

ГЕОМЕТРИЯ
В ТАБЛИЦАХ

7-11
КЛАССЫ

СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ

АВТОРЫ-СОСТАВИТЕЛИ:
Л.И.Звавич, А.Р.Рязановский

10-е издание, стереотипное



ДРОФА
Москва·2005

УДК 373.167.1:514(035)
ББК 22.15я72
Г35

Геометрия в таблицах. 7—11 кл. : справочное по-
Г35 собие / авт.-сост. Л. И. Звавич, А. Р. Рязановс-
кий. — 10-е изд., стереотип. — М. : Дрофа, 2005. —
124, [4] с. : ил.

ISBN 5-7107-9732-4

Пособие содержит таблицы по всем наиболее важным разделам школьного курса геометрии: планиметрии и стереометрии. В таблицах кратко изложена теория по каждой теме, приведены основные формулы, примеры решения типовых задач. В конце книги помещен предметный указатель.

Пособие полезно учащимся 7—11 классов, абитуриентам, студентам, учителям и родителям.

УДК 373.167.1:514(035)
ББК 22.15я72

ISBN 5-7107-9732-4

© ООО «Дрофа», 1997

От авторов

Тематические таблицы по всем наиболее важным разделам школьного курса геометрии предназначены для школьников от седьмого до одиннадцатого классов. В каждой таблице кратко изложена теория конкретного вопроса (определения, теоремы, следствия, формулы); приводятся рисунки, а также примеры решения наиболее принципиальных задач.

Таблицы помогут систематизировать знания, быстро и полно повторить основные моменты той или иной темы, с помощью предметного указателя найти нужные сведения. Таблицы можно разрезать и наклеить на плотную бумагу, оставив оборот чистым для пометок и добавлений (для такой операции надо иметь два экземпляра книги).

Ученик может:

- при подготовке к ответу или к контрольной работе прочитать и обдумать соответствующую таблицу, посмотреть предметный указатель;
- при решении задач по данной теме использовать соответствующую таблицу в качестве справочника;
- после уроков по данной теме самому внести в таблицу (на чистый оборот) добавления и изменения, отметить неизученные в классе вопросы;
- при итоговом повторении материала прежде всего просмотреть таблицы;
- устроить себе или своему товарищу зачет по таблице или предметному указателю;
- использовать таблицу как план ответа на устном экзамене или зачете.

Учитель может:

- использовать таблицы при подготовке к уроку;
- при объяснении нового материала подавать таблицы через кодоскоп (вывешивать на доске увеличенную таблицу), а еще лучше — положить книгу перед каждым учеником;
- проводить письменный или устный опрос по материалам таблиц или предметного указателя;
- использовать таблицы во время проведения самостоятельных работ;
- проводить по таблицам комплексное или тематическое повторение;
- избавить себя от утомительной процедуры «надиктовывания» аналогичных таблиц, план-конспектов, формул и т.п.

Абитуриент может: внимательно прочитав каждую таблицу «от корки до корки», уяснить, всем ли материалом он владеет в должной мере; при недостатке времени таблицы могут быть основным источником тематического повторения при подготовке к письменному экзамену. Если вас ждет и устный экзамен, то материал таблиц должен быть вашим лоцманом при чтении учебников.

Родители ученика могут использовать таблицу:

— для проверки знаний своего ребенка по той или иной теме;

— для проверки своих собственных знаний по математике в объеме школьной программы и для их расширения.

Таблицы могут быть использованы также будущими учителями, репетиторами, членами предметных комиссий институтов, студентами.

Авторы надеются, что таблицы принесут пользу всем, кто будет использовать их в своих занятиях по математике.

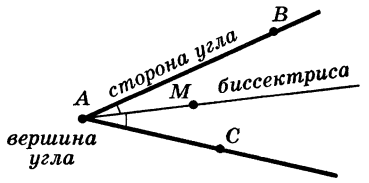
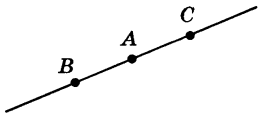
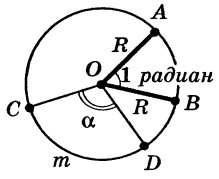
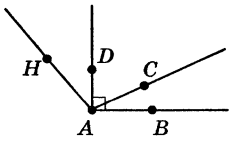
Авторы выражают благодарность Борису Петровичу Пигареву, внимательно прочитавшему таблицы и сделавшему ряд ценных замечаний.

Таблица 1. Элементы теории доказательств

«$A \Rightarrow B$» — данная теорема; «$B \Rightarrow A$» — обратная теорема; «не $A \Rightarrow$ не B» — противоположная теорема; «не $B \Rightarrow$ не A» — теорема, обратная противоположной
Если из A следует B, то *A достаточно* для B, а *B необходимо* для A. Если из A следует B, а из B следует A, то *A необходимо* и *достаточно* для B
Для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, *необходимо*, чтобы диагональ делила его на два равных треугольника (но недостаточно). Для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, *достаточно*, чтобы все его стороны были равны (но не необходимо). Для того чтобы целое число делилось на 3, *необходимо и достаточно*, чтобы сумма его цифр делилась на 3. Для того чтобы треугольник был прямоугольным, *необходимо и достаточно*, чтобы квадрат одной из его сторон был равен сумме квадратов двух других
«*Необходимо и достаточно*» заменяется на «*тогда и только тогда, когда*»
Четырехугольник *тогда и только тогда* является параллелограммом, *когда* его диагонали, пересекаясь, делятся пополам. Диагонали четырехугольника, пересекаясь, делятся пополам *тогда и только тогда, когда* четырехугольник является параллелограммом
Отношение обладает свойством *симметрии*, если из того, что A находится в данном отношении к B следует, что и B находится в данном отношении к A. *Примеры симметричных отношений*: параллельность прямых, перпендикулярность прямых, параллельность плоскостей, перпендикулярность плоскостей, равенство чисел, равенство фигур
Отношение обладает свойством *транзитивности*, если из того, что A находится в данном отношении с B, а B с C следует, что A и C находятся в данном отношении. *Примеры транзитивных отношений*: равенство чисел, подобие фигур, отношения «меньше» и «больше» ($<$; $>$), параллельность несовпадающих прямых и плоскостей

ПЛАНИМЕТРИЯ

Таблица 2. Углы и параллельность

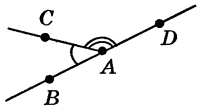
Углом называется фигура, образованная двумя лучами, выходящими из одной точки (*вершины*). Луч, выходящий из вершины угла и делящий его пополам, называется *биссектрисой* угла	 $\angle BAC$ AM — биссектриса $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle BAM = \angle CAM$
Угол называется *развернутым*, если его стороны лежат на одной прямой. *Градус* — величина (градусная мера) угла, равного $\frac{1}{180}$ части развернутого угла	 $\angle BAC$ — развернутый $A \in (BC)$ $\angle BAC = 180°$
Радиан — величина угла, градусная мера которого равна $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$. Центральный угол в 1 радиан стягивает дугу, длина которой равна радиусу окружности. Центральный угол, стягивающий дугу длины a, равен $\frac{a}{R} = \alpha$ (радиан)	 дл. $\overset{\smile}{AB} = R$ $\frac{\text{дл. } \overset{\smile}{CmD}}{R} = \alpha$ (радиан)
Угол, равный половине развернутого, называется *прямым* (90°). Угол меньше прямого называется *острым*. Угол больше прямого, но меньше развернутого называется *тупым*	 $\angle BAD = 90°$ — прямой $\angle CAB < 90°$ — острый $90° < \angle BAH < 180°$ — тупой

Смежные углы

Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются дополнительными лучами, называются *смежными*.

Сумма смежных углов равна 180°.

Угол, смежный с прямым, — прямой

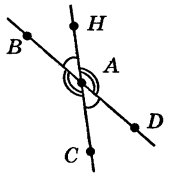


$\angle BAC$ и $\angle CAD$ — смежные
$\angle BAC + \angle CAD = 180°$

Вертикальные углы

Два угла, стороны одного из которых являются дополнительными лучами сторон другого, называются *вертикальными*.

Вертикальные углы *равны*

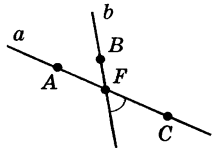


$\angle BAC$, $\angle HAD$ — вертикальные
$\angle BAH$, $\angle DAC$ — вертикальные
$\angle BAC = \angle HAD$

Угол между прямыми

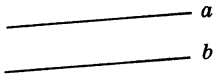
Углом между двумя пересекающимися прямыми называется меньший из вертикальных углов, образовавшихся при пересечении.

Прямые, образующие прямой угол, называются *перпендикулярными*



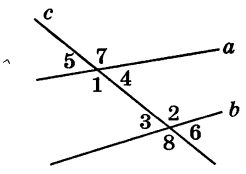
$\angle(a, b) = \angle AFB \leqslant \angle BFC$
$(\angle AFB = \angle BFC) \Rightarrow (\angle(a, b) = 90°) \Rightarrow$
$\Rightarrow (a \perp b)$

Две прямые плоскости, не имеющие общих точек, называются *параллельными*



$a \parallel b \Leftrightarrow a \cap b = \varnothing$

При пересечении двух прямых третьей (*секущей*) образуются пары углов:
(1; 2), (3; 4), (5; 6) и (7; 8) *накрест лежащие*;
(1; 8), (5; 3), (4; 6) и (7; 2) *соответственные*;
(1; 3), (2; 4), (5; 8) и (7; 6) *односторонние*

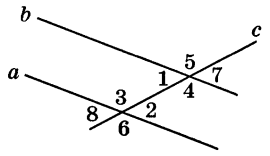


$a \cap c$ $b \cap c$

Таблица 2. Углы и параллельность

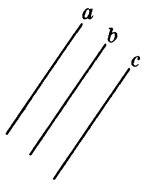
Пересечение параллельных прямых секущей

Накрест лежащие углы равны ($\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$; $\angle 5 = \angle 6$; $\angle 7 = \angle 8$).
Соответственные углы равны ($\angle 3 = \angle 5$; $\angle 1 = \angle 8$; $\angle 2 = \angle 7$; $\angle 4 = \angle 6$).
Сумма односторонних углов 180° ($\angle 1 + \angle 3 = \angle 5 + \angle 8 = \angle 2 + \angle 4 = \angle 6 + \angle 7 = 180°$)



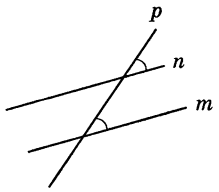
Аксиома параллельности
Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только *одна прямая, параллельная данной*

Признаки параллельности прямых
Если две различные прямые *параллельны третьей*, то они параллельны между собой (*транзитивность параллельности*).

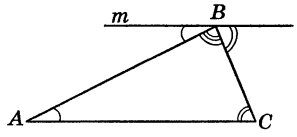


$(a \parallel b;\ b \parallel c) \Rightarrow (a \parallel c)$

Если при пересечении двух прямых третьей *накрест лежащие углы равны*, то прямые параллельны.
Если при пересечении двух прямых третьей *соответственные углы равны*, то прямые параллельны.
Если при пересечении двух прямых третьей сумма односторонних углов равна 180°, прямые параллельны



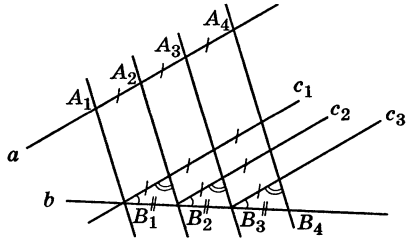
Сумма углов треугольника равна 180°



$m \parallel AC$
$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

Теорема Фалеса

Если на одной из двух прямых отложены несколько равных отрезков и через их концы проведены параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то и на ней отложатся равные отрезки.

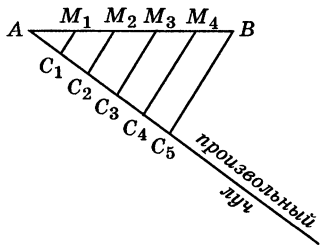


$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$

$A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4 \Rightarrow$

$\Rightarrow B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$

Деление отрезка на равные части



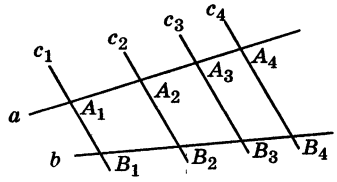
$AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = \ldots = C_4C_5$ — произвольные равные отрезки

$BC_5 \parallel C_4M_4 \parallel C_3M_3 \parallel C_2M_2 \parallel C_1M_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow AM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4 = M_4B$

«Расширенная» теорема Фалеса

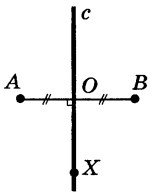
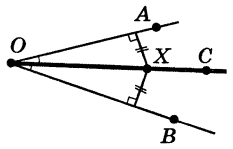
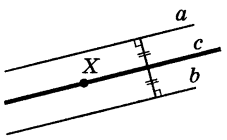
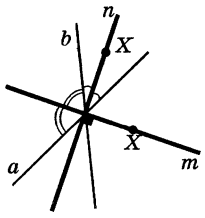
Если на одной из двух прямых отложены несколько отрезков и через их концы проведены параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то на ней отложатся отрезки, пропорциональные данным.



$c_1 \parallel c_2 \parallel c_3 \parallel c_4 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_1A_2 : A_2A_3 : A_3A_4 = B_1B_2 : B_2B_3 : B_3B_4$

Таблица 3. Множества (геометрические места) точек на плоскости

Множество точек, равноудаленных от двух данных точек, есть *серединный перпендикуляр* отрезка, соединяющего эти точки (на нем лежат центры окружностей, проходящих через данные две точки)	 $AO = OB$; $c \perp AB$ $(X \in c) \Leftrightarrow (AX = XB)$
Множество точек, равноудаленных от сторон данного угла (меньшего, чем развернутый), есть *биссектриса угла* (на ней лежат центры окружностей, касающихся сторон угла)	 $\angle AOC = \angle BOC$ $(X \in OC) \Leftrightarrow (\rho(X, OA) = \rho(X, OB))$
Множество точек, равноудаленных от двух параллельных прямых, есть *параллельная им прямая*, проходящая через середину отрезка их общего перпендикуляра (на ней лежат центры окружностей, касающихся данных прямых)	 $a \parallel b$; $c \parallel a$ $(\rho(X, a) = \rho(X, b)) \Leftrightarrow (X \in c)$
Множество точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых, есть *две взаимно перпендикулярные прямые*, на которых лежат *биссектрисы* вертикальных углов, образовавшихся при пересечении данных прямых (на них лежат центры окружностей, касающихся данных прямых)	 $a \cap b$ $(\rho(X, a) = \rho(X, b)) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X \in m \\ \text{или} \\ X \in n \end{array}\right.$

* $\rho(X, a)$ и $\rho(X, OA)$ — обозначение расстояния от точки до прямой.

Таблица 3. Множества (геометрические места) точек

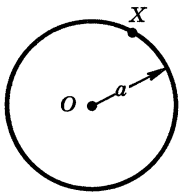
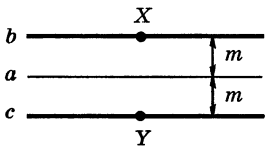
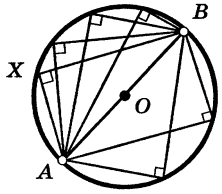
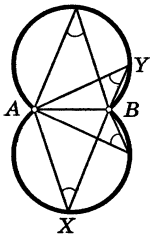
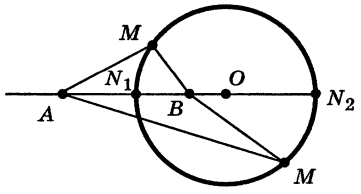
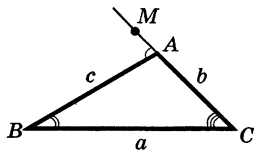
Множество точек, удаленных на данное расстояние от точки, есть *окружность* с центром в данной точке	 $\rho(X, O) = a$
Множество точек, удаленных на данное расстояние от прямой, есть *две параллельные* ей *прямые*	 $\rho(X, a) = \rho(Y, a) = m$ $b \parallel a$; $c \parallel a$
Множество вершин прямоугольных треугольников с данной гипотенузой есть *окружность*, построенная на гипотенузе как на диаметре (исключая концы гипотенузы)	 $\angle AXB = 90^\circ$
Множество точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, есть *две симметричные*, опирающиеся на данный отрезок, *дуги* (исключая концы этих дуг)	 $\angle AXB = \angle AYB$
Окружность Аполлония Множество точек M, таких что $AM = kMB$, есть окружность с диаметром N_1N_2 на прямой AB такая, что $AN_1 : N_1B = k$ и $AN_2 : N_2B = k$ $(k \neq 1)$	

Таблица 4. Треугольник

Неравенство треугольника
В любом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон

$a - b < c < a + b$,
где a, b, c — длины сторон треугольника, причем $a > b$

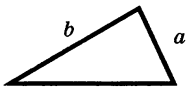
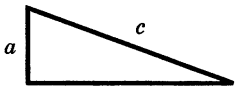
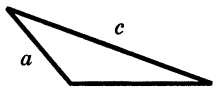
Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним углов



$\angle BAM = \angle B + \angle C$

Сумма углов треугольника 180°

В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, против большего угла — большая сторона

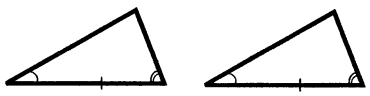
$a^2 + b^2 > c^2$	$a^2 + b^2 = c^2$	$a^2 + b^2 < c^2$
 остроугольный	 прямоугольный	 тупоугольный

Признаки равенства треугольников

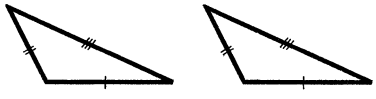
По двум сторонам и углу между ними (*С У С*)



По стороне и двум прилежащим к ней углам (*У С У*)



По трем сторонам (*С С С*)



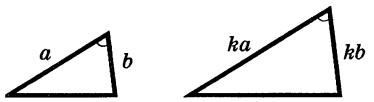
Сходственные (соответствующие) *элементы* равных треугольников *равны*

Признаки подобия треугольников

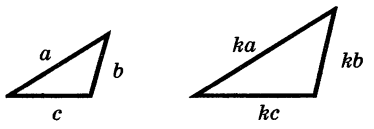
По двум углам (*У У*)



По двум сторонам и углу между ними (*С У С*)



По трем сторонам (*С С С*)

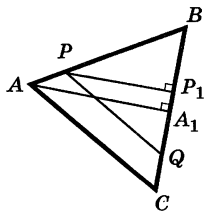


Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.

