9 x+\log_3 y=7. \end{cases}$

137) Решите систему уравнений $\begin{cases} 0,5\cdot y-1=\sqrt{x-2}, \\ y+4x=x^2+6. \end{cases}$

138) Решите систему уравнений $\begin{cases} y-x^2=17-8x, \\ \dfrac{1}{3}(y+1)+8x=x^2+16. \end{cases}$

139) Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы $\begin{cases} y+1=\sqrt{x^2+6x+9}, \\ y+x=0. \end{cases}$

Найдите значение выражения $x_0y_0(x_0+y_0)$.

140) Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы $\begin{cases}\sqrt{x-3}=y+2,\\ x+y-3=0.\end{cases}$

Найдите значение выражения $\sqrt{x_0}+y_0$.

141) Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=3,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=1.\end{cases}$

Найдите частное $\frac{x_0}{y_0}$.

142) Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы $\begin{cases}y-2=\sqrt{x},\\ \sqrt{x-3}=y-3.\end{cases}$

Найдите значение выражения $x_0^2+y_0^3$.

143) Пусть $(x_0; y_0)$ — одно из решений системы

$\begin{cases}y+1=x^2+4x+4,\\ y=3x+5.\end{cases}$ Найдите произведение $\sqrt{x_0}\cdot y_0$.

144) Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы $\begin{cases}y+1=\sqrt{x^2+4x+4},\\ 2x-y+6=0.\end{cases}$

Найдите произведение $x_0 \cdot y_0$.

145) Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы

$\begin{cases}2y+5=\sqrt{4x^2+12x+9},\\ x+y=5.\end{cases}$ Найдите x_0-y_0.

146) Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы $\begin{cases}3y-2=\sqrt{9x^2-6x+1},\\ y-4=2x.\end{cases}$

Найдите произведение $x_0 \cdot y_0$.

147) Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы $\begin{cases}y-5=\sqrt{x^2+6x+9},\\ y=2x-3.\end{cases}$

Найдите произведение $x_0 \cdot y_0$.

148) Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы

$\begin{cases}2y-3=\sqrt{25x^2-70x+49}\\ y-x=1\end{cases}$. Найдите произведение $x_0 \cdot y_0$.

2.3. Неравенства с одной переменной

149) Решите неравенство $(x^2 + x - 6)(x - 5) \geq 0$.

1) $(-\infty; -3] \cup [2; 5]$;
3) $[-3; 2] \cup [5; \infty)$;
2) $(-3; 5]$;
4) $(7; 13) \cup (19; 23]$.

150) Решите неравенство $(x^2 + 11x + 28)(x^2 - 14x + 48) \leq 0$.

1) $[-7; -4] \cup [6; 8]$;
3) $(-9; -3] \cup [2; 5) \cup [7; 9]$;
2) $(-\infty; -4] \cup [8; +\infty)$;
4) $[-7; 7]$.

151) Решите неравенство $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{8+x} - 16}{x^2 + 3x + 9} < 0$.

1) $(-\infty; 3) \cup (4; 7)$;
3) $(-\infty; 12)$;
2) $(-12; +\infty)$;
4) $(3; 4)$.

152) Решите неравенство $27^{\frac{2}{3}(x-2)} + 3^4 - 3^{2(x-1)} > 73$.

1) $(-\infty; -2)$;
3) $(3; 7)$;
2) $(-2; 2)$;
4) $(2; +\infty)$.

153) Решите неравенство

$\log_\pi x + \log_\pi 2 + \log_\pi (8 - x) > \log_\pi (x + 27)$.

1) $(0; 4{,}5)$;
3) $(3; 4{,}5)$;
2) $(8; 11)$;
4) $(0; 3) \cup (4{,}5; +\infty)$.

154) Решите неравенство $0{,}5(1 + \log_3 x) - \log_{\frac{1}{3}}(x + 3) > \log_3 5x$.

1) $(0; +\infty)$;
3) $(27; 81)$;
2) $(9; 81)$;
4) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{9}\right)$.

155) Решите неравенство $5^x - 4 \leq (x - 2)^2$.

1) $(-1; 3]$;
3) $[3; 7]$;
2) $(-\infty; 1]$;
4) $[1; +\infty)$.

156) Решите неравенство $3^{x-2} < 1 + \sqrt{x + 1}$.

1) $(0; 7)$;
3) $[-1; 3)$;
2) $(-3; 1)$;
4) $(3; +\infty)$.

157) Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{x-7}{2x-3} < 1, \\ \dfrac{x+4}{2x-3} < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

1) $(-4; +\infty)$;
2) $(-4; 8)$;
3) $(4; 8)$;
4) $(-\infty; -4)$.

158) Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2+3 > 4x, \\ \log_3(x^2-4x+3) \le \log_3 8. \end{cases}$

1) $[-1; 1) \cup (3; 5]$;
2) $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$;
3) $(1; 3)$;
4) $[5; +\infty)$.

159) Сравните $\left(\frac{5}{7}-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{7}}$ и $\left(\frac{9}{15}+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{7}}$.

160) Сравните $\left(\frac{1}{123}\right)^{\frac{5}{6}} \cdot \left(\frac{1}{123}\right)^{\frac{1}{3}}$ и $\left(\frac{1}{123}\right)^{\frac{7}{8}} : \left(\frac{1}{123}\right)^{\frac{1}{2}}$.

161) Решите неравенство $\dfrac{x^2-2x-63}{x^2+4x-77} \ge 0$.

162) Решите неравенство $\dfrac{(x^2+8x-65)(x+3)}{x-8} \le 0$.

163) Решите неравенство $\left(\frac{2}{7}\right)^{6x-21} \cdot (3{,}5)^{4x+1} \ge 1$.

164) Решите неравенство $81^x - 10 \cdot 9^{x+1} + 729 < 0$.

165) Решите неравенство $\lg 10x < \lg 10^{\lg(x^2+21)}$.

166) Решите неравенство $\log_8(x-2) - \log_8(x-3) > \dfrac{1}{3}$.

167) Решите систему неравенств $\begin{cases} 9 \cdot 3^x - \dfrac{1}{27} \ge 0, \\ x^2 - 5x - 84 \ge 0. \end{cases}$

168) Решите систему неравенств $\begin{cases} \left(\frac{1}{5}\right)^{3+x} - 25 > 0, \\ x^2 + 2x - 99 \le 0. \end{cases}$

169) Решите неравенство $3^{7-x} \ge 9$.

1) $(-\infty; 5]$; 3) $[5; 7]$;
2) $(7; +\infty)$; 4) $[0; 5]$.

170) Решите неравенство $2^{\frac{x}{5}-1} \ge 4$.

1) $(-\infty; -15]$; 3) $[15; +\infty)$;
2) $[-15; 15]$; 4) 15.

171) Решите неравенство $3^{-x-6} \le \frac{1}{9}$.

1) -4; 3) $[4; +\infty)$;
2) $(-\infty; -4]$; 4) $[-4; +\infty)$.

172) Решите неравенство $5^{7-2x} \ge 125$.

1) $[-\infty; 2]$; 3) $[2; 4]$;
2) $(-\infty; 2)$; 4) $[2; +\infty)$.

173) Решите неравенство $7^{4-2x} \ge 49$.

1) -5; 3) $(-\infty; 1]$;
2) $(-\infty; -1]$; 4) $[1; +\infty)$.

174) Решите неравенство $3^{x-4} \le 27$.

1) $[7; +\infty)$; 3) $(-\infty; 7]$;
2) $(-\infty; -7]$; 4) $(-\infty; 4]$.

175) Решите неравенство $5^{3x-9} > 1$.

1) $(9; +\infty)$; 3) $(0; +\infty)$;
2) $(-\infty; 3)$; 4) $(3; +\infty)$.

176) Решите неравенство $3^{3x+1} \le 81$.

1) $(-\infty; 3]$; 3) $(-\infty; 1]$;
2) $[1; +\infty)$; 4) $[3; +\infty)$.

177) Решите неравенство $0{,}5^{x+2} \le 4$.

1) $[-4; +\infty)$; 3) $(-\infty; -4]$;
2) $(-\infty; 0]$; 4) $(-\infty; 2]$.

178) Решите неравенство $4^{4x+7} \le 64$.

1) $[-1; +\infty)$;
3) $[1; +\infty)$;
2) $(-\infty; -1]$;
4) $(-\infty; 1]$.

179) Определите число целых решений неравенства $\frac{8-x}{7x-14} \ge 0$.

1) 5;
3) 7;
2) 6;
4) 8.

180) Определите число целых решений неравенства $\frac{x+3}{9-2x} \ge 0$.

1) 5;
3) 7;
2) 6;
4) 8.

181) Какой промежуток включает в себя все решения неравенства $\frac{x+2}{7-x} \ge 0$?

1) $(-\infty; -6)$;
3) $(-1; 8)$;
2) $[-3; 7]$;
4) $[0; +\infty)$.

182) Определите число целых решений неравенства $\frac{x-2}{6-x} \ge 0$.

1) 1;
3) 3;
2) 2;
4) 4.

183) Определите число целых решений неравенства $\frac{3-x}{x-1} \ge 0$.

1) 1;
3) 3;
2) 2;
4) 4.

184) Определите число целых решений неравенства $\frac{2-x}{2x-8} \ge 0$.

1) 1;
3) 3;
2) 2;
4) 4.

185) Определите число целых решений неравенства $\frac{3-x}{14-2x} < 0$.

1) 3;
3) 5;
2) 4;
4) 6.

186) Определите число целых решений неравенства $\frac{x-3}{x+2} \le 0$.

1) 3;
3) 7;
2) 5;
4) 1.

187) Определите число целых решений неравенства $\frac{3x+3}{2-x} \ge 0$.

1) 1;
3) 3;
2) 2;
4) 4.

188) Определите число целых решений неравенства $\frac{4-2x}{x-4} > 0$.

1) 1;
3) 3;
2) 2;
4) 4.

189) Решите неравенство $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-3} < \frac{1}{16}$.

1) $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$;
3) $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$;
2) $(-\infty; 0)$;
4) $\left(0; \frac{5}{2}\right)$.

190) Решите неравенство $2^{2x-1} > \frac{1}{2}$.

1) $(0;+\infty)$;
3) $[0;+\infty)$;
2) $(-\infty; 0)$;
4) $(1;+\infty)$.

191) Решите неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} > \frac{1}{16}$.

1) $(-\infty; 2]$;
3) $(-\infty; 0)$;
2) $(2;+\infty)$;
4) $(-\infty; 2)$.

192) Решите неравенство $3^{4x+3} < 81$.

1) $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$;
3) $(0;+\infty)$;
2) $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$;
4) $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$.

193) Решите неравенство $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} < 5$.

1) $(-\infty; 0)$;
2) $(-\infty; 2)$;
3) $(0; +\infty)$;
4) $(-\infty; 0]$.

194) Решите неравенство: $7^{\frac{1}{3}x-2} > 49$.

1) $(-\infty; 12)$;
2) $(12; +\infty)$;
3) $(0; +\infty)$;
4) $(-\infty; 0)$.

195) Решите неравенство $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x+2} < 16$.

1) $(2; +\infty)$;
2) $(-\infty; 2)$;
3) $(-2; \infty)$;
4) $(-2; 2)$.

196) Решите неравенство $6^{1-2x} < \frac{1}{6}$.

1) $(-\infty; 1]$;
2) $(1; +\infty)$;
3) $(-\infty; 1)$;
4) $(0; +\infty)$.

197) Решите неравенство: $\left(\frac{1}{5}\right)^{1-x} > 25$.

1) $(3; +\infty)$;
2) $(-\infty; 3)$;
3) $(-1; +\infty)$;
4) $(-\infty; -1)$.

198) Решите неравенство: $8^{2-3x} < 1$.

1) $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$;
2) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$;
3) $(0; +\infty)$;
4) $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

199) При каких значениях x соответственные значения функций $f(x) = \log_3 x$ и $g(x) = \log_3(4 - x)$ будут отличаться меньше чем на 1?

200) При каких значениях x соответственные значения функций $f(x) = \log_4 x$ и $g(x) = \log_4(1 - x)$ будут отличаться меньше чем на 1?

201) При каких значениях x соответственные значения функций $f(x) = \log_2(2x + 1)$ и $g(x) = \log_2(1 - x)$ будут отличаться менее чем на 2?

202) При каких значениях x соответственные значения функций $f(x) = \log_2(8x + 1)$ и $g(x) = \log_2(1 - 4x)$ будут отличаться меньше чем на 1?

203) При каких значениях x соответственные значения функций $f(x) = \log_3(x + 1)$ и $g(x) = \log_3(1 - x)$ будут отличаться меньше чем на 2?

204) При каких значениях x соответственные значения функций $f(x) = \log_2(1 + 2x)$ и $g(x) = \log_2(1 - x)$ будут отличаться меньше чем на 2?

205) При каких значениях x соответственные значения функций $f(x) = \log_5(x + 1)$ и $g(x) = \log_5(1 - 2x)$ будут отличаться меньше чем на 1?

206) При каких значениях x соответственные значения функций $f(x) = \log_6(x + 1)$ и $g(x) = \log_6(2 - x)$ будут отличаться меньше чем на 1?

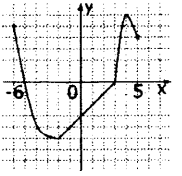
207) При каких значениях x соответственные значения функций $f(x) = \log_4(2 + x)$ и $g(x) = \log_4(3 - x)$ будут отличаться меньше чем на 1?

208) При каких значениях x соответственные значения функций $f(x) = \log_7(x + 2)$ и $g(x) = \log_7(3 - x)$ будут отличаться менее чем на 1?

3. ФУНКЦИИ

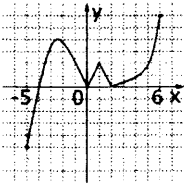
3.1. Числовые функции и их свойства

1) Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-6; 5]$. Укажите промежуток, которому принадлежат все нули функции.



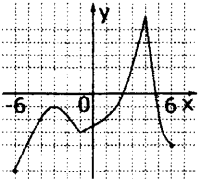
1) $[-5; 3]$;
2) $(-5; 3]$;
3) $[3; 5]$;
4) $[-2;1)$.

2) Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-5; 6]$. Укажите промежуток, которому не принадлежит ни одного экстремума функции.



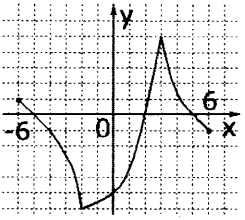
1) $[-5; 6]$;
2) $(-5; 0)$;
3) $(3; 5]$;
4) $[-4; 1)$.

3) Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-6; 6]$. Укажите промежуток, которому принадлежит только один экстремум функции.



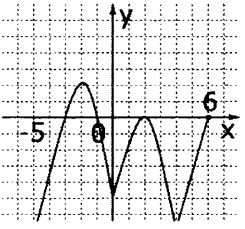
1) $[-5; -2]$;
2) $(-2; 6)$;
3) $(0; 2]$;
4) $[-6; 5]$.

4) Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-6; 6]$. Укажите промежуток, которому принадлежит только один нуль функции.



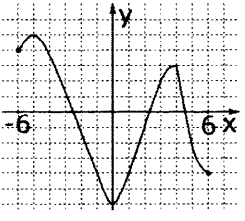
1) $[1; 3]$;
2) $[1; 6)$;
3) $(-6; 3]$;
4) $(-6; 6)$.

5) Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-5; 6]$. Укажите промежуток, которому принадлежат все экстремумы функции.



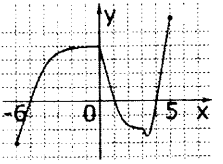
1) $[-2; 4]$;
2) $[-3; 2]$;
3) $[-5; 3)$;
4) $(-1; 1)$.

6) Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-6; 6]$. Укажите ординату точки пересечения графика функции с осью Oy.



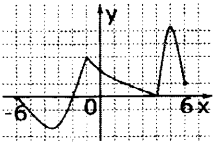
1) 6;
2) –4;
3) –5;
4) –6.

7) Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-6; 5]$. Укажите промежуток, которому принадлежат все нули функции.



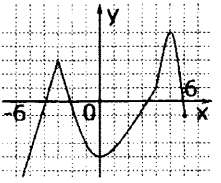
1) $(-6; 0]$; 2) $[-5; 4]$; 3) $[0; 5]$; 4) $(-3; 1)$.

8) Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-6; 6]$. Укажите ординату пересечения графика функции с осью Oy.



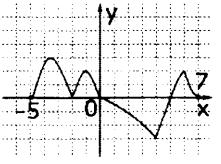
1) 0; 2) 4; 3) 2; 4) –2.

9) Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-6; 6]$. Укажите промежуток, которому не принадлежит ни одного экстремума функции.



1) $[-6; 0]$; 2) $(0; 5]$; 3) $[-3; 6)$; 4) $(1; 4)$.

10) Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-5; 7]$. Укажите промежуток, которому принадлежит только один экстремум функции.



1) $[-5; 0)$; 2) $(1; 5]$; 3) $[3; 6]$; 4) $(1; 7)$.

11) Найдите область определения функции $y(x) = \log_2(\sin(2x + 5))$.

1) $\left(\pm\frac{\pi}{3} + 2 + 2\pi k; \frac{\pi}{7} + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$;

2) $\left(\pi k - 2{,}5; \frac{\pi}{2} - 2{,}5 + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$;

3) $\left((-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$;

4) $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

12) Найдите область определения функции

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{(2-x)(2+x)} + \frac{1}{x-1}}.$$

1) $[-2; 1) \cup (1; 2]$;
2) $[-2; 2]$;
3) $(-\infty; -2) \cup [2; +\infty)$;
4) $(1; +\infty)$.

13) Найдите область определения функции $y(x) = 7^{\sqrt{5-}}$

1) $[3; +\infty)$;
2) $(0; 2]$;
3) $(-\infty; 0) \cup [2; 3]$;
4) $(-\infty; 3) \cup [7; 19]$.

14) Найдите область определения функции

$$y(x) = \sqrt{-\log_7\left(\log_3 \frac{x+1}{x-1}\right)}.$$

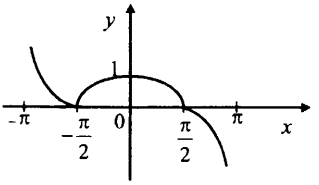
1) $(-\infty; 2]$;
2) $[-15; 35)$;
3) $(35; \infty)$;
4) $[2; \infty)$.

15) Найдите область определения функции

$$y(x) = \log_3\left(\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 2x - 3}\right).$$

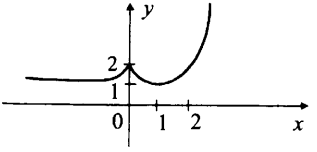
1) $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$;
2) $(-1; 4)$;
3) $(-27; 53)$;
4) $(21; 33)$.

16) Укажите промежуток возрастания функции $y = f(x)$, заданной графиком.



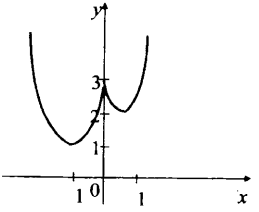
1) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
2) $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$;
3) $[0; \pi)$;
4) $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

17) Укажите промежуток убывания функции $y = f(x)$, заданной графиком.



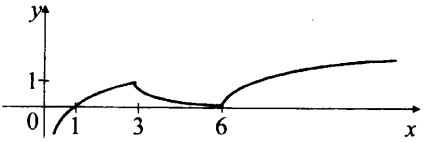
1) $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$;
2) $(0; 2]$;
3) $[0; 1]$;
4) $[1; +\infty)$.

18) Укажите промежутки убывания функции $y = f(x)$, заданной графиком.



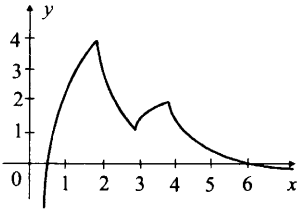
1) $(-\infty; 0]$;
2) $[-1; 0] \cup [1; +\infty)$;
3) $[-1; 1]$;
4) $(-\infty; -1] \cup [0; 1]$.

19) Укажите промежутки возрастания функции $y = f(x)$, заданной графиком.



1) $[3; 6]$;
2) $(0; 3] \cup [6; \infty)$;
3) $(-\infty; 1]$;
4) $[1; 3] \cup [4; \infty)$.

20) Укажите промежутки возрастания функции $y = f(x)$, заданной графиком.



1) $(0; 2] \cup [3; 4]$;
2) $(-\infty; 4]$;
3) $(-\infty; 2] \cup [3; 4]$;
4) $[2; 4]$.

21) Укажите промежуток, которому принадлежит только один нуль функции $f(x) = \sqrt{x^2 + 12} - \sqrt{7x}$.

1) $[3; 4]$;
2) $(5; 6)$;
3) $[4; 10)$;
4) $[0; 3)$.

22) Укажите промежуток, которому принадлежат все нули функции $f(x) = 2\sqrt{2} - \sqrt{x^2 - 2x}$.

1) $[-3; 5]$;
2) $[0; 2]$;
3) $(2; 4]$;
4) $[-2; 0)$.

23) Укажите промежуток, которому не принадлежит ни одного нуля функции $f(x) = x - \sqrt{2x - 1}$.

1) $(-2; 10]$;
2) $[1; 10)$;
3) $[0; 1]$;
4) $(1; 3)$.

24) Укажите промежуток, которому принадлежат все нули функции $y = x - 5\sqrt{x} + 6$.

1) [4; 9];
2) (4; 9];
3) [4; 9);
4) (9; 12).

25) Укажите промежуток, которому принадлежит только один нуль функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{15}$.

1) (–3; 4];
2) (–3; 1);
3) (–3; 5];
4) [0; 2].

26) Укажите промежуток, которому не принадлежит ни одного нуля функции $f(x) = x - \sqrt{6x - 5}$.

1) [1; 5];
2) (1; 5);
3) [5; 6);
4) (0; 1].

27) Укажите промежуток, которому принадлежат все нули функции $f(x) = x + 3 - 4\sqrt{x}$.

1) (1; 9];
2) [9; 10);
3) [1; 9];
4) (1; 10).

28) Укажите промежуток, которому принадлежит один нуль функции $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{5x - 2}$.

1) (0,5; 0,6);
2) [0,5; 1);
3) (0,5; 1);
4) (–2; 0].

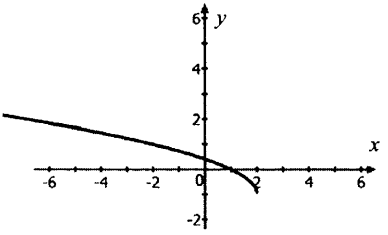
29) Укажите промежуток, которому принадлежит только один нуль функции $f(x) = 3x + 3 - 10\sqrt{x}$.

1) (0; 9);
2) (2; 3];
3) [0; 10);
4) [1; 8).

30) Укажите промежуток, которому не принадлежит ни одного нуля функции $f(x) = \sqrt{5x} - \sqrt{4x^2 + 1}$.

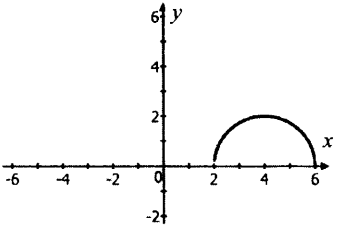
1) (0; 1];
2) $\left[\frac{1}{2}; 1\right)$;
3) [–1; 1);
4) $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

31) Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.



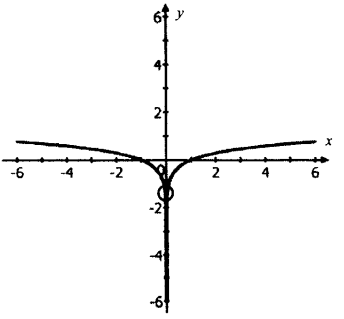
1) $(-1; 2)$; 2) $[-1; 2)$; 3) $(-\infty; 2]$; 4) $[-1; +\infty)$.

32) Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.



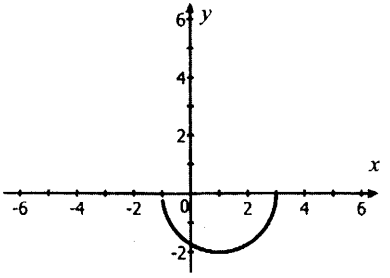
1) $(0; 2)$; 2) $(2; 6)$; 3) $[0; 2]$; 4) $[2; 6]$.

33) Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.



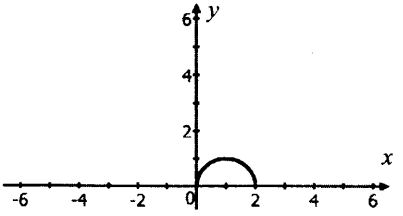
1) 0;
2) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;
3) $(0; +\infty)$;
4) $(-\infty; 0)$.

34) Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.



1) [–2; 0]; 2) [–1; 0]; 3) [–1; 3]; 4) (–1; 3).

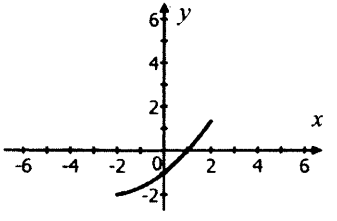
35) Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.



1) $(-\infty; +\infty)$; 3) [–2; 0);

2) [0; 1]; 4) [0; 2].

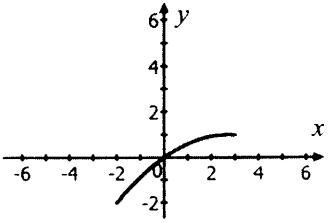
36) Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.



1) [–2; 1); 3[–2; 0];

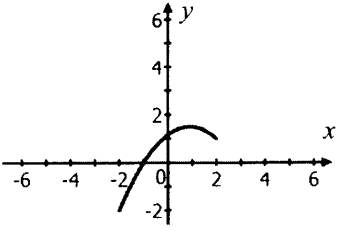
2) [–2; 3); 4) [–2; 2].

37) Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.



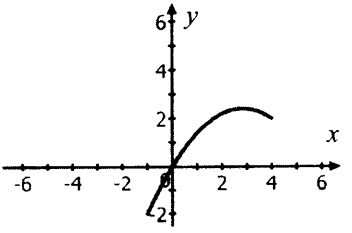
1) [–2; 3];
2) [–2; 1];
3) [–2; 0];
4) [0; 1].

38) Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.



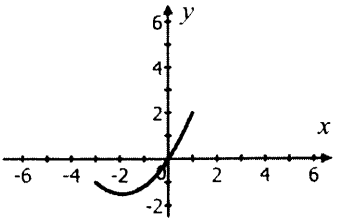
1) [0; 1];
2) [–1; 2];
3) [–2; 1];
4) [–2; 2].

39) Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.



1) [–1; 0];
2) [–2; 2];
3) [0; 4];
4) [–1; 4].

40) Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.



1) [–1; 2]; 2) [0; 1]; 3) [–3; 1]; 4) [–3; 0].

41) Найдите область определения функции $y = \log_3 \frac{7+x}{x-3}$.

1) $(-\infty; -7) \cup (3; +\infty)$; 3) [–7; 3];
2) (–7; 3); 4) $(-\infty; -7] \cup [3; +\infty)$

42) Найдите область определения функции $y = \log_7(x^2 - 8x + 15)$.

1) $(-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$; 3) $(-\infty; 3] \cup [5; +\infty)$;
2) (3; 5); 4) [3; 5].

43) Найдите область определения функции $y = \log_{\frac{x-1}{x+3}} 2$.

1) $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$; 3) $x \in (-\infty; -3) \cup [1; +\infty)$;
2) $x \in (-3; 1)$; 4) $x \in (-3; 1]$.

44) Найдите область определения функции $y = \log_{3,75}(x^2 - x - 2)$.

1) $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$; 3) [–1; 2];
2) (–1; 2); 4) $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

45) Найдите область определения функции $y = \frac{3x}{2^{2x} - 2^x - 2}$.

1) –1; 3) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$
2) $(-\infty; -1]$; 4) $(-1; +\infty)$

46) Найдите область определения функции $y = \log_3 \frac{x-4}{3-6x}$.

1) $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$; 3) (0,5; 4);
2) (0; 4); 4) (–4; 2).

47) Найдите область определения функции $y = \log_7 \frac{3+x}{x-3}$.

1) $(-3; 3)$; 3) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$;
2) $(-\infty; -3)$; 4) $(3; 7)$.

48) Найдите область определения функции $y = \log_6 \frac{x-6}{2x+10}$.

1) $(-\infty; -5) \cup (6; \infty)$; 3) $(-5; 6)$;
2) $(6; \infty)$; 4) $(0; 6) \cup (6; \infty)$.

49) Найдите область определения функции $y = \log_7 \frac{3+x}{4-x}$.

1) $(-\infty; 3) \cup (4; +\infty)$; 3) $(-3; 4)$;
2) $(-3; 7)$; 4) $(0; 4) \cup (7; +\infty)$.

50) Найдите область определения функции $y = \log_3 \frac{x-3}{5+x}$.

1) $(-5; 3)$; 3) $(-\infty; -5) \cup (3; +\infty)$;
2) $(0; 3) \cup (5; +\infty)$; 4) $(-5; 0)$.

51) Найдите множество значений функции $y = \cos^2 x + 3$.

1) $[0; 4]$; 3) $[3; +\infty)$;
2) $[3; 4]$; 4) $(3; 4)$.

52) Найдите множество значений функции $y = \log_2(x-3) - \log_2(x-2)$.

1) $[0; +\infty)$; 3) $(-\infty; 0]$;
2) $(0; +\infty)$; 4) $(-\infty; +\infty)$.

53) Найдите множество значений функции $y = e^{x^2+1}$.

1) $(-\infty; 0)$; 3) $[e; +\infty)$;
2) $[0; +\infty)$; 4) e.

54) Найдите множество значений функции $y = 2^{\sqrt{x}} - 1$.

1) 0; 3) $(-\infty; 0]$;
2) $[0; +\infty)$; 4) $(-\infty; 0)$.

55) Найдите множество значений функции $y = 2^{\sin x} - 1$.

1) $(-\infty; 1]$; 3) $[1; 2]$;
2) $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$; 4) $[1; +\infty)$.

56) Найдите множество значений функции $y = 4 - \cos x$.

1) $[2; 4]$; 3) $[-2; 6]$;

2) $[3; 5]$; 4) $[-1; 1]$.

57) Найдите множество значений функции $y = 1 + 5\cos x$.

1) $[-4; 6]$; 3) $[0; 2]$;

2) $[-2; 2]$; 4) $[4; 6]$.

58) Найдите множество значений функции $y = 3 - 4\cos x$.

1) $[-1; 3]$; 2) $[-1; 7]$; 3) $[-4; 4]$; 4) $(-\infty; 3]$.

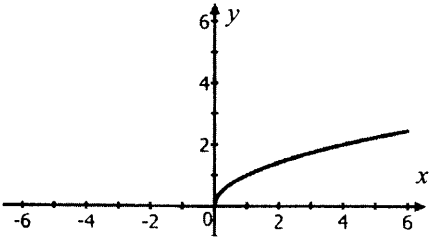
59) Найдите множество значений функции $y = 2 - 4\cos x$.

1) $[-4; 2]$; 2) $[-1; 1]$; 3) $[2; 6]$; 4) $[-2; 6]$.

60) Найдите множество значений функции $y = 2\sin x + 5$.

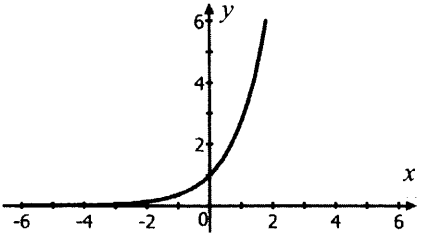
1) $[-2; 2]$; 2) $[3; 7]$; 3) $[-5; 5]$; 4) $[-1; 1]$.

61) График какой из перечисленных функций изображен на рисунке?



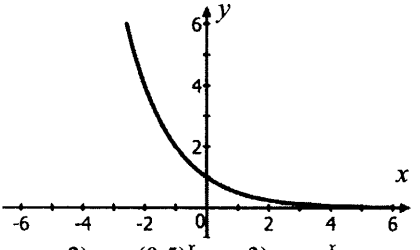
1) $y = 2^x$; 2) $y = \log_2 x$; 3) $y = x^2$; 4) $y = \sqrt{x}$.

62) График какой из перечисленных функций изображен на рисунке?



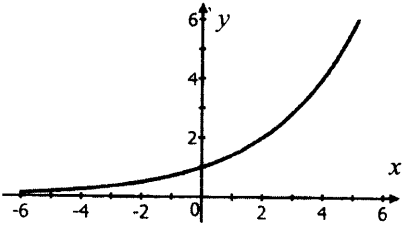
1) 2^x; 2) $\log_2 x$; 3) e^x; 4) e^{-x}.

63) График какой из перечисленных функций изображен на рисунке?



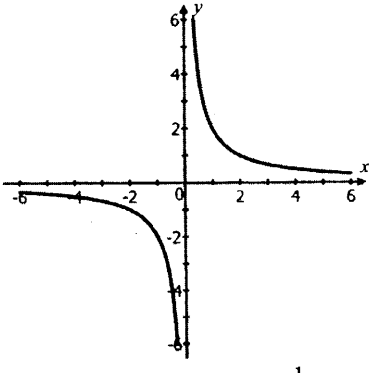
1) $y = 2^x$; 2) $y = (0,5)^x$; 3) $y = e^x$; 4) $y = \log_2 x$.

64) График какой из перечисленных функций изображен на рисунке?



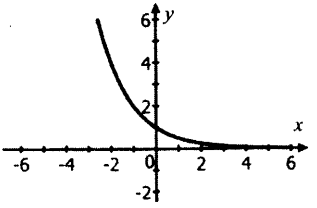
1) $y = \log_2 x$; 2) $y = \log_{0,5} x$; 3) $y = 2^{2x}$; 4) $y = 2^{0,5x}$.

65) График какой из перечисленных функций изображен на рисунке?



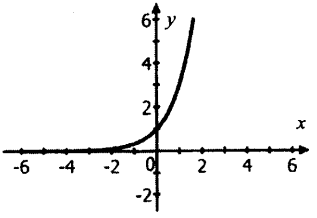
1) $y = 2^x$; 2) $y = \sqrt{x}$; 3) $y = \frac{1}{x}$; 4) $y = \frac{2}{x}$.

66) График какой из перечисленных функций изображен на рисунке?



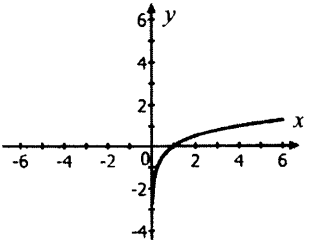
1) $y = 2^x$;
2) $y = (0{,}5)^x$;
3) $y = \log_2 x$;
4) $y = \log_{0,5} x$.

67) График какой из нижеперечисленных функций изображен на рисунке?



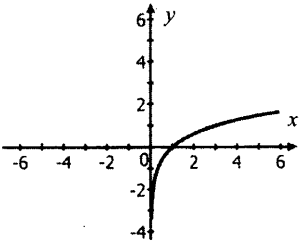
1) $y = \log_3 x$;
2) $y = 3^x$;
3) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$;
4) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

68) График какой из перечисленных функций изображен на рисунке?



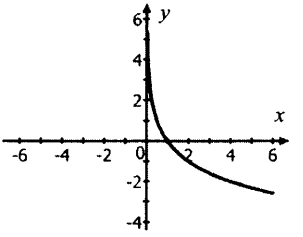
1) $y = 4^x$;
2) $y = 2^x$;
3) $y = \log_4 x$;
4) $y = \log_2 x$.

69) График какой из перечисленных функций изображен на рисунке?



1) $\log_3 x$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x$; 3) $3x$; 4) $\log_{\frac{1}{3}} x$.

70) График какой из перечисленных функций изображен на рисунке?



1) 2^x; 2) $\log_2 x$; 3) $(0,5)^x$; 4) $\log_{0,5} x$.

71) Найдите наибольшее целое значение функции $y = 2\sqrt{9\sin^2 x + 6\sin x + 13}$.

72) Найдите наименьшее целое значение функции $y = 3\sqrt{4 - 2\cos x - \cos^2 x}$.

73) Найдите наибольшее целое значение функции $y = 7\sqrt{2 + 4\sin x \cos x}$.

74) Найдите наибольшее целое значение функции $y = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x + 8}$.

75) Найдите наибольшее целое значение функции $y = \sqrt{5\cos^2 x + 4\cos x + 16}$.

76) Найдите наибольшее целое значение функции $y = 0{,}5 \cdot \sqrt{10 + 6\cos x + 9\cos^2 x}$.

77) Найдите наибольшее целое значение функции $y = \frac{2}{3}\sqrt{16\sin^2 x + 16\sin x + 17}$.

78) Найдите наибольшее целое значение функции $y = \frac{1}{3}\sqrt{16\sin^2 x + 40\sin x + 44}$.

79) Найдите наибольшее целое значение функции $y = 2{,}5\sqrt[3]{16\sin^2 x + 24\sin x + 24}$.

80) Найдите наибольшее целое значение функции $y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{40 - 60\cos x + 25\cos^2 x}$.

81) Найдите все значения a, при которых область определения функции $y = ((a - a^{\log_{\sqrt{a}}\sqrt{x}})(a + a^{\log_{\sqrt{a}}\sqrt{x}}))^{0,5}$ содержит лишь одно целое значение.

82) Найдите все значения параметра a, при которых область определения функции $y = \log_2(\log_2(a - x))\cdot\log_2 x$ содержит пять целых чисел.

83) Найдите все значения a, при которых область определения функции $y = \sqrt{a - x}\,\log_2(2x - a)\cdot\log_2 x$ содержит три или четыре целых числа.

84) Найдите все значения a, при которых область определения функции $y = \frac{1}{a\cdot 2^{2x} - 2^x + 1}$ есть вся числовая прямая.

85) Найдите все значения a, при которых область определения функции $y = \frac{1}{2^{2x} - 2^x - a}$ есть вся числовая прямая.

86) Найдите все значения a, при которых область определения функции $y = \left(\left(\sqrt[3]{a}\right)^{3x+1} - \left(\sqrt[3]{a}\right)^{10} + a^3\sqrt[3]{x} - x^{\frac{1}{3} + x\log_x a}\right)^{\frac{1}{4}}$ содержит два целых числа.

87) Найдите все a, при которых область определения функции $y=\left(\left(xa^{12}\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}a^{6,5}+\sqrt{2a}\cdot x^{2x\log_x a}-a^{2x}\sqrt{x}\right)^{0,25}$ содержит одно целое число.

88) Найдите все значения a, при которых область определения функции

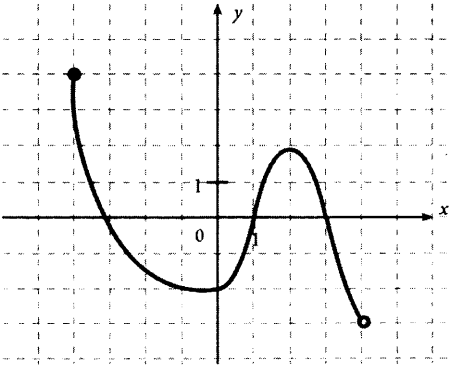
$$y=\left(\sqrt[3]{x}\cdot x^{5\log_x a}+\left(\sqrt[3]{a}\right)^{3x+1}\cdot\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}\cdot\left(\sqrt[3]{a}\right)^{16}-x^{\frac{1}{3}+x\log_x a}\right)^{\frac{1}{4}}$$

содержит два целых числа.

89) Найдите все значения a, при которых область определения функции $y=\left(a^{2x+0,5}-\left(\sqrt{a}\right)^{17}+\sqrt{2x}\cdot a^8-(2x)^{0,5+2x\log_{2x}a}\right)^{0,5}$ содержит одно, два или три целых числа.

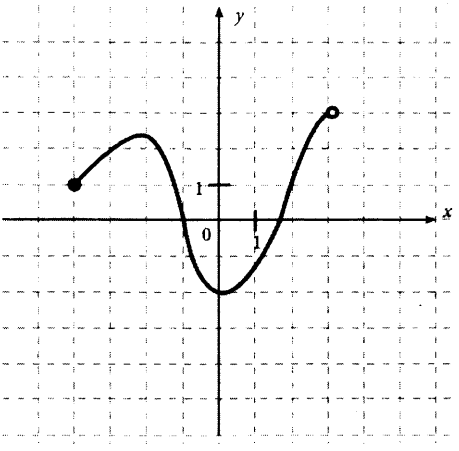
90) Найдите все значения a, при которых область определения функции $y=\left(\left(\sqrt{a}\right)^{2x+0,5}+\sqrt[4]{a^{24}\cdot x}-\left(\frac{1}{a}\right)^{-x}\sqrt[4]{x}-2^{25\log_{16}a}\right)^{0,5}$ содержит два или три целых числа.

91) Укажите множество значений функции, график которой изображен на рисунке.



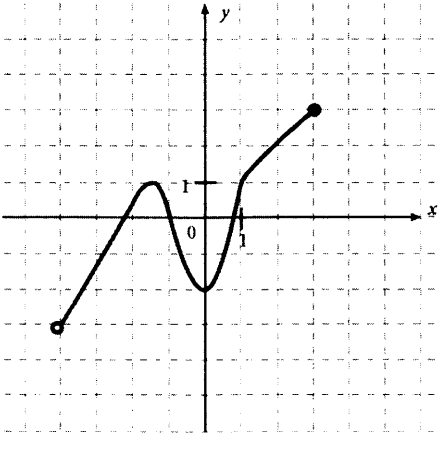
1) $[-4; 4]$;
2) $(-3; 4]$;
3) $[-4; 4]$;
4) $[-3; 4]$.

92) Укажите множество значений функции, график которой изображен на рисунке.



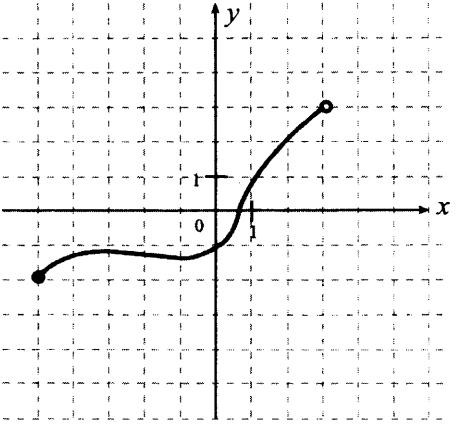
1) [–2; 3);
2) (–2; 3];
3) [–4; 3);
4) [1; 3).

93) Укажите множество значений функции, график которой изображен на рисунке.



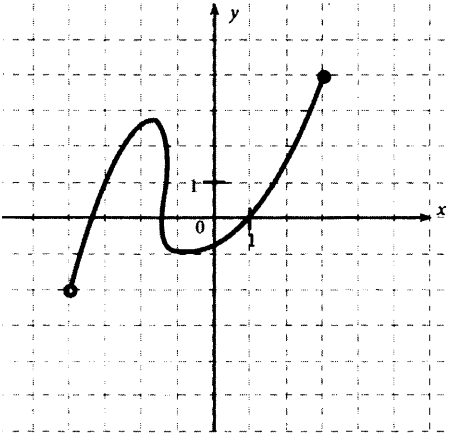
1) [–2; 3];
2) (–4; 3];
3) (–3; 3];
4) [1; 3].

94) Укажите множество значений функции, график которой изображен на рисунке.



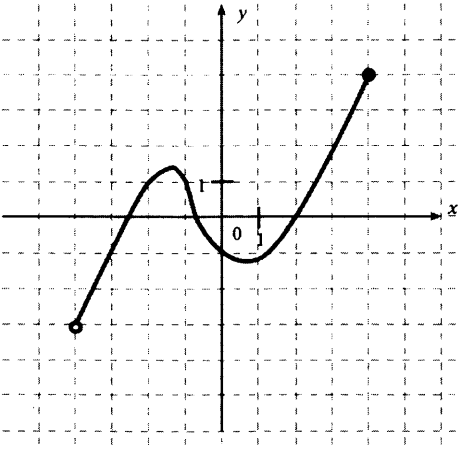
1) [–5; 3);
2) [–5; 3];
3) (–2; 3);
4) [–2; 3).

95) Укажите множество значений функции, график которой изображен на рисунке.



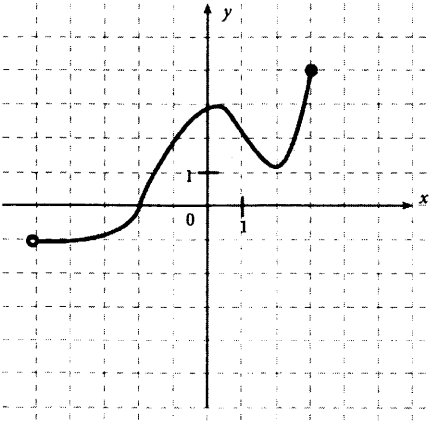
1) (–2; 4];
2) [–4; 3);
3) (–4; 3];
4) [–2; 4].

96) Укажите множество значений функции, график которой изображен на рисунке.



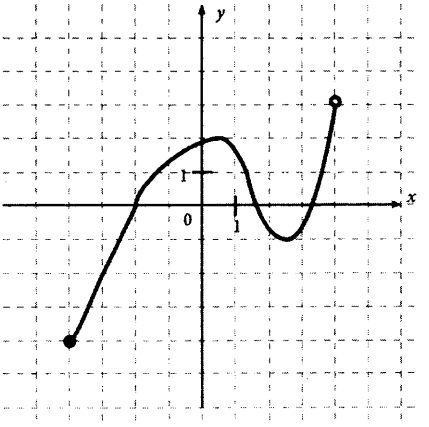
1) (–4; 4];
2) [–4; 4];
3) (–3; 4];
4) [–3; 4].

97) Укажите множество значений функции, график которой изображен на рисунке.



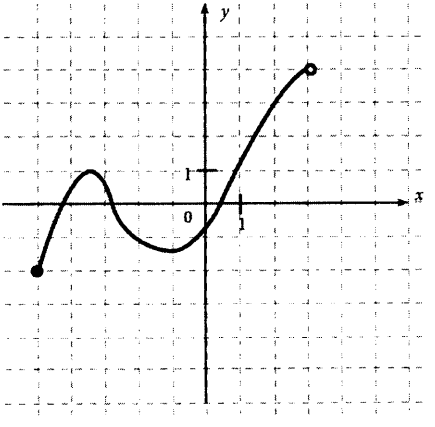
1) (–1; 4];
2) [3; 4];
3) (–5; 3];
4) [–5; 3].

98) Укажите множество значений функции, график которой изображен на рисунке.



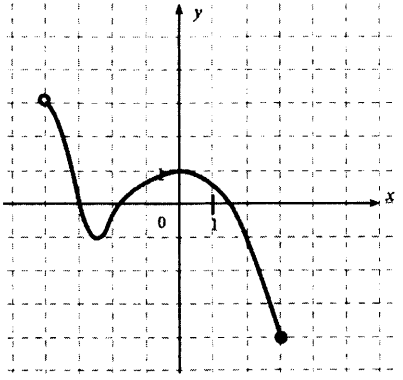
1) [–4; 4);
2) [–4; 3);
3) (–4; 3];
4) (–4; 4).

