ПЕРЕВОДНОЙ ПРОФИЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС

1 ЧАСТЬ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Найдите значение выражения

1. $\sqrt{12}\cos^2\frac{5\pi}{12}-\sqrt{3}$

2. $25\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{1}{5}$

3. $\frac{5\sin 98^\circ}{\sin 49^\circ \sin 41^\circ}$

4. $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

5. $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{3}{5}$

6. $\frac{\sqrt{8}\cos^2\frac{\pi}{8}-\sqrt{2}}{1+8\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8}}$

7. $\frac{\sin^2 75^\circ-\cos^2 75^\circ}{1-2\sin^2 15^\circ}$

8. $16\sin 3\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{1}{4}$

9. $4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\alpha-2\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)$

10. $\frac{24\sin 14^\circ\cdot\cos 14^\circ\cdot\cos 28^\circ}{\cos 34^\circ}$

СВОЙСТВА КОРНЕЙ, СТЕПЕНЕЙ И ЛОГАРИФМОВ

Найдите значение выражения

1. $\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$

2. $27^{\frac{2}{3}}-(-2)^{-2}+\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$

3. $\frac{\sqrt[9]{7}\cdot\sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}}$

4. $\frac{\left(\sqrt[7]{9^4}\cdot\sqrt[3]{16}\right)^{21}}{36^{12}}$

5. $\left(\frac{5^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[12]{25}}\right)^3$

6. $\log_3 49\cdot\log_{\sqrt{7}}5\cdot\log_{25}27$

7. $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{3+\frac{1}{\log_{27}5}}$

8. $(1-\log_2 12)(1-\log_6 12)$

9. $\frac{\log_2 18}{\log_{36}2}-\frac{\log_2 9}{\log_{72}2}$

10. $6^{\frac{\log_3 5}{1+\log_3 2}}$

УРАВНЕНИЯ и НЕРАВЕНСТВА

Решите уравнение и неравенство

1. $x^3-2x^2-5x+6=0$

2. $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-5}$

3. $2^{2x-1}+4^{x-1}+2^{2x-3}\geq 448$

4. $5^{2x+1}+4\cdot 5^x-1>0$

5. $4\log_4 x-33\log_x 4\leq 1$

6. $\log_2^2 x+3\log_{\frac{1}{2}} x+2=0$

7. $\log_{15}(x-3)<1-\log_{15}(x-5)$

8. $\log_{x+5} 49=2$

9. $\sqrt{x^3-4x^2-10x+29}=3-x$

10. $2\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)+\sqrt{3}=0$

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Упростите выражение

1. $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot \operatorname{ctg}\alpha$

2. $\dfrac{\sin\alpha+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha-\cos 4\alpha}$

3. $\dfrac{2-5m-2n+5mn}{10m^2-9m+2}$

4. $\dfrac{8\cdot 100^n}{2^{2n+1}\cdot 5^{2n-1}}$

5. $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)-\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\arctan\left(-\sqrt{3}\right)$

6. $\sqrt{\log_2^2 3+1-\log_2 9}-\log_2\left(12\sqrt{2}\right)$

7. $\left(\dfrac{1}{4x^2-y^2}:\dfrac{2x+y}{y^2-8xy+4x^2}-\dfrac{2x-y}{4x^2+2xy}\right)\cdot\left(\dfrac{2x}{y}+1\right)^2$

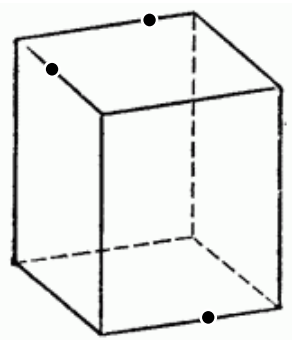
8. Найти седьмой член разложения: $\left(\dfrac{x^2}{2}+\sqrt{x}\right)^{12}$

9. Найти член разложения бинома: $\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{15}$, не содержащий x

10. Найти значение выражения $\cos^3\alpha-\sin^3\alpha$, если $\cos\alpha-\sin\alpha=\dfrac{1}{5}$

СТЕРЕОМЕТРИЯ

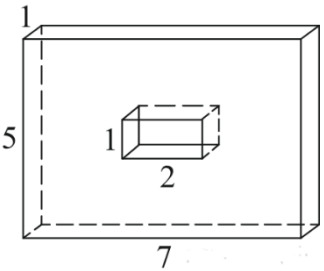
1. Постройте сечения параллелепипеда, проходящее через заданные точки:



2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. AC =13 см, DC = 5 см, $AA_1 = 6\sqrt{3}$ см. Вычислите градусную меру двугранного угла $ADCA_1$.

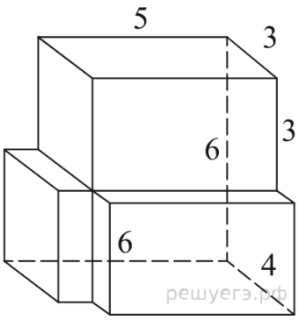
3. Через середину M стороны AD квадрата $ABCD$ проведен к его плоскости перпендикуляр MK, равный $6\sqrt{3}$ см. Сторона квадрата равна 12 см. Вычислите расстояние от точки K до прямой BC.

4. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



5. Через середину E гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC проведен к его плоскости перпендикуляр EM, равный $4\sqrt{5}$ см. $AC = BC$ = 16 см, $\angle C = 90°$. Вычислите расстояние между прямыми EM и BC.

6. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



7. Основание пирамиды – прямоугольник со сторонами 6 и 8 см. Высота пирамиды равна 12 см и проходит через точку пересечения диагоналей основания. Найдите боковые ребра пирамиды.

8. Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена прямая AK, перпендикулярная к плоскости прямоугольника. Известно, что $KD = 6$ см, $KB = 7$ см, $KC = 9$ см. Найдите расстояние от точки K до плоскости прямоугольника $ABCD$;

9. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 6 см, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен 60°. Найдите боковое ребро пирамиды.

10. Основание прямого параллелепипеда – ромб с диагоналями 10 и 24 см. Меньшая диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

УРАВНЕНИЯ

а) решите уравнение б) найдите корни уравнения, принадлежащие промежутку		
1.	$\cos 2x-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+1=0$	$\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$
2.	$2\sqrt{3}\sin^2\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)+\sin 2x=0$	$\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$
3.	$\sqrt{6}\sin x+2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x-\sqrt{3}$	$\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$
4.	$9^{\sin x}+9^{-\sin x}=\frac{10}{3}$	$\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$
5.	$\left(3\cos 2x-11\cos x+7\right)\sqrt{-7\operatorname{tg} x}=0$	$\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$
6.	$\frac{\sin x}{\cos^2\frac{x}{2}}=4\sin^2\frac{x}{2}$	$\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$
7.	$\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{2}\cos x-\sin 2x+27\right)=-3$	$\left[-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$
8.	$\frac{\sqrt{2}\sin^2 x-\cos x-\sqrt{2}}{\sqrt{-3\sin x}}=0$	$\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$
9.	$4\log_4^2\left(2\sin x\right)-9\log_4\left(2\sin x\right)+2=0$	$\left[\frac{7\pi}{2};\ 5\pi\right]$
10.	$1-4\cos^2\left(x-\frac{5\pi}{12}\right)=\sqrt{3}\cos 2x$	$\left[-\frac{9\pi}{2};-3\pi\right]$

НЕРАВЕНСТВА

1. $\log_{6x^2-x-1}\left(2x^2-5x+3\right)\geq 0$

2. $\log_{4-x}\dfrac{x+3}{\left(x-4\right)^2}\geq -2$

3. $\dfrac{\log_5\left(25x\right)}{\log_5 x-2}+\dfrac{\log_5 x-2}{\log_5\left(25x\right)}\geq\dfrac{6-\log_5 x^4}{\log_5^2 x-4}$

4. $\log_{x^2-1}\left(2x^2+3x+1\right)\leq 1$

5. $\log_3\left(\dfrac{1}{x}+2\right)-\log_3\left(x+4\right)\leq\log_3\left(\dfrac{x+5}{x^2}\right)$

6. $\dfrac{3^x}{3^x-9}-\dfrac{3^x+2}{3^x-5}-\dfrac{3^x+21}{9^x-14\cdot 3^x+45}\leq 0$

7. $\left(5\cdot 2^{x^2}\right)^{\frac{1}{x}}-2\left(2\cdot 5^{\frac{1}{x}}\right)^{x-1}\geq 2^{x+2}$

8. $\dfrac{6^x-4\cdot 3^x}{x\cdot 2^x-5\cdot 2^x-4x+20}\leq\dfrac{1}{x-5}$

9. $\sqrt{2x^2-5x-3}>x-1$

10. $\left|4x-1\right|+\left|4x-7\right|\leq 6$

ПЛОЩАДЬ СЕЧЕНИЯ МНОГОГРАННИКОВ

1. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E = 6EA$. Точка T – середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении $4 : 3$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1

2. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 5 : 3$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1F : FB = 5 : 11$, а точка T – середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 6\sqrt{2}$, $AD = 10$, $AA_1 = 16$.

а) Докажите, что плоскость EFT, проходит через вершину D_1.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT.

3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которого квадрат со стороной $AB = 3$, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{6}$, на рёбрах AB, A_1D_1 и C_1D_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = A_1N = C_1K = 1$.

а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром BC. Докажите, что $MNKL$ – квадрат.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью MNK.

4. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K делит боковое ребро AA_1 в отношении $AK : KA_1 = 1 : 2$. Через точки B и K проведена плоскость α параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро DD_1 в отношении $DM : MD_1 = 2 : 1$.

б) Найдите площадь сечения, если известно, что $AB = 4$, $AA_1 = 6$.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 4$, $BC = 3$, $AA_1 = 2$. Точки P и Q – середины рёбер A_1B_1 и CC_1 соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро B_1C_1 в точке K.

а) Докажите, что $B_1K : KC_1 = 2 : 1$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью APQ.

6. Дана правильная четырёхугольная пирамида $MABCD$, все рёбра которой равны 12. Точка N – середина бокового ребра MA, точка K делит боковое ребро MB в отношении 2 : 1, считая от вершины M.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки N и K параллельно прямой AD, является равнобедренной трапецией.

б) Найдите площадь этого сечения.

7. В основании правильной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6. Сечение пирамиды проходит через вершину B и середину ребра PD перпендикулярно этому ребру.

а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен 60°.

б) Найдите площадь сечения пирамиды.

8. На ребре AB правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ отмечена точка Q, причём $AQ : QB = 1 : 2$. Точка P – середина ребра AS.

а) Докажите, что плоскость DPQ перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

б) Найдите площадь сечения DPQ, если площадь сечения DSB равна 6.

9. В основании правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6. Противоположные боковые рёбра пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины рёбер MA и MB проведена плоскость α параллельная ребру MC.

а) Докажите, что сечение плоскостью α пирамиды $MABC$ является параллелограммом.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $MABC$ плоскостью α.

10. В основании пирамиды $DABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 15$ и $BC = 9$. Точка M – середина ребра AD. На ребре BC выбрана точка E так, что $CE = 3$, а на ребре AC выбрана точка F так, что $CF = 5$. Плоскость MEF пересекает ребро BD в точке N. Расстояние от точки M до прямой EF равно $\sqrt{34}$.

а) Докажите, что N – середина ребра BD.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью MNF.