Сходственные линейные элементы подобных треугольников *пропорциональны сходственным сторонам.*

Периметры подобных треугольников относятся как *сходственные стороны.*

Площади подобных треугольников относятся как *квадраты сходственных сторон*



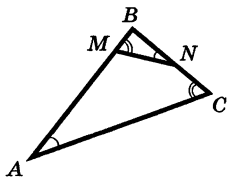
$PQ \parallel AC \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle PBQ \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AB}{PB} = \frac{AC}{PQ} = \frac{BC}{BQ} = k$ — коэффициент подобия

$PP_1 \parallel AA_1 \Rightarrow \frac{AA_1}{PP_1} = k$

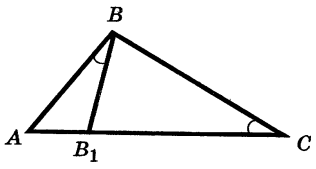
$\frac{AB + AC + BC}{PB + PQ + BQ} = k; \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle PBQ}} = k^2$

Примеры подобных треугольников



$\wedge ABC \sim \triangle NBM$

$k = \frac{AB}{BN} = \frac{AC}{MN} = \frac{BC}{BM}$



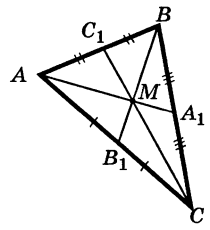
$\triangle ABC \sim \triangle AB_1B$

$k = \frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{BB_1}$

Таблица 4. Треугольник

Медиана

Медианой треугольника называется отрезок, который соединяет вершину треугольника с серединой противолежащей стороны



Медианы треугольника пересекаются в одной точке (*центре тяжести* треугольника) и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины

$AM : MA_1 = BM : MB_1 =$

$= CM : MC_1 = 2 : 1$

$AA_1 = m_a$; $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$

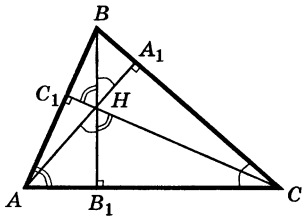
Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника. Три медианы делят треугольник на шесть равновеликих треугольников

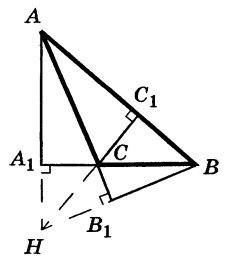
$$AA_1^2 = m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

Высота

Высотой треугольника называется отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины треугольника на прямую, содержащую противолежащую сторону.

Все высоты треугольника пересекаются в одной точке — *ортоцентре* треугольника





AA_1, BB_1, CC_1 — высоты $\triangle ABC$

$AA_1 = h_a$; $BB_1 = h_b$; $CC_1 = h_c$

H — ортоцентр

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

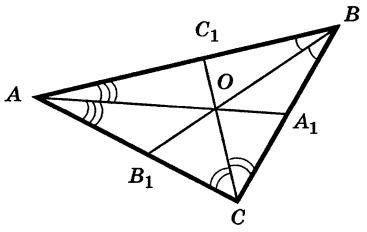
r — радиус вписанной окружности

Биссектриса

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы внутреннего угла треугольника.

Все биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке — *центре вписанной* в треугольник *окружности*.

Биссектриса делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника



$$\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow CA_1 = \frac{ab}{b+c};$$

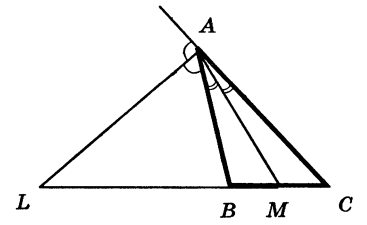
$$A_1B = \frac{ac}{b+c};\ \frac{AO}{OA_1} = \frac{b+c}{a}$$

$$AA_1^2 = AB \cdot AC - A_1B \cdot A_1C$$

$$AA_1 = \frac{2 \cdot AB \cdot AC}{AB + AC} \cos\frac{A}{2}$$

Биссектрисы внутреннего и смежного с ним внешнего углов треугольника перпендикулярны.

Биссектриса внешнего угла неравнобедренного треугольника пересекает продолжение противолежащей стороны в точке, отстоящей от концов этой стороны на расстояния, пропорциональные длинам двух других сторон



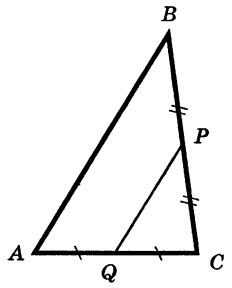
$$\angle LAM = 90°$$

$$\frac{LB}{LC} = \frac{AB}{AC}$$

Средняя линия

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

Средняя линия *параллельна третьей* стороне и равна ее *половине*



$$PQ \parallel AB$$

$$PQ = \frac{1}{2}AB$$

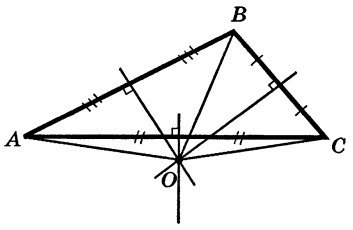
Таблица 4. Треугольник

Серединный перпендикуляр

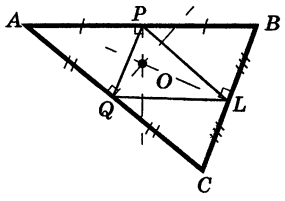
Серединным перпендикуляром называется прямая, перпендикулярная стороне треугольника и делящая ее пополам.

Все серединные перпендикуляры сторон треугольника пересекаются в одной точке — *центре описанной* около треугольника *окружности*. Около каждого треугольника можно описать окружность и притом только одну.

Точка пересечения серединных перпендикуляров треугольника является точкой пересечения высот треугольника, образованного средними линиями данного



$AO = BO = CO = R$



Площадь треугольника

$S_\triangle = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c$

$S_\triangle = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A$

$S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона)

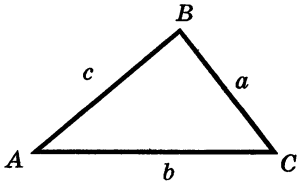
$S_\triangle = rp$

$S_\triangle = \frac{abc}{4R}$

$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ — полупериметр

r — радиус вписанной окружности

R — радиус описанной окружности



Теорема косинусов	Теорема синусов
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними	Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих им углов

Вписанная окружность

В каждый треугольник можно *описать* окружность и притом только *одну*.

Ее центр — *точка пересечения биссектрис*.

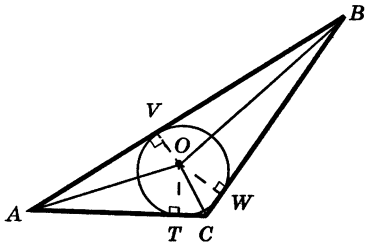
Формулы для вычисления радиуса.

$$r = \frac{S}{p}$$

$$r = (p - a) \cdot \operatorname{tg}\frac{A}{2} = (p - b) \cdot \operatorname{tg}\frac{B}{2} = (p - c) \cdot \operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

$$r = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)(p - c)}{p}}$$

p — полупериметр



$OT \perp AC$; $OV \perp AB$; $OW \perp BC$

$AV = AT = p - a$

$BV = BW = p - b$

$CW = CT = p - c$

Описанная окружность

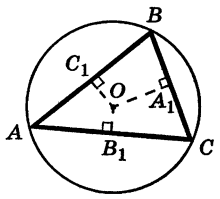
Около каждого треугольника можно описать окружность и притом только одну.

Ее центр — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Формулы для вычисления радиуса.

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}$$

$$R = \frac{abc}{4S}$$



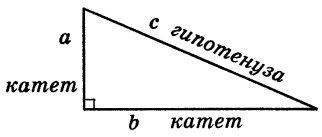
$AB_1 = B_1C$; $AC_1 = C_1B$; $BA_1 = A_1C$

$OA_1 \perp BC$; $OB_1 \perp AC$; $OC_1 = AB$

$OA = OB = OC = R$

Прямоугольный треугольник

Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузой*, две другие стороны называются *катетами*



Теорема Пифагора

Квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.

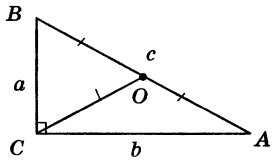
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Таблица 4. Треугольник

Свойства прямоугольного треугольника

Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы.

Только в прямоугольном треугольнике центр описанной окружности лежит на стороне треугольника (совпадает с серединой гипотенузы)



$OA = OB = OC = R = \frac{1}{2}c$

Площадь прямоугольного треугольника

$S = \frac{1}{2}ab$, $S = \frac{1}{2}ch$, h — высота, проведенная к гипотенузе

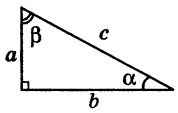
Тригонометрические функции острых углов прямоугольного треугольника

Синусом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинусом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенсом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к прилежащему.

Котангенсом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение прилежащего катета к противолежащему



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$

$\beta = 90° - \alpha$

$\sin\beta = \sin(90° - \alpha) = \frac{b}{c} = \cos\alpha$

$\cos\beta = \cos(90° - \alpha) = \frac{a}{c} = \sin\alpha$

$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(90° - \alpha) = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha$

Пример.
$\sin 54° = \cos 36°$; $\operatorname{tg} 89° = \operatorname{ctg} 1°$

Значения тригонометрических функций некоторых углов

	0°	30°	45°	60°	90°	180°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	−1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не опр	0

Признаки прямоугольных треугольников

Если квадрат одной из сторон треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то такой треугольник прямоугольный.

Если медиана треугольника равна половине соответствующей ей стороны, то треугольник прямоугольный

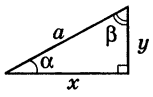
Решение прямоугольных треугольников

Дано: гипотенуза и острый угол.

$x = a \cos \alpha$

$y = a \sin \alpha$

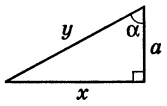
$\beta = 90° - \alpha$



Дано: катет и острый угол.

$x = a \operatorname{tg} \alpha$

$y = \dfrac{a}{\cos \alpha}$



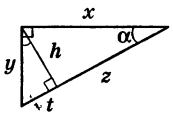
Дано: высота, опущенная на гипотенузу, и острый угол.

$y = \dfrac{h}{\cos \alpha}$

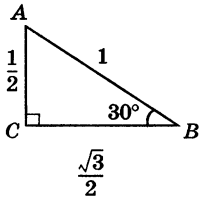
$x = \dfrac{h}{\sin \alpha}$

$z = h \operatorname{ctg} \alpha$

$t = h \operatorname{tg} \alpha$



Катет, лежащий против угла 30°, *равен половине гипотенузы.*



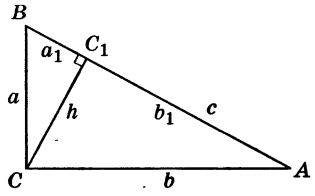
Соотношения в прямоугольном треугольнике

$BC^2 = BC_1 \cdot AB;\ a^2 = a_1 \cdot c$

$AC^2 = AC_1 \cdot AB;\ b^2 = b_1 \cdot c$

$CC_1^2 = BC_1 \cdot C_1A;\ h^2 = a_1 \cdot b_1$

$h = \dfrac{ab}{c}$



Вычисление радиусов вписанной и описанной окружности

$2R = AB = c = (b - r) + (a - r) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2R = a + b - 2r \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \dfrac{a + b - c}{2} = p - c$

$2(R + r) = a + b$

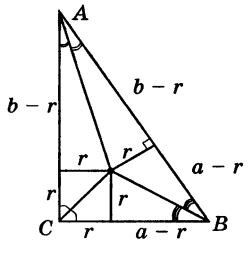
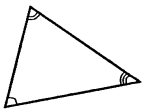
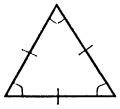
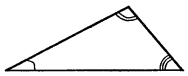
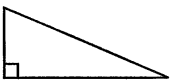


Таблица 4. Треугольник

Треугольники классифицируют по сторонам: *разносторонние*, *равнобедренные*, *равносторонние*; а также по углам: *остроугольные*, *тупоугольные* и *прямоугольные*

Треугольники	разносторонние	равнобедренные	равносторонние
остроугольные			
тупоугольные			—
прямоугольные			—

Равнобедренный треугольник

Равнобедренным треугольником называется треугольник с двумя равными сторонами.

Общая вершина равных (*боковых*) сторон называется *вершиной равнобедренного треугольника*, а третья сторона *основанием*

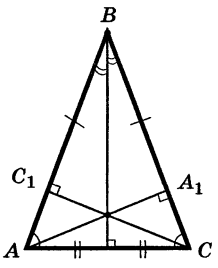


Свойства равнобедренного треугольника

Углы при основании равны.

Высота, проведенная из вершины равнобедренного треугольника, является медианой и биссектрисой (осью симметрии).

Высоты (биссектрисы, медианы), проведенные к боковым сторонам, равны

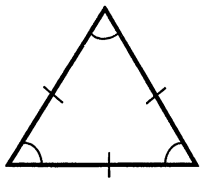


$AA_1 \perp BC$
$CC_1 \perp AB$ $\Leftrightarrow AA_1 = CC_1$

Все эти свойства равнобедренного треугольника обратимы и могут быть использованы для получения *признаков равнобедренного треугольника*

Правильный треугольник

Правильным (*равносторонним*) называется треугольник, все стороны которого равны



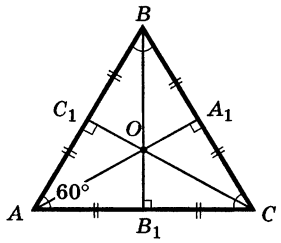
Свойства правильного треугольника

Все углы равностороннего треугольника равны **60°**.

Только в правильном треугольнике совпадают точки пересечения медиан, биссектрис, высот, серединных перпендикуляров. Эта точка называется *центром правильного треугольника* и является центром вписанной и описанной окружностей.

Центр правильного треугольника делит его высоты в отношении **2 : 1**, считая от вершины.

Только в правильном треугольнике $R = 2r = \frac{2}{3}h = \frac{a}{\sqrt{3}}$



$AB = BC = AC = a$

$AA_1 = BB_1 = CC_1 = h$

$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

Площадь равностороннего треугольника

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Дополнительные теоремы о треугольнике

Теорема Чевы

Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 тогда и только тогда пересекаются в одной точке, когда

$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$

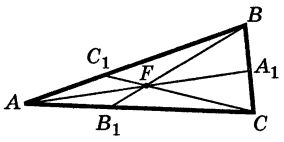


Таблица 4. Треугольник

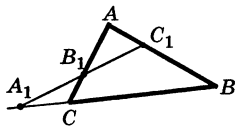
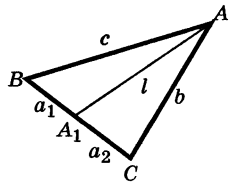
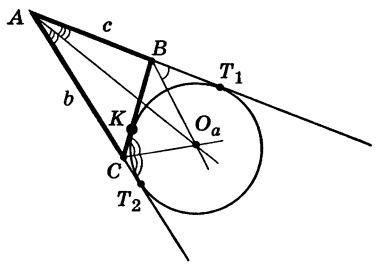
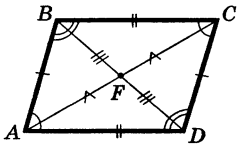
Теорема Менелая Точки A_1, B_1, C_1 тогда и только тогда лежат на одной прямой, когда $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} = 1$	
Теорема Стюарта $AA_1 = l$, тогда $l^2 = \frac{b^2a_1 + c^2a_2}{a_1 + a_2} - a_1a_2$	
Центры *вневписанных окружностей* лежат в точках пересечения биссектрисы внутреннего и двух биссектрис внешних углов треугольника	 $AT_1 = AT_2 = \frac{1}{2}(AB + BC + CA) = p$ $BK = p - c$; $CK = p - b$

Таблица 5. Параллелограмм

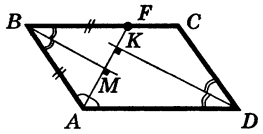
Параллелограммом называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны

Свойства параллелограмма
Диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.
Противоположные стороны параллелограмма равны.
Сумма соседних углов параллелограмма 180°.
Диагонали параллелограмма, пересекаясь, делятся пополам



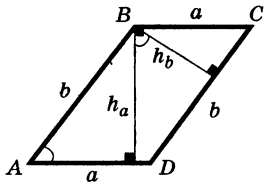
$\angle A + \angle B = 180°$

Дополнительные свойства параллелограмма
Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.
Биссектрисы соседних углов параллелограмма перпендикулярны, а биссектрисы противоположных углов параллельны или лежат на одной прямой.
Диагонали параллелограмма делят его на четыре равновеликих треугольника



$AB = BF$
$BM \perp AF$
$BM \parallel DK$

Высоты параллелограмма *обратно пропорциональны соответственным сторонам* параллелограмма.
Высоты параллелограмма, опущенные из одной вершины, образуют угол, равный углу параллелограмма при соседней вершине



$a : b = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b}$; $\angle (h_a, h_b) = \angle A$

Середина любого отрезка с концами на противоположных сторонах параллелограмма лежит на прямой, проходящей через середины двух других сторон

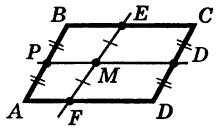


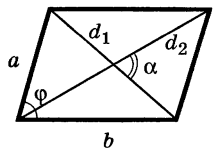
Таблица 5. Параллелограмм

Признаки параллелограмма

Если в четырехугольнике две *противоположные стороны равны и параллельны*, то это параллелограмм.

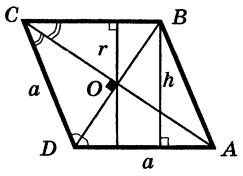
Если в четырехугольнике *противоположные стороны попарно равны*, то это параллелограмм.

Если в четырехугольнике *диагонали*, *пересекаясь*, *делятся пополам*, то это параллелограмм

Периметр параллелограмма	$P = 2a + 2b$
Площадь параллелограмма $S = ah_a = bh_b$ $S = ab \sin \varphi$ $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$	
Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его четырех сторон. $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$	

Ромб

Ромбом называется параллелограмм, все стороны которого равны

Свойства ромба Диагонали ромба взаимно перпендикулярны. Диагонали ромба лежат на биссектрисах его углов. Высоты ромба равны. В ромб можно вписать окружность $r = \frac{1}{2} h = \frac{1}{2} a \sin A.$ Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма.	 $h = a \sin A = a \sin B = 2r$

Признаки ромба

Если в параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны, то это ромб.