99) Укажите множество значений функции, график которой изображен на рисунке.



1) [–4; 3);
2) [–4; 4];
3) [–2; 4);
4) (–4; 3].

100) Укажите множество значений функции, график которой изображен на рисунке.



1) [–1; 3);
2) (–4; 3];
3) [–4; 3);
4) (0; 1).

101) Найдите область определения функции $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x - x^2)$.

1) (0; 1);
2) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$;
3) [0; 1];
4) $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

102) Найдите область определения функции $f(x) = \log_2(3x - 2x^2)$.

1) [0; 1,5];
2) $(-\infty; 0] \cup [1,5; +\infty)$;
3) (0; 1,5);
4) $(-\infty; 0) \cup (1,5; +\infty)$.

103) Найдите область определения функции $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 + x\right)$.

1) (–1; 0);
2) $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$;
3) [–1; 0];
4) $(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$.

104) Найдите область определения функции $f(x) = \log_4(x^2 - 2x)$.

1) [0; 2];
2) $[-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$;
3) (0; 2);
4) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

105) Найдите область определения функции $f(x) = \log_{\frac{1}{5}}(1 - x^2)$.

1) (–1; 1);
2) [–1; 1];
3) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$;
4) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

106) Найдите область определения функции $y = \log_{16}(x^2-4)$.

1) $(-2; 2)$; 3) $[-2; 2]$;

2) $(-\infty; -2)\cup(2; +\infty)$; 4) $(-\infty; -2]\cup[2; +\infty)$.

107) Найдите область определения функции $y = \log_{\frac{1}{4}}(x-1)(2-x)$.

1) $(1; 2)$; 3) $(-\infty; 1)\cup(2; +\infty)$;

2) $[1; 2]$; 4) $(-\infty; 1]\cup[2; +\infty)$.

108) Найдите область определения функции $f(x) = \log_2(x+2)(x+3)$.

1) $(-\infty; -3]\cup[-2; +\infty)$; 3) $[-3; -2]$;

2) $(-3; -2)$; 4) $(-\infty; -3)\cup(-2; +\infty)$.

109) Найдите область определения функции $f(x) = \log_{\frac{1}{5}}(x-2x^2)$.

1) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$; 3) $(-\infty; 0)\cup\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$;

2) $\left[0; \frac{1}{2}\right]$; 4) $(-\infty; 0]\cup\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

110) Найдите область определения функции $f(x) = \log_2(x-1)(4-x)$.

1) $(-\infty; 1)\cup(4; +\infty)$; 3) $(1; 4)$;

2) $(-\infty; 1]\cup[4; +\infty)$; 4) $[1; 4]$.

111) Укажите наибольшее значение функции $y = 2 + \sin 4x$.

1) 2; 3) 1;

2) 3; 4) 6.

112) Укажите наибольшее значение функции $y = \cos 2x - 1$.

1) 0; 3) 1;

2) –2; 4) –3.

113) Укажите наибольшее значение функции $y = 3 + 2\sin x$.

1) 3; 3) 5;

2) 1; 4) 4.

114) Укажите наименьшее значение функции $y = 2 - 2\cos 2x$.

1) 4; 3) –2;
2) 2; 4) 0.

115) Укажите наименьшее значение функции $y = 3 + \cos 3x$.

1) 2; 3) 0;
2) 3; 4) 4.

116) Укажите наименьшее значение функции $y = -1 + 2\sin 3x$.

1) –1; 3) –3;
2) 1; 4) –7.

117) Укажите наибольшее значение функции $y = 4\sin\frac{x}{2} - 1$.

1) 4; 3) –5;
2) 1; 4) 3.

118) Укажите наибольшее значение функции $y = 2 - \cos\frac{x}{3}$.

1) 2; 3) 1;
2) 3; 4) $1\frac{2}{3}$.

119) Укажите наибольшее значение функции $y = 2\cos 3x - 1$.

1) –3; 3) –1;
2) 1; 4) –7.

120) Укажите наименьшее значение функции $y = 2 - 3\sin 2x$.

1) 2; 3) 5;
2) –1; 4) –4.

121) Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{100}{3^x + 4^x}$ на отрезке [2; 8].

122) Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{9}{4^x + 5^x}$ на промежутке [1; 3].

123) Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{50}{2^x + 3^x}$ на промежутке $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

124) Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{36}{4^x + 2^x}$ на отрезке [1; 2].

125) Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{58}{5^x + 2^x}$ на отрезке [2; 4].

126) Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{13}{2^x + 3^x}$ на отрезке [1; 2].

127) Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{41}{5^x + 4^x}$ на промежутке [1; 2].

128) Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{5}{4^{2x} - 4^{x+0,5} + 2}$ на промежутке [0; 2].

129) Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{8}{9^x - 6 \cdot 3^x + 11}$ на промежутке [1; 3].

130) Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{27}{2^{2x} - 2^{x+1} + 6}$ на промежутке [0; 3].

131) Нечетная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = x(x + 3)(x - 2)(2x - 1)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

132) Нечетная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = (x - 1) \cdot x(x + 2)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

133) Четная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 5)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

134) Четная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = x(x - 1)(x + 3)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

135) Нечетная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неположительного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = x(x + 1)(x + 2)(x - 3)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

136) Нечетная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неположительного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = x(x + 2)(x - 1)(x - 2)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

137) Четная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неположительного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = x(x + 2)(x + 3)(x - 8)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

138) Нечетная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения аргумента x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = (x + 2)(x - 3)(x + 4)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

139) Нечетная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = (x - 3)(x + 2)(x - 1)(x + 18)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

140) Нечетная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неположительного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = (x + 3)x(x + 1)(x + 2)(x - 2)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

3.2. Производная функции

141) Найдите производную функции $y(x) = 2\sin x + \cos x - 3$.

1) $y'(x) = \operatorname{tg} x + 7$;
3) $y'(x) = 2\cos x - \sin x$;
2) $y'(x) = \dfrac{1}{\sin x} - 2$;
4) $y'(x) = 3\sin x - 2$.

142) Найдите производную функции $h(x) = \operatorname{tg} x + 2\sin x$.

1) $h'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - \cos x$;
3) $h'(x) = 3\cos x + 2$;
2) $h'(x) = \operatorname{ctg} x + \cos x$;
4) $h'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} + 2\cos x$.

143) Найдите производную функции $l(x) = 7^x + e^x - 7$.

1) $l'(x) = x\ln 7 + x$;
3) $l'(x) = 7x + 1 - e^x \lg e$;
2) $l'(x) = 7^x \ln 7 + e^x$;
4) $l'(x) = \dfrac{1}{7^x} - 3$.

144) Найдите производную функции $k(x) = 3 \cdot 2^x + 10^{x \lg e} + 121$.

1) $k(x) = 6x + 10x \lg e$;
2) $k(x) = 2^x + 10^x$;
3) $k(x) = 3 \cdot 2^x \ln 2 + e^x$;
4) $k(x) = e^x + 123$.

145) Найдите производную функции $g(x) = 2\log_2 x + \ln x$.

1) $g'(x) = 2x\ln 2 + x$;
3) $g(x) = \dfrac{1}{x} + 4$;
2) $g(x) = x + e^x$;
4) $g'(x) = \dfrac{2}{x \ln 2} + \dfrac{1}{x}$.

146) Найдите производную функции $q(x) = 2\ln x - 3\log_7 x + 5$.

1) $q'(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x \ln 7}$;
3) $q'(x) = 7x - 3$;
2) $q'(x) = 2x - 3x\ln 7$;
4) $q'(x) = \dfrac{2}{x} + 8x$.

147) Найдите производную функции $f(x) = \operatorname{ctg}x + 2x^3 - 2^x$.

1) $f'(x) = \operatorname{tg}x + 6x^2 - 2^x$;

2) $f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} + 6x^2 - 2^x \ln 2$;

3) $f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} + x^2 - \dfrac{1}{x \ln 2}$;

4) $f'(x) = \cos x + 3x^2 + 2^x \ln 2$.

148) Найдите производную функции $a(x) = 3x^7 \log_3 x$.

1) $a'(x) = 21x^6 \log_3 x + \dfrac{3x^6}{\ln 3}$;

2) $a'(x) = x^6 + 3$;

3) $a'(x) = 21x^6 \log_3 x + x^7 \cdot 3^{x+1}$;

4) $a'(x) = 21 \log_3 x + \dfrac{3x^6}{\ln 3}$.

149) Найдите производную функции $b(x) = \dfrac{x^2 - 7}{\cos x}$.

1) $b'(x) = 2x + 7\sin x$;

2) $b'(x) = \dfrac{2x + (x^2 - 7)\operatorname{ctg}x}{\sin x}$;

3) $b'(x) = \dfrac{2x + (x^2 - 7)\operatorname{tg}x}{\cos x}$;

4) $b'(x) = -\dfrac{2x}{\sin x}$.

150) Найдите производную функции $P(x) = \sin(4x + \pi) + 2^{2x+3}$.

1) $P'(x) = 4\cos(4x + \pi) + 2\ln 2 \cdot 2^{2x+3}$;

2) $P'(x) = -4\cos(4x + \pi) + 2 \cdot 2^{2x+3}$;

3) $P'(x) = \sin(4x + \pi) - 4x - 6$;

4) $P'(x) = 4\sin(4x + \pi) + (2x + 3)\ln 2$.

151) При движении тела по прямой расстояние S (в километрах) от начальной точки меняется по закону $S(t) = \dfrac{t^4}{4} - \dfrac{t^2}{4} + 2$ (t — время движения в часах). Найдите скорость (км/ч) тела через 1 час после начала движения.

1) 2; 2) 1,5; 3) 0,1; 4) 0,5.

152) Найдите коэффициент наклона касательной к графику функции $y = e^x - x - 1$ в точке $x = 0$.

1) 1; 2) -1; 3) e; 4) 0.

153) Найдите коэффициент наклона касательной к графику функции $y = \sin x + \cos x$ в точке $x = \frac{\pi}{2}$.

1) 1; 2) 0; 3) -1; 4) 2.

154) При движении тела по прямой расстояние S (в метрах) от начальной точки меняется по закону $S(t) = t^2 + \ln t + 11$ (t — время движения в секундах). Найдите скорость (м/с) тела через 4 секунды после начала движения.

1) $27 + \ln 4$;
2) 8,25;
3) 7,75;
4) 9,5.

155) При движении тела по прямой его скорость v (в м/с) меняется по закону $v(t) = \frac{t^5}{5} - t^3 + t + 1$ (t — время движения в секундах). Найдите ускорение (м/с^2) тела через 2 секунды после начала движения.

1) 6,2; 2) 1,4; 3) 4; 4) 5.

156) Найдите коэффициент наклона касательной к графику функции $y = \ln x + \frac{x^3}{3}$ в точке $x = 2$.

1) $\frac{8}{3} + \ln 2$;
2) 4;
3) 4,5;
4) 6.

157) При движении тела по прямой его скорость (в м/с) меняется по закону $v(t) = \frac{t^2}{2} + e^t$ (t — время движения в секундах). Найдите ускорение (м/с^2) тела через 1 секунду после начала движения.

1) $e + \frac{1}{2}$;
2) $\frac{1}{2}e$;
3) $1 - e$;
4) $1 + e$.

158) Найдите коэффициент наклона касательной к графику функции $y=\frac{x^2}{2}+\frac{2}{x}$ в точке $x=-1$.

1) –3; 2) –2; 3) –1,5; 4) 0.

159) Найдите коэффициент наклона касательной к графику функции $y=x-2\sqrt{x}$ в точке $x=4$.

1) 0; 3) 0,5;
2) 1; 4) 1,5.

160) При движении тела по прямой расстояние S (в метрах) от начальной точки изменяется по закону $S(t)=\frac{t^2}{2}-\frac{2}{\sqrt{t}}$ (t — время движения в секундах). Найдите скорость (м/с) тела через 4 секунды после начала движения.

1) 4,125; 2) 7; 3) 5,25; 4) 0,5.

161) Найдите производную функции $y=\sin x+2x^6$.

1) $y'=-\cos x+2x^5$; 3) $y'=-\cos x+12x^5$;
2) $y'=\cos x+12x^5$; 4) $y'=\cos x+x^5$.

162) Найдите производную функции $y=x^2+x^3+e^x-4$.

1) $y'=x+3x^2+e^x-4$; 3) $y'=2x+3x^2+e^x$;
2) $y'=2x+x^2+e^{-x}$; 4) $y'=2x+3x^2+e^{-x}-4$.

163) Найдите производную функции $y=\ln x+e^{2x}$.

1) $x+e^{2x}$; 3) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}e^{2x}$

2) $x+2e^{2x}$; 4) $\frac{1}{x}+2e^{2x}$.

164) Найдите производную функции $y=2^x+e^x-\sin x$.

1) $y'=2^x+e^x-\cos x$; 3) $y'=2^x\ln 2+e^x+\cos x$;
2) $y'=2^x+e^x+\cos x$; 4) $y'=2^x\ln 2+e^x-\cos x$.

165) Найдите производную функции $y=\frac{1}{x}+x^6$

1) $y'=\frac{1}{x^2}+x^5$; 3) $y'=-\frac{1}{x^2}+x^5$;

2) $y'=\frac{1}{x^2}+6x^5$; 4) $y'=-\frac{1}{x^2}+6x^5$.

166) Найдите производную функции $y = -\sin x + x^3$.

1) $y' = \cos x + 3x^2$; 3) $y' = -\cos x + x^2$;

2) $y' = \cos x + x^2$; 4) $y' = -\cos x + 3x^2$.

167) Найдите производную функции $y = 2x^5 - 3\cos x$.

1) $y' = 5x^4 - 3\sin x$; 3) $y' = 2x^4 + 3\sin x$;

2) $y' = 10x^4 - 3\sin x$; 4) $y' = 10x^4 + 3\sin x$.

168) Найдите производную функции $y = 2\sin x - x^5$.

1) $y' = 2\cos x - 5x^4$; 3) $y' = 2\cos x - x^4$;

2) $y' = -2\cos x - 5x^4$; 4) $y' = -2\cos x - x^4$.

169) Найдите производную функции $y = 3\sin x - x^6$.

1) $y' = -3\cos x - x^5$; 3) $y' = -3\cos x - 4x^5$;

2) $y' = 3\cos x - 6x^5$; 4) $y' = 3\cos x - x^5$.

170) Найдите производную функции $y = -2\cos x + x^3$.

1) $y' = -2\sin x + 3x$; 3) $y' = -2\sin x + 3x^2$;

2) $y' = 2\sin x + 3x^2$; 4) $y' = 2\sin x + 3x$.

171) Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = 7x^3 - 21x^2 + 18$ в его точке с абсциссой $x_0 = 1$.

1) -18; 3) -21;

2) 22; 4) 17.

172) Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 6$ в его точке с абсциссой $x_0 = -1$.

1) 0; 3) 4;

2) 10; 4) -6.

173) Координата материальной точки изменяется с течением времени по закону $x(t) = 3t^2 - 7t + 6$. Найдите скорость точки в момент времени $t = 6$.

1) 2; 3) 32;

2) 29; 4) 36.

174) Координата материальной точки измеряется с течением времени по закону $x(t) = t^5 - t^4 + 6$. Найдите скорость точки в момент времени $t = 2$.

1) 48; 3) 70;

2) 54; 4)88.

175) Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = 3x^3 - 2x + 1$ в его точке с абсциссой $x_0 = 1$.

1) 5; 3) 9;
2) 7; 4) 11.

176) Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = 3x^2 - 2x + 1$ в его точке с абсциссой $x_0 = 1$.

1) 4; 3) 2;
2) 1; 4) 5.

177) Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = 3x^2 - 5x + 1$ в его точке с абсциссой $x_0 = 2$.

1) 3; 3) 1;
2) 8; 4) 7.

178) Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = 3x^2 - 7x + 12$ в его точке с абсциссой $x_0 = 3$.

1) 18; 3) 11;
2) 23; 4) 8.

179) Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = -2x^2 + 3x + 5$ в его точке с абсциссой $x_0 = -1$.

1) 7; 3) 0;
2) 1; 4) 5.

180) Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = -x^2 + 6x - 4$ в его точке с абсциссой $x_0 = 3$.

1) 6; 3) 0;
2) 5; 4) –4.

181) Укажите абсциссу точки графика функции $f(x) = 4 - x - 2x^2$, в которой угловой коэффициент касательной равен нулю.

1) $-\frac{1}{4}$; 3) 4;
2) 0; 4) 2.

182) Укажите абсциссу точки графика функции $f(x) = 2 + x + x^2$, в которой угловой коэффициент касательной равен нулю.

1) –2; 3) 0;

2) $-\frac{1}{2}$; 4) 1/2.

183) Укажите абсциссу точки графика функции $f(x) = -x^2 + 4x + 3$, в которой угловой коэффициент касательной равен нулю.

1) 0; 3) 2;

2) –2; 4) 1/2.

184) Укажите абсциссу точки графика функции $f(x) = 2x^2 + x - 1$, в которой угловой коэффициент касательной равен нулю.

1) –4; 3) $\frac{1}{4}$;

2) $-\frac{1}{4}$; 4) 0.

185) Укажите абсциссу точки графика функции

$$f(x) = 3 - x - \frac{1}{2}x^2,$$

в которой угловой коэффициент касательной равен нулю.

1) 0; 3) 2;

2) 1; 4) –1.

186) Укажите абсциссу точки графика функции

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x - 1,$$

в которой угловой коэффициент касательной равен нулю.

1) –2; 3) –4;

2) 0; 4) 4.

187) Укажите абсциссу точки графика функции $f(x) = 2+3x-x^2$, в которой угловой коэффициент касательной равен нулю.

1) $\frac{2}{3}$; 3) $-\frac{3}{2}$;

2) $\frac{3}{2}$; 4) 0.

188) Укажите абсциссу точки графика функции

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+4x-8,$$

в которой угловой коэффициент касательной равен нулю.

1) –4; 3) –2;

2) 0; 4) 4.

189) Укажите абсциссу точки графика функции $f(x) = 3x^2+6x-2$, в которой угловой коэффициент касательной равен нулю.

1) 0; 3) 1;

2) –1; 4) –2.

190) Укажите абсциссу точки графика функции $f(x) = 2+2x-4x^2$, в которой угловой коэффициент касательной равен нулю.

1) $-\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{4}$;

2) $\frac{1}{8}$; 4) 1.

3.3. Исследование функций с помощью производной

191) Найдите наибольшее значение функции $f(x) = -x^2 + 4x + 21$.

192) Найдите наименьшее значение функции $g(x) = x^2 + 4x - 32$.

193) Найдите наибольшее значение функции $y(x) = \ln(e^2 - x^2)$ на отрезке $[-1; 1]$.

194) Найдите наименьшее значение функции $P(x) = \cos^2 2x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$.

195) Найдите наименьшее значение функции $q(x) = x^5e^{5x} + 5$ на отрезке $[-7; 3]$.

196) Найдите точку минимума функции $h(x) = e^{3x+7}\cdot x^3$.

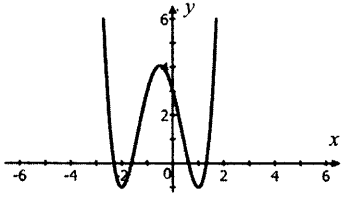
197) Найдите точку минимума функции $k(x) = \frac{2}{3}\cos 3x$ на промежутке $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$.

198) Найдите точку минимума функции $l(x) = \log_2^2(2x-5)$.

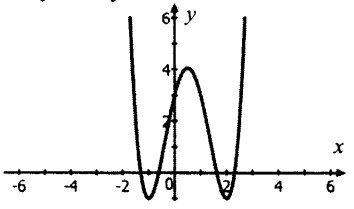
199) Найдите точку минимума функции $b(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+4}{x}\right)$.

200) Найдите точки максимума функции $a(x) = x^2 e^{-x^2}$.

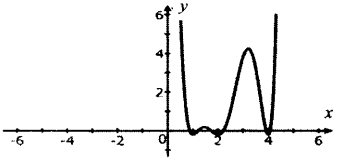
201) На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, заданной на отрезке $[-3; 2]$. Исследуйте функцию $y = f(x)$ на монотонность и в ответе укажите число промежутков возрастания.



202) На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, заданной на промежутке $(-4; 4]$. Исследуйте функцию $y = f(x)$ на монотонность и в ответе укажите число промежутков убывания.



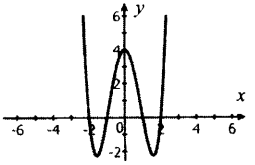
203) На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, заданной на отрезке $[0; 5]$. Исследуйте функцию $y = f(x)$ на монотонность и в ответе укажите число промежутков возрастания.



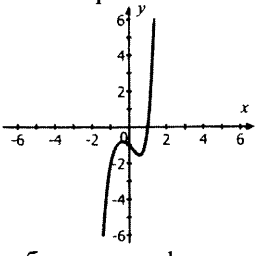
204) Сколько промежутков убывания у функции $y = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 1$, заданной на всей числовой оси?

205) Сколько промежутков возрастания y функции $y = x^3 - 3x^2 + 2x$, заданной на отрезке $[0; 2]$?

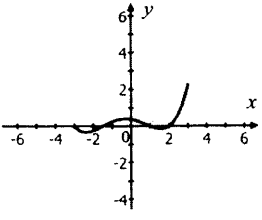
206) На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, заданной на отрезке $[-2{,}25; 2{,}25]$. Исследуйте функцию $y = f(x)$ на монотонность и в ответе укажите число промежутков убывания.



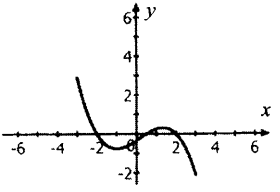
207) На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, заданной на отрезке $[-1{,}5; 1{,}25]$. Исследуйте функцию $y = f(x)$ на монотонность и в ответе укажите число промежутков возрастания.



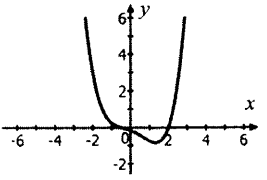
208) На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, заданной на отрезке $[-3; 3]$. Исследуйте функцию $y = f(x)$ на монотонность и в ответе укажите число промежутков убывания.



209) На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, заданной на отрезке [–3; 3]. Исследуйте функцию на монотонность и в ответе укажите число промежутков возрастания.



210) На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$, заданной на промежутке [–2,5; 2,5]. Исследуйте функцию $y = f(x)$ на монотонность и в ответе укажите число промежутков убывания.



211) При каком значении параметра a функция $y = \sqrt[3]{2ax^2 - 4x}$ имеет минимум в точке $x_0 = 1$?

212) При каком значении параметра a функция $y = \sqrt[3]{x^2 - ax}$ имеет минимум в точке $x_0 = 3$?

213) При каком значении a функция $y = \sin(2x + a)$ имеет максимум в точках $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$?

214) При каком значении параметра a функция $y = \sqrt[3]{ax^2 + 10x - 7}$ имеет максимум в точке $x_0 = 1$?

215) При каком значении параметра a функция $y = \sqrt[3]{ax^2 - 2x + 1}$ имеет минимум в точке $x_0 = 1$?

216) При каком значении a функция $y = \sqrt[3]{ax^2 + 10x - 2}$ имеет максимум в точке $x_0 = 1$?

217) При каком значении a функция $y = \sqrt[7]{ax^2 + 7x - 3}$ имеет максимум в точке $x_0 = 3{,}5$?

218) При каком значении a функция $y = \sqrt[6]{7x + ax^2 - 1}$ имеет максимум в точке $x = 1{,}75$?

219) При каком значении a функция $y = \sqrt[7]{3x^2 + ax - 4}$ имеет минимум в точке $x_0 = -1$?

220) При каком значении a функция $y = \sqrt[3]{ax^2 - 6x + 11}$ имеет минимум в точке $x_0 = 0{,}75$?

221) Найдите все значения p, при которых уравнение $3\sin x = p - 4\cos x$ не имеет корней.

222) Найдите все значения p, при которых уравнение $|x^2 + x| = p - 2$ имеет четыре решения.

223) Найдите все значения p, при которых уравнение $|\sin x| = p^3$ не имеет корней.

224) Найдите все значения p, при которых уравнение $e^{x^2} - 2x = p$ имеет одно решение.

225) Найдите все значения p, при которых уравнение $\sqrt{x} = |x + p|$ имеет единственное решение.

226) Найти все значения p, при которых уравнение $p - 2\cos^3 x = 3\cos 2x$ не имеет корней.

227) Найдите все значения p, при которых уравнение $3\cos 6x + \cos^3 3x - p = 0$ не имеет корней.

228) Найдите все значения p, при которых уравнение $5\cos^3 x - p + 4\cos 2x = 0$ не имеет корней.

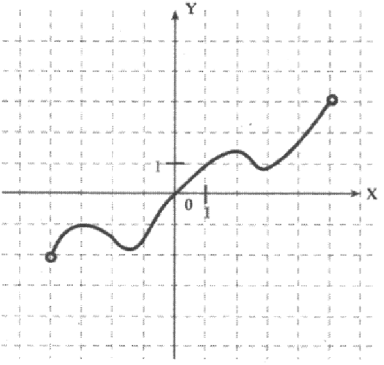
229) Найдите все значения p, при которых уравнение

$3\cos 4x - p = 2\cos^3 2x$ не имеет решений.

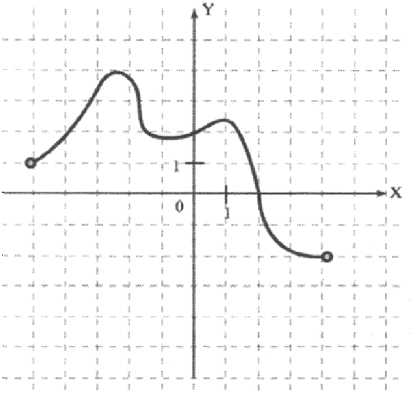
230) Найдите все значения p, при которых уравнение

$5\cos 8x + p = 6\sin^3 4x$ не имеет корней.

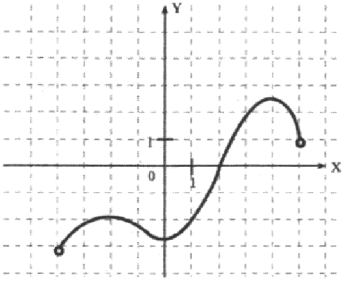
231) Функция $y = f(x)$ определена на промежутке. На рисунке изображен график ее производной. Найдите точку минимума функции $y = f(x)$.



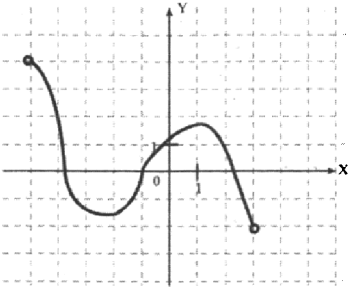
232) Функция $y = f(x)$ определена на промежутке. На рисунке изображен график ее производной. Найдите точку максимума функции $y = f(x)$.



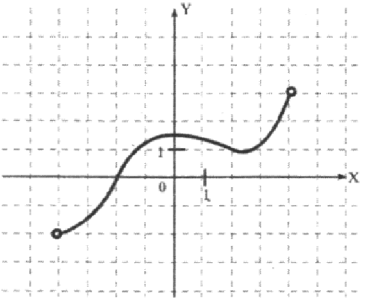
233) Функция $y = f(x)$ определена на промежутке. На рисунке изображен график ее производной. Найдите точку минимума функции $y = f(x)$.



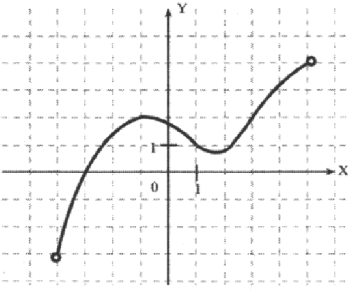
234) Функция $y = f(x)$ определена на промежутке. На рисунке изображен график ее производной. Найдите точку минимума функции $y = f(x)$.



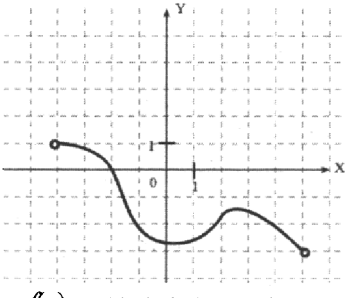
235) Функция $y = f(x)$ определена на промежутке. На рисунке изображен график ее производной. Найдите точку минимума функции $y = f(x)$.



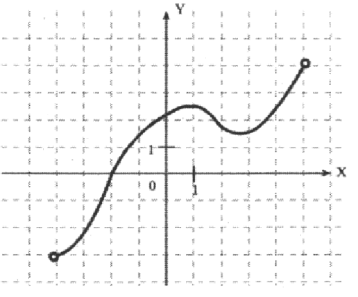
236) Функция $y = f(x)$ определена на промежутке. На рисунке изображен график ее производной. Найдите точку минимума функции $y = f(x)$.



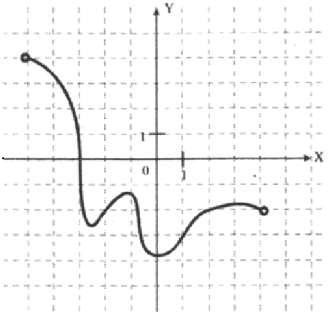
237) Функция $y = f(x)$ определена на промежутке. На рисунке изображен график ее производной. Найдите точку максимума функции $y = f(x)$.



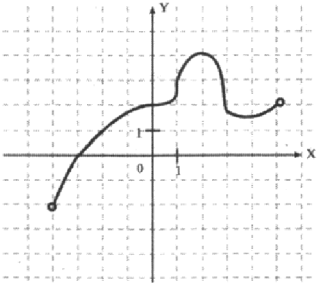
238) Функция $y = f(x)$ определена на промежутке. На рисунке изображен график ее производной. Найдите точку минимума функции $y = f(x)$.



239) Функция $y = f(x)$ определена на промежутке. На рисунке изображен график ее производной. Найдите точку максимума функции $y = f(x)$.



240) Функция $y = f(x)$ определена на промежутке. На рисунке изображен график ее производной. Найдите точку минимума функции $y = f(x)$.



241) Для монтажа оборудования требуется подставка объемом 48 дм^3 в форме прямоугольного параллелепипеда с основанием в виде квадрата. Основание подставки будет вмонтировано в пол, а задняя стенка подставки — в стену цеха. Для соединения подставки по тем ребрам, которые не вмонтированы в пол, используют сварку. Найдите размеры подставки, при которых общая длина сварочного шва будет наименьшей.

242) Найдите наименьшее значение площади полной поверхности прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, если известно, что объем данного параллелепипеда равен 64 см^3.

243) Найдите наименьшее значение площади полной поверхности прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, если известно, что объем данного параллелепипеда равен 216 $см^3$.

244) Найдите наименьшее значение площади полной поверхности прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, если известно, что объем данного параллелепипеда равен 512 $см^3$.

245) Найдите наименьшее значение площади полной поверхности прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, если известно, что объем данного параллелепипеда равен 125 $см^3$.

246) Найдите максимальное значение объема прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, если известно, что площадь полной поверхности этого параллелепипеда равна 24 $см^2$.

247) Найдите максимальное значение объема прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, если известно, что площадь полной поверхности этого параллелепипеда равна 54 $см^2$.

248) Найдите максимальное значение объема прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, если известно, что площадь полной поверхности этого параллелепипеда равна 96 $см^2$.

249) Найдите максимальное значение объема прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, если известно, что площадь полной поверхности этого параллелепипеда равна 150 $см^2$.

250) Найдите максимальное значение объема прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, если известно, что площадь полной поверхности этого параллелепипеда равна 6 $см^2$.

3.4. Первообразная

251) Для функции $y = -3\sin x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(0; 10)$.

1) $-3\cos x + 13$; 3) $-3\sin x + 10$;

2) $3\cos x + 7$; 4) $5\cos x + 1$.

252) Найдите какую-либо первообразную функции $y = \sin x + \cos 2x$.

1) $1 - \cos x - \sin 2x$; 3) $\cos x + \frac{1}{2}\sin 2x$;

2) $10 - \cos x + \frac{1}{2}\sin 2x$; 4) $\sin x - \cos 2x$.

253) Для функции $y = 15e^x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(1; 15e + 4)$.

1) $15e^x + 4$; 3) $15e^x$;

2) $20e^x - 5e + 4$; 4) $30e - 15e^x + 4$.

254) Найдите какую-либо первообразную функции $y = -\frac{3}{2x^2}$.

1) $1 - \frac{3}{2x}$; 2) $1{,}5 + \frac{1}{2x^3}$; 3) $4 + \frac{3}{2x}$; 4) $6 + \frac{3}{2x^2}$.

255) Для функции $y = \frac{1}{\cos^2 2x}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{2}; 2\right)$.

1) $2 - \operatorname{ctg} 2x$; 3) $2 + \operatorname{tg} 2x$;

2) $2 + \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$; 4) $2 - \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$.

256) Для функции $y = \frac{2}{\sin^2 3x}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{6}; 3\right)$.

1) $3 - \frac{2}{3}\operatorname{ctg} 3x$; 3) $3 - \frac{1}{3}\operatorname{ctg} 3x$;

2) $3 - 2\operatorname{ctg} 3x$; 4) $3 + \frac{2}{3}\operatorname{tg} 3x$.

257) Найдите какую-либо первообразную функции $y = \frac{3}{4x}$.

1) $\frac{3}{4}\ln 4x + 3$;
3) $\frac{1}{4}\ln x - 1$;
2) $3\ln 4x + 4$;
4) $1 - \frac{3}{2x^2}$.

258) Найдите какую-либо первообразную функций $y = 4e^{2x+1}$.

1) $4e^{2x+1} + 2$;
3) $8e^{2x+1} + 3$;
2) e^{2x+1};
4) $2e^{2x+1} + 1$.

259) Для функции $y = \frac{2}{x\ln 3}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(3; 3)$.

1) $0{,}5x + 1{,}5$;
3) $\log_3 x + 2$;
2) $2\log_3 x + 1$;
4) $\ln\frac{x}{3} + 3$.

260) Для функции $y = -\frac{2}{x^2} + x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(-2; 4)$.

1) $3 - \frac{1}{x^3}$;
3) $x^2 - \frac{2}{x} + 7$;
2) $\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x} + 1$;
4) $\frac{2}{x} + \frac{x^2}{2} + 3$.

261) Для функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + x^2 + x^3$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $(1; 3)$.

262) Для функции $f(x) = \cos x + \sin x + \frac{1}{\sin^2 x}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $\left(\frac{\pi}{4}; 4\right)$.

263) Для функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \cos x + 1$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $(0; 7)$.

264) Для функции $f(x) = \frac{3}{\sin^2 x} + 7\sin x - 2\cos x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $\left(\frac{\pi}{2}; 9\right)$.

265) Для функции $f(x) = 3x^2 + 6x^5 + 8\sin x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $(0; -5)$.

266) Для функции $f(x) = \frac{16}{x^2} + 31 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $(1; 8)$.

267) Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$, $x = 4$.

268) Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2\cos x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$.

269) Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3x^2$, $y = 4$, $x = -1$, $x = 1$.

270) Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{\sin^2 x}$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{2\pi}{3}$.

271) Найдите первообразную F функции $f(x) = 3x^2 + 4x^3 + 2e^{2x}$, если известно, что $F(0) = 1$.

1) $F(x) = x^3 + x^4 + e^{2x} - 1$;
2) $F(x) = x^4 + 3x^5 + e^{2x}$;
3) $F(x) = x^3 + 2x^4 + 2e^{2x}$;
4) $F(x) = x^3 + x^4 + e^{2x}$.

272) Найдите первообразную функции $f(x) = 3x^2 + 4x^3$, если известно, что $F(2) = 15$.

1) $F(x) = x^3 + x^4 - 9$;
2) $F(x) = 2x^3 + x^4 - 17$;
3) $F(x) = x^3 + 2x^4 - 25$;
4) $F(x) = 2x^3 + 2x^4 - 33$.

273) Найдите первообразную F функции $f(x)=\frac{1}{x}+3x^2$, если известно, что $F(1)=3$.

1) $F(x)=2+x^3$;
3) $F(x)=\ln x+x^3+2$;
2) $F(x)=x+x^3+1$;
4) $F(x)=-\ln x+x^4+2$.

274) Найдите первообразную F функции $f(x)=3^x\ln 3-2x^3+\cos x$, если известно, что $F(0)=2$.

1) $3^x-\frac{x^4}{2}+\sin x+1$;
3) $3^{2x}-x^4+\sin x+2$;
2) $3^x-x^4+\cos x+1$;
4) $3^{2x}-\frac{x^4}{2}+\sin x+2$.

275) Найдите первообразную F функции $f(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$, если известно, что $F(1)=6$.

1) $F(x)=\frac{1}{x}+\ln x+5$;
3) $F(x)=-\frac{1}{x}-\ln x+7$;
2) $F(x)=-\frac{1}{x}+\ln x+7$;
4) $F(x)=\frac{1}{x}-x^2+6$.

276) Найдите первообразную F функции $f(x)=e^x-3x^2$, если известно, что $F(0)=2$.

1) $F(x)=e^x-3x^3+1$;
3) $F(x)=-e^x-x^3+3$;
2) $F(x)=e^x-x^3+1$;
4) $F(x)=e^x-6x+1$.

277) Найдите первообразную F функции $f(x)=3x^2-2e^x$, если известно, что $F(0)=0$.

1) $F(x)=x^3-2e^x$;
3) $F(x)=3x^2-2e^x-1$;
2) $F(x)=x^3-2e^x+2$;
4) $F(x)=x^3-2e^{-x}$.

278) Найдите первообразную F функции $f(x)=2x-e^x$, если известно, что $F(0)=1$.

1) $F(x)=x^2-e^x+2$;
3) $F(x)=2-e^x$;
2) $F(x)=x^2+e^x$;
4) $F(x)=2x^x-e^x+2$.

279) Найдите первообразную F функции $f(x) = e^x + 2x + 2$, если известно, что $F(0) = 2$.

1) $F(x) = e^x + 2x^2 + 2$;
2) $F(x) = e^x + x^2 + 2x + 1$;
3) $F(x) = e^x + x^2 + 2x + 2$;
4) $F(x) = e^x + 2x^2 + 2x + 1$.

280) Найдите первообразную F функции $f(x) = 7x^6 - 7e^x$, если известно, что $F(0) = 1$.

1) $F(x) = 7x^7 - 7e^x + 8$;
2) $F(x) = x^7 - 7e^x + 1$;
3) $F(x) = 7x^7 - 7e^x + 1$;
4) $F(x) = x^7 - 7e^x + 8$.

4. ЧИСЛА И ВЫЧИСЛЕНИЯ

1) Сколько граммов воды нужно выпарить из 0,5 кг солевого раствора, содержащего 85% воды, чтобы получить массу с содержанием 75% воды?

2) В двух канистрах находится 90 л бензина. Если из первой канистры перелить во вторую 10% бензина, находящегося в первой канистре, то в обеих канистрах будет поровну. Сколько литров бензина в каждой канистре?

3) Насос может выкачать из бассейна $\frac{1}{3}$ воды за 10 мин. Проработав 0,25 ч, насос остановился. Найдите вместимость бассейна, если после остановки насоса в бассейне еще осталось 40 $м^3$ воды.

4) Велосипедист проехал расстояние между двумя поселками за 3 дня. В первый день он проехал 1/6 всего пути и еще 50 км, во второй $\frac{1}{5}$ всего пути и еще 15 км, а в третий день $\frac{1}{20}$ всего пути и оставшиеся 124 км. Найдите расстояние между поселками.

5) Вкладчик сначала снял со своего счета в сбербанке 1/5 своих денег, потом $\frac{5}{16}$ оставшихся и еще 999 руб. После этого у него осталось на сберкнижке $\frac{1}{4}$ всех денег. Каким был первоначальный вклад?

6) Группа школьников совершила поход во время летних каникул. Первые 50 км они проплыли на байдарках, $\frac{1}{5}$ оставшейся части маршрута прошли пешком, а затем опять плыли на байдарках. В итоге на байдарках проплыли в 5 раз больше, чем прошли пешком. Какова длина всего маршрута?

7) Насос может выкачать из бассейна $\frac{5}{6}$ воды за 4 ч 15 мин. До полудня насос работал 4,5 ч, после чего осталось выкачать еще 80 м^3. Найдите объем бассейна.

8) На выпускном экзамене по математике 1440 школьников решили задачи с ошибками, 320 школьников, сдававших экзамен в этот день, не решили ни одной задачи, а число школьников, решивших все задачи правильно, относится к числу не решивших ни одной задачи как 2:1. Сколько школьников экзаменовалось по математике в этот день?

9) Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 61. Если от этого двузначного числа отнять 9, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите число.

10) Заработные платы рабочего за январь и февраль относятся как 9:8, а за февраль и март — как 6:8. За март он получил на 450 руб. больше, чем за январь, и за перевыполнение квартального плана рабочему начислили премию в размере 20% его трехмесячного заработка. Найдите размер премии.

11) К 200 г раствора, содержащего 60% соли, добавили 300 г раствора, содержащего 50% той же соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

12) К 200 г раствора, содержащего 30% соли, добавили 400 г раствора, содержащего 75% той же соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

13) К 900 г раствора, содержащего 30% соли, добавили 300 г раствора, содержащего 90% соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

14) К 200 г раствора, содержащего 80% соли, добавили 300 г раствора, содержащего 40% той же соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

15) К 100 г раствора, содержащего 70% соли, добавили 300 г раствора, содержащего 50% той же соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

16) К 150 г раствора, содержащего 20% соли, добавили 350 г раствора, содержащего 40% той же соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

17) К 350 г раствора, содержащего 10% соли, добавили 450 г раствора, содержащего 50% соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

18) К 360 г раствора, содержащего 10% соли, добавили 440 г раствора, содержащего 50% той же соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

19) К 250 г раствора, содержащего 20% соли, добавили 150 г раствора, содержащего 60% той же соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

20) К 90 г раствора, содержащего 10% соли, добавили 160 г. раствора, содержащего 35% той же соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

21) По сберегательному вкладу банк выплачивает 12% годовых. По истечении каждого года начисленная сумма присоединяется к вкладу. На этот вид вклада был открыт счет в 10 000 рублей, который не пополнялся и с которого не снимали деньги в течение 2 лет. Какой доход был получен по истечении этого срока?

22) По накопительному вкладу банк выплачивает 20% годовых. По истечении каждого года начисленная сумма присоединяется к вкладу. На этот вид вклада был открыт счет в 5000 рублей, который не пополнялся и с которого не снимали деньги в течение 3 лет. Какой доход был получен по истечении этого срока?

23) По долгосрочному вкладу банк выплачивает 10% годовых. По истечении каждого года начисленная сумма присоединяется к вкладу. На этот вид вклада был открыт

счет в 20 000 рублей, который не пополнялся и с которого не снимали деньги в течение 3 лет. Какой доход был получен по истечении этого срока?

24) По стандартному вкладу банк выплачивает 8% годовых. По истечении каждого года начисленная сумма присоединяется к вкладу. На этот вид вклада был открыт счет в 25 000 рублей, который не пополнялся и с которого не снимали деньги в течение 2 лет. Какой доход был получен по истечении этого срока?

25) По вкладу «Доходный» банк выплачивает 14% годовых. По истечении каждого года начисленная сумма присоединяется к вкладу. На этот вид вклада был открыт счет в 50 000 рублей, который не пополнялся и с которого не снимали деньги в течение 2 лет. Какой доход был получен по истечении этого срока?

26) По накопительному вкладу банк выплачивает 10% годовых. По истечении каждого года начисленная сумма присоединяется к вкладу. На этот вид вклада был открыт счет в 100 000 рублей, который не пополнялся и с которого не снимали деньги в течение 3 лет. Какой доход был получен по истечении этого срока?

27) По долгосрочному вкладу банк выплачивает 10% годовых. По истечении каждого года начисленная сумма присоединяется к вкладу. На этот вид вклада был открыт счет в 10 000 рублей, который не пополнялся и с которого не снимали деньги в течение 4 лет. Какой доход был получен по истечении этого срока?

28) По стандартному вкладу банк выплачивает 16% годовых. По истечении каждого года начисленная сумма присоединяется к вкладу. На этот вид вклада был открыт счет в 25 000 рублей, который не пополнялся и с которого не снимали деньги в течение 2 лет. Какой доход был получен по истечении этого срока?

29) По сберегательному вкладу банк выплачивает 10% годовых. По истечении каждого года начисленная сумма присоединяется к вкладу. На этот вид вклада был открыт счет в 30 000 рублей, который не пополнялся и с которого не снимали деньги в течение 3 лет. Какой доход был получен по истечении этого срока?

30) По пенсионному вкладу банк выплачивает 18% годовых. По истечении каждого года начисленная сумма присоединяется к вкладу. На этот вид вклада был открыт счет в 5000 рублей, который не пополнялся и с которого не снимали деньги в течение 2 лет. Какой доход был получен по истечении этого срока?

5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ И ИХ СВОЙСТВА. ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

5.1. Треугольник. Многоугольники. Окружность. Векторы

1) Площадь треугольника ABC равна 15 дм^2. На стороне AC взята точка D так, что $\frac{AD}{DC}=\frac{2}{3}$. Длина перпендикуляра DH, проведенная на сторону BC, равна 6 дм. Найдите BC.

2) В равнобедренном треугольнике высоты, проведенные к основанию и боковой стороне, равны соответственно 5 и 6 дм. Найдите длину боковой стороны.

3) В параллелограмме $ABCD$ проведен перпендикуляр BH, при этом H лежит на отрезке AD. Найдите площадь параллелограмма, если известно, что $AH = 6$ см, $HD = 10$ см, $\angle ABH = 30^\circ$.

4) Найдите площадь равнобедренной трапеции с основаниями 10 см и 6 см, если известно, что центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции.

5) Около правильного шестиугольника описана окружность. Из центра этой окружности опущен перпендикуляр на сторону шестиугольника, длина этого перпендикуляра равна $10\sqrt{3}$ см. Найдите периметр шестиугольника.

6) Две окружности радиусом 6 см и 2 см касаются внешним образом. Найдите расстояние от точки касания окружностей до их общей касательной, не проходящей через точку касания.

7) Из точки L, не лежащей на окружности, проведены к ней касательная и секущая. Расстояние от точки L до одной из точек пересечения секущей с окружностью равно 16 см, а расстояние от точки L до точки касания с окруж-

ностью равно 8 см. Найдите длину окружности, если секущая удалена от ее центра на $\sqrt{13}$ см.

8) Даны три вектора $\bar{a}(2;3)$, $\bar{b}(7;-7)$ и $\bar{c}(4;-3)$. Найдите угол между векторами $\bar{a}+\bar{c}$ и $\bar{b}$.