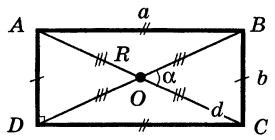
Если диагональ параллелограмма лежит на биссектрисе его угла, то это ромб.

Если стороны четырехугольника равны, то это ромб

Площадь ромба	$S = ha = a^2 \sin A = \frac{1}{2} d_1 d_2$

Прямоугольник

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые

Свойства прямоугольника Диагонали прямоугольника равны. Около прямоугольника можно описать окружность. $R = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$. Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма	 $AC = BD = d$ $OA = OB = OC = OD = R = \frac{1}{2}d$ $d^2 = a^2 + b^2$

Признаки прямоугольника

Если в параллелограмме диагонали равны, то это прямоугольник.
Если в параллелограмме один угол прямой, то это прямоугольник.
Если в четырехугольнике три угла прямые, то это прямоугольник

Площадь прямоугольника	$S = ab$ $S = \frac{1}{2}d^2 \sin\alpha$

Квадрат

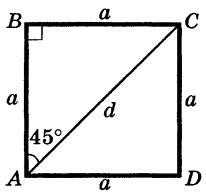
Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны (ромб с прямыми углами). Квадрат обладает всеми свойствами ромба и прямоугольника. Квадрат — правильный четырехугольник	 $d = a\sqrt{2}$ $r = \frac{1}{2}a$ $R = \frac{1}{2}\ d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
Площадь квадрата	$S = a^2 = \frac{1}{2}d^2$

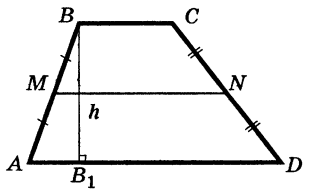
Таблица 6. Трапеция

Трапецией называется четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны

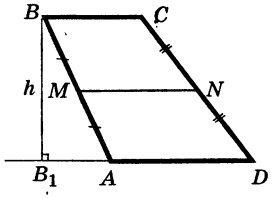
Элементы трапеции
BC и AD — верхнее и нижнее основания,
AB и CD — боковые стороны,
AC и BD — диагонали,
MN — средняя линия,

$MN = \frac{1}{2}(BC + AD)$.

Высота трапеции BB_1 — расстояние между прямыми оснований



$BB_1 \perp AD$; $BB_1 = h$



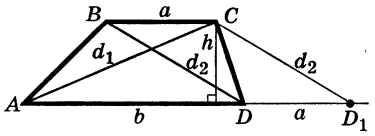
Площадь трапеции

$S = h \cdot MN = \frac{1}{2}h(BC + AD) =$

$= \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin \angle(AC, BD)$

Неравенство для сторон трапеции
$AB + CD > AD - BC$

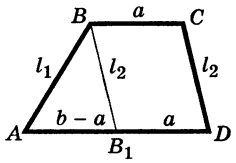
Неравенство для диагоналей трапеции
$AC + BD > AD + BC$



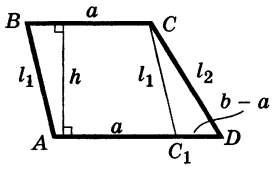
$CD_1 \parallel BD$ $\qquad h = \frac{2S_{\triangle ACD_1}}{AD_1}$

$d_1 + d_2 > b + a$

Разбиение трапеции на параллелограмм и треугольник



$BB_1 \parallel CD$; $BCDB_1$ — параллелограмм
$BC = a = B_1D$; $AD = b \Rightarrow AB_1 = b - a$



$CC_1 \parallel AB$
$ABCC_1$ — параллелограмм

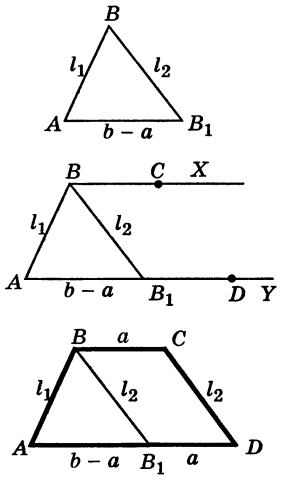
Если известны стороны трапеции, можно вычислить по формуле Герона площадь отсеченного треугольника ($S_\triangle$), высоту трапеции $\left(h = \frac{2S_\triangle}{AB_1}\right.$ или $\left. h = \frac{2S_\triangle}{C_1D}\right)$ и площадь трапеции

Построение трапеции по основаниям и боковым сторонам

Пусть заданы отрезки a, b, l_1, l_2, причем $l_1 + l_2 > b - a$ ($b > a$) — неравенство для сторон трапеции.

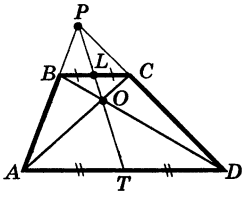
1. Строим $\triangle ABB_1$ по трем сторонам: $b - a$, l_1, l_2.
2. Проводим через точку B прямую $BX \parallel AB_1$.
3. На лучах BX и B_1Y строим отрезки $BC = B_1D = a$.

Трапеция $ABCD$ — искомая



Теорема о четырех точках трапеции

Середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции лежат на одной прямой



$BL = LC$

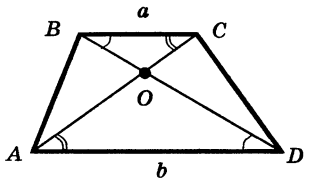
$AT = TD$

Свойства треугольников в трапеции.

$\triangle BOC \sim \triangle DOA$

$\dfrac{BO}{OD} = \dfrac{CO}{OA} = \dfrac{a}{b}$; $\dfrac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle DOA}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2$

$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$



Отрезок, параллельный основаниям, проходящий через точку пересечения диагоналей

$OQ = OP = \dfrac{ab}{a + b}$; $PQ = \dfrac{2ab}{a + b}$

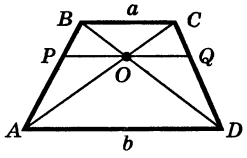


Таблица 6. Трапеция

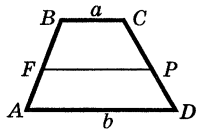
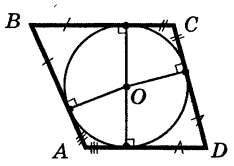
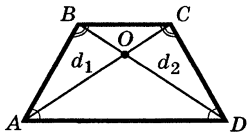
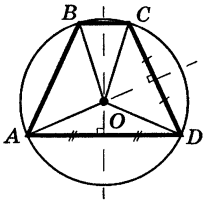
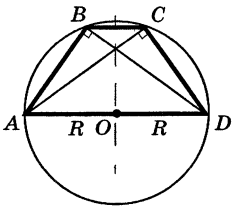
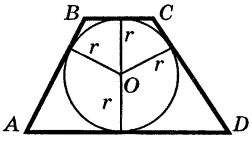
Отрезок, параллельный основаниям и делящий трапецию на две равновеликие части $FP = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$	 $S_{AFPD} = S_{FBCP}$; $FP \parallel BC$
В трапецию можно вписать окружность тогда и только тогда, когда сумма оснований равна сумме боковых сторон. $BC + AD = AB + CD$	
Равнобокая трапеция	
Равнобокой (равнобедренной) называется трапеция с равными боковыми сторонами	
Свойства равнобокой трапеции Диагонали равнобокой трапеции равны ($d_1 = d_2$). Углы при одном основании равнобокой трапеции равны. Только около равнобокой трапеции можно описать окружность; она совпадает с окружностью, описанной около любого треугольника с вершинами в вершинах трапеции. Ее центр лежит на серединном перпендикуляре к основаниям трапеции. Если центр описанной окружности лежит на основании трапеции, то ее диагональ перпендикулярна боковой стороне	 $AO = BO = CO = DO = R$ 
В равнобедренную трапецию можно вписать окружность, если боковая сторона равна средней линии	 $AB = \frac{BC + AD}{2}$; $2r = h$

Таблица 7. Окружность

Окружностью называется множество точек плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии от данной точки (*центра* окружности)

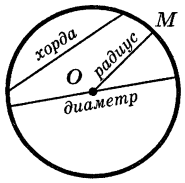
Отрезки в окружности

Для любой точки M окружности с центром O выполняется равенство: $OM = R$ (отрезок OM — *радиус* окружности).

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется *хордой*.

Хорда, проходящая через центр окружности, называется *диаметром* окружности (D).

$$D = 2R$$

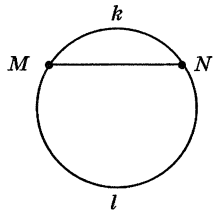


Длина окружности

$C = 2\pi R$

Дуга окружности

Часть окружности, заключенная между ее двумя точками, называется *дугой*



Две любые точки M и N окружности определяют на ней две дуги: $M\overset{\smile}{k}N$ и $M\overset{\smile}{l}N$. Любую из этих дуг *стягивает* хорда MN.

Равные дуги стягиваются равными хордами

Длина дуги

$A\overset{\smile}{C}B = R\alpha$, где

α — величина угла AOB в радианах;

$A\overset{\smile}{C}B = R\dfrac{\pi\varphi^\circ}{180^\circ}$, где φ — величина угла AOB в градусах

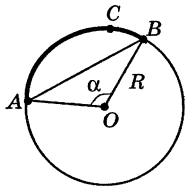
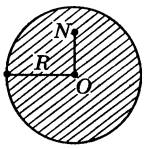
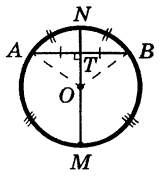
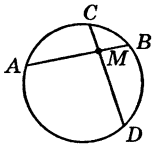
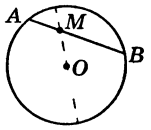
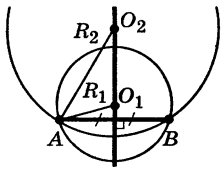


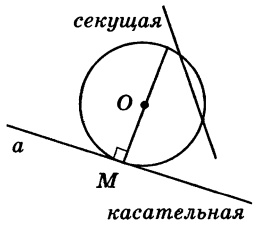
Таблица 7. Окружность

Круг	
Кругом называется часть плоскости, ограниченная окружностью. Для всех точек N круга выполняется неравенство $ON \leqslant R$	
Часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами, называется *сектором* круга. Любые два радиуса задают два сектора	
Часть круга, ограниченная дугой и стягивающей ее хордой, называется *сегментом*. Любая хорда делит круг на два сегмента. Сегмент, задаваемый диаметром, называется *полукругом*	
Диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду и стягиваемые ею дуги пополам. Если диаметр делит хорду, не являющуюся диаметром, пополам, то он ей перпендикулярен	 $MN \perp AB \Rightarrow AT = BT$
Если две хорды AB и CD имеют общую точку M, то $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. Для данной точки M внутри окружности произведение отрезков хорды, на которые делит ее данная точка, есть величина постоянная и равная: $(R + OM)(R - OM)$	  $AM \cdot MB = (R + OM)(R - OM) =$ $= R^2 - OM^2$
Центры всех окружностей, проходящих через две данные точки, лежат на серединном перпендикуляре к отрезку с концами в данных точках	

Прямая и окружность

Прямая, имеющая с окружностью одну общую точку, называется *касательной* к окружности; прямая, имеющая с окружностью две общие точки, — *секущей*.

Прямая касается окружности тогда и только тогда, когда диаметр, проходящий через общую точку прямой и окружности, перпендикулярен этой прямой



$OM \perp a$

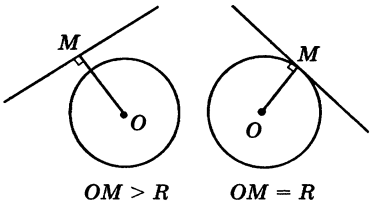
Если расстояние OM от центра окружности до прямой:

больше радиуса — прямая не имеет с окружностью общих точек,

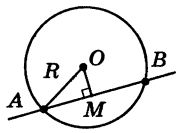
равно радиусу — прямая касается окружности,

меньше радиуса — окружность высекает на прямой хорду длиной

$$2 \cdot \sqrt{R^2 - OM^2}$$



$OM > R$ $\quad OM = R$

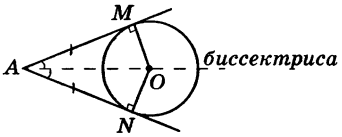


$OM < R$

Если окружность касается сторон данного угла, то:

центр окружности лежит на биссектрисе угла,

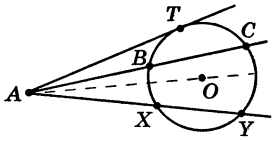
отрезки касательных равны между собой



$AM = AN$

Если из точки вне окружности к ней проведены касательная и секущая, то *квадрат длины отрезка касательной равен произведению всего отрезка секущей на его внешнюю часть.*

Произведения длин отрезков секущих, проведенных из одной точки, равны



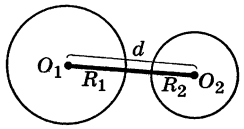
$AT^2 = AC \cdot AB = AY \cdot AX =$

$= (OA + R)(OA - R) = OA^2 - R^2$

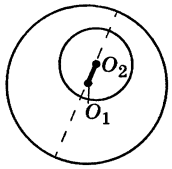
Таблица 7. Окружность

Две окружности

Если расстояние d между центрами двух окружностей больше суммы ($R_1 + R_2 < d$) или меньше разности ($R_1 - R_2 > d$) их радиусов, то окружности не имеют общих точек



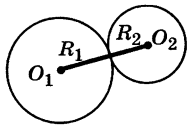
$R_1 + R_2 < d$



$R_1 - R_2 > d$

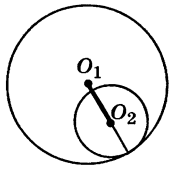
Если $R_1 + R_2 = d$ или $R_1 - R_2 = d$, то окружности касаются (внешним или внутренним образом)

Внешнее касание



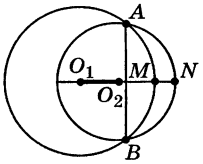
$R_1 + R_2 = d$

Внутреннее касание

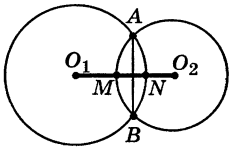


$R_1 - R_2 = d$

Если $R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$, то окружности имеют общую хорду



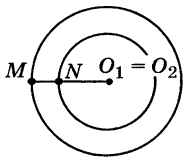
$MN = R_2 - R_1 + d$



$MN = R_1 + R_2 - d$

$AB = \dfrac{4S_{\triangle O_1AO_2}}{d}$

Две окружности, имеющие общий центр, называются *концентрическими*



$MN = R_1 - R_2$

$d = 0$

Углы в окружности

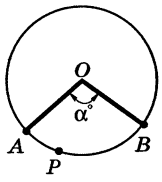
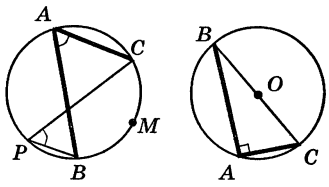
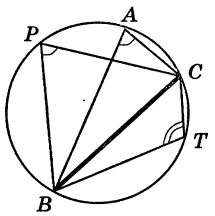
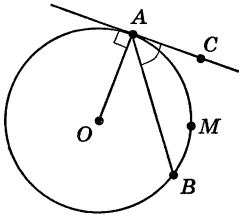
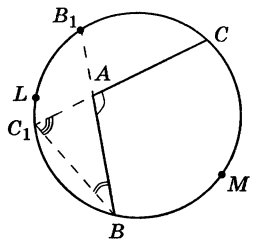
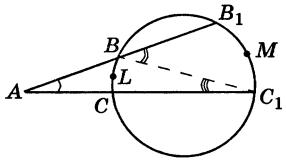
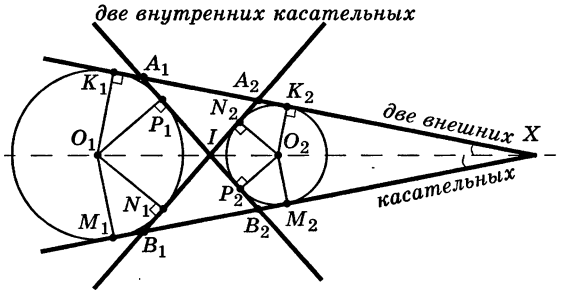
Центральным углом в окружности называется угол между двумя ее радиусами. Градусная мера центрального угла равна градусной мере дуги, на которую он опирается (измеряется дугой, на которую он опирается)	 $\angle AOB = \overset{\smile}{APB} = \alpha^\circ$
Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны содержат хорды, называется *вписанным углом*. Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается. Вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же *дугу*, равны	 $\angle BAC = \angle BPC = \frac{1}{2}\overset{\smile}{BMC}$ $\angle BAC = 90^\circ$
Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же *хорду*, либо равны, либо их сумма 180°	 $\angle BPC = \angle BAC$ $\angle BAC + \angle BTC = 180^\circ$
Угол между *хордой и касательной* измеряется *половиной* содержащейся в этом угле *дуги* окружности	 $\angle BAC = \frac{1}{2}\overset{\smile}{BMA}$

Таблица 7. Окружность

Угол с вершиной внутри окружности (угол между двумя хордами)	 $\angle BAC = \angle CC_1B + \angle B_1BC_1 =$ $= \frac{1}{2}(\overset{\smile}{BMC} + \overset{\smile}{B_1LC_1})$
Угол с вершиной вне окружности (угол между двумя секущими)	 $\angle BAC = \angle C_1BB_1 - \angle CC_1B =$ $= \frac{1}{2}(\overset{\smile}{B_1MC_1} - \overset{\smile}{BLC})$

Общие касательные двух окружностей

Если одна окружность лежит вне другой, то у них *четыре общих касательных.*

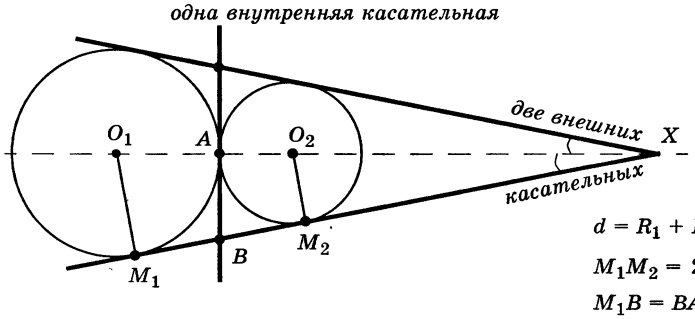


$d = O_1O_2 > R_1 + R_2$

$IO_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}d;$ $\qquad M_1M_2^2 + (R_1 - R_2)^2 = d^2$