9) Найдите угол между векторами $\bar{a}$ и $7\bar{b}+2\bar{c}$, если известно, что $\bar{a}$ $(137; 137\sqrt{3})$, $\bar{b}$ $(-2; 2)$ и $\bar{c}$ $(7; -4)$.

10) Найдите основание равнобедренного треугольника, если угол при основании равен 75, а боковые стороны равны $\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

11) Найдите площадь равнобедренного треугольника, если его основание равно 4, а площадь прямоугольника, описанного вокруг этого треугольника, равна 24.

12) Найдите периметр равнобедренного треугольника, основание которого равно 3, а углы при основании 30°.

13) Площадь равнобедренного треугольника равна $4\sqrt{3}$, а углы при основании 30°. Найдите высоту, опущенную на основание.

14) В равностороннем треугольнике отношение его площади к высоте равно 3. Найдите площадь круга, описанного около данного равностороннего треугольника.

15) Найдите площадь равностороннего треугольника, если точка пересечения медиан находится на расстоянии 2 от основания.

16) Найдите площадь равнобедренного треугольника, если углы при основании равны 45°, а точка, взятая на основании, находится на расстоянии, равном 3, от боковых сторон.

17) В равнобокой трапеции тупой угол равен 120° и меньшее основание равно боковой стороне и равно 6. Найдите площадь трапеции.

18) Найдите основание равнобедренного треугольника, если угол при вершине равен 120°, а площадь треугольника равна $3\sqrt{3}$.

19) Точка, взятая на гипотенузе прямоугольного треугольника, находится на одинаковом расстоянии, равном $2\sqrt{2}$, от катетов. Найдите площадь треугольника, если его острый угол равен 30°.

20) В равнобедренную трапецию, один из углов которой равен 30°, а площадь равна 72, вписана окружность. Найдите радиус этой окружности.

21) В прямоугольной трапеции острый угол при основании равен 30°, меньшее основание трапеции равно 5, а высота трапеции равна $4\sqrt{3}$. Найдите площадь трапеции.

22) В параллелограмме меньшая сторона равна 6, меньшая диагональ равна 5, высота, опущенная на большую сторону, равна 3. Найдите площадь параллелограмма.

23) В равнобедренной трапеции меньшее основание равно 6 см, высота равна 4 см, а угол при большем основании равен 45°. Найдите площадь трапеции.

24) Площадь правильного шестиугольника равна $6\sqrt{3}$. Найдите его периметр.

25) Площадь правильного восьмиугольника равна $8\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого восьмиугольника.

26) Около окружности описана равнобедренная трапеция, площадь которой равна $2\sqrt{3}$. Одно основание трапеции в 3 раза больше другого. Чему равна боковая сторона трапеции?

27) Около окружности радиуса $\frac{\sqrt{5}}{2}$ описана равнобедренная трапеция. Площадь этой трапеции равна $3\sqrt{5}$. Чему равна боковая сторона трапеции?

28) Равнобедренная трапеция описана около окружности радиуса 5, боковая сторона равна 12. Чему равна площадь трапеции?

29) Равнобедренная трапеция описана около окружности. Площади круга и трапеции равны соответственно $\frac{7}{4}\pi$ и $4\sqrt{7}$. Найдите боковую сторону трапеции.

5.2. Многогранники. Тела вращения. Комбинации многогранников и тел вращения

30) Найдите площадь боковой поверхности прямой прямоугольной призмы, если известно, что одна из сторон основания равна 7 см, другая сторона основания равна 8 см, косинус угла между ними равен $\frac{2}{7}$, а боковое ребро призмы равно 11 см.

31) В основании наклонной призмы лежит правильный треугольник, радиус описанной около него окружности равен 4 см, высота призмы равна $\sqrt{3}$ см. Найдите объем призмы.

32) Найдите объем пирамиды, в основании которой лежит прямоугольник со сторонами 6 и 8 см. Каждое боковое ребро пирамиды равно 13 см.

33) Найдите объем пирамиды, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4 см, а каждое боковое ребро образует с плоскостью основания угол 45°.

34) Диагональ куба равна 6 см, найдите площадь полной поверхности куба.

35) Высота правильного тетраэдра равна $6\sqrt{6}$ см. Найдите ребро этого тетраэдра.

36) Прямой круговой цилиндр пересечен плоскостью так, что в сечении получился квадрат. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если известно, что радиус основания равен 10 см, а расстояние от сечения до оси цилиндра 6 см.

37) Прямой круговой конус пересечен плоскостью, параллельной основанию, на расстоянии 3 см от вершины. Найдите объем конуса, если известно, что радиус сечения равен 4 см, а образующая конуса равна 10 см.

38) Тело ограничено двумя концентрическими шаровыми поверхностями. Удвоенное сечение плоскостью, проходящей через центр, равно 25 $см^2$. Найдите площадь сечения, касательного к внутренней шаровой поверхности.

39) В прямой круговой конус вписана сфера. Длина окружности, по которой сфера касается конуса, равна 3, расстояние от вершины конуса до центра этой окружности равно $\frac{2}{\pi}$, радиус основания конуса равен $\sqrt{3}$. Найдите боковую поверхность конуса.

40) Вычислите объем правильной треугольной пирамиды, если радиус описанной вокруг основания окружности равен $\sqrt{3}$, а высота пирамиды равна $4\sqrt{3}$.

41) Вычислите объем правильной треугольной пирамиды, если радиус вписанной в основание окружности равен $\sqrt{3}$, а боковые ребра пирамиды равны 6.

42) Вычислите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, если ее ребра равны 5, а радиус окружности, описанной вокруг основания, равен $3\sqrt{2}$.

43) Вычислите объем правильной шестиугольной пирамиды, если сторона основания равна 4, а боковые ребра пирамиды равны 5.

44) Вычислите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, если радиус описанной около основания окружности равен $\sqrt{3}$, а высота пирамиды равна 1.

45) Вычислите объем правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6, а апофема равна $\sqrt{15}$.

46) Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, если высота равна 2, а плоские углы при вершине прямые.

47) Вычислите объем правильной треугольной пирамиды, высота которой равна $3\sqrt{3}$, а радиус окружности, вписанной в основание, равен 2.

48) В правильной шестиугольной пирамиде сторона основания равна $2\sqrt{2}$, а боковое ребро $2\sqrt{5}$. Найдите объем пирамиды.

49) В правильной четырехзначной пирамиде площадь боковой поверхности равна $16\sqrt{2}$, а площадь основания 4. Найдите высоту пирамиды.

50) Около правильной шестиугольной призмы описан цилиндр. Объем цилиндра равен 16π, высота цилиндра равна 4. Найдите объем призмы.

51) Около правильной треугольной призмы описан цилиндр. Высота цилиндра равна 5, а радиус его основания R удовлетворяет уравнению $R^2 + R - 6 = 0$. Найдите объем призмы.

52) Около правильной шестиугольной призмы описан цилиндр. Его объем равен 10π. Найдите объем цилиндра, вписанного в эту же призму.

53) Около правильной четырехугольной призмы описан цилиндр с площадью боковой поверхности 20π. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

54) Около правильной треугольной призмы описан цилиндр. Расстояние между осью цилиндра и стороной основания призмы равен $\sqrt{3}$. Высота цилиндра равна трем его радиусам. Найдите объем призмы.

55) В правильную треугольную призму вписан цилиндр. Объем цилиндра равен $18\pi\sqrt{3}$. Расстояние между осью цилиндра и боковой гранью призмы равно 3. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

56) Около правильной четырехугольной призмы описан цилиндр. Объем цилиндра равен $24\,\pi$. Найдите радиус цилиндра, если диагональ боковой грани призмы равна 5.

57) В правильную четырехугольную призму вписан цилиндр. Объем цилиндра равен $16\pi\sqrt{2}$, а радиус окружности, описанной вокруг основания призмы, равен $2\sqrt{2}$. Найдите диагональ призмы.

58) Около правильной треугольной призмы описан цилиндр. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 16π. Найдите объем призмы, если сторона ее основания равна 5.

59) В правильную шестиугольную призму вписан цилиндр. Найдите высоту призмы, если ее площадь равна $54\sqrt{3}$, а радиус цилиндра равен 3.

60) В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 6, а площадь полной поверхности пирамиды равна $27\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды.

61) В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $2\sqrt{3}$, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен 60°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

62) В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 4, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен 60°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

63) В правильной шестиугольной пирамиде радиус окружности, описанной вокруг основания, равен 2, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен 30°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

64) В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $2\sqrt{3}$, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен 30°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

65) В правильной треугольной призме сторона основания равна $\sqrt{3}$, а высота равна 4. Найдите объем призмы.

66) В конусе радиус основания равен 3, а длина образующей 4. Найдите площадь полной поверхности конуса.

67) В конусе радиус основания равен 2, а длина образующей меньше площади основания в 2π раз. Найдите площадь полной поверхности конуса.

68) В конусе длина образующей равна 5, а радиус основания равен 4. Найдите объем конуса.

69) В усеченном конусе радиусы оснований равны 5 и 2, а высота равна 4. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

70) Конус радиуса $\sqrt{3}$ и высоты 3 касается сферы в единственной точке P. Прямая, проходящая через центр конуса (точка Q) и точку P, пересекает сферу в точке R. Известно, что сфера касается плоскости, в которой лежит основание конуса в точке T, причем RT — диаметр сферы. Найти радиус сферы.

71) Сфера радиуса 3 касается конуса в единственной точке A и плоскости, в которой лежит основание конуса в точке B, точка C диаметрально противоположна точке B, угол BCA равен 30°. Найдите высоту конуса, если известно, что прямая AC проходит через центр основания конуса.

72) Конус с углом при вершине, равным 60° и высотой 4, касается сферы в единственной точке N, сфера касается плоскости, в которой лежит основание конуса в точке M, прямая, проходящая через точку M и центр сферы, пересекает прямую, проходящую через центр основания конуса и точку N в точке P, лежащей на сфере. Найдите радиус сферы.

73) Сфера касается конуса в единственной точке (точка A), а также плоскости, в которой лежит основание конуса, в точке B. Пусть D — диаметрально противоположна точке A, прямая DA проходит через центр конуса. Найти высоту конуса, если его радиус равен 2, а радиус сферы 3.

74) Конус с радиусом основания 2 и углом при вершине 60° касается сферы в единственной точке A, сфера касается плоскости, в которой лежит основание конуса, в точке B, прямая, проходящая через центр основания конуса и точку A, пересекает сферу в точке, диаметрально противоположной точке B. Найдите радиус сферы.

75) Сфера радиуса 1 касается некоторой плоскости в точке A. AB — диаметр сферы. В этой плоскости лежит основание конуса, который касается сферы в точке D. O — центр основания конуса. Известно, что точки O, D и B лежат на одной прямой и $\angle OBA = 30°$. Чему равна высота конуса?

76) Сфера касается конуса в точке P и плоскости, в которой лежит основание конуса в точке A. AB — диаметр сферы. C — центр основания конуса. A, P и C лежат на одной прямой. Высота конуса равна 4, а апофема 6. Найдите диаметр сферы.

77) Сфера касается плоскости в точке A и конуса, основание которого лежит в этой же плоскости. L — точка касания

сферы и конуса. AB — диаметр сферы. C — центр основания конуса. Известно, что CB и L лежат на одной прямой. Найдите высоту конуса, если известно, что $AC = 3$, $BC = 5$.

78) Сфера касается плоскости в точке A и конуса, основание которого лежит в этой плоскости, в точке M, AB — диаметр сферы, C — центр основания конуса. Точки B, M и C лежат на одной прямой. Найдите радиус сферы, если известно, что высота конуса равна $\sqrt{5}-1$, а угол между апофемой и высотой равен 45°.

79) Сфера касается некоторой плоскости в точке A. AB — диаметр сферы. Основание конуса, который касается сферы в точке M, лежит в той же плоскости. C — центр основания конуса. Известно, что точки C, M и B лежат на одной прямой. Найдите высоту конуса, если радиус его основания равен 1, а $BC = \sqrt{25}$.

6. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1) Из города А в город В ведут 3 дороги, а из города В в город С — 5 дорог. Сколькими способами можно из города А проехать в город С через город В?

2) В финале конкурса должны выступить 5 скрипачей. Порядок их выступления определяется честным жребием. Сколько существует вариантов жеребьевки?

3) Сколькими способами из класса в 25 учеников можно выбрать троих учеников для выступления на конкурсе школьной самодеятельности?

4) Сколько всего может существовать различных телефонных номеров в городе N, если известно, что все номера 5-значные и что телефонный номер не может начинаться с 0?

5) Сколькими способами учитель может выбрать двоих учеников из 20, если известно, что первый названный пойдет отвечать у доски, а второй пойдет за мелом?

6) Симметричную монету бросают два раза. Найдите вероятность того, что решка выпадет хотя бы один раз.

7) Симметричную монету бросают 3 раза. Найдите вероятность, что орел не выпадет ни разу.

8) Игральный кубик бросают два раза. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет три очка. Ответ округлите до сотых.

9) На устном экзамене по литературе всего 45 вопросов. Иван не выучил 18 из них. Найдите вероятность того, что Ивану попадется вопрос, ответ на который он знает.

10) В среднем из 800 телевизоров, поступающих в продажу, 5 имеют скрытые дефекты. Какова вероятность купить в магазине полностью исправный телевизор?

11) Какова вероятность, что случайно выбранное трехзначное число делится нацело на 343? Ответ округлите до тысячных.

12) На турнире по настольному теннису всего 16 участников, из них 4 участника из России, в том числе Иван Петров. Перед началом первого тура все участники случайным образом разбиваются на пары с помощью жребия. Найдите вероятность, что в первом туре Иван Петров встретится с соперником не из России.

13) В классе 16 человек, среди них два закадычных друга – Андрей и Михаил. Класс случайным образом делят поровну на две группы. Найдите вероятность того, что Андрей и Михаил окажутся в одной группе. Ответ округлите до сотых.

14) За круглый стол на 11 стульев рассаживаются случайным образом 2 мальчика и 9 девочек. Найдите вероятность того, что мальчики будут в итоге сидеть через одну девочку друг от друга.

15) Стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,8. Найдите вероятность того, что он поразит мишень хотя бы раз за 3 выстрела.

16) Вероятность того, что компьютер прослужит без поломок больше 6 лет, равна 0,2, а вероятность того, что он сломается в течение первых трех лет — 0,5. Найдите вероятность того, что компьютер проработает без поломок от 3 до 6 лет.

ВАРИАНТЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ

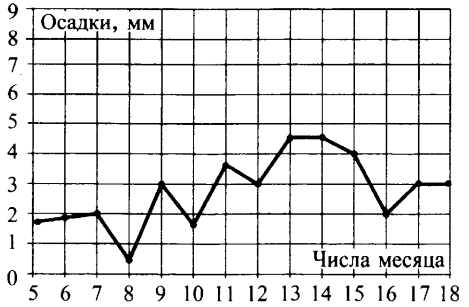
ВАРИАНТ 1

Часть 1

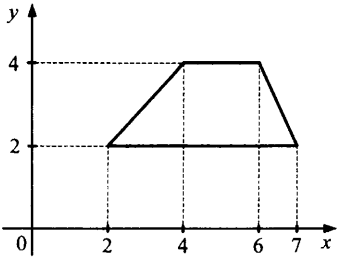
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1. Брюки стоили 2400 рублей. В ходе сезонной распродажи эти брюки стали стоить 1800 рублей. На сколько процентов была снижена цена на брюки?

2. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Москве с 5 до 18 марта 2016 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из указанного периода выпадало менее 2 миллиметров осадков



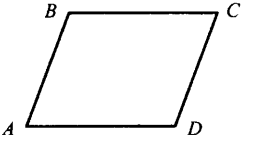
3. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (2; 2), (7; 2), (6; 4), (4; 4).



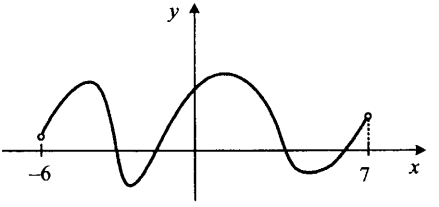
4. В уличном фонаре три лампы. Вероятность перегорания лампы в течение года равна 0,8. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

5. Решите уравнение $\dfrac{1}{17x-14}=\dfrac{1}{16x+32}$.

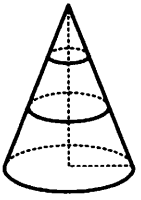
6. Найдите меньший угол параллелограмма, если два его угла относятся как 13 : 23. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображен график первообразной $y=F(x)$ некоторой функции $y=f(x)$, определенной на интервале (–6; 7). Пользуясь рисунком, определите количество нулей функции $f(x)$ на данном интервале.



8. В конусе проведено два сечения плоскостями, параллельными плоскости основания конуса. Точками пересечения данных плоскостей с высотой конуса она делится на 3 равных отрезка. Найдите объем средней части конуса, если объем нижней части равен 38.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $3^{2+\log_9 16}$.

10. Зависимость объема спроса q (единиц в месяц) на продукцию некоторого предприятия от цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 150 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка составит не менее 560 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

11. В сосуд, содержащий 8 литров 10-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 2 литра воды. Какова концентрация получившегося раствора? Ответ дайте в процентах.

12. Найдите точку минимума функции $y = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - x + 11$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте четко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2\log_2^2(2\sin x) - 7\log_2(2\sin x) + 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

14. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 5.

а) Постройте линейный угол двугранного угла между плоскостями ABD и CAD_1.

б) Найдите тангенс этого угла.

15. Решите неравенство: $\frac{9^x - 5\cdot 3^x + 3}{3^x - 4} + \frac{3^{x+\log_3 5} - 27}{3^x - 6} \le 3^x + 4$.

16. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC (с основанием AC), касается его боковых сторон в точках M и N. Точка M делит боковую сторону на отрезки 10 и 7, считая от основания треугольника ABC.

а) Докажите, что треугольники MBN и ABC подобны.

б) Найдите отношение площадей треугольника MBN и трапеции $AMNC$.

17. 12-го августа планируется взять кредит в банке на 4 месяца в размере 3 млн рублей. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на p процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где p — **натуральное** число;

— со 2-го по 11-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 12-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	12.08	12.09	12.10	12.11	12.12
Долг (в млн рублей)	3	2,2	1,7	1	0

Найдите наибольшее значение p, при котором общая сумма выплат не превысит 3,8 млн рублей.

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax+\sqrt{-15-8x-x^2}=4a+1$ имеет единственный корень.

19. На доске написаны числа 1; 2; 3; …, 33.

За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых меньше 36 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стертых на предыдущих ходах.

а) Приведите пример пяти последовательных ходов.
б) Можно ли сделать 11 ходов?
в) Какое наибольшее число последовательных ходов можно сделать?

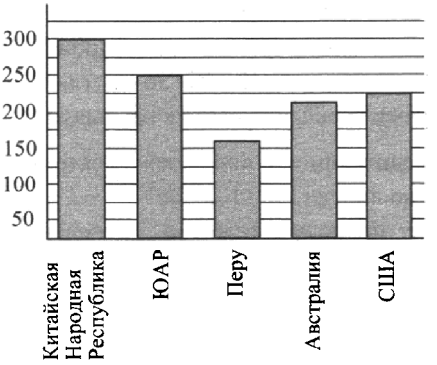
ВАРИАНТ 2

Часть 1

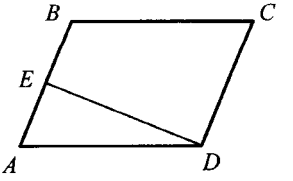
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1. Тетрадь стоит 6 рублей. Какую сдачу получит покупатель со 100 рублей при покупке 10 тетрадей после повышения цены тетради на 10%?

2. На диаграмме показано распределение добычи золота в 5 странах мира (в тысячах тонн) за 2015 год. Какое место занимала Австралия среди этих стран?



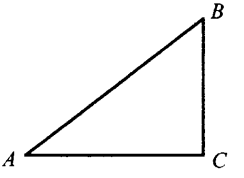
3. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 219, точка E — середина стороны AB. Найдите площадь трапеции $BCDE$.



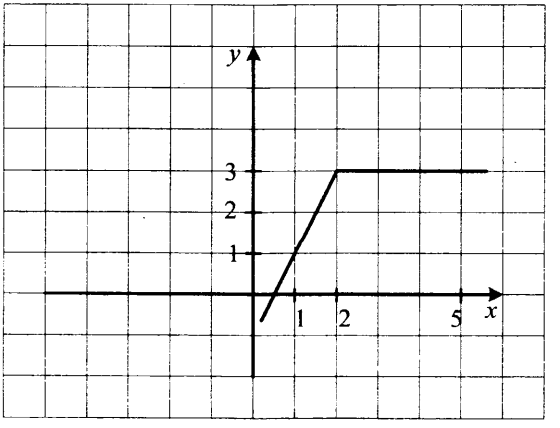
4. В городе N есть три фабрики, выпускающие автомобильные шины. Первая фабрика выпускает 30% этих шин, вторая — 45%, третья — 25%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных шин, вторая — 6%, третья — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленная в магазине шина не окажется бракованной.

5. Решите уравнение $\frac{3-7x}{2}=12$.

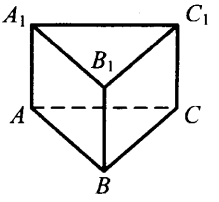
6. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $\sin B=\frac{2\sqrt{10}}{7}$. Найдите $7\cos B$.



7. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $\int_1^5 f(x)dx$.



8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ со стороной $3\sqrt{3}$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\log_2 76{,}8 - \log_2 2{,}4$.

10. Камень брошен вертикально вверх. Зависимость высоты, на которой находится камень (пока он не упал на землю), от времени описывается формулой $h(t) = -t^2 + 6t$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее от момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте выше 8 метров.

11. Моторная лодка прошла против течения 24 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 1 час меньше, чем при движении против течения. Найдите скорость (в км/ч) лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч.

12. Найдите точку максимума функции $y = (x+4)^2 e^{2-x}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте четко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\pi; 0]$.

14. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$

а) Опустите перпендикуляр из точки D на плоскость CAD_1.

б) Найдите его длину.

15. Решите неравенство: $\frac{1 - \log_2\left(2x^2 - 9x + 9\right)}{\log_3\left(x + 8\right)} \geq 0$.

16. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC (с основанием AC), касается его боковых сторон в точках M и N. Точка M делит боковую сторону на отрезки 18 и 12, считая от основания треугольника ABC.

а) Докажите, что треугольники MBN и ABC подобны.

б) Найдите отношение площадей треугольника MBN и трапеции $AMNC$.

17. 12 ноября 2015 года Дмитрий взял в банке 1 803 050 рублей в кредит под 19% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 12 ноября каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Дмитрий переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Дмитрий выплатил долг целиком тремя равными платежами?

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{5}{x} - 3\right| = 2ax - 2$ имеет на промежутке $(0; +\infty)$ единственный корень.

19. Докажите, что уравнение $x^2 + 2 = 5y$ не имеет решений в целых числах.

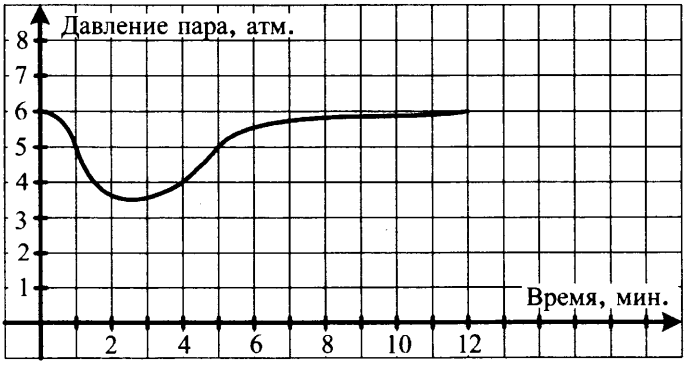
ВАРИАНТ 3

Часть 1

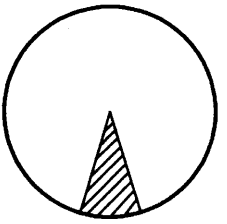
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1. Цена на пылесос была повышена на 14% и составила 12 768 рублей. Сколько рублей стоил пылесос до повышения цены?