$IO_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}d;$ $\qquad N_1N_2^2 + (R_1 + R_2)^2 = d^2$

Если одна окружность касается другой снаружи, то у них *три общих касательных.*

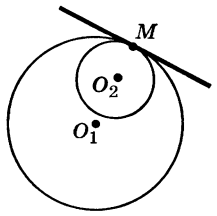


$d = R_1 + R_2$

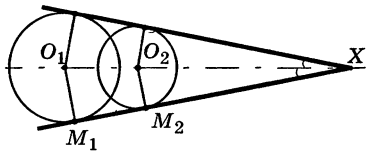
$M_1M_2 = 2\sqrt{R_1R_2}$

$M_1B = BA = BM_2$

Если одна окружность касается другой изнутри, то у них *одна общая касательная*



Если окружности пересекаются, то у них *две общих касательных* (две внешних касательных, внутренних касательных нет)



Если $O_1O_2 = d$, то

$M_1M_2^2 + (R_1 - R_2)^2 = d^2$

Если одна окружность лежит внутри другой, то *общих касательных нет*

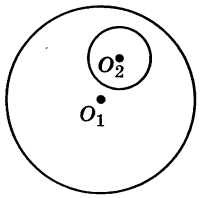
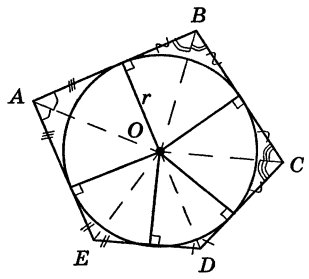


Таблица 7. Окружность

Вписанная окружность

Окружность называется *вписанной в многоугольник*, если она касается всех его сторон.
Ее центр должен принадлежать всем *биссектрисам внутренних углов* этого многоугольника. Ее радиус можно вычислить по формуле $r = \frac{S}{p}$, где S — площадь, а p — полупериметр многоугольника.
Не во всякий многоугольник можно вписать окружность



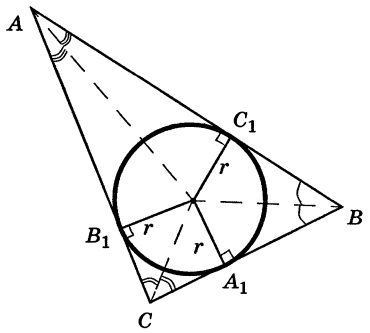
В любой треугольник можно вписать окружность и притом только одну. Ее центр лежит в точке пересечения биссектрис внутренних углов, а радиус может быть вычислен по формулам:

$r = \frac{S}{p}$,

$r = (p - a)\operatorname{tg}\frac{A}{2} =$

$= (p - b)\operatorname{tg}\frac{B}{2} = (p - c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}$,

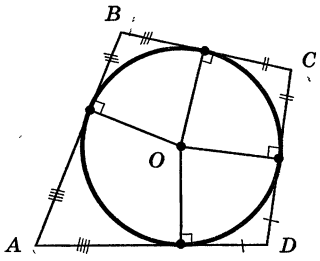
где S — площадь треугольника, а p — его полупериметр



$AB_1 = AC_1 = p - a$
$BC_1 = BA_1 = p - b$
$CA_1 = CB_1 = p - c$

$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ — полупериметр

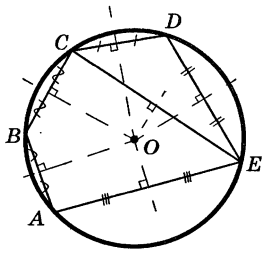
В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны



$AB + CD = BC + AD$

Описанная окружность

Окружность называется *описанной около многоугольника*, если она проходит через все его вершины. Ее центр лежит на всех *серединных перпендикулярах* сторон (и диагоналей) этого многоугольника. Радиус вычисляется как радиус окружности, описанной около треугольника, определенного любыми тремя вершинами данного многоугольника



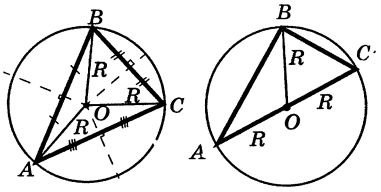
$OA = OB = OC = OD = OE = R$

Около любого треугольника можно описать окружность и притом только одну. Ее центр лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника, а радиус вычисляется по формулам:

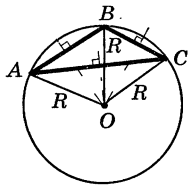
$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C},$$

$$R = \frac{abc}{4S},$$

где a, b, c — длины сторон треугольника, S — его площадь

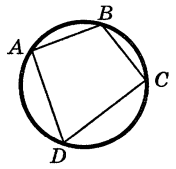


$\angle B \leqslant 90^\circ \Rightarrow \angle AOC \leqslant 2B$



$\angle B > 90^\circ \Rightarrow \angle AOC = 180^\circ - 2B$

Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180°



$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$

Теорема Птолемея
Во вписанном четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений его противоположных сторон.
$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$

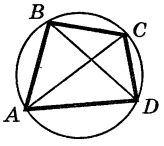


Таблица 8. Площади

Площади равных фигур равны.
Если фигура составлена из нескольких фигур, не имеющих общих внутренних точек, то ее площадь равна сумме площадей этих фигур.
Фигуры, имеющие равные площади, называются *равновеликими*

Площадь квадрата

$S = a^2$

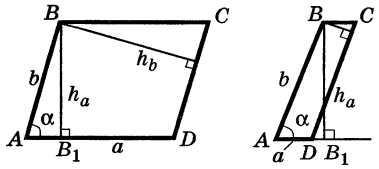
Площадь прямоугольника

$S = ab$

Площадь параллелограмма

$S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$

$S = ab \sin \alpha$



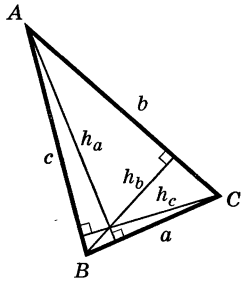
Площадь треугольника

Основные формулы

$S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c$

$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B =$

$= \frac{1}{2} bc \sin A$



Формула Герона

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где

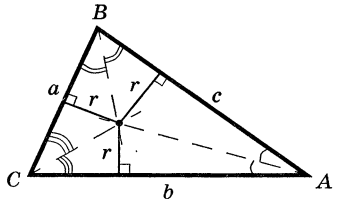
$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ — полупериметр

Дополнительные формулы

$S = rp$, где r — радиус вписанной окружности.

$S = \frac{abc}{4R}$, где R — радиус описанной окружности.

$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$



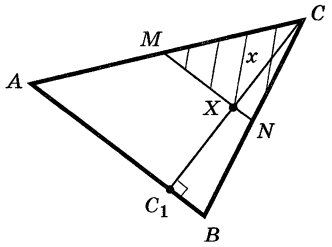
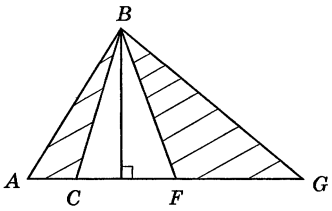
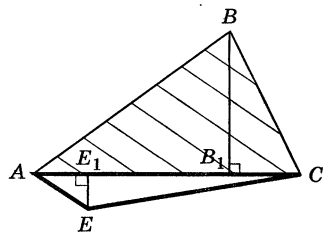
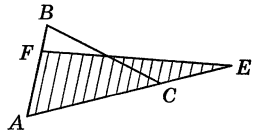
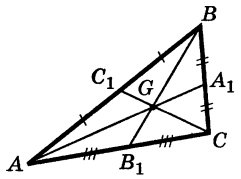
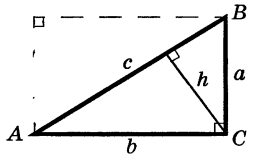
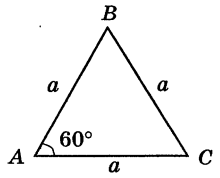
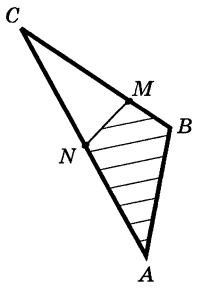
Некоторые соотношения площадей треугольников	
Площади подобных треугольников (фигур) относятся как квадраты сходственных элементов (сторон, медиан, высот и т. п.), их отношение равно квадрату коэффициента подобия	 $\triangle ABC \sim \triangle MNC$ $CC_1 = h$; $CX = x$; $AB = c$ $\frac{S_{\triangle MNC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{x^2}{h^2} = \frac{MN^2}{c^2} = k^2$
Площади треугольников, имеющих равные высоты (общую высоту), относятся как стороны, соответствующие этим высотам	 $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle BFG} = AC : FG$
Площади треугольников, имеющих равные стороны, относятся как соответствующие этим сторонам высоты	 $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle AEC} = BB_1 : EE_1$
Площади треугольников, имеющих равный угол (или общий угол), относятся как произведения сторон, содержащих этот угол	 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AFE}} = \frac{AB \cdot AC}{AF \cdot AE}$

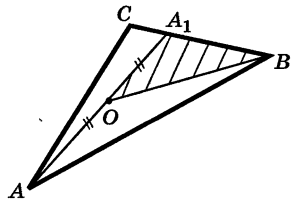
Таблица 8. Площади

Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника. Три медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников	 $S_{\triangle ABB_1} = S_{\triangle B_1BC}$ $S_{\triangle ACC_1} = S_{\triangle C_1CB}$ $S_{\triangle ACA_1} = S_{\triangle A_1AB}$ $S_{\triangle AGB_1} = S_{\triangle B_1GC} = S_{\triangle CGA_1} =$ $= S_{\triangle A_1GB} = S_{\triangle BGC_1} = S_{\triangle C_1GA}$
Площадь *прямоугольного* треугольника. $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch$ $h = \frac{ab}{c}$	
Площадь *правильного* треугольника. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	

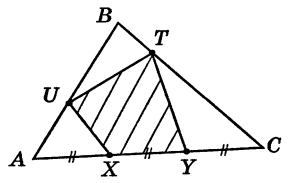
Примеры решения задач на нахождение площадей

Пример 1. Дано: $CM = 2MB$; $CN = NA$; $S_{\triangle ABC} = S$. Найти: S_{MBAN}. Решение: $\frac{S_{\triangle CMN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{CM \cdot CN}{CB \cdot CA} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ $\Rightarrow S_{\triangle CMN} = \frac{1}{3}S \Rightarrow S_{MBAN} = S_{\triangle ABC} -$ $- S_{\triangle CMN} = S - \frac{1}{3}S = \frac{2}{3}S$	

Пример 2.
Дано: $3CA_1 = A_1B$; $AO = OA_1$; $S_{\triangle ABC} = S$.
Найти: $S_{\triangle OBA_1}$.
Решение:
$\triangle ABA_1$ и $\triangle ABC$ имеют общую высоту, проведенную из вершины $A \Rightarrow \dfrac{S_{\triangle ABA_1}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{A_1B}{CB} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow S_{\triangle ABA_1} = \dfrac{3}{4}S$.
BO — медиана $\triangle ABA_1 \Rightarrow S_{\triangle OBA_1} = \dfrac{3}{8}S$



Пример 3.
Дано:
$AU = \dfrac{1}{2}BU$; $BT = \dfrac{1}{2}CT$; $AX = XY = YC$;
$S_{\triangle ABC} = S$.
Найти: S_{XUTY}.
Решение:
$S_{\triangle ATB} = \dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3}S$ (общая высота).
$S_{\triangle BTU} = \dfrac{2}{3}S_{\triangle ABT} = \dfrac{2}{9}S$ (общая высота).
Аналогично, $S_{\triangle TYC} = \dfrac{2}{9}S$; $S_{\triangle AXU} = \dfrac{1}{9}S \Rightarrow S_{XUTY} = \dfrac{4}{9}S$



Пример 4.
Дано: $YX \parallel AC$; $XZ \parallel AB$; $S_{\triangle BXY} = S_1$; $S_{\triangle CXZ} = S_2$.
Найти: S_{AYXZ}.
Решение:
$\triangle XYB \sim \triangle CZX \Rightarrow \dfrac{CZ}{XY} = \sqrt{\dfrac{S_2}{S_1}}$.
$S_{AYXZ} = 2 \cdot S_{\triangle AXZ} = 2 \cdot \dfrac{AZ}{ZC} \cdot S_{\triangle CXZ} = 2 \cdot \dfrac{XY}{CZ} \cdot S_2 = 2 \cdot \sqrt{\dfrac{S_1}{S_2}} \cdot S_2 = 2\sqrt{S_1 S_2}$

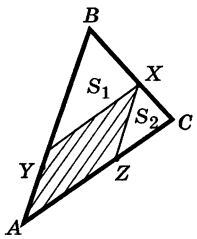
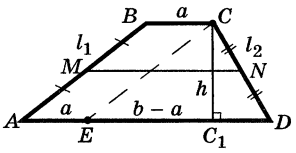


Таблица 8. Площади

Площадь трапеции

$S = \dfrac{a+b}{2} \cdot h = MN \cdot h,$

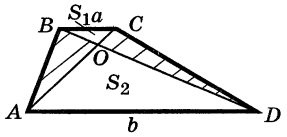
где a и b — длины оснований, h — высота, MN — средняя линия



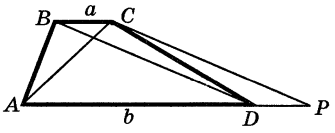
Пусть заданы основания a, b и боковые стороны $AB = l_1$, $CD = l_2$.
Проведем $CE \parallel AB$.
Тогда $AE = a$, $ED = b - a$, $CE = l_1$.

$CC_1 = h = \dfrac{2S_{\triangle ECD}}{b-a}$, $S_{\triangle ECD}$ вычисляется по формуле Герона

Соотношение площадей фигур, связанных с трапецией



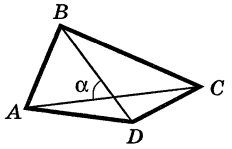
$\dfrac{S_1}{S_2} = \left(\dfrac{BC}{AD}\right)^2$; $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD} = \sqrt{S_1 S_2}$; $S_{\triangle DOC} = \dfrac{b}{a} S_1 = \dfrac{a}{b} S_2$



$CP \parallel BD \Rightarrow S_{ABCD} = S_{\triangle ACP}$

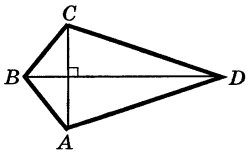
Площадь произвольного четырехугольника

$S = \dfrac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$

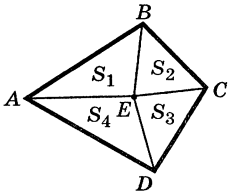


Площадь ромбоида

$S = \dfrac{1}{2} AC \cdot BD$



Площадь произвольного многоугольника (триангуляция)
$S_{ABCD} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$,
где E — произвольная точка внутри многоугольника



Площадь правильного n-угольника

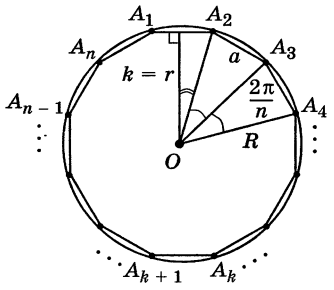
$$S = \frac{1}{2}rP$$

$$S = \frac{nR^2}{2} \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$$

$$S = nr^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$$

$$S = \frac{na^2}{4} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$$

$S = \frac{1}{2}kP$; k — *апофема*



$A_1A_2 = \ldots = A_nA_1 = a$
$P = an$ — периметр
R — радиус описанной окружности
r — радиус вписанной окружности

Площади правильных многоугольников

$$S_6 = \frac{6R^2}{2}\sin\frac{2\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$$

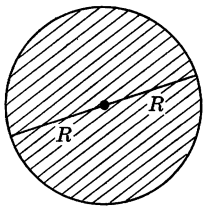
$$S_8 = \frac{8R^2}{2}\sin\frac{2\pi}{8} = 2R^2\sqrt{2}$$

$$S_{12} = \frac{12R^2}{2}\sin\frac{2\pi}{12} = 3R^2$$

Площадь круга

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi}{4}D^2 = \frac{1}{2}RC$$

C — длина окружности
$D = 2R$ — диаметр



$C = 2\pi R$

Площадь сектора

$$S = \frac{1}{2}R^2\frac{\pi\varphi^\circ}{180^\circ}$$

$$S = \frac{1}{2}R^2\alpha$$

$$\left(\alpha \text{ радиан } = \frac{\pi\varphi^\circ}{180^\circ}\right)$$

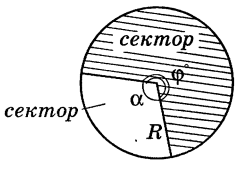
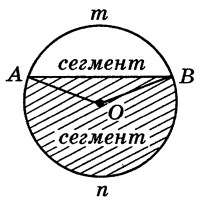
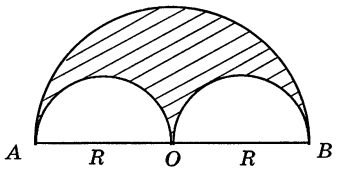
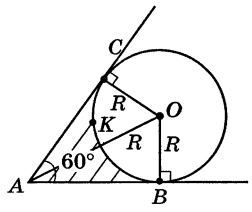
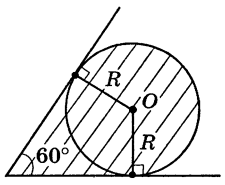


Таблица 8. Площади

Площадь сегмента $S = \frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)$, где α — радианная мера дуги $A\breve{m}B$ или $A\breve{n}B$ (соответственно для сегментов AmB или AnB)	 $S_{\text{сегм}AmB} = S_{\text{сек}AmB} - S_{\triangle AOB}$ $S_{\text{сегм}AnB} = S_{\text{сек}AnB} + S_{\triangle AOB}$
Пример 1. Площадь большого полукруга $\frac{\pi R^2}{2}$. Площадь каждого из малых полукругов $\frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{2}$. Площадь заштрихованной фигуры $S = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi R^2}{8} = \frac{3\pi R^2}{8}$	
Пример 2. $AO = 2R$; $AC = R\sqrt{3}$ (по т. Пифагора). Площадь $ACOB = 2S_{\triangle ACO} =$ $= R^2\sqrt{3}$. Площадь сектора $COBK = \frac{1}{2}R^2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi R^2}{3}$. Площадь заштрихованной фигуры $S = R^2\sqrt{3} - \frac{\pi R^2}{3} = R_2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$	
Пример 3. $S = R^2\left(\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$	