2. На графике показано изменение давления в паровой турбине после запуска. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — давление в атмосферах. Определите по графику, сколько минут давление было меньше 5 атмосфер.



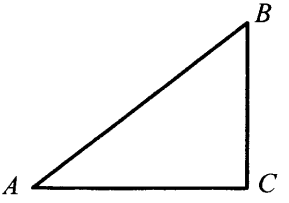
3. Найдите площадь сектора круга радиуса $\frac{3}{\sqrt{\pi}}$, центральный угол которого равен 36°.



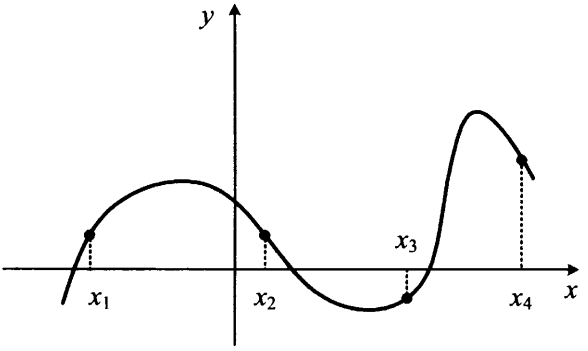
4. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 4 очка. Результат округлите до сотых.

5. Решите уравнение $\log_2(x-4)=3$.

6. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C, $AB=\sqrt{74}$, $\sin A=\frac{5}{\sqrt{74}}$. Найдите AC.



7. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$. Найдите среди точек x_1, x_2, x_3 и x_4 те, в которых производная функции $y=f(x)$ положительна. В ответ запишите количество найденных точек.



8. Объем правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S равен 30. Найдите площадь треугольника ABC, если высота пирамиды SO равна 10.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{3}}\right)^{30}}{90}$.

10. При температуре 0 °C рельс имеет длину l_0 = 10 м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ $(^\circ\text{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 9 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

11. Из двух поселков, расстояние между которыми равно 20 км, навстречу друг другу вышли два пешехода. Через сколько часов они встретятся, если их скорости равны 3,5 км/ч и 4,5 км/ч?

12. Найдите наибольшее значение функции

$y = 27x - 13\sin x + 11$ на отрезке $[-4\pi\,;\,0]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте четко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[\pi;\,3\pi]$.

14. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми AD и CA_1.

15. Решите неравенство: $\dfrac{\log_x(x-3)}{\log_{x^2}(5-x)-1} \geq 0$.

16. Вневписанная в треугольник ABC окружность касается его боковой стороны и продолжения основания AC.

а) Докажите, что радиус этой окружности равен высоте BH треугольника ABC.

б) Найдите площадь ΔABC, если радиус окружности равен 4, а $AC \cdot AB = 30$.

17. 17 декабря 2015 года Анна взяла в банке 232 050 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита сле-

дующая: 17 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Анна переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Анна выплатила долг целиком четырьмя равными платежами?

18. Найдите все значения параметра a, при которых система неравенств $\begin{cases} x+y+2\geq 0 \\ x^2+4x+y^2+4y\leq a^2-8 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений.

19. Решите уравнение $4^{xy}=2^{2014}$ в целых числах.

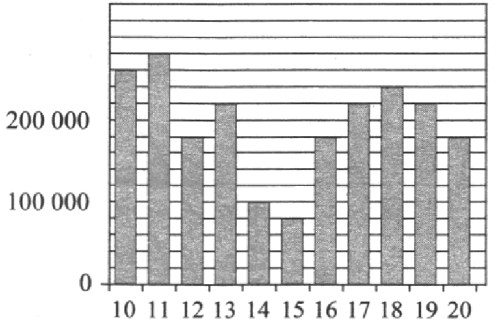
ВАРИАНТ 4

Часть 1

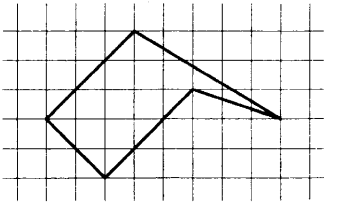
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1. Налог на доходы составляет 13%. Сколько рублей составляет заработная плата Андрея Петровича, если после удержания налога он получил 19 140 рублей?

2. На диаграмме показано количество посетителей сайта по подготовке к ЕГЭ во все дни с 10 сентября по 20 сентября 2015 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта по подготовке к ЕГЭ за данный день. Определите по диаграмме, во сколько раз наибольшее количество посетителей данного сайта за день было больше, чем наименьшее количество посетителей за день за указанный период времени.



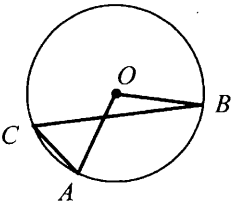
3. Найдите площадь пятиугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



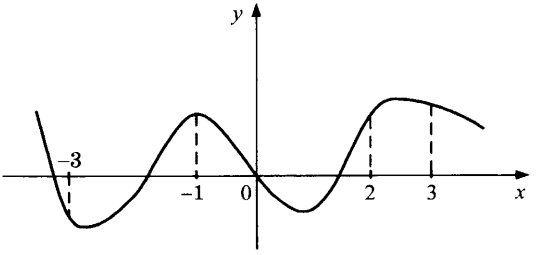
4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают 4 раза. Найдите вероятность того, что орел выпадет хотя бы 1 раз.

5. Решите уравнение $\sqrt{2x+3} = -x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

6. Центральный угол на 62° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки –3, –1, 2, 3. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



8. Объем цилиндра равен π. Найдите высоту цилиндра, если диаметр его основания равен 1.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $2^{3-7\sqrt{2}} \cdot 8^{\frac{7\sqrt{2}}{3}}$.

10. Сила тока в цепи I (в амперах) определяется по закону Ома: $I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение в цепи в вольтах, R — сопротивление электроприбора в омах. В электросеть включен предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 16 А. Определите, какое наименьшее сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Ответ выразите в омах.

11. 3 килограмма яблок стоят столько же, сколько 4 килограмма бананов. На сколько процентов 10 килограммов бананов дешевле 10 килограммов яблок?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = (x-11)e^{x-10}$ на отрезке $[9; 14]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте четко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\sin^2 x - 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[0; 2\pi]$.

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1

а) Постройте угол между прямой AC_1 и плоскостью BCC_1.

б) Найдите косинус этого угла.

15. Решите неравенство: $\dfrac{3^{x^2-1}+3^{x^2-2}+3^{x^2-3}}{x} \le 1\dfrac{12}{27}\left(\sqrt{x}\right)^{-2}$.

16. В прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A и катетами $AB = 3$; $AC = 5$ вписан квадрат $ADEF$.

а) Докажите, что треугольники BDE и EFC подобны.

б) Найдите отношение площади треугольника EFC к площади квадрата $ADEF$.

17. 1 февраля 2016 года Андрей Петрович взял в банке 1,6 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1-го числа каждого следующего месяца банк начисляет 1% на оставшуюся сумму долга, затем Андрей Петрович переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Андрей Петрович должен взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты не превышали 350 тыс. рублей?

18. При каких значениях параметра a система уравнений

$\begin{cases}\log_a(2x+y+1) = -x-4y-6 \\ x-3y=5\end{cases}$ имеет единственное решение?

19. Найдите наименьшее натуральное число n, при котором число $2014! = 1\cdot 2\cdot 3 \ldots 2013\cdot 2014$ не делится на n^{n^2}.

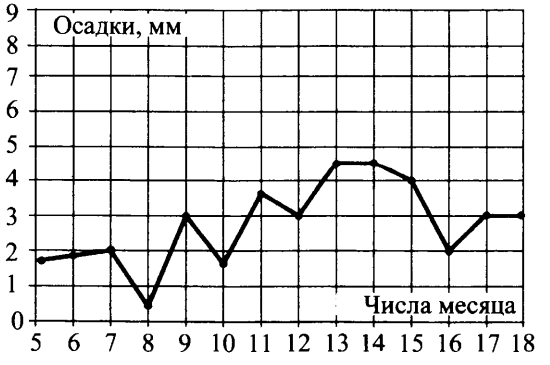
ВАРИАНТ 5

Часть 1

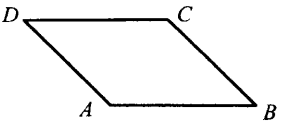
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1. Билет на поезд стоит 200 рублей. Какое наибольшее число билетов можно будет купить на 1000 рублей после повышения цены билета на 15%?

2. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Москве с 5 до 18 марта 2015 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа впервые выпало 3 миллиметра осадков.



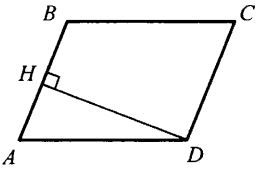
3. Найдите площадь параллелограмма, если две его стороны равны 14 и 20, а угол между ними равен 150°.



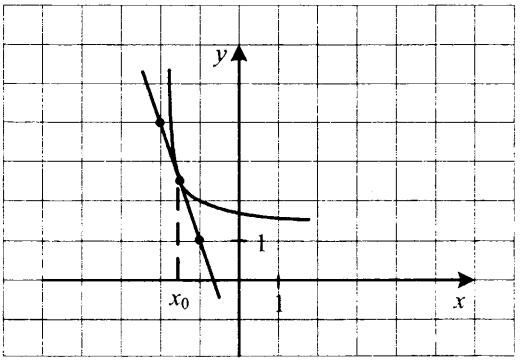
4. Стрелок стреляет в мишень 3 раза. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того, что стрелок промахнется все 3 раза.

5. Решите уравнение $17^{2x+3} = \left(\frac{1}{289}\right)^{x}$.

6. В параллелограмме $ABCD$ высота, опущенная на сторону AB, равна 12, $AD = 13$. Найдите $13\sin B$.



7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите $f'(x_0)$.



8. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 24π, а его высота равна 4. Найдите диаметр основания цилиндра.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{21\sin 113^\circ \cos 113^\circ}{\sin 226^\circ}$.

10. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 30$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 6$ м/с^2. За t секунд после начала торможения он проходит путь $S = v_0 t - \dfrac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 48 метров. Ответ выразите в секундах.

11. Автомобиль двигался половину времени со скоростью 80 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всем пути. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 7x - 7\ln(x+5) + 3{,}8$ на отрезке $[-4{,}9;\ 0]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте четко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\sin^2 x = 5\cos\left(\dfrac{5\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[0;\ 5\pi]$.

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, стороны основания которой равны 2, а боковые ребра 3, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.

15. Решите неравенство: $\sqrt{4-x^2}\left(4+5x+x^2\right)\geq 0$.

16. В прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A и катетами $AB = 2$; $AC = 6$ вписан квадрат $ADEF$.

а) Докажите, что треугольники BDE и EFC подобны.

б) Найдите отношение площади треугольника EFC к площади квадрата $ADEF$.

17. Иван хочет взять в кредит 1 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Процентная ставка 10% годовых. На какое минимальное количество лет Иван может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты не превышали 250 тысяч рублей?

18. Найдите все значения a, при которых область определения функции

$$y=\left(\sqrt[3]{x}\cdot x^{5\log_x a}+\left(\sqrt[3]{a}\right)^{3x+1}\cdot\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}\cdot\left(\sqrt[3]{a}\right)^{16}-x^{\frac{1}{3}+x\log_x a}\right)^{\frac{1}{4}}$$

содержит ровно два целых числа.

19. Решите уравнение $x^2+3=7y$ в целых числах.

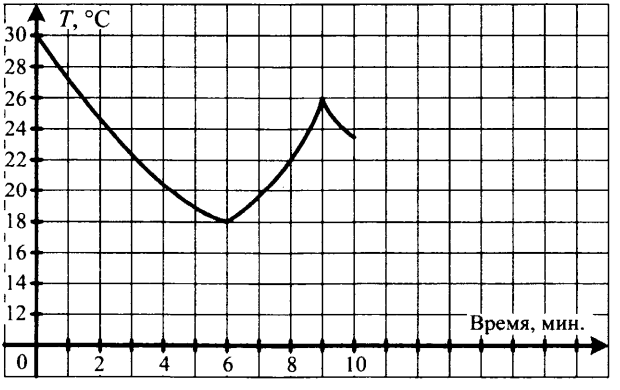
ВАРИАНТ 6

Часть 1

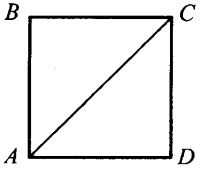
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1. Число сдающих ЕГЭ по математике базового уровня за последний год увеличилось втрое. На сколько процентов увеличилось число сдающих ЕГЭ по математике базового уровня за последний год?

2. На графике показано изменение температуры в классе после включения кондиционера. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Когда температура достигает определенного значения, кондиционер автоматически выключается, и температура начинает расти. По графику определите, сколько минут работал кондиционер до первого выключения.



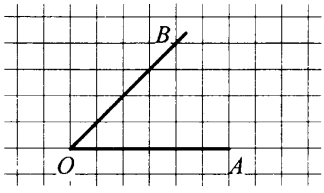
3. Найдите диагональ квадрата, если его площадь равна 8.



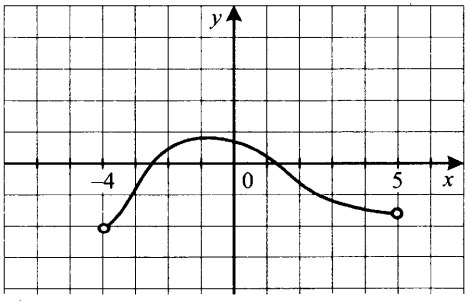
4. Игральный кубик бросают трижды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствуют событию A = {сумма очков не более 6}?

5. Решите уравнение $5^{\log_{25}(4x-7)} = 11$.

6. Найдите синус угла AOB. В ответе укажите значение синуса, умноженное на $17\sqrt{2}$.



7. На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на промежутке (–4; 5). Найдите количество точек экстремума функции $y = f(x)$.



8. Площадь поверхности куба равна 242. Найдите его диагональ.

Часть 2

9. Найдите значение выражения
$\sqrt{a^2-4a+4}+\sqrt{a^2-10a+25}$ при $a\in[3;4]$.

10. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 20$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 4$ м/с^2. За t секунд после начала торможения он проходит путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 32 метра. Ответ выразите в секундах.

11. Заказ в 180 деталей первый рабочий выполняет на 3 часа быстрее, чем второй рабочий. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что он за час делает на 3 детали меньше, чем первый рабочий?

12. Найдите наибольшее значение функции $x^5 - 3x^3 + 4x$ на отрезке $[-3; -1]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте четко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\frac{1}{\sin^2 x} - 1 - \operatorname{ctg} x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

14. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $2\sqrt{13}$, а диагональ боковой грани равна 13.

а) Постройте линейный угол двугранного угла между плоскостью C_1AB и плоскостью основания призмы.

б) Найдите величину этого угла.

15. Решите неравенство: $\log_2(x-3)^2 + \log_{0,5}(x^2-9) < 1$.

16. Вневписанная в треугольник ABC окружность касается его боковой стороны и продолжения основания AC.

а) Докажите, что радиус этой окружности равен высоте BH треугольника ABC.

б) Найдите площадь ΔABC, если радиус окружности равен 8, а $AC \cdot AB = 120$.

17. 18 декабря 2015 года Андрей взял в банке 85 400 рублей в кредит под 13,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 18 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Андрей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Андрей выплатил долг целиком двумя равными платежами?

18. Найдите наибольшее целое значение параметра k, при котором все решения неравенства

$$\Big|\Big|\big|31x-147\big|+157\Big|-167\Big|+177\Big|-187 \le 93k^4$$

принадлежат отрезку [–190; 200].

19. Решите уравнение $mn^2 + 46 = 11m$ в натуральных числах.

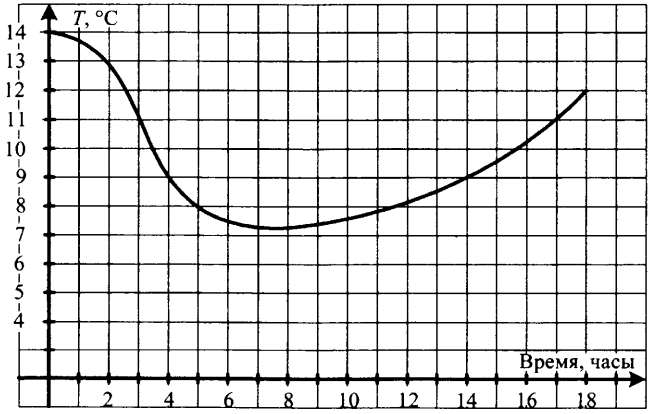
ВАРИАНТ 7

Часть 1

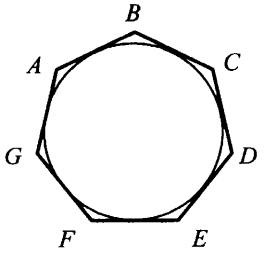
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1. В городе N живет 100 000 жителей. Среди них — 30% детей и подростков. Среди взрослых 70% работают. Сколько взрослых не работает?

2. На рисунке показан график изменения температуры воздуха. Сколько часов температура была ниже 9 градусов?



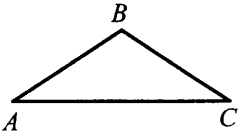
3. Найдите площадь семиугольника, если его периметр равен 20, а радиус вписанной в этот семиугольник окружности равен 2.



4. Какова вероятность того, что случайно выбранное трехзначное число делится нацело на 195? Ответ округлите до тысячных.

5. Решите уравнение $\cos\frac{\pi x}{3}=0,5$. В ответ напишите наименьший положительный корень.

6. Один из углов равнобедренного треугольника равен 176°. Найдите один из двух других его углов. Ответ дайте в градусах.



7. Прямая $y=2x-1$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2-x-2$. Найдите абсциссу точки касания.

8. Во сколько раз увеличится диагональ куба, если его ребра увеличить в 10 раз?

Часть 2

9. Найдите значение выражения $-47\operatorname{ctg}1305°$.

10. При температуре 0 °C рельс имеет длину $l_0 = 8$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t°) = l_0(1 + \alpha \cdot t°)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ $(°C)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, $t°$ — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 6 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

11. Андрей при подготовке к ЕГЭ поставил себе задачу — решать каждый день на 5 задач больше, чем в предыдущий. За первый день он решил 7 задач, а за последний — 37 задач. Сколько задач он решил всего?

12. Найдите наименьшее значение функции $e^{4x} - 5e^{2x} + 11$ на отрезке $[0; 2]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте четко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $3^x + 2 \cdot 3^{-x-2} = 1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-5{,}5; -1]$.

14. Высота прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 4. Основание призмы — треугольник ABC, в котором $AB = BC$, $AC = 6$, $\operatorname{tg}A = 0{,}5$. Найдите тангенс угла между прямой A_1B и плоскостью ACC_1.

15. Решите неравенство: $\sqrt{25-x^2}\log_{x+5}2 \le 0$.

16. Две окружности касаются внешним образом в точке L. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BL пересекает первую окружность в точке D, прямая AL пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника ALB, если известно, что радиусы окружностей равны 8 и 2.

17. Лев взял кредит в банке на срок 40 месяцев. По договору Лев должен вернуть кредит ежемесячными платежами. В конце каждого месяца к оставшейся сумме долга добавляется $p\%$ этой суммы, затем следует платеж Льва.
Ежемесячные платежи подбираются таким образом, чтобы долг уменьшался равномерно.
Известно, что наибольший платеж Льва был в 25 раз меньше первоначальной суммы долга. Найдите p.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^4+x^2}=x^2-a$ имеет ровно два различных корня.

19. Докажите, что уравнение $3x^2 + 3 = 7y$ не имеет решений в целых числах.

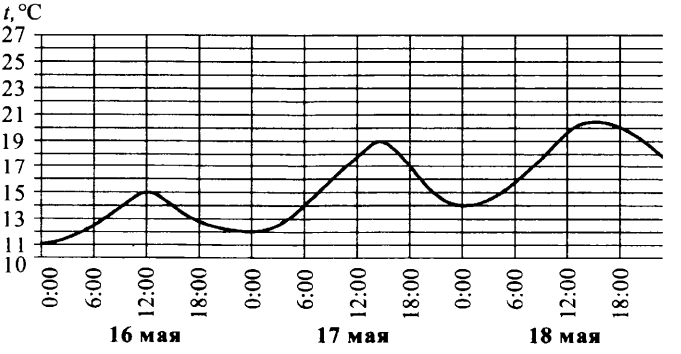
ВАРИАНТ 8

Часть 1

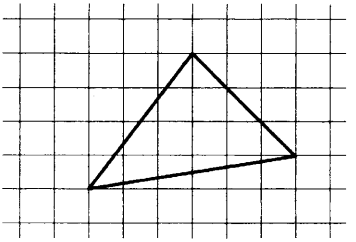
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1. В доме, в котором живет Максим, 9 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже находится по 4 квартиры. Максим живет в квартире № 177. В каком подъезде живет Максим?

2. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 17 мая. Ответ дайте в градусах Цельсия.



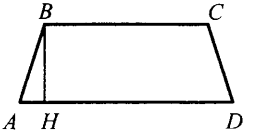
3. Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



4. Найдите вероятность того, что при рассадке случайным образом за круглым столом группы, состоящей из 7 мальчиков и 2 девочек, девочки не будут сидеть рядом.

5. Решите уравнение $\left(\frac{1}{4}\right)^{1-2x} = 64$.

6. Основания равнобедренной трапеции равны 114 и 186. Высота трапеции равна 45. Найдите котангенс острого угла трапеции.



7. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 5t^2 - 13t + 37$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах (измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 5$ с.

8. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, если стороны ее основания равны 6, а объем равен $3\sqrt{3}$.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\left(2\sqrt{7}-3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{7}+3\sqrt{2}\right)$.

10. Сила тока в цепи I (в амперах) определяется по закону Ома: $I=\frac{U}{R}$, где U — напряжение в цепи в вольтах, R — сопротивление электроприбора в омах. В электросеть включен предохранитель, который плавится, если сила тока превышает $8A$. Определите, какое наименьшее сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Ответ выразите в омах.

11. Автомобиль ехал первую половину пути со скоростью 40 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость движения автомобиля на всем пути. Ответ дайте в километрах в час.

12. Найдите наибольшее значение функции

$$\log_9(2-x^2+2x)+4.$$

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте четко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $7^{\sin 3x}\cdot 3^{2\sin 3x}=63^{\cos 3x}$.

б) Найдите все корни данного уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

14. В шаре проведено два сечения параллельными плоскостями, причем одно из них проходит через центр шара. Расстояние между плоскостями равно 3, а площадь меньшего сечения равна 16π. Найдите площадь поверхности шара.

15. Решите неравенство: $\log_3 (x-1)^{36} + \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{x-1}\right)^{-24} < 12$.

16. В треугольник ABC вписана окружность радиуса r, касающаяся стороны AC в точке D, причем $AD = r$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках M и N. Найдите площадь треугольника BMN, если известно, что $r = 1$ и $CD = 3$.