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Таблица 9. Основные аксиомы и определения

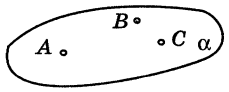
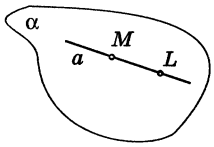
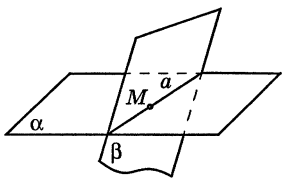
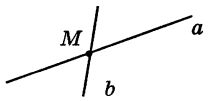
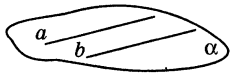
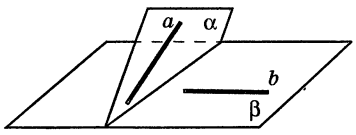
Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит одна и только одна плоскость	
Если две точки прямой лежат в плоскости, то и вся прямая лежит в этой плоскости	 $M \in a;\ L \in a$ $M \in \alpha;\ L \in \alpha$ $\Rightarrow a \subset \alpha$
Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку. В любой плоскости выполняются аксиомы планиметрии	 $M \in \alpha;\ M \in \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha \cap \beta = a \\ M \in a \\ a \ni M \end{cases}$
Две прямые, имеющие только одну общую точку, называются *пересекающимися*	 $a \cap b = M$
Две прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общих точек, называются *параллельными*	 $a \parallel b \Rightarrow (a \subset \alpha;\ b \subset \alpha)$
Две прямые, не лежащие в одной плоскости, называются *скрещивающимися*	 $a \dashv b$

Таблица 9. Основные аксиомы и определения

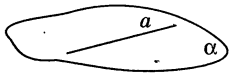
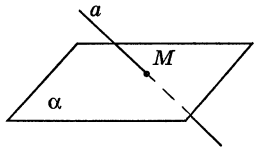
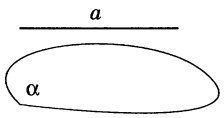
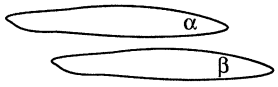
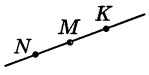
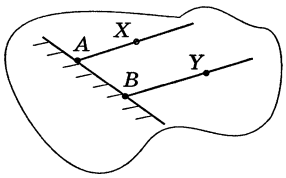
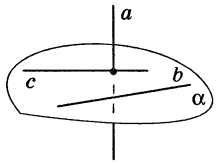
Прямая, все точки которой принадлежат плоскости, называется прямой, *лежащей* в этой плоскости	 $a \subset \alpha$
Прямая *пересекает плоскость*, если у них есть только одна общая точка	 $a \cap \alpha = M$
Прямая называется *параллельной плоскости*, а плоскость — параллельной прямой, если они не имеют общих точек	 $a \parallel \alpha$; $\alpha \parallel a$
Две плоскости, не имеющие общих точек, называются *параллельными*	 $\alpha \parallel \beta$
Два луча называются *сонаправленными*, если один из них является частью другого, или если они лежат на параллельных прямых в одной полуплоскости относительно прямой, проходящей через начала лучей	 *NM* и *NK* сонаправлены  *AX* и *BY* сонаправлены *AX* ∥ *BY*
Прямая называется *перпендикулярной плоскости* (а плоскость прямой), если прямая *перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости*	 $a \perp \alpha \Rightarrow (a \perp c;\ a \perp b)$

Таблица 10. Теоремы стереометрии

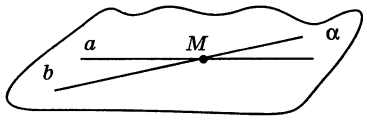
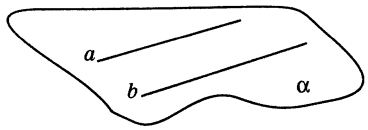
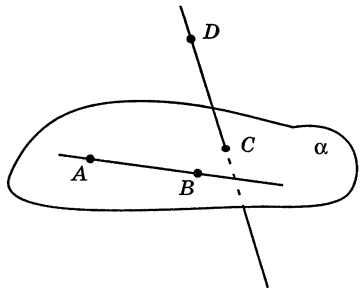
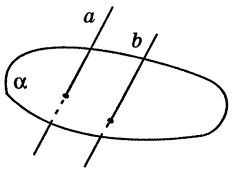
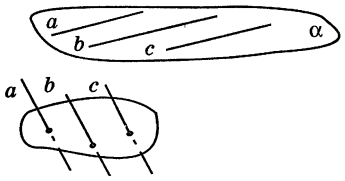
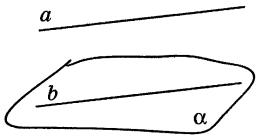
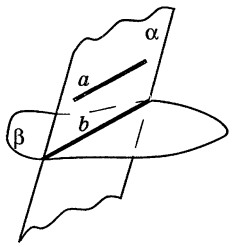
Через прямую и не лежащую на ней точку проходит одна и только одна плоскость	 $M \notin a \Rightarrow \begin{cases} a \subset \alpha \\ M \in \alpha \end{cases}$
Через две пересекающиеся прямые проходит одна и только одна плоскость	 $a \cap b = M \Rightarrow \begin{cases} a \subset \alpha \\ b \subset \alpha \end{cases}$
Через две параллельные прямые проходит одна и только одна плоскость	 $a \parallel b \Rightarrow \begin{cases} a \subset \alpha \\ b \subset \alpha \end{cases}$
Если точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, то прямые AB и CD (AC и BD, AD и BC) скрещиваются. Если прямая AB лежит в некоторой плоскости, а прямая CD пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на AB, то прямые AB и CD скрещиваются	 $\left.\begin{matrix} A, B, C \in \alpha \\ D \notin \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} AB \text{ -- } CD \\ AC \text{ -- } BD \\ AD \text{ -- } BC \end{matrix}$

Таблица 10. Теоремы стереометрии

Если одна из параллельных прямых пересекает плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость	 $\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ a \cap \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow b \cap \alpha$
Признак параллельности прямых Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой	 $\left.\begin{array}{l} a \parallel c \\ b \parallel c \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel b$
Признак параллельности прямой и плоскости Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в плоскости, то она параллельна этой плоскости	 $\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ b \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel \alpha$
Если одна из пересекающихся плоскостей проходит через прямую, параллельную другой плоскости, то линия пересечения плоскостей параллельна этой прямой	 $\left.\begin{array}{l} \alpha \cap \beta = b \\ a \subset \alpha \\ a \parallel \beta \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel b$

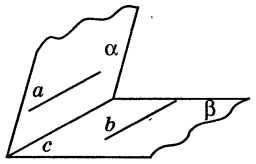
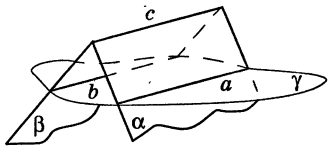
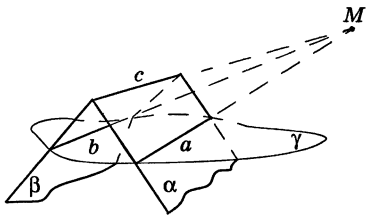
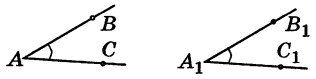
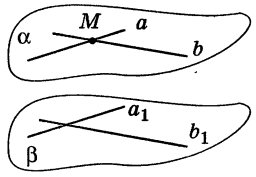
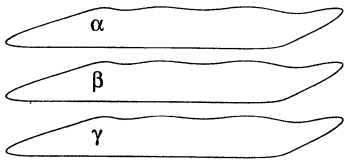
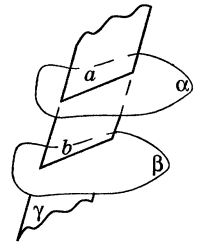
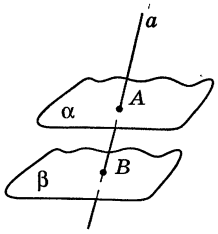
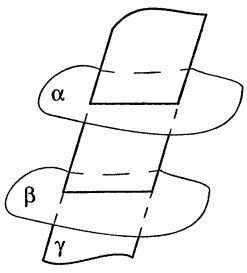
Если каждая из пересекающихся плоскостей проходит через одну из двух параллельных прямых, то прямая пересечения плоскостей параллельна этим прямым	 $c = \alpha \cap \beta$ $a \subset \alpha$ $b \subset \beta$ $a \parallel b$ $\Rightarrow \begin{cases} a \parallel c \\ b \parallel c \end{cases}$
Если две пересекающиеся плоскости пересечены третьей плоскостью по параллельным прямым, то линия их пересечения параллельна этим прямым	 $\alpha \cap \beta = c$ $\gamma \cap \alpha = a$ $\gamma \cap \beta = b$ $a \parallel b$ $\Rightarrow \begin{matrix} c \parallel a \\ c \parallel b \end{matrix}$
Если две пересекающиеся плоскости пересечены третьей плоскостью по пересекающимся прямым, то точка их пересечения лежит на линии пересечения плоскостей	
Углы с соответственно сонаправленными сторонами равны	$\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$ 
Признаки параллельности плоскостей Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны	 $a \cap b = M$ $a \subset \alpha;\ b \subset \alpha$ $a \parallel a_1;\ b \parallel b_1$ $a_1 \subset \beta;\ b_1 \subset \beta$ $\Rightarrow \alpha \parallel \beta$

Таблица 10. Теоремы стереометрии

Если две плоскости параллельны третьей, то они параллельны между собой	 $\left.\begin{matrix}\alpha \parallel \gamma \\ \beta \parallel \gamma\end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$
Свойства параллельных плоскостей Если плоскость пересекает две параллельные плоскости, то прямые пересечения параллельны	 $\left.\begin{matrix}\gamma \cap \alpha = a \\ \gamma \cap \beta = b \\ \alpha \parallel \beta\end{matrix}\right\} \Rightarrow a \parallel b$
Если прямая пересекает одну из параллельных плоскостей, то она пересекает и другую плоскость	 $\left.\begin{matrix}a \cap \alpha \\ \alpha \parallel \beta\end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cap \beta$
Если плоскость пересекает одну из параллельных плоскостей, то она пересекает и другую плоскость	 $\left.\begin{matrix}\alpha \parallel \beta \\ \gamma \cap \alpha\end{matrix}\right\} \Rightarrow \gamma \cap \beta$

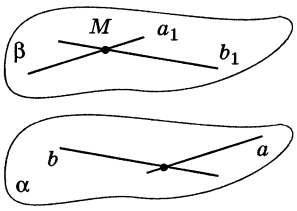
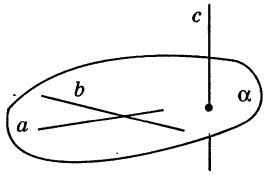
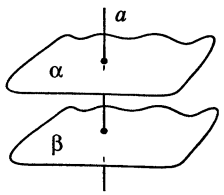
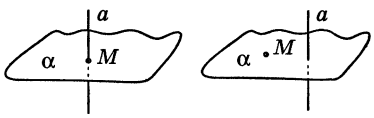
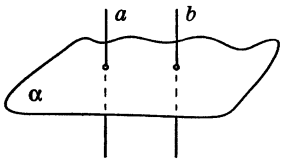
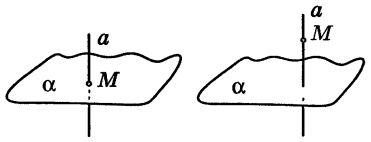
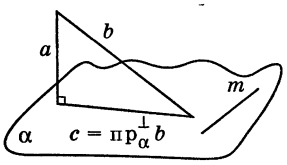
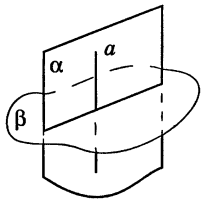
Через точку, не лежащую на плоскости, можно провести одну и только одну плоскость, параллельную данной плоскости	 $\left.\begin{array}{l} M \notin \alpha \\ a \subset \alpha \\ b \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow$ существует $\left\{\begin{array}{l} a_1 \parallel a \\ b_1 \parallel b \\ a_1 \cap b_1 = M \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ существует единственная плоскость $\beta \parallel \alpha$; $M \in \beta$
Признак перпендикулярности прямой и плоскости Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна самой плоскости	 $\left.\begin{array}{l} a \cap b \\ a \subset \alpha;\ b \subset \alpha \\ c \perp a \\ c \perp b \end{array}\right\} \Rightarrow c \perp \alpha$
а) Если прямая перпендикулярна одной из параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой.	а) $\left.\begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ a \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp \beta$ 
б) Если две плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то эти плоскости параллельны.	б) $\left.\begin{array}{l} \alpha \perp a \\ \beta \perp a \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$ 
в) Через точку проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой	в) $\left.\begin{array}{l} M \in a \\ M \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow$ существствует единственная плоскость $\alpha \perp a \Leftarrow \left\{\begin{array}{l} M \notin a \\ M \in \alpha \end{array}\right.$

Таблица 10. Теоремы стереометрии

а) Если одна из параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости	а) $\left.\begin{matrix} a \parallel b \\ a \perp \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow b \perp \alpha$ 
б) Если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то эти прямые параллельны.	б) $\left.\begin{matrix} a \perp \alpha \\ b \perp \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \parallel b$ 
в) Через точку проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости	в) $M \in \alpha \Rightarrow$ существует единственная прямая $a \perp \alpha, M \in a \Leftarrow M \notin \alpha$
Теорема о трех перпендикулярах Если (ортогональная) проекция наклонной перпендикулярна прямой на плоскости, то и сама наклонная перпендикулярна этой прямой. Если наклонная перпендикулярна некоторой прямой плоскости, то и (ортогональная) проекция наклонной на эту плоскость перпендикулярна этой прямой	 $\left.\begin{matrix} a \perp \alpha \\ b \cap \alpha \\ b \not\perp \alpha \\ c = \text{пр}_\alpha^{\perp} b \\ m \subset \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow (c \perp m) \Leftrightarrow (b \perp m)$
Если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости	 $\left.\begin{matrix} a \subset \alpha \\ a \perp \beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta$

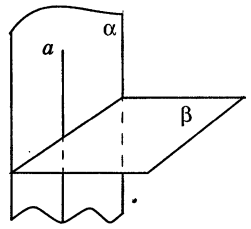
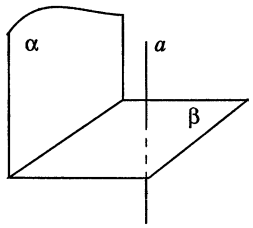
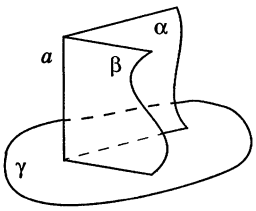
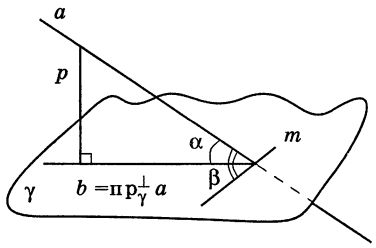
Перпендикуляр к одной из двух перпендикулярных плоскостей либо лежит в другой плоскости, либо ей параллелен	 $\left.\begin{array}{l}\alpha \perp \beta \\ a \perp \beta\end{array}\right\} \Rightarrow a \subset \alpha$ или $a \parallel \alpha$ 
Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей плоскости, то и линия их пересечения перпендикулярна этой плоскости	 $\left.\begin{array}{l}\alpha \cap \beta = a \\ \alpha \perp \gamma \\ \beta \perp \gamma\end{array}\right\} \Rightarrow a \perp \gamma$
Угол, образованный наклонной и плоскостью, не больше угла между этой наклонной и любой прямой плоскости. Углом между наклонной и плоскостью называется угол между наклонной и ее ортогональной проекцией на эту плоскость	 $p \perp \gamma$ $a \cap \gamma$ $\qquad b = \text{пр}_\gamma^\perp a$ $a \not\perp \gamma$ $m \subset \gamma$ $\angle (a, \gamma) = \alpha = \angle (a, b) \leqslant \beta = \angle (a, m)$

Таблица 10. Теоремы стереометрии

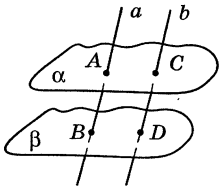
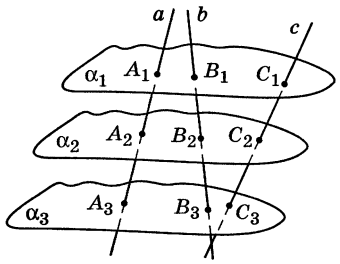
Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны	 $\left.\begin{matrix}\alpha \parallel \beta \\ a \parallel b\end{matrix}\right\} \Rightarrow AB = CD$
Теорема Фалеса Параллельные плоскости, пересекающие прямые и отсекающие на одной из них равные отрезки, отсекают равные отрезки и на других прямых	 $\alpha_1 \parallel \alpha_2 \parallel \alpha_3;\ A_1A_2 = A_2A_3 \Rightarrow$ $\Rightarrow B_1B_2 = B_2B_3;\ C_1C_2 = C_2C_3$

Таблица 11. Расстояния в пространстве

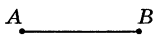
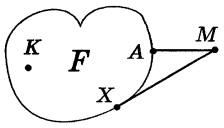
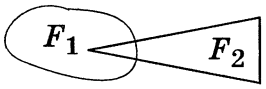
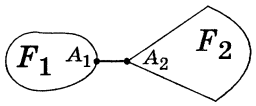
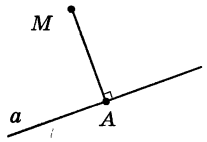
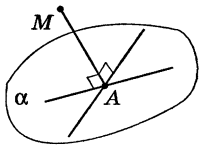
Расстояние *между точками* A и B равно длине отрезка AB. Расстояние есть неотрицательное число	 $\rho(A, B) = AB \geqslant 0$
Расстояние *между точкой и фигурой* (множеством точек) равно нулю, если точка принадлежит фигуре, или длине наименьшего отрезка, одним из концов которого является данная точка, а другим — ближайшая точка фигуры (если такой отрезок существует)	 $X \in F$; $A \in F$ $\rho(M, F) = MA$ $K \in F$; $\rho(K, F) = 0$ $MX \geqslant MA$
Расстояние *между двумя фигурами* (множествами точек) равно нулю, если фигуры имеют общую точку, и расстоянию между ближайшими точками этих фигур, если такие точки существуют	 $\rho(F_1, F_2) = 0$  $\rho(F_1, F_2) = A_1A_2$ $A_1 \in F_1$; $A_2 \in F_2$
Расстояние *от точки до прямой*, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, проведенного из этой точки на прямую	 $M \notin a$ $\rho(M, a) = MA$ $A \in a$; $MA \perp a$
Расстояние *от точки до плоскости*, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость	 $M \notin \alpha$ $\rho(M, \alpha) = MA$ $A \in \alpha$; $MA \perp \alpha$