17. На первый курс на специальность «Оборудование и машины» поступило 46 человек: 34 мальчика и 12 девочек. Их распределяют по двум группам численностью 22 и 24 человека, причем в каждой группе должна учиться по крайней мере одна девочка. Каким должно быть распределение по группам, чтобы сумма чисел, равных процентам девочек в первой и второй группах, была наибольшей?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{9^x - a} = 3^x - 2a$ не имеет корней.

19. Найдите наименьшее натуральное n, при котором число $2014! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2013 \cdot 2014$ не делится на n^{n^5}.

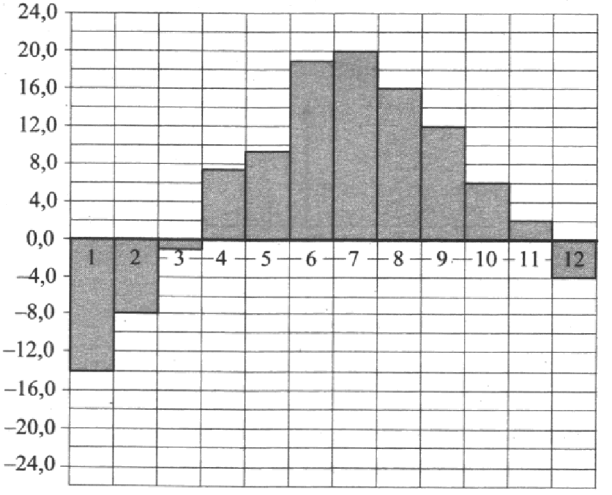
ВАРИАНТ 9

Часть 1

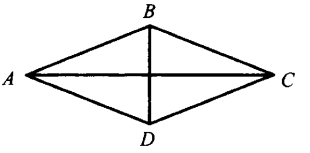
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1. Лыжник проехал 5 километров за 24 минуты. Найдите среднюю скорость лыжника на дистанции. Ответ дайте в километрах в час.

2. На диаграмме показана среднемесячная температура в Санкт-Петербурге за все месяцы 2015 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев, когда среднемесячная температура превышала 15 градусов Цельсия.



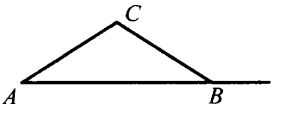
3. В ромбе $ABCD$ $AC = 12$; $BD = 5$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$.



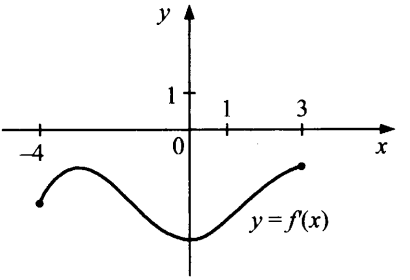
4. В сборнике билетов по геометрии всего 64 билета, в 16 из них встречается вопрос по теме «Треугольники». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопрос по теме «Треугольники».

5. Решите уравнение $3^{5x-1} = 27$.

6. В треугольнике ABC $AC = BC = 10$, $AB = 16$. Найдите тангенс внешнего угла при вершине B.



7. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-4; 3]$. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$. В какой точке отрезка функция принимает наименьшее значение?



8. Высота конуса равна 12, а длина образующей — 15. Найдите диаметр основания конуса.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_3 74}{\log_{27} 74}$.

10. Камень брошен вниз с высоты 4 м. Высота h (в метрах), на которой находится камень во время падения, зависит от времени t (в секундах): $h(t) = 4 - 3t - t^2$. Сколько секунд камень будет падать?

11. Из пункта A в пункт B выехал мотоциклист и одновременно из B в A выехал автомобилист. Мотоциклист прибыл в B через 2 часа после встречи, а автомобилист в A через 30 минут после встречи. Сколько часов был в пути мотоциклист?

12. Найдите точку минимума функции $y = 2x^3 - 6x + 194$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте четко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $3^{4\sin x} + 4 \cdot 3^{2\sin x} - 21 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

14. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ со стороной основания 2 и боковым ребром 3 точка M делит ребро SD в отношении 1 : 2 (считая от вершины S).

а) Постройте угол между прямой BM и плоскостью AEC.

б) Найдите величину этого угла.

15. Решите неравенство: $\dfrac{x^2-1{,}5x-1}{\log_{\sqrt{2}}|x|}<0.$

16. Две окружности касаются внешним образом в точке L. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BL пересекает первую окружность в точке D, прямая AL пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника ALB, если известно, что радиусы окружностей равны 1,25 и 5.

17. В мае 2017 года планируется взять кредит в банке на шесть лет в размере S млн рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый декабрь каждого года долг возрастает на 10%;

— с января по апрель каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в мае 2018, 2019 и 2020 годов долг остается равным S млн рублей;

— выплаты в 2021, 2022 и 2023 годах равны между собой;

— к маю 2023 года долг будет выплачен полностью.

Найдите наименьшее целое S, при котором общая сумма выплат не превысит 13 млн рублей.

18. Найдите все значения a, при которых областью определения функции $y=\dfrac{1}{2^{2x}-2^x-a}$ является вся числовая прямая.

19. Решите уравнение $x^2+2=3y$ в целых числах.

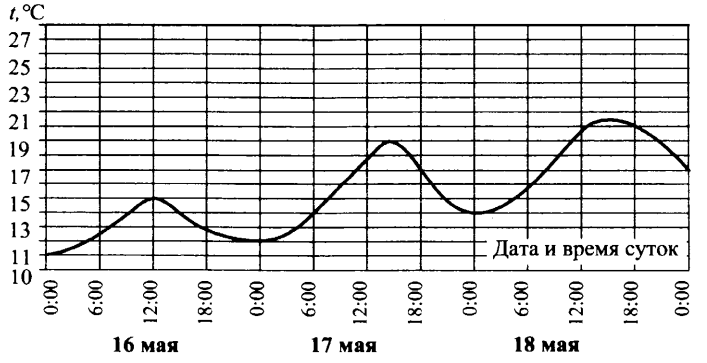
ВАРИАНТ 10

Часть 1

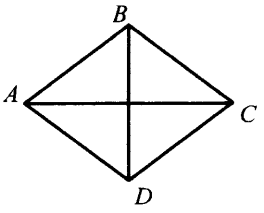
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1. Таксист за месяц проехал 2300 км. Цена бензина 37 рублей за литр. Средний расход бензина на 100 км составляет 9 литров. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?

2. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку разницу между наибольшей и наименьшей температурой воздуха 17 мая. Ответ дайте в градусах Цельсия.



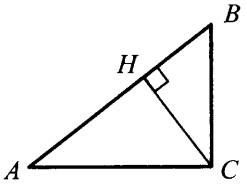
3. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 14 и 8.



4. Вероятность того, что новый телевизор прослужит больше 5 лет, равна 0,92. Вероятность того, что он прослужит больше 10 лет, равна 0,39. Найдите вероятность того, что он прослужит больше 5 лет, но меньше 10.

5. Решите уравнение $\sqrt{2x-3}=13$.

6. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C CH — высота, $\sin B=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $AC=4$. Найдите $2\sqrt{5}\,AH$.



7. Прямая $y=2x+1$ является касательной к графику функции $y=x^2-2x-c$. Найдите c.

8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB=5$, $AD=\sqrt{3}$, $CC_1=2\sqrt{2}$. Найдите длину диагонали параллелепипеда AC_1.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+1$.

10. Зависимость объема спроса q (единиц в месяц) на продукцию некоторого предприятия от цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 100 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка составит не менее 160 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

11. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 120 км/ч, проезжает мимо платформы, длина которой 300 м, за 15 с. Найдите длину поезда (в метрах).

12. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x^2+576}{x}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте четко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\log_{2016}(\sin x + \sqrt{3}\cos x + 2016) = 1$.

б) Найдите все корни данного уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{4\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$.

14. В правильной шестиугольной призме $AB\ldots E_1F_1$ со стороной основания 4 и боковым ребром 2

а) Опустите перпендикуляр из точки C на прямую E_1F_1.
б) Найдите его длину.

15. Решите неравенство: $\dfrac{(4x+7)^2}{x-3} \geq \dfrac{56x+49+16x^2}{21-10x+x^2}$.

16. В треугольник ABC вписана окружность радиуса r, касающаяся стороны AC в точке D, причем $AD = r$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках M и N. Найдите площадь четырехугольника $AMNC$, если известно, что $r = 2$ и $CD = 6$.

17. По вкладу «Классика» банк в конце каждого года планирует начислять 12% годовых, а по вкладу «Бонус» — увеличивать сумму вклада на 7% в первый год и на одинаковое целое число n процентов в последующие годы. Найдите наименьшее значение n, при котором за 4 года хранения вклад «Бонус» окажется выгоднее вклада «Классика» при равных суммах первоначальных взносов.

18. Найдите все значения параметра a, при которых область определения функции $y = \log_2(\log_2(a - x))\cdot\log_2 x$ содержит ровно пять целых чисел.

19. Решите уравнение $3^m + 4^n = 73$ в натуральных числах.

РЕШЕНИЕ ВАРИАНТА 5

Часть 1

1. Билет на поезд стоит 200 рублей. Какое наибольшее число билетов можно будет купить на 1000 рублей после повышения цены билета на 15%?

Решение

200 р. — 100%

x р. — 115%

$x \cdot 100 = 200 \cdot 115$

$100x = 23\,000$

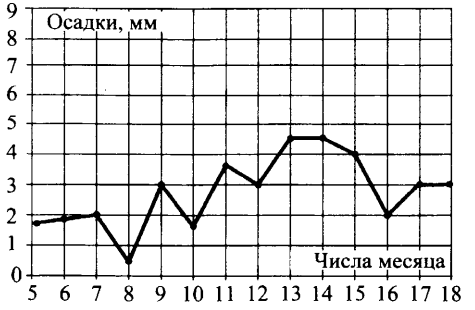
$x = 230$

Цена билета после повышения составила 230 рублей.

$4 \cdot 230 = 920$; $5 \cdot 230 = 1150 > 1000$

Ответ: 4.

2. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Москве с 5 до 18 марта 2015 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа впервые выпало 3 миллиметра осадков.

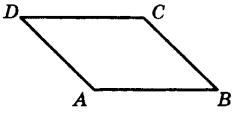


Решение

По рисунку видно, что 3 миллиметра осадков впервые выпало 9-го числа.

Ответ: 9.

3. Найдите площадь параллелограмма, если две его стороны равны 14 и 20, а угол между ними равен 150°.



Решение

$$S_{ABCD} = AD \cdot AB \cdot \sin \angle BAD = 14 \cdot 20 \cdot \sin 150° = 280 \cdot \frac{1}{2} = 140.$$

Ответ: 140.

4. Стрелок стреляет в мишень 3 раза. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того, что стрелок промахнется все 3 раза.

Решение

Так как результаты каждого выстрела независимы друг от друга, то мы можем применить теорему умножения вероятностей для независимых событий. Вероятность промаха при каждом выстреле равна $q = 1 - p = 1 - 0,9 = 0,1$. Вероятность промахнуться три раза равна $0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 0,001$.

Ответ: 0,001.

5. Решите уравнение $17^{2x+3} = \left(\frac{1}{289}\right)^x$.

Решение

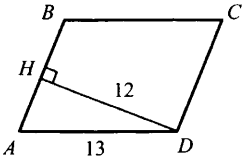
$17^{2x+3} = \left(17^{-2}\right)^x$;

$17^{2x+3} = 17^{-2x}$;

$2x + 3 = -2x$;
$4x = -3$;
$x = -0,75$.

Ответ: –0,75.

6. В параллелограмме $ABCD$ высота, опущенная на сторону AB, равна 12, $AD = 13$. Найдите $13\sin B$.



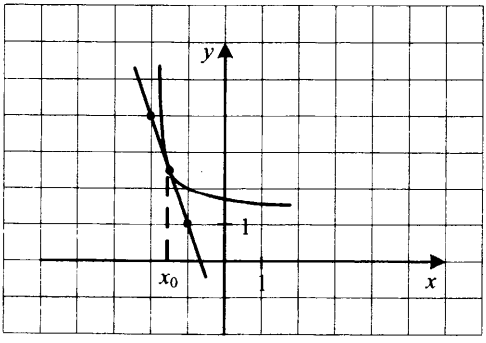
Решение

$\angle A + \angle B = 180° \Rightarrow \angle B = 180° - \angle A$; $\sin B = \sin(180° - A) =$
$= \sin A$

$$\sin A = \frac{DH}{AD} = \frac{12}{13} = \sin B \Rightarrow 13\sin B = 13 \cdot \frac{12}{13} = 12.$$

Ответ: 12.

7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите $f'(x_0)$.



Решение

По геометрическому смыслу производной $f'(x_0)$ равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0. По рисунку видно, что этот угловой коэффициент равен –3.

Ответ: –3.

8. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 24π, а его высота равна 4. Найдите диаметр основания цилиндра.

Решение

$$S_{б.п.} = 2\pi Rh = 24\pi \Rightarrow Rh = 12 \Rightarrow R = \frac{12}{h} = \frac{12}{4} = 3$$

$D = 2R = 6.$

Ответ: 6.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{21\sin 113^\circ \cos 113^\circ}{\sin 226^\circ}$.

Решение

$$\frac{21\sin 113^\circ \cos 113^\circ}{\sin 226^\circ} = \frac{21\sin 113^\circ \cos 113^\circ}{\sin(2\cdot 113^\circ)} = \frac{21\sin 113^\circ \cos 113^\circ}{2\sin 113^\circ \cos 113^\circ} =$$

$$= \frac{21}{2} = 10{,}5.$$

Ответ: 10,5.

10. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 30$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 6$ м/с^2. За t секунд после начала

торможения он проходит путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 48 метров. Ответ выразите в секундах.

Решение

$$30t - 3t^2 = 48$$
$$3t^2 - 30t + 48 = 0$$
$$t^2 - 10t + 16 = 0$$
$$D = 100 - 4 \cdot 16 = 36$$
$$t_{1,2} = \frac{10 \pm 6}{2} = \left[\begin{array}{l} 2 \\ 8 \end{array}\right.$$

Из физических соображений (через 5 секунд автомобиль остановится), верный ответ: $t = 2$.

Ответ: 2.

11. Автомобиль двигался половину времени со скоростью 80 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всем пути. Ответ дайте в км/ч.

Решение

$$V_{ср.} = \frac{S_{общ.}}{t_{общ.}} = \frac{80 \cdot \frac{t}{2} + 100 \cdot \frac{t}{2}}{t} = 90 \text{ (км/ч)}$$

Ответ: 90.

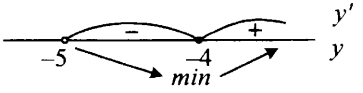
12. Найдите наименьшее значение функции

$y = 7x - 7\ln(x + 5) + 3{,}8$ на отрезке $[-4{,}9;\ 0]$.

Решение

$$y' = 7 - \frac{7}{x+5} = \frac{7x + 28}{x+5} = \frac{7(x+4)}{x+5}$$

Так как область определения функции — числовой луч $(-5;\ +\infty)$, то имеем следующую схему поведения функции и ее производной:



$y(-4) = -28 - 7\ln 1 + 3,8 = -28 + 3,8 = -24,2$

Ответ: –24,2.

13. а) Решите уравнение $\sin^2 x = 5\cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[0;5\pi]$.

Решение

а) $\sin^2 x = 5\cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$

$\sin^2 x = 5\sin x$

$\sin^2 x - 5\sin x = 0$

$\sin x(\sin x - 5) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x = 5\end{array}\right. \Leftrightarrow\ x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

б) $0 \le \pi n \le 5\pi$

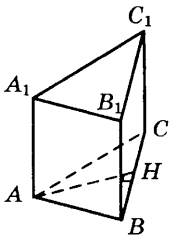
$0 \le n \le 5$

Так как $n \in \mathbb{Z}$, то $n \in \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$

Получаем корни $0;\ \pi;\ 2\pi;\ 3\pi;\ 4\pi;\ 5\pi$.

Ответ: а) $\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $0;\ \pi;\ 2\pi;\ 3\pi;\ 4\pi;\ 5\pi$.

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, стороны основания которой равны 2, а боковые ребра 3, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.



Решение

Плоскость ABC перпендикулярна ребру AA_1

$\text{пр}_{ABC}(AA_1) = A$

$\text{пр}_{ABC}(BC_1) = BC$

$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

15. Решите неравенство: $\sqrt{4-x^2}\left(4+5x+x^2\right) \geq 0$.

Решение

$$\sqrt{(2-x)(2+x)}(x+1)(x+4) \geq 0$$

$$\left[\begin{array}{l} (2-x)(2+x) = 0 \\ \begin{cases} (2-x)(2+x) > 0 \\ (x+1)(x+4) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \\ x \in [-1;2) \end{array}\right.$$

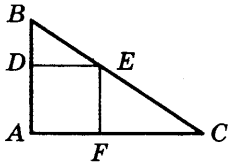
Ответ: $\{-2\} \cup [-1;\ 2]$.

16. В прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A и катетами $AB = 2$; $AC = 6$ вписан квадрат $ADEF$.

а) Докажите, что треугольники BDE и EFC подобны.

б) Найдите отношение площади треугольника EFC к площади квадрата $ADEF$.

Решение



а) Так как $ADEF$ — квадрат, то $\angle BDE = \angle EFC = 90°$.

$DE \parallel AC$, следовательно, $\angle BED = \angle ECF$ как соответственные углы при пересечении параллельных прямых DE и AC секущей $BC \Rightarrow \Delta BED \sim \Delta EFC$ по двум углам.

б) Пусть сторона квадрата x, тогда $BD = 2 - x$; $FC = 6 - x$. Исходя из того, что $\Delta BDE \sim \Delta EFC$:

$$\frac{BD}{EF} = \frac{DE}{FC} \Leftrightarrow \frac{2-x}{x} = \frac{x}{6-x} \Leftrightarrow (2-x)(6-x) = x^2$$

$$12 - 8x + x^2 = x^2 \Leftrightarrow x = 1,5$$

$$S_{\Delta EFC} = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot FC = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (6-x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{27}{8}$$

$$S_{ADEF} = x^2 = \frac{9}{4}$$

$$\frac{S_{\Delta EFC}}{S_{ADEF}} = \frac{27}{8} \cdot \frac{4}{9} = 1,5$$

Ответ: 1,5.

17. Иван хочет взять в кредит 1 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Процентная ставка 10% годовых. На какое минимальное количество лет Иван может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты не превышали 250 тысяч рублей?

Решение

Очевидно, что для того, чтобы погасить кредит как можно быстрее, Иван должен ежегодно выплачивать банку максимально подъемную для себя сумму. По условию задачи эта сумма составляет 250 тысяч рублей. Запишем решение с помощью таблицы:

Год	Долг Ивана банку до начисления процентов	Долг Ивана банку после начисления процентов	Долг Ивана банку после внесения им суммы ежегодного платежа
1	1 000 000	1 100 000	850 000
2	850 000	935 000	685 000
3	685 000	753 500	503 500
4	503 500	553 850	303 850
5	303 850	334 235	84 235
6	Меньше 100 000	Меньше 110 000	0

В последней строчке применяется метод оценки, чтобы не считать 10% от 84 235. Мы строго показали, что 5 лет Ивану не хватит для возвращения кредита, а 6 лет — хватит.

Ответ: 6.

18. Найдите все значения a, при которых область определения функции

$$y=\left(\sqrt[3]{x}\cdot x^{5\log_x a}+\left(\sqrt[3]{a}\right)^{3x+1}\cdot\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}\cdot\left(\sqrt[3]{a}\right)^{16}-x^{\frac{1}{3}+x\log_x a}\right)^{\frac{1}{4}}$$

содержит ровно два целых числа.

Решение

$$y=\left(\sqrt[3]{x}\cdot x^{5\log_x a}+\left(\sqrt[3]{a}\right)^{3x+1}\cdot\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}\cdot\left(\sqrt[3]{a}\right)^{16}-x^{\frac{1}{3}+x\log_x a}\right)^{\frac{1}{4}}=$$

$$= \sqrt[4]{x^{\frac{1}{3}+\log_x a^5} + a^x \cdot \sqrt[3]{2a} - \sqrt[3]{2a} \cdot a^5 - x^{\frac{1}{3}+x\log_x a}} =$$

$$= \sqrt[4]{x^{\frac{1}{3}} \cdot \left(x^{\log_x a^5} - x^{\log_x a^x}\right) + \sqrt[3]{2a}(a^x - a^5)} =$$

$$= \sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2a}\right) \cdot \left(a^5 - a^x\right)}$$

$$\begin{cases} a > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2a}\right)\left(a^5 - a^x\right) \geq 0 \end{cases}$$

При $a \in (0;1)$ последнее неравенство системы эквивалентно

$(x-2a)(x-5) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 2a] \cup [5; +\infty)$ — не удовлетворяет условию задачи.

При $a = 1$ это неравенство верно для $x \in (0;1) \cup (1; +\infty)$ — тоже не подходит.

При $a > 1$ $x \in [2a;\ 5]$ (или $[5;\ 2a]$, если $2a > 5$)

Область определения будет содержать ровно 2 целых числа, если

$$\begin{bmatrix} 2a \in (3;4] \\ 2a \in [6;7) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \in (1,5;2] \\ a \in [3;3,5) \end{bmatrix}$$

Ответ: $a \in (1,5;\ 2] \cup [3;\ 3,5)$.

19. Решите уравнение $x^2 + 3 = 7y$ в целых числах.

Решение

Остаток от деления на 7

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1
$x^2 + 3$	3	4	0	5	5	0	4

Так как $7y = x^2 + 3$ делится на 7, то или $x = 7k + 2$ или $x = 7k + 5$, где $k \in \mathbb{Z}$.