Таблица 11. Расстояния в пространстве

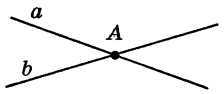
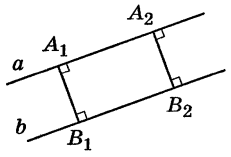
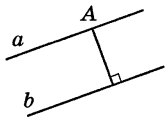
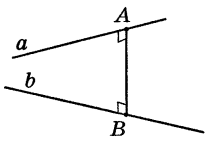
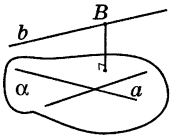
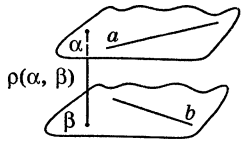
Расстояние *между двумя пересекающимися прямыми* равно нулю	 $a \cap b = A$; $\rho(a, b) = 0$
Расстояние *между двумя параллельными прямыми* равно длине отрезка их общего перпендикуляра	 $a \parallel b$; $\rho(a, b) = A_1B_1 = A_2B_2$ $A_1 \in a$; $A_2 \in a$; $B_1 \in b$; $B_2 \in b$ $A_1B_1 \perp a$; $A_2B_2 \perp a$
Расстояние *между двумя параллельными прямыми* равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до другой прямой	 $a \parallel b$; $A \in a \Rightarrow \rho(a, b) = \rho(A, b)$
Расстояние *между двумя скрещивающимися прямыми* равно длине отрезка их общего перпендикуляра (такой отрезок единственный)	 $a \dashv b$ $\rho(a, b) = AB$, $A \in a$; $B \in b$; $AB \perp a$; $AB \perp b$
Расстояние *между двумя скрещивающимися прямыми* равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до плоскости, проходящей через вторую прямую параллельно первой, или расстоянию между двумя параллельными плоскостями, содержащими эти прямые	 $(a \dashv b \Rightarrow \alpha \parallel b$; $a \subset \alpha) \Rightarrow \rho(a, b) =$ $= \rho(b, \alpha)$  $a \dashv b$; $a \subset \alpha$; $b \subset \beta \Rightarrow \rho(a, b) = \rho(\alpha, \beta)$

Таблица 11. Расстояния в пространстве

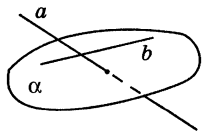
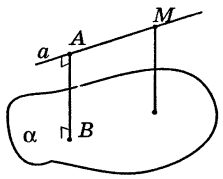
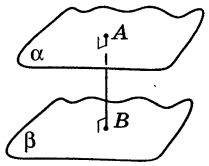
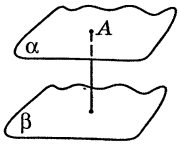
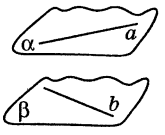
Расстояние *от прямой до непараллельной ей плоскости* равно нулю	 $a \nparallel \alpha \Rightarrow \rho(a, \alpha) = 0$ $b \subset \alpha \Rightarrow \rho(b, \alpha) = 0$
Расстояние *между прямой и параллельной ей плоскостью* равно длине отрезка их общего перпендикуляра. Расстояние *от прямой до параллельной ей плоскости* равно расстоянию от любой точки этой прямой до плоскости	 $a \parallel \alpha;\ A \in a;\ B \in \alpha$ $AB \perp \alpha;\ AB \perp a \Leftrightarrow$ $\rho(a, \alpha) = AB$ $\Leftrightarrow M \in a;\ a \parallel \alpha$ $\rho(a, \alpha) = \rho(M, \alpha)$
Расстояние *между двумя параллельными плоскостями* равно длине отрезка их общего перпендикуляра	 $\alpha \parallel \beta;\ A \in \alpha;\ B \in \beta;\ AB \perp \alpha;\ AB \perp \beta$ $\rho(\alpha, \beta) = AB$
Расстояние *между двумя параллельными плоскостями* равно расстоянию между точкой одной из этих плоскостей и другой плоскостью	 $\alpha \parallel \beta,\ A \in \alpha$ $\rho(\alpha, \beta) = \rho(A, \beta)$
Расстояние *между двумя параллельными плоскостями* равно расстоянию между любой парой скрещивающихся прямых, лежащих в этих плоскостях	 $\alpha \parallel \beta;\ a \subset \alpha;\ b \subset \beta;\ a \nparallel b$ $\rho(\alpha, \beta) = \rho(a, b)$

Таблица 11. Расстояния в пространстве

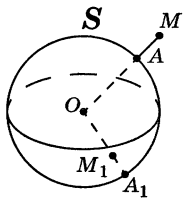
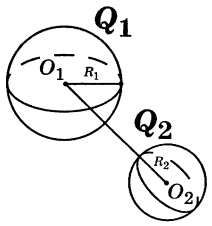
Расстояние *от точки до сферы* равно модулю разности расстояния от этой точки до центра сферы и радиуса сферы	 $\rho(M, S) = MA = MO - R;\ A \in S$ $\rho(M_1, S) = M_1A_1 = R - M_1O; A_1 \in S$ $\rho(M, S) = \lvert MO - R \rvert$
Расстояние *между двумя шарами*, не имеющими общих точек, равно разности расстояния между их центрами и суммы их радиусов	 Q_1, Q_2 не имеют общих точек $\rho(Q_1, Q_2) = O_1O_2 - (R_1 + R_2)$

Таблица 12. Множества точек пространства, связанные с расстояниями

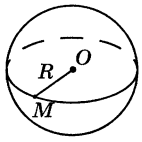
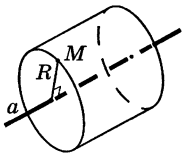
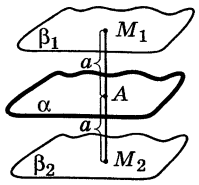
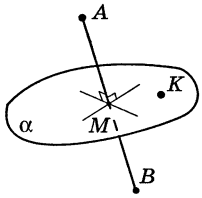
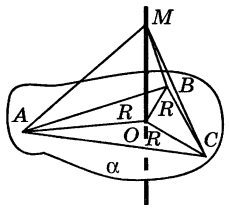
Множество точек пространства, *удаленных от данной точки* на данное расстояние R, есть *сфера* с центром в данной точке радиуса R ($R > 0$)	
Множество точек пространства, *удаленных от данной прямой* на данное расстояние R, есть *цилиндрическая поверхность* ($R > 0$)	
Множество точек пространства, *удаленных от данной плоскости* на данное расстояние a, есть две параллельные ей плоскости ($a > 0$)	 $\alpha \parallel \beta_1$; $\alpha \parallel \beta_2$; $AM_1 = AM_2 = a$ $M_1M_2 \perp \alpha$; $A \in \alpha$; $A \in M_1M_2$
Множество точек пространства, *равноудаленных от двух точек*, есть плоскость, проходящая через середину отрезка с концами в этих точках перпендикулярно прямой, проходящей через эти точки. В этой плоскости лежат центры всех сфер, проходящих через данные точки	 $AM = MB$; $AK = KB$ $AB \perp \alpha$
Множество точек пространства, *равноудаленных от трех точек*, не лежащих на одной прямой, есть перпендикуляр к плоскости этих точек, проходящий через центр окружности, описанной около треугольника с вершинами в этих точках. На этом перпендикуляре лежат центры всех сфер, проходящих через данные точки	 $OA = OB = OC$ $MO \perp \alpha$ $\Rightarrow MA = MB = MC$

Таблица 12. Множества точек пространства

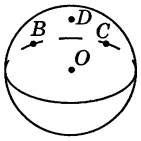
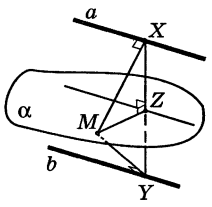
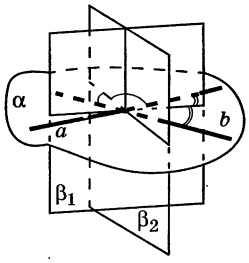
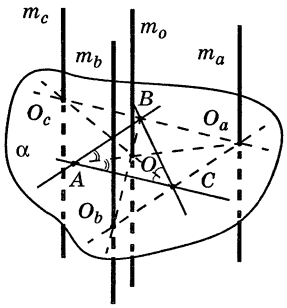
Множество точек пространства, *равноудаленных от четырех точек*, не лежащих в одной плоскости, есть единственная точка — *центр сферы, проходящей через данные четыре точки*	
Множество точек пространства, *равноудаленных от двух параллельных прямых*, есть плоскость, проходящая через середину отрезка общего перпендикуляра этих прямых и ему перпендикулярная. В этой плоскости лежат центры сфер, касающихся этих прямых	 $a \parallel b$; $X \in a$; $Y \in b$; $M \in \alpha$ $XY \perp \alpha$; $XY \perp a$; $XY \perp b$ $\Rightarrow$ $XZ = ZY$ $\Rightarrow MX = MY$
Множество точек пространства, *равноудаленных от двух пересекающихся прямых*, есть две плоскости, перпендикулярные плоскости этих прямых и проходящие через биссектрисы углов, образованных этими прямыми	 $\beta_1 \perp \alpha$; $\beta_2 \perp \alpha$
Множество точек пространства, *равноудаленных от прямых, содержащих стороны треугольника*, есть четыре прямые, перпендикулярные плоскости треугольника, проходящие соответственно через центр вписанной и каждый из трех центров вневписанных для этого треугольника окружностей	 $m_a \perp \alpha$; $m_b \perp \alpha$ $m_c \perp \alpha$; $m_0 \perp \alpha$

Таблица 12. Множества точек пространства

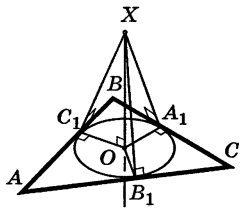
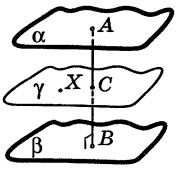
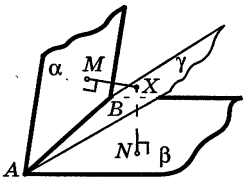
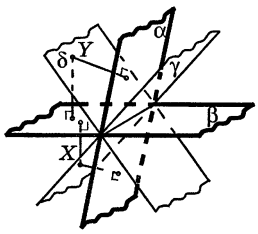
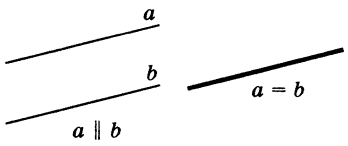
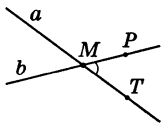
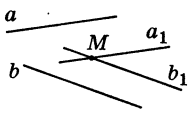
Множество точек пространства, *равноудаленных от сторон данного треугольника,* есть перпендикуляр к плоскости треугольника, проходящий через центр вписанной в него окружности. На этом перпендикуляре лежат центры всех шаров, касающихся сторон треугольника	 $XO \perp (ABC)$ $OC_1 = OA_1 = OB_1$ $OC_1 \perp AB;\ OA_1 \perp BC;\ OB_1 \perp AC$ } $\Rightarrow$ $\Rightarrow XC_1 \perp AB;\ XB_1 \perp AC;$ $XA_1 \perp BC;\ XA_1 = XB_1 = XC_1$
а) Множество точек пространства, *равноудаленных от двух параллельных плоскостей,* есть параллельная им плоскость, проходящая через середину отрезка их общего перпендикуляра. В ней лежат центры всех шаров, касающихся обеих плоскостей. б) Множество точек двугранного угла, *равноудаленных от граней* этого угла есть биссекторная полуплоскость этого угла. В ней лежат центры всех шаров, вписанных в этот угол	 $\alpha \parallel \beta;\ \gamma \parallel \alpha;\ AB \perp \alpha;\ AC = CB$ $X \in \gamma \Rightarrow \rho(X, \alpha) = \rho(X, \beta)$  $\angle (M, AB, X) = \angle (X, AB, N)$ $X \in \gamma \Rightarrow \rho(X, \alpha) = \rho(X, \beta)$
Множество точек пространства, *равноудаленных от двух пересекающихся плоскостей,* есть две биссекторные плоскости, проходящие через прямую пересечения этих плоскостей и делящие образованные двугранные углы пополам. В них лежат центры всех шаров, касающихся обеих плоскостей	 $\angle (\alpha, \gamma) = \angle (\beta, \gamma)$ $X \in \gamma \Rightarrow \rho(X, \alpha) = \rho(X, \beta)$ $\angle (\alpha, \delta) = \angle (\beta, \delta)$ $Y \in \delta \Rightarrow \rho(Y, \alpha) = \rho(Y, \beta)$

Таблица 13. Углы в пространстве

Угол между прямыми

Угол между параллельными или совпадающими прямыми считается равным нулю	 $(\widehat{a, b}) = \angle (a, b) = 0$
Углом между пересекающимися прямыми называется наименьший из углов, образованных при пересечении прямых	 $a \cap b = M$; $\angle (a, b) = \angle PMT$
Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся	 $a \dashv b$; $a_1 \parallel a$; $b_1 \parallel b$; $a_1 \cap b_1 = M$ $\angle (a, b) = \angle (a_1, b_1)$

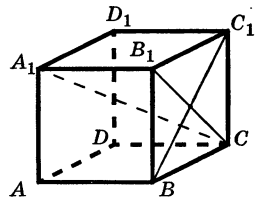
Две прямые называются *перпендикулярными* (ортогональными), если угол между ними прямой

Угол между двумя прямыми находится в пределах от 0° до 90°
$0° \leqslant \angle (a, b) \leqslant 90°$

Примеры нахождения углов между двумя прямыми в многогранниках

Пример 1. Дан куб.

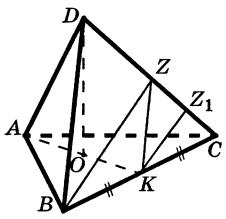
1) $\angle(AB, D_1C_1) = 0°$
2) $\angle(AD, BC_1) = \angle(BC, BC_1) = 45°$
3) $\angle(DC, BC_1) = \angle(D_1C_1, BC_1) = 90°$
4) $\angle(D_1B_1, BC_1) = \angle(DB, BC_1) = 60°$
   ($\triangle DBC_1$ — правильный)
5) $\angle(A_1D, BC_1) = \angle(B_1C, BC_1) = 90°$
6) $\angle(AB_1, BC_1) = \angle(DC_1, BC_1) = 60°$
7) $\angle(A_1C, BC_1) = 90°$ (теорема о трех перпендикулярах)



Пример 2. Дан правильный тетраэдр.

1) $\angle(DO, AB) = 90°$ ($DO \perp (ABC)$).
2) $\angle(AD, BC) = 90°$ (теорема о трех перпендикулярах).
3) $\angle(DO, KZ) = \angle(DO, BD)$, так как $KZ \parallel BD$.
4) $\angle(AK, BZ) = \angle(AK, KZ_1)$, где $KZ_1 \parallel BZ$.

Рассмотрим $\triangle AKZ_1$.



Дано:
$AB = BC = CA = AD = BD = CD = a$
$BK = KC$; $K \in BC$
$DZ = ZC$; $Z \in DC$

$$AK = \frac{a\sqrt{3}}{2};\ KZ_1 = \frac{1}{2}BZ = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$AZ_1^2 = a^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2 - 2a\cdot\frac{a}{4}\cos\angle ACD$$ (теорема косинусов в $\triangle AZ_1C$).

$$AZ_1^2 = \frac{13a^2}{16}.\ AZ_1^2 = AK^2 + KZ_1^2 - 2AK\cdot KZ_1\cos\varphi,$$ где $\varphi = \angle(AK, KZ_1)$ (теорема косинусов в $\triangle AKZ_1$).

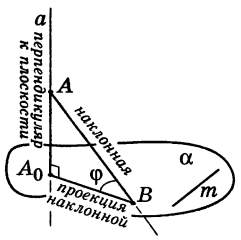
Следовательно, $\angle(AK, KZ_1) = \varphi = \arccos\frac{1}{6}$

Угол между прямой и плоскостью

Прямая называется перпендикулярной данной плоскости, а плоскость — перпендикулярной прямой, если прямая перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости

Прямая, пересекающая плоскость и не перпендикулярная ей, называется *наклонной к этой плоскости*

Угол между прямой, параллельной данной плоскости (или лежащей в плоскости), и данной плоскостью считается равным нулю



$m \subset \alpha \Rightarrow \angle(m, \alpha) = 0°$
$a \perp \alpha \Rightarrow \angle(a, \alpha) = 90°$
$\angle(AB, \alpha) = \angle A_0BA = \varphi$; $\sin\varphi = \frac{\rho(A, \alpha)}{AB}$

Если прямая и плоскость взаимно перпендикулярны, то угол между ними считается равным 90°

Угол между наклонной и плоскостью равен углу между наклонной и ее проекцией на эту плоскость (ортогональной проекцией)

Синус угла между наклонной AB и плоскостью, в которой лежит точка B, равен отношению расстояния от точки A до этой плоскости к длине отрезка AB

Угол между прямой и плоскостью находится в пределах от 0° до 90°. $0° \leqslant \angle(a, \alpha) \leqslant 90°$

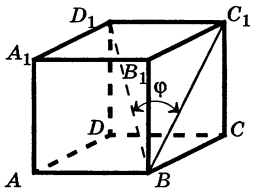
Таблица 13. Углы в пространстве

Примеры нахождения углов между прямой и плоскостью

Пример 1.

Д а н о: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб.

Н а й т и: $\varphi = \angle(BD_1, (BB_1C_1))$.



Р е ш е н и е:

1. $D_1C_1 \perp (BB_1C_1) \Rightarrow BC_1$ — проекция $BD_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi = \angle D_1BC_1$.

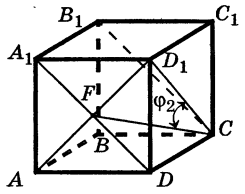
2. В $\triangle BD_1C_1$ $\sin\varphi = \dfrac{D_1C_1}{D_1B} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(или $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$) $\Rightarrow \varphi = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Пример 2.

Д а н о: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб.

Н а й т и: $\varphi_1 = \angle(AD_1, (DA_1B_1))$;
$\varphi_2 = \angle(CD_1, (DA_1B_1))$.