При $x = 7k + 2$: $7y = 49k^2 + 28k + 4 + 3$

$y = 7k^2 + 4k + 1$

При $x = 7k + 5$: $7y = 49k^2 + 70k + 25 + 3$

$y = 7k^2 + 10k + 4$

Ответ: $(7k + 2; 7k^2 + 4k + 1); (7k + 5; 7k^2 + 10k + 4)$, $k \in \mathbb{Z}$.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Выражения и преобразования

1. 3. **2.** 2. **3.** 4. **4.** 1. **5.** 1. **6.** 2. **7.** 2. **8.** 4. **9.** 3. **10.** 1. **11.** 4. **12.** 3. **13.** 2. **14.** 1. **15.** 2. **16.** 1. **17.** 3. **18.** 2. **19.** 4. **20.** 1. **21.** 4. **22.** 2. **23.** **24.** 2. **25.** 2. **26.** 1. **27.** 4. **28.** 3. **29.** 1. **30.** 2. **31.** 3. **32.** 4. **33.** 2. **34.** 3. **35.** 1. **36.** 2. **37.** 4. **38.** 3. **39.** 1. **40.** 2. **41.** 4. **42.** 3. **43.** 3. **44.** 4. **45.** 2. **46.** 1. **47.** 3. **48.** 4. **49.** 1. **50.** 2. **51.** 2. **52.** 1. **53.** 3. **54.** 1. **55.** 3. **56.** 1. **57.** 3. **58.** 2. **59.** 1. **60.** 3. **61.** 4. **62.** 3. **63.** 1. **64.** 2. **65.** 3. **66.** 1. **67.** 1. **68.** 2. **69.** 3. **70.** 1. **71.** 0,5. **72.** 0,2. **73.** 9. **74.** 8. **75.** $\frac{1}{6}$. **76.** $\frac{1}{49}$. **77.** 3. **78.** 0,5. **79.** 2. **80.** 8. **81.** 1. **82.** 3. **83.** 4. **84.** 2. **85.** 1. **86.** 3. **87.** 4. **88.** 2. **89.** 1. **90.** 3. **91.** 4. **92.** 2. **93.** 1. **94.** 3. **95.** 2. **96.** 4. **97.** 1. **98.** 2. **99.** 3. **100.** 4. **101.** 4. **102.** 3. **103.** 3. **104.** 4. **105.** 3. **106.** 4. **107.** 1. **108.** 4. **109.** 2. **110.** 1. **111.** 14. **112.** 0. **113.** 0. **114.** 40. **115.** 0. **116.** 15. **117.** 8. **118.** 7. **119.** 3. **120.** –32. **121.** 3. **122.** 2. **123.** 3. **124.** 3. **125.** 1. **126.** 2. **127.** 3. **128.** 2. **129.** 4. **130.** 1. **131.** 4. **132.** 2. **133.** 3. **134.** 1. **135.** 4. **136.** 2. **137.** 1. **138.** 2. **139.** 4. **140.** 1. **141.** 3. **142.** 1. **143.** 2. **144.** 3. **145.** 4. **146.** 3. **147.** 2. **148.** 1. **149.** 4. **150.** 4. **151.** $\frac{1}{4}\sin\frac{3x}{4}$. **152.** $\operatorname{tg}10x$. **153.** 1. **154.** $2\cos x$. **155.** $0{,}5\operatorname{ctg}x$. **156.** 1. **157.** 1. **158.** $\sin^2 x$. **159.** $\operatorname{tg}^2 2x$. **160.** 1. **161.** 3 **162.** 2. **163.** 4. **164.** 3. **165.** 1. **166.** 2. **167.** 2. **168.** 3. **169.** 4. **170.** 3. **171.** –0,4. **172.** –1,5. **173.** –1. **174.** 0,5. **175.** $\frac{1}{3}$. **176.** 2. **177.** –0,5. **178.** $-\frac{2}{7}$. **179.** –2. **180.** 2. **181.** 90. **182.** 82. **183.** –22. **184.** –20. **185.** –13. **186.** $\frac{1}{3}$. **187.** 18. **188.** 5. **189.** 8,25. **190.** 184. **191.** 112. **192.** 52. **193.** 3. **194.** 81. **195.** 1023. **196.** 33. **197.** 99. **198.** –2. **199.** 99. **200.** 162. **201.** (–1;0). **202.** (–1; 2). **203.** (–1; 1). **204.** (–4,5; 4). **205.** (2; 3). **206.** (–5; 0). **207.** (–8; 0,5). **208.** (–1; 1,5). **209.** (–3; 1). **210.** (0;2).

2. Уравнения и неравенства

1. 1. **2.** 2. **3.** 4. **4.** 3. **5.** 1. **6.** 2. **7.** 3. **8.** 4. **9.** 3. **10.** 1. **11.** 1. **12.** 2. **13.** 3. **14.** 4. **15.** 2. **16.** 4. **17.** 1. **18.** 3. **19.** 2. **20.** 3. **21.** $\pm\sqrt{10}$. **22.** $\frac{1}{3}$. **23.** $10^{10}, 10^{-15}$.

24. $\pm\sqrt{\lg 2}$. **25.** $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}, k\in\mathbb{Z}$. **26.** 10. **27.** 1. **28.** 6. **29.** 1. **30.** 4. **31.** 4. **32** 4. **33.** 3. **34.** 1. **35.** 3. **36.** 1. **37.** 2. **38.** 4. **39.** 3. **40.** 3. **41.** 1. **42.** 3. **43.** 3. **44.** 2. **45.** 3. **46.** 2. **47.** 3. **48.** 4. **49.** 3. **50.** 3. **51.** 3. **52.** 2. **53.** 2. **54.** 1. **55.** 2. **56.** 1. **57.** 2. **58.** 1. **59.** 3. **60.** 4. **61.** 7. **62.** 6. **63.** 2. **64.** 4. **65.** 0. **66.** 3. **67.** 3. **68.** 7. **69.** 5. **70.** 0. **71.** 0,5. **72.** $\sqrt{2}$. **73.** 8. **74.** 16. **75.** $\sqrt[4]{2}$. **76.** $25,\frac{1}{25}$. **77.** $16,\ \frac{1}{16}$. **78.** 27. **79.** 2. **80.** 1. **81.** 2. **82.** 3. **83.** 3. **84.** 1. **85.** 4. **86.** 1. **87.** 3. **88.** 2. **89.** 4. **90.** 3. **91.** –7. **92.** 0. **93.** 7. **94.** 1. **95.** 3. **96.** 3. **97.** 1,5. **98.** 1. **99.** 9. **100.** 1,5. **101.** 0. **102.** 0,5. **103.** 0. **104.** 2. **105.** –1. **106.** 1. **107.** 18. **108.** 0,4. **109.** –1. **110.** –1. **111.** 4. **112.** 0. **113.** 3. **114.** 1. **115.** 1. **116.** 0. **117.** 1. **118.** 2. **119.** $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}, k\in\mathbb{Z}$. **120.** $-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **121.** $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}, k\in\mathbb{Z}$. **122.** $2\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **123.** $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **124.** $\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **125.** $\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **126.** $-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **127.** $\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **128.** $\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

Системы уравнений с двумя переменными

129. (18; 9). **130.** (–3; 13). **131.** $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k; 2\pi n\right), k,n\in\mathbb{Z}$. **132.** $\left(1; -\frac{\pi}{2}+2\pi k\right), k\in\mathbb{Z}$. **133.** (0,5; 2). **134.** (3; 2). **135.** (9; 3). **136.** (9; 729). **137.** (2; 2). **138.** (5; 2); (3; 2). **139.** 0. **140.** 1. **141.** 4. **142.** 80. **143.** 8. **144.** 0. **145.** 1. **146.** –2. **147.** 209. **148.** 6.

Неравенства с одной переменной

149. 3. **150.** 1. **151.** 2. **152.** 4. **153.** 3. **154.** 1. **155.** 2. **156.** 3. **157.** 4. **158.** 1. **159.** $\left(\frac{5}{7}-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{7}}<\left(\frac{9}{15}+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{7}}$. **160.** $\left(\frac{1}{123}\right)^{\frac{5}{6}}\cdot\left(\frac{1}{123}\right)^{\frac{1}{3}}<\left(\frac{1}{123}\right)^{\frac{1}{2}}$. **161.** $(-\infty;-11]\cup[-7;7)\cup[9;+\infty)$. **162.** $[-13;-3]\cup[5;8)$. **163.** $[-\infty;11]$. **164.** $(1;2)$. **165.** $(0;3)\cup(7;+\infty)$. **166.** (3; 4). **167.** $[12;+\infty)$.

168. $[-11;-5)$. **169.** 1. **170.** 3. **171.** 4. **172.** 1. **173.** 3. **174.** 3. **175.** 4. **176.** 3. **177.** 1. **178.** 2. **179.** 2. **180.** 4. **181.** 2. **182.** 4. **183.** 2. **184.** 2. **185.** 1. **186.** 2. **187.** 3. **188.** 1. **189.** 3. **190.** 1. **191.** 4. **192.** 2. **193.** 3. **194.** 2. **195.** 3. **196.** 2. **197.** 1. **198.** 4. **199.** (1; 3). **200.** $\left(\frac{1}{5};\frac{4}{5}\right)$. **201.** $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$. **202.** $\left(-\frac{1}{20};\frac{1}{16}\right)$. **203.** $\left(-\frac{4}{5};\frac{4}{5}\right)$. **204.** $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$. **205.** $\left(-\frac{4}{7};\frac{4}{11}\right)$. **206.** $\left(-\frac{4}{7};\frac{11}{7}\right)$. **207.** (–1; 2). **208.** $\left(-\frac{11}{8};\frac{19}{8}\right)$.

3. Функции

1. 1. **2.** 3. **3.** 1. **4.** 1. **5.** 1. **6.** 4. **7.** 2. **8.** 3. **9.** 4. **10.** 2. **11.** 2. **12.** 1. **13.** 3. **14.** 4. **15.** 1. **16.** 2. **17.** 3. **18.** 4. **19.** 2. **20.** 1. **21.** 3. **22.** 1. **23.** 4. **24.** 1. **25.** 3. **26.** 2. **27.** 3. **28.** 2. **29.** 1. **30.** 2. **31.** 3. **32.** 4. **33.** 2. **34.** 3. **35.** 4. **36.** 4. **37.** 1. **38.** 4. **39.** 4. **40.** 3. **41.** 1. **42.** 1. **43.** 1. **44.** 1. **45.** 3. **46.** 3. **47.** 3. **48.** 1. **49.** 3. **50.** 3. **51.** 2. **52.** 2. **53.** 3. **54.** 2. **55.** 2. **56.** 2. **57.** 1. **58.** 2. **59.** 4. **60.** 2. **61.** 4. **62.** 3. **63.** 2. **64.** 4. **65.** 4. **66.** 2. **67.** 2. **68.** 3. **69.** 1. **70.** 4. **71.** 10. **72.** 3. **73.** 14. **74.** 3. **75.** 5. **76.** 2,5. **77.** $\frac{14}{3}$. **78.** $\frac{10}{3}$. **79.** 10. **80.** $\frac{5}{3}$. **81.** (1; 2). **82.** $(6;7]$. **83.** $[5;9)$. **84.** $a>\frac{1}{4}$. **85.** $a<-\frac{1}{4}$. **86.** $(0;2]\cup[4;5)$. **87.** (1; 2). **88.** $(1{,}5;2]\cup[3;3{,}5)$. **89.** (2; 14). **90.** $(3;5]\cup(7;9)$. **91.** 2. **92.** 1. **93.** 3. **94.** 4. **95.** 1. **96.** 3. **97.** 1. **98.** 2. **99.** 3. **100.** 3. **101.** 1. **102.** 3. **103.** 2. **104.** 4. **105.** 1. **106.** 2. **107.** 1. **108.** 4. **109.** 1. **110.** 3. **111.** 2. **112.** 1. **113.** 3. **114.** 4. **115.** 1. **116.** 3. **117.** 4. **118.** 2. **119.** 2. **120.** 2. **121.** 4. **122.** 1. **123.** 10. **124.** 1,8. **125.** 2. **126.** 1. **127.** 1. **128.** 5. **129.** 4. **130.** 0,5. **131.** 5. **132.** 3. **133.** 4. **134.** 3. **135.** 5. **136.** 3. **137.** 5. **138.** 2. **139.** 4. **140.** 7. **141.** 3. **142.** 4. **143.** 2. **144.** 3. **145.** 4. **146.** 1. **147.** 2. **148.** 1. **149.** 3. **150.** 1. **151.** 4. **152.** 4. **153.** 3. **154.** 2. **155.** 4. **156.** 3. **157.** 4. **158.** 1. **159.** 3. **160.** 1. **161.** 2. **162.** 3. **163.** 4. **164.** 4. **165.** 4. **166.** 4. **167.** 4. **168.** 1. **169.** 2. **170.** 2. **171.** 3. **172.** 2. **173.** 2. **174.** 1. **175.** 2. **176.** 1. **177.** 4. **178.** 3. **179.** 1. **180.** 3. **181.** 1. **182.** 2. **183.** 3. **184.** 2. **185.** 4. **186.** 3. **187.** 2. **188.** 1. **189.** 2. **190.** 3. **191.** 25. **192.** –36. **193.** 2. **194.** 0. **195.** $5-e^{-5}$. **196.** $-e^4$. **197.** $\frac{\pi}{3}$. **198.** 3. **199.** 2. **200.** ± 1. **201.** 3. **202.** 2. **203.** 4. **204.** 2. **205.** 2. **206.** 2. **207.** 1. **208.** 2. **209.** 2. **210.** 1. **211.** 1. **212.** 6.

213. $-\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$. . **214.** –5. **215.** 1. **216.** –5. **217.** –1. **218.** –2. **219.** 6. **220.** 4. **221.** $(-\infty;-5)\cup(5;\infty)$. **222.** (2; 2,25). **223.** $(-\infty;0)\cup(1;\infty)$. **224.** e^{-1}. **225.** 0,25. **226.** $(-\infty;-3)\cup(5;\infty)$. **227.** $(-\infty;-3)\cup(4;\infty)$. **228.** $(-\infty;-4)\cup(9;\infty)$. **229.** $(-\infty;-3)\cup(5;\infty)$. **230.** $(-\infty;-5)\cup(11;\infty)$. **231.** 0. **232.** 2. **233.** 2. **234.** –1. **235.** –2. **236.** –3. **237.** –2. **238.** –2. **239.** –3. **240.** –3. **241.** 4 дм, 4 дм, 3 дм. **242.** 96 см^2. **243.** 216 см^2. **244.** 384 см^2. **245.** 150 см^2. **246.** 8 см^3. **247.** 27 см^3. **248.** 64 см^3. **249.** 125 см^3. **250.** 1 см^3. **251.** 2. **252.** 2. **253.** 1. **254.** 3. **255.** 2. **256.** 1. **257.** 1. **258.** 4. **259.** 2. **260.** 4. **261.** $F(x)=2\sqrt{x}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{5}{12}$. **262.** $F(x)=\sin x-\cos x-\operatorname{ctg}x+5$. **263.** $F(x)=2\sqrt{x}+\sin x+x+7$. **264.** $F(x)=-3\operatorname{ctg}x-7\cos x-2\sin x+11$. **265.** $F(x)=x^6+x^3-8\cos x+3$. **266.** $F(x)=-\frac{16}{x}+31x+\sqrt{x}-8$. **267.** $12\frac{1}{3}$. **268.** $\sqrt{3}-1$. **269.** 6. **270.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **271.** 4. **272.** 1. **273.** 3. **274.** 1. **275.** 1. **276.** 2. **277.** 2. **278.** 1. **279.** 2. **280.** 4.

4. Числа и вычисления

1. 200 г. **2.** 50 л. и 40 л. **3.** 80 м^3. **4.** 324 км. **5.** 3330 руб. **6.** 300 км. **7.** 680 м^3. **8.** 2400. **9.** 65. **10.** 1494 руб. **11.** 54. **12.** 60. **13.** 45. **14.** 56. **15.** 55. **16.** 34. **17.** 32,5. **18.** 32. **19.** 35. **20.** 26. **21.** 2544. **22.** 3640. **23.** 6620. **24.** 4160. **25.** 14980. **26.** 33100. **27.** 4641. **28.** 8640. **29.** 9930. **30.** 1962.

5. Геометрические фигуры и их свойства. Измерение геометрических величин

1. 3 дм. **2.** 6,25 дм. **3.** $96\sqrt{3}$ см. **4.** 32 см^2. **5.** 120 см. **6.** 5 см. **7.** 14π см. **8.** 45°. **9.** 30°. **10.** 1. **11.** 12. **12.** $3+2\sqrt{3}$. **13.** 2. **14.** 12π. **15.** $12\sqrt{3}$. **16.** 18. **17.** $27\sqrt{3}$. **18.** 6. **19.** $8+16\frac{\sqrt{3}}{3}$. **20.** 3. **21.** $44\sqrt{3}$. **22.** $12+9\sqrt{3}$. **23.** 40. **24.** 12. **25.** 2. **26.** 2. **27.** 3. **28.** 120. **29.** 4. **30.** 264 см^2. **31.** 72 см^3. **32.** 192 см^3. **33.** 5 см^3. **34.** 72 см^2. **35.** 18 см. **36.** 320π см^2. **37.** 128π см^3. **38.** 12,5 см^2. **39.** 5π. **40.** 9. **41.** $18\sqrt{2}$. **42.** 48. **43.** $24\sqrt{3}$. **44.** $\frac{9}{4}\sqrt{7}$. **45.** 18.

46. 6. **47.** 36. **48.** 24. **49.** $\sqrt{31}$. **50.** $24\sqrt{3}$. **51.** $15\sqrt{3}$. **52.** $7{,}5\,\pi$. **53.** $40\sqrt{2}$. **54.** 162. **55.** 108. **56.** $2\sqrt{2}$. **57.** 8. **58.** 30. **59.** 1,5. **60.** $9\sqrt{3}$. **61.** $6\sqrt{3}$. **62.** 32. **63.** 12. **64.** $6+3\sqrt{3}$. **65.** $3\sqrt{3}$. **66.** 21π. **67.** 8π. **68.** 16π. **69.** 35π. **70.** $\frac{3}{2}$. **71.** 1. **72.** 4. **73.** $\frac{24}{5}$. **74.** $2\sqrt{3}$. **75.** 1. **76.** 12. **77.** $\frac{36}{7}$. **78.** 1. **79.** $\frac{20}{21}$.

6. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей

1. 15. **2.** 120. **3.** 2300. **4.** 90000. **5.** 380. **6.** 0,75. **7.** 0,125. **8.** 0,06. **9.** 0,6. **10.** 0,99375. **11.** 0,002. **12.** 0,8. **13.** 0,47. **14.** 0,2. **15.** 0,992. **16.** 0,3.

ОТВЕТЫ

Вариант 1

1	25	**8**	14	**15**	$(-\infty; 1] \cup (\log_3 4; \log_3 6)$
2	4	**9**	36	**16**	б) $\frac{49}{240}$
3	7	**10**	8	**17**	10
4	0,488	**11**	8	**18**	$a \in \left[-\frac{1}{7}; -\frac{1}{9}\right) \cup \{0\}$
5	46	**12**	1	**19**	а) Например: (1; 2; 20); (3; 4; 19); (5; 6; 18); (7; 8; 17); (9; 10; 16) б) нет в) 6
6	65	**13**	а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ n \in \mathbb{Z}$ б) $\frac{9\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}$		
7	4	**14**	$\sqrt{2}$		

Вариант 2

1	34	**8**	4,5	**15**	$(-8; -7) \cup [1; 1,5) \cup (3; 3,5]$
2	4	**9**	5	**16**	б) $\frac{4}{21}$
3	164,25	**10**	2	**17**	842579,5
4	0,9615	**11**	10	**18**	$a \in \left(0; \frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{5}{8}; +\infty\right)$
5	–3	**12**	–2		
6	3	**13**	а) $\pi n; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in \mathbb{Z}$ б) $-\pi; -\frac{\pi}{3}; 0$		
7	11	**14**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$		

Вариант 3

1	11200	**8**	9	**15**	(3; 4]
2	4	**9**	0,1	**16**	б) 12
3	0,9	**10**	75	**17**	73205
4	0,08	**11**	2,5	**18**	$a \in \left(-\infty;-\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2};+\infty\right)$
5	12	**12**	11	**19**	(1;1007);(19;53);(53;19); (1007;1);(−1;−1007); (−19;−53);(−53;−19); (−1007;−1)
6	7	**13**	а) $\frac{\pi}{4}+\pi n;\ n \in \mathbb{Z}$ б) $\frac{5\pi}{4};\ \frac{9\pi}{4}$		
7	2	**14**	$\frac{\sqrt{2}}{2}$		

Вариант 4

1	22000	**8**	4	**15**	(0; 1]
2	3,5	**9**	8	**16**	б) $\frac{5}{6}$
3	14	**10**	13,75	**17**	5
4	0,9375	**11**	25	**18**	$a = e^{-\frac{1}{e}}$ или $a > 1$
5	–1	**12**	–1	**19**	13
6	62	**13**	а) $\frac{\pi}{4}+\pi n$; arctg2 + πn; $n \in \mathbb{Z}$ б) $\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}$; arctg2; arctg2 + π		
7	–3	**14**	$\frac{\sqrt{10}}{4}$		

Вариант 5

1	4	**8**	6	**15**	$\{-2\}\cup[-1;\ 2]$
2	9	**9**	10,5	**16**	б) 1,5
3	140	**10**	2	**17**	6
4	0,001	**11**	90	**18**	$a\in(1{,}5;\ 2]\cup[3;\ 3{,}5)$
5	–0,75	**12**	–24,2	**19**	$(7k+2;7k^2+4k+1);$ $(7k+5;7k^2+10k+4),\ k\in\mathbb{Z}$
6	12	**13**	а) $\pi n;\ \ n\in\mathbb{Z}$ б) 0; π; 2π; 3π; 4π; 5π		
7	–3	**14**	$\sqrt{3}$		

Вариант 6

1	200	**8**	11	**15**	$(-\infty;-9)\cup(3;+\infty)$
2	6	**9**	3	**16**	б) 48
3	4	**10**	2	**17**	51529
4	20	**11**	12	**18**	$k=2$
5	32	**12**	–2	**19**	(23; 3)
6	17	**13**	а) $\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \ n\in\mathbb{Z}$ б) $-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}$		
7	2	**14**	60°		

Вариант 7

1	21000	**8**	10	**15**	$(-5;-4)\cup\{5\}$
2	10	**9**	–47	**16**	б) 12,4
3	20	**10**	62,5	**17**	1,5
4	0,006	**11**	154	**18**	$a\in(-\frac{1}{2};\ 0)$
5	1	**12**	4,75		
6	2	**13**	а) –1; $\log_3 2-1$ б) –1		
7	1,5	**14**	0,3		

Вариант 8

1	5	**8**	1	**15**	$(-2;1)\cup(1;4)$
2	12	**9**	10	**16**	б) 1,6
3	10,5	**10**	27,5	**17**	В одной группе — 11 девочек и 11 мальчиков; в другой — одна девочка и 23 мальчика
4	0,75	**11**	48	**18**	$a\in\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right]\cup\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$
5	2	**12**	4,5	**19**	4
6	0,8	**13**	а) $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3};\ n\in\mathbb{Z}$ б) $-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{12}$		
7	37	**14**	100π		

Вариант 9

1	12,5	**8**	18	**15**	$(-1;-0,5)\cup(1;2)$
2	3	**9**	3	**16**	б) 5
3	6,5	**10**	1	**17**	8
4	0,75	**11**	3	**18**	$a\in(-\infty;-0,25)$
5	0,8	**12**	1	**19**	$(3k+1;3k^2+2k+1);$ $(3k+2;3k^2+4k+2),k\in\mathbb{Z}$
6	$-0,75$	**13**	а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ n\in\mathbb{Z}$ б) $-\frac{11\pi}{6}$		
7	3	**14**	$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{65}}{13}$		

Вариант 10

1	7659	**8**	6	**15**	$\left\{-\frac{7}{4}\right\} \cup (3; 7) \cup [8; +\infty)$
2	7	**9**	2	**16**	б) 17,6
3	56	**10**	8	**17**	14
4	0,53	**11**	200	**18**	$a \in (6; 7]$
5	86	**12**	24	**19**	(2; 3)
6	8	**13**	а) $-\frac{\pi}{3} + \pi n; n \in \mathbf{Z}$; б) $-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}$		
7	–5	**14**	$2\sqrt{13}$		

Справочное издание

Лаппо Лев Дмитриевич
Попов Максим Александрович

ЕГЭ
МАТЕМАТИКА
ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ
САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА К ЕГЭ

**УНИВЕРСАЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ
С МЕТОДИЧЕСКИМИ РЕКОМЕНДАЦИЯМИ,
РЕШЕНИЯМИ И ОТВЕТАМИ**

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU.ПЩ01.Н00199 от 19.05.2016 г.

Редактор *И. М. Бокова*
Технический редактор *Л. В. Павлова*
Корректоры *Т. И. Лошкарёва, И. А. Огнева*
Дизайн обложки *Л. В. Демьянова*
Компьютерная верстка *А. С. Федотова, А. В. Толокевич*

107045, Москва, Луков пер., д. 8.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 8 (495) 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ООО «ИПК Парето-Принт», 170546, Тверская область,
Промышленная зона Боровлево-1, комплекс № 3А. www.pareto-print.ru

**По вопросам реализации обращаться по тел.:
8 (495) 641-00-30 (многоканальный).**