Р е ш е н и е:

1. $AD_1 \perp A_1D$; $A_1B_1 \perp (AA_1D_1) \Rightarrow A_1B_1 \perp AD_1$.

2. $AD_1 \perp (DA_1B_1) \Rightarrow \varphi_1 = 90°$.

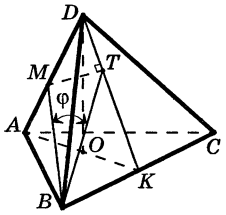
3. $AD_1 \perp (DA_1B_1)$; $AD_1 \cap (DA_1B_1) = F \Rightarrow$
FC — проекция CD_1 на $(DA_1B_1) \Rightarrow \varphi_2 = \angle D_1CF$.

4. В $\triangle D_1FC$ $\sin\varphi_2 = \dfrac{FD_1}{D_1C} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi_2 = 30°$

Пример 3.

Д а н о: $ABCD$ — правильный тетраэдр; $AM = MD$; $M \in AD$.

Н а й т и: $\varphi = \angle(BM, (BDC))$.



Р е ш е н и е:

K — середина BC.

1. $(DAK) \perp (BDC)$, так как $BC \perp (DAK)$.

2. $(DAK) \cap (DBC) = DK$; $MT \perp DK$; $T \in DK \Rightarrow$
$\Rightarrow MT \perp (BDC) \Rightarrow BT$ — проекция BM на
$(BDC) \Rightarrow \varphi = \angle MBT$.

3. $MT = \dfrac{1}{2}\rho(A, (BDC)) = \dfrac{1}{2}a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$,

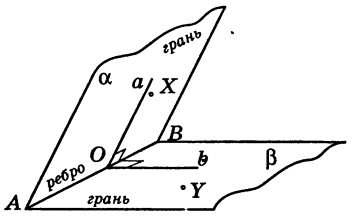
где a — сторона тетраэдра;

$BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{MT}{BM} = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \varphi = \arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

Двугранный угол

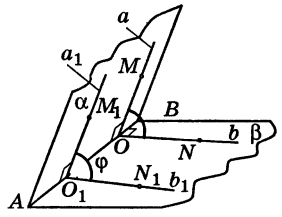
Двугранным углом называется пересечение двух полупространств, образованных непараллельными плоскостями. (Фигура, образованная двумя непараллельными полуплоскостями, имеющими общую границу.)

Общая прямая полуплоскостей называется *ребром* двугранного угла, а полуплоскости — *гранями* двугранного угла



$\angle(X, (AB), Y)$ — двугранный угол
$a \subset \alpha$; $a \perp AB$; $b \subset \beta$; $b \perp AB$
$a \cap b = O$; $\angle(a, b)$ — линейный угол
$\angle(X, (AB), Y) = \angle(a, b)$

Линейным углом двугранного угла называется пересечение этого двугранного угла и плоскости, перпендикулярной его ребру. (Угол между двумя перпендикулярами к ребру двугранного угла, лежащими в гранях двугранного угла и имеющими на ребре общее начало.)



$a \perp AB$; $a_1 \perp AB$; $b \perp AB$; $b_1 \perp AB$
$\angle(M, (AB), N) = \angle(a, b) = \angle(a_1, b_1) =$
$= \angle MON = \angle M_1O_1N_1$

$$\sin\varphi = \frac{\rho(M,\ \beta)}{\rho(M,\ AB)}$$

Величина двугранного угла считается равной величине его линейного угла.

Все линейные углы данного двугранного угла равны между собой

Синус линейного угла двугранного угла равен отношению расстояния от любой точки одной из граней двугранного угла до плоскости другой грани к расстоянию от этой точки до ребра этого двугранного угла

Величина двугранного угла находится в пределах от 0° до 180°.

$$0° < \angle(M, (AB), N) < 180°$$

Примеры нахождения двугранных углов в кубе

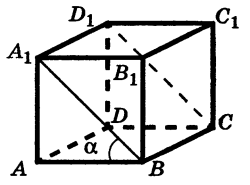
Пример 1.

Д а н о: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб.

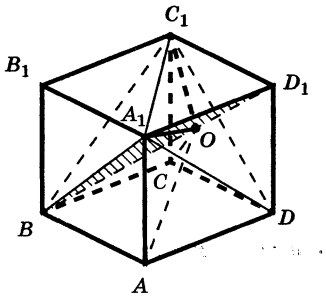
Н а й т и: $\alpha = \angle(A_1, (BC), D)$.

Р е ш е н и е:

1. $A_1B \perp BC$; $AB \perp BC \Rightarrow \alpha = \angle A_1BA$.
2. $\angle A_1BA = 45° \Rightarrow \alpha = 45°$

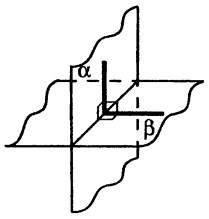


Пример 2.
Д а н о: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб.
Н а й т и: $\varphi = \angle (A_1, (BD_1), C_1)$.
Р е ш е н и е:
1. $BD_1 \perp (A_1C_1D)$; $BD_1 \cap (A_1C_1D) = O$;
$A_1O = OC_1 = OD$; $OA_1 \perp BD_1$;
$OC_1 \perp BD_1 \Rightarrow \angle A_1OC_1 = \varphi$.
2. $\triangle A_1DC_1$ — равносторонний $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle A_1OC_1 = 120° \Rightarrow \varphi = 120°$



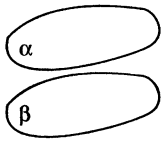
Угол между плоскостями

Плоскости называются *перпендикулярными*, если они образуют прямой двугранный угол



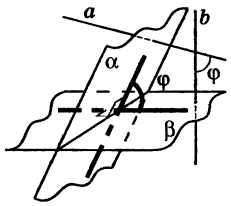
$\alpha \perp \beta \Rightarrow \angle(\alpha, \beta) = 90°$

Угол между параллельными или совпадающими плоскостями считается равным нулю



$\alpha \parallel \beta \Rightarrow \angle(\alpha, \beta) = 0°$

Угол между пересекающимися плоскостями равен меньшему из двугранных углов, ими образованных (т. е. каждый из трех остальных не меньше данного).
Угол между двумя плоскостями равен углу между перпендикулярными им прямыми

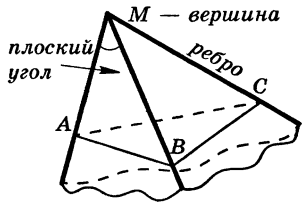


$\angle(\alpha, \beta) = \varphi \in (0°, 90°)$
$a \perp \alpha$; $b \perp \beta$
$\angle(\alpha, \beta) = \angle(a, b)$

Угол между двумя плоскостями находится в пределах от 0° до 90°.

$$0° \leqslant \angle(\alpha, \beta) \leqslant 90°$$

Трехгранный угол $MABC$
M – вершина;
MA, MB, MC — ребра;
$\angle AMB$, $\angle AMC$, $\angle BMC$ — плоские углы трехгранного угла



Неравенство трехгранного угла: сумма двух плоских углов трехгранного угла больше третьего плоского угла

$\angle AMB = C$; $\angle AMC = B$; $\angle BMC = A$
$A + B > C$; $A + C > B$; $B + C > A$
$A + B + C < 360°$

Теорема синусов трехгранного угла

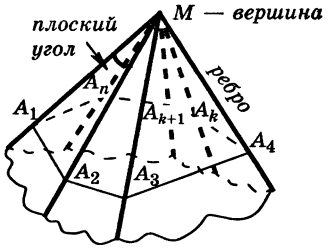
$$\frac{\sin \hat{A}}{\sin A} = \frac{\sin \hat{B}}{\sin B} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin C}$$

Теорема косинусов трехгранного угла

$$\cos C = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \cdot \cos \hat{C},$$

где $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ — величины двугранных углов при ребрах MA, MB, MC соответственно;
C, B, A — величины плоских углов, противолежащих соответственно AB, AC, BC

Многогранный угол $MA_1A_2...A_n$
M — вершина;
MA_1, MA_2, ..., MA_n — ребра;
$\angle A_1MA_2$, ..., $A_{n-1}MA_n$ — плоские углы многогранного угла



Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°

$\angle A_1MA_2 + \angle A_2MA_3 + ... +$
$+ \angle A_{n-1}MA_n < 360°$

Таблица 14. Основные задачи на построение в пространстве

В любой плоскости выполняются все построения планиметрии. Через *три точки, не лежащие на одной прямой*, через *прямую и точку вне ее*, через *две пересекающиеся прямые*, через *две параллельные прямые* можно провести *плоскость* и притом только одну

Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только *одну прямую, параллельную данной прямой*

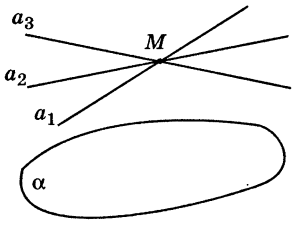
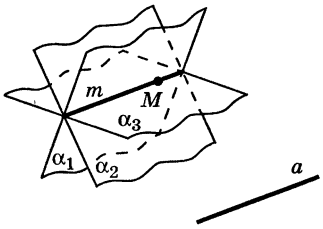
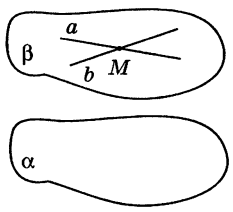
Через точку, не лежащую в данной плоскости, можно провести бесконечное множество *прямых, параллельных этой плоскости*	 $M \notin \alpha$; $a_1 \cap a_2 \cap a_3 = M$ $a_1 \parallel \alpha$; $a_2 \parallel \alpha$; $a_3 \parallel \alpha$
Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести бесконечное множество *плоскостей, параллельных этой прямой*	 $M \notin a$; $m \parallel a$ $\alpha_1 \parallel a$; $\alpha_2 \parallel a$; $\alpha_3 \parallel a$ $\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3 = m$
Через точку, не лежащую на данной плоскости, можно провести *плоскость, параллельную данной*, и притом только *одну*	 $M \notin \alpha$ $a \parallel \alpha$; $b \parallel \alpha$; $a \cap b = M$ $a \subset \beta$; $b \subset \beta$; $\Rightarrow \beta \parallel \alpha$

Таблица 14. Основные задачи на построение в пространстве

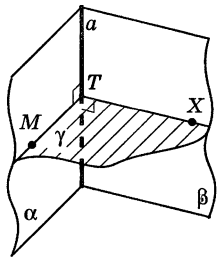
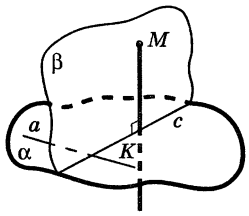
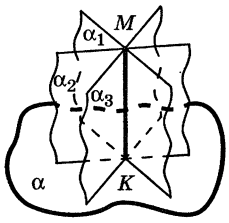
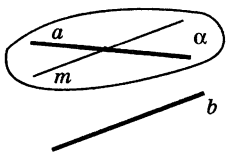
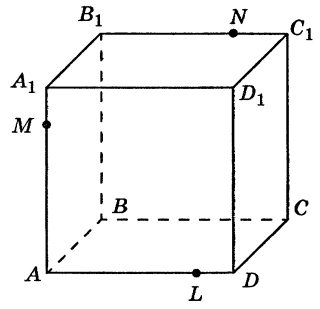
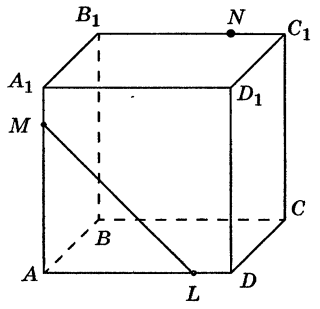
Через точку можно провести *плоскость, перпендикулярную данной прямой*, и притом только одну	 $M \in \alpha$; $a \subset \alpha$ $X \in \beta$; $a \subset \beta$ $MT \perp a$; $TX \perp a \Rightarrow$ $\Rightarrow (MTX) = \gamma \perp a$
Через точку можно провести *прямую, перпендикулярную данной плоскости*, и притом только одну	 $M \notin \alpha$; $a \subset \alpha \Rightarrow$ существует плоскость $\beta \ni M$; $\beta \perp a \Rightarrow$ $\Rightarrow \beta \cap \alpha = c$ $MK \perp c \Rightarrow MK \perp \alpha$
Через точку можно провести бесконечно много *плоскостей, перпендикулярных данной плоскости*	 $MK \perp \alpha$ $\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3 = MK$ $\alpha_1 \perp \alpha$; $\alpha_2 \perp \alpha$; $\alpha_3 \perp \alpha$
Через одну из скрещивающихся прямых можно провести единственную *плоскость, параллельную другой прямой*	 $a \dashv b$; $m \parallel b \Rightarrow \alpha \parallel b$

Таблица 15. Построение сечения куба

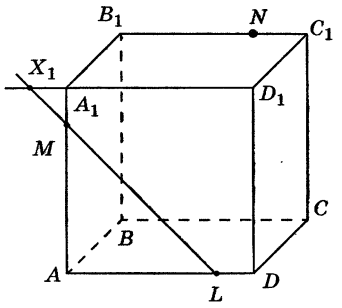
Построить сечение куба, проходящее через точки M, N, L



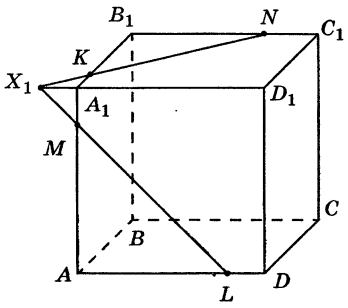
$(MNL) = \alpha$



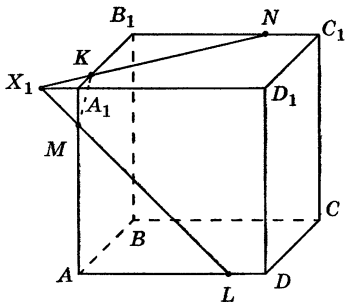
$\alpha \cap (AA_1D_1D) = ML$



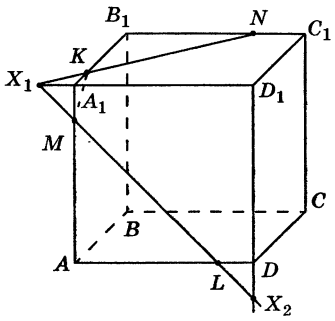
$ML \cap (A_1B_1C_1D_1) = ML \cap A_1D_1 = X_1$



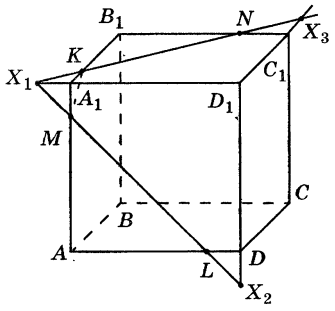
$\alpha \cap (A_1B_1C_1D_1) = KN$



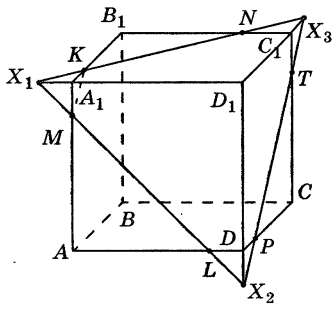
$\alpha \cap (AA_1B_1B) = MK$



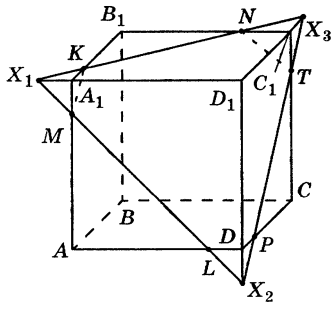
$ML \cap (DD_1C_1C) = ML \cap DD_1 = X_2$



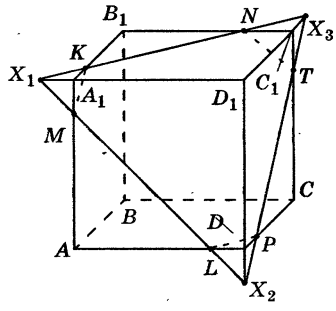
$KN \cap (DD_1C_1C) =$
$KN \cap D_1C_1 = X_3$



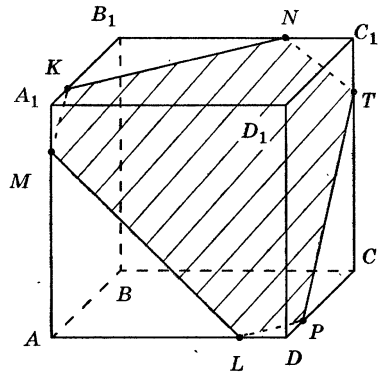
$\alpha \cap (DD_1C_1C) = TP$



$\alpha \cap (BB_1C_1C) = NT$



$\alpha \cap (ABCD) = LP$

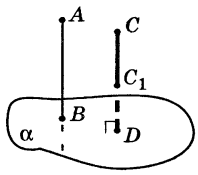


$LMKNTP$ — искомое сечение
$MK \parallel TP$; $KN \parallel LP$; $NT \parallel ML$

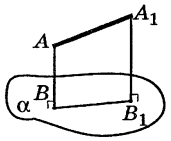
Таблица 16. Ортогональное проектирование

Ортогональной проекцией (мы будем говорить просто проекцией) *точки на плоскость* называется точка пересечения перпендикуляра, проведенного через данную точку к плоскости, и самой плоскости.

Мы будем обозначать: $\text{пр}_\alpha^\perp A = B$



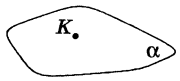
$\text{пр}_\alpha^\perp CC_1 = D$



$\text{пр}_\alpha^\perp AA_1 = BB_1$

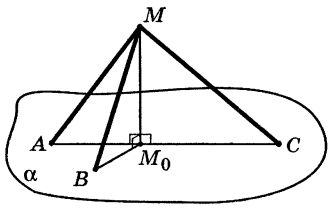
Свойства ортогонального проектирования

Если точка лежит на плоскости, то $\text{пр}_\alpha^\perp K = K$.



Проекция прямой есть прямая (или точка).
Проекция отрезка есть отрезок (или точка)

Проекции наклонных
Если из одной точки на плоскость проведены несколько наклонных, то:
равные наклонные имеют равные проекции,
равным проекциям соответствуют равные наклонные,
бóльшая наклонная имеет бóльшую проекцию,
бóльшей проекции соответствует бóльшая наклонная

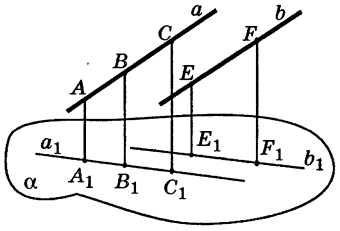


$M_0 = \text{пр}_\alpha^\perp M$

$(MA = MB) \Leftrightarrow (M_0A = M_0B)$

$(MC > MA) \Leftrightarrow (M_0C > M_0A)$

Длины проекций отрезков, лежащих на параллельных прямых (или на одной прямой) пропорциональны длинам самих отрезков



$a \parallel b$; $a_1 = \text{пр}_\alpha^\perp a$; $b_1 = \text{пр}_\alpha^\perp b \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 \parallel b_1$

$\dfrac{A_1B_1}{B_1C_1} = \dfrac{AB}{BC}$; $\dfrac{B_1C_1}{E_1F_1} = \dfrac{BC}{EF}$

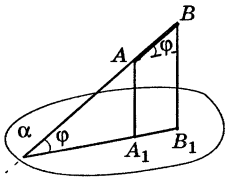
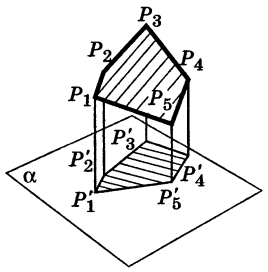
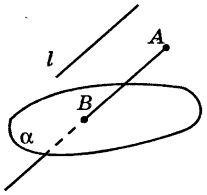
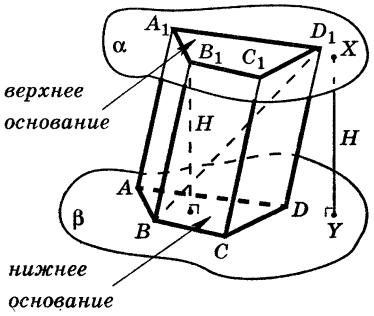
Длина проекции отрезка равна произведению длины этого отрезка на косинус угла между плоскостью проектирования и прямой этого отрезка	$A_1B_1 = \text{пр}_\alpha^{\perp} AB = AB \cos \varphi$ $\varphi = \angle (AB, \alpha)$ 
Площадь проекции многоугольника равна произведению площади этого многоугольника и косинуса угла между плоскостью проектирования и плоскостью многоугольника	 $P'_1 P'_2 P'_3 P'_4 P'_5 = \text{пр}_\alpha^{\perp}(P_1P_2P_3P_4P_5)$ $S' = S \cdot \cos \varphi$ $\varphi = \angle ((P_1P_2P_3), \alpha)$
Параллельное проектирование *Параллельной проекцией* точки на плоскость в направлении прямой l, не параллельной плоскости, называется пересечение проходящей через точку прямой, параллельной или совпадающей с l, и плоскости проектирования. Мы будем обозначать: $\text{пр}_\alpha^{l} A = B$. Ортогональное проектирование есть частный случай параллельного. Параллельное проектирование обладает всеми *отмеченными свойствами ортогонального проектирования*	 $AB \parallel l;\ B \in \alpha$ $B = \text{пр}_\alpha^{l} A$

Таблица 17. Призма

n-угольной призмой называется многогранник, две грани которого — равные n-угольники с соответственно параллельными сторонами (*основания*), а остальные n граней — параллелограммы (*боковые грани*).

n-угольная призма имеет: $n + 2$ грани, $3n$ ребра, $2n$ вершины



$\alpha \parallel \beta$

$A, B, C, D \in \beta$; $A_1, B_1, C_1, D_1 \in \alpha$

$AB \parallel A_1B_1$; $BC \parallel B_1C_1$; $CD \parallel C_1D_1$

$DA \parallel D_1A_1$

$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$

$AA_1 = l$ — боковое ребро

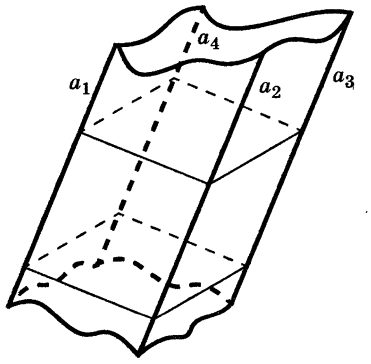
BD_1 — диагональ

Высотой призмы называется расстояние между плоскостями ее оснований. (Отрезок перпендикуляра к плоскостям оснований, заключенный между ними.)

Диагональ призмы — отрезок, соединяющий две вершины, не лежащие в одной грани.

У n-угольной призмы $n(n - 3)$ диагонали

Призматической поверхностью называется поверхность, состоящая из прямых, содержащих боковые ребра призмы и частей плоскостей боковых граней, заключенных между этими прямыми

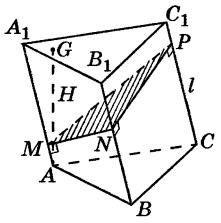


$a_1 \parallel a_2 \parallel a_3 \parallel a_4$

Четырехгранная призматическая поверхность

Перпендикулярным сечением призмы называется сечение призматической поверхности плоскостью, перпендикулярной боковому ребру.

Угол между плоскостью перпендикулярного сечения призмы и плоскостью ее основания равен углу между боковым ребром и высотой призмы



$\left.\begin{matrix} MN \perp AA_1 \\ NP \perp BB_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (MNP) \perp BB_1$

$\triangle MNP$ — перпендикулярное сечение

$AG \perp ABC$

$\angle (AA_1, AG) = \angle ((MNP), (ABC))$

Площади боковой и полной поверхности призмы

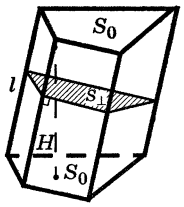
$S_{бок} = P_\perp \cdot l$

$S_{полн} = 2S_0 + P_\perp \cdot l$

Объем призмы

$V = S_0 \cdot H$

$V = S_\perp \cdot l$



$P_\perp$ — периметр перпендикулярного сечения, l — длина бокового ребра, S_0 — площадь основания, H — высота призмы, $S_\perp$ — площадь перпендикулярного сечения

Прямая призма

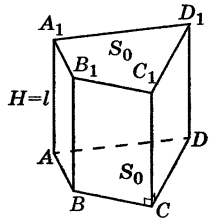
Прямой называется призма, боковое ребро которой перпендикулярно плоскости основания

Все *боковые грани* прямой призмы *прямоугольники.*

Все *двугранные углы* при ребрах основания прямой призмы *прямые.*

Линейные углы двугранных углов при боковых ребрах прямой призмы равны соответствующим углам основания.

Высота прямой призмы равна ее боковому ребру



$AA_1 \perp (ABC)$; $\angle ABC = \angle (A, BB_1, C)$

P_0 — периметр основания

S_0 — площадь основания

Таблица 17. Призма

Объем прямой призмы

$V = S_0 \cdot H$

Площади боковой и полной поверхностей прямой призмы

$S_{бок} = P_0 \cdot H$

$S_{полн} = S_{бок} + 2 \cdot S_0$

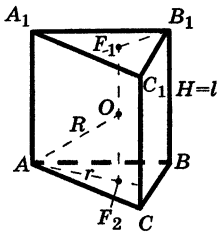
Правильной называется прямая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник

Около призмы можно *описать шар* тогда и только тогда, когда она прямая и около ее основания можно описать окружность.

$R^2 = r^2 + 0{,}25H^2$, где

R — радиус описанного шара,

r — радиус описанной окружности



$OA = OB = OC = OA_1 = OB_1 = OC_1$

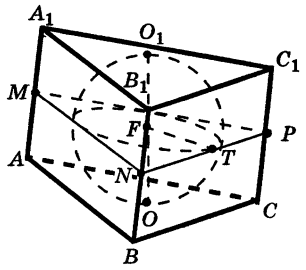
$OF_1 = OF_2 = \frac{1}{2}H$; $AA_1 \perp (ABC)$

В призму можно *вписать шар* тогда и только тогда, когда в ее перпендикулярное сечение можно вписать окружность и диаметр этой окружности равен высоте призмы.

$R = r = 0{,}5H$, $R = \frac{2S_\perp}{P_\perp}$, где

R — радиус вписанного шара,

r — радиус вписанной окружности

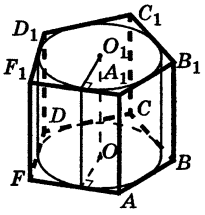


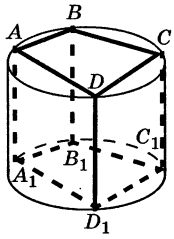
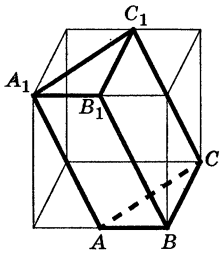
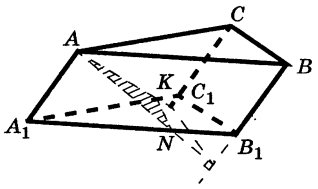
$(MNP) \perp AA_1$

$FO_1 = FT = R$

$O_1O = H$

В прямую призму можно *вписать цилиндр*, если в ее основание можно вписать окружность



Около прямой призмы можно *описать цилиндр*, если около ее основания можно описать окружность	
Пример призмы, одна грань которой перпендикулярна основанию	 $(ABB_1) \perp (ABC)$
Пример призмы, внутри которой нельзя провести перпендикулярного сечения В этом случае при вычислении объема рассматривается перпендикулярное сечение призматической поверхности (все формулы верны)	 $(NKA) \perp AA_1$

Параллелепипед

Параллелепипедом называется призма, в основании которой лежит параллелограмм. Все грани параллелепипеда — параллелограммы. Противоположные грани параллелепипеда равны и параллельны

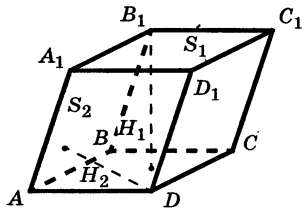
У параллелепипедов и только у них любую пару параллельных граней можно принять за основания. В зависимости от выбора оснований можно рассмотреть три высоты	
Объем параллелепипеда $V = H_1S_1 = H_2S_2 = H_3S_3$	

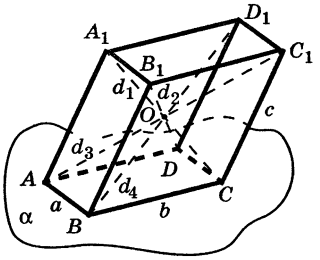
Таблица 17. Призма

Свойства диагоналей параллелепипеда

Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

Сумма квадратов диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов всех его ребер.

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$$

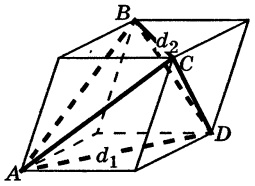


$A_1C = d_1$; $B_1D = d_2$; $AC_1 = d_3$
$BD_1 = d_4$

В параллелепипед можно вписать *тетраэдр*.

Объем такого тетраэдра равен $\frac{1}{3}$ части объема параллелепипеда.

$$V = \frac{1}{6} d_1 d_2 \rho(d_1, d_2) \sin \angle(d_1, d_2)$$



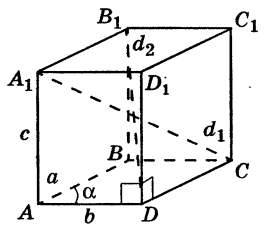
$AD = d_1$; $BC = d_2$

Прямым называется параллелепипед, у которого боковое ребро перпендикулярно плоскости основания.

Диагонали прямого параллелепипеда вычисляются по формулам:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos \alpha$$

$$d_2^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab \cos \alpha$$

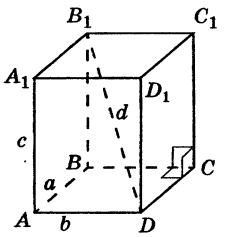


$ABCD$ — параллелограмм ($\alpha \neq 90°$)
$AA_1 \perp (ABC)$
$AC_1 = A_1C = d_1$; $BD_1 = B_1D = d_2$; $d_1 \neq d_2$

Прямоугольным называется прямой параллелепипед, в основании которого — прямоугольник.

Все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$



$ABCD$ — прямоугольник
$AA_1 \perp (ABC)$; $AB \perp AD$

Куб

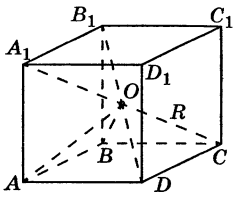
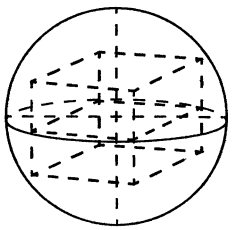
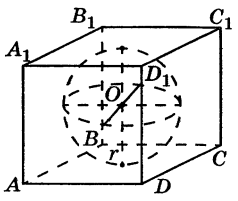
Кубом называется прямоугольный параллелепипед с равными ребрами. Диагонали куба пересекаются в точке, являющейся центром вписанной и описанной сфер	 $AB = a$ $OA = OB = OC = OD = OA_1 = OB_1 =$ $= OC_1 = OD_1 = R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
Куб, вписанный в сферу $R = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, где R — радиус описанной сферы, a — ребро куба	
Сфера, вписанная в куб $r = \frac{1}{2}a$, где r — радиус вписанной сферы, a — ребро куба	 $AB = a$ Центр сферы — точка O, равноудаленная от всех граней куба

Таблица 18. Пирамида

Пирамидой называется многогранник, одна грань которого — произвольный многоугольник, а остальные грани — треугольники, имеющие общую вершину

M — *вершина пирамиды*, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — *вершины* основания. Всего $n + 1$ вершина.

MA_1 — *боковое ребро*, A_1A_2 — *ребро основания*. Всего $2n$ ребер.

Многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ — *основание* пирамиды.

Треугольник MA_1A_2 — *боковая грань*. У пирамиды $n + 1$ грань, из них n боковых.

Угол A_1MA_2 — *плоский угол* при вершине пирамиды.

Двугранный угол $M(A_1A_2)A_k$ — *угол при ребре* A_1A_2 *основания* (угол наклона боковой грани к основанию).

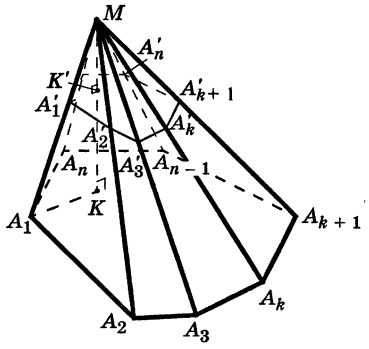
Двугранный угол $A_1(MA_2)A_3$ — *угол при боковом ребре* MA_2.

Высотой пирамиды называется расстояние от вершины пирамиды до плоскости ее основания. $MK = H$ — высота пирамиды

Сечение, параллельное основанию пирамиды, представляет собой многоугольник, подобный основанию.

Плоскость этого сечения разбивает боковые ребра и высоту пирамиды на пропорциональные отрезки.

Площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний до вершины пирамиды. Сечение отсекает от пирамиды пирамиду, подобную данной



$(A_1A_2A_3) \parallel (A_1'A_2'A_3')$

$\rho(M, (A_1A_2A_3)) = H$

$\rho(M, (A_1'A_2'A_3') = H'$

$A_1A_2\ldots A_n \sim A_1'A_2'\ldots A_n'$

$$\frac{MA_1}{MA_1'} = \frac{MA_2}{MA_2'} = \ldots = \frac{MA_n}{MA_n'} = \frac{H}{H'}$$

$$\frac{S_{A_1A_2\ldots A_n}}{S_{A_1'A_2'\ldots A_n'}} = \left(\frac{H}{H'}\right)^2$$

$MA_1A_2\ldots A_n \sim MA_1'A_2'\ldots A_n'$

Площадь боковой поверхности пирамиды $S_{бок} = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$, S_1, S_2, ..., S_n — площади боковых граней пирамиды	**Площадь полной поверхности пирамиды** $S_{полн.} = S_{бок.} + S_o$, S_o — площадь основания
Объем пирамиды	$V = \frac{1}{3} HS_o$

Тетраэдр

Тетраэдр — это треугольная пирамида.
Все четыре грани — треугольники и любая из них может быть принята за основание этой пирамиды (можно рассмотреть четыре высоты).
Площади боковых граней тетраэдра обратно пропорциональны опущенным на них высотам

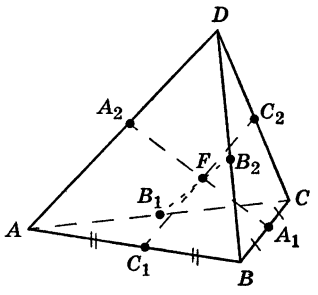
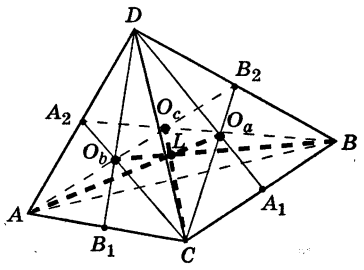
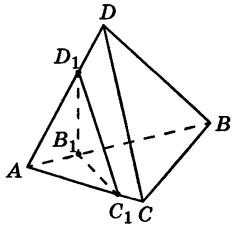
Отрезки, соединяющие середины скрещивающихся ребер тетраэдра (*бимедианы* тетраэдра), пересекаются в одной точке и делятся ею пополам	
Отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противолежащих граней (*медианы* тетраэдра), пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 3 : 1, считая от вершины	
Если два тетраэдра имеют общий трехгранный угол (два равных трехгранных угла), то их объемы относятся как произведения ребер, образующих этот угол. $\frac{V_{ABCD}}{V_{AB_1C_1D_1}} = \frac{AB \cdot AC \cdot AD}{AB_1 \cdot AC_1 \cdot AD_1}$	

Таблица 18. Пирамида

Правильный тетраэдр

Правильным называется тетраэдр, все грани которого — правильные треугольники

Основные формулы

$R = \frac{3}{4}H \qquad H = a\sqrt{\frac{2}{3}}$

$r = \frac{1}{4}H \qquad R + r = H$

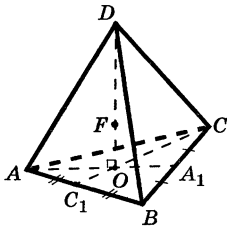
R — радиус описанного шара
r — радиус вписанного шара

Площадь поверхности правильного тетраэдра

$S_{полн} = a^2\sqrt{3}$

Объем правильного тетраэдра

$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$



$AB = AC = BC = AD = BD = CD = a$

$DO = H = a\sqrt{\frac{2}{3}}$; $FO = r = \frac{1}{4}H$

$r = \rho(F, (ABC)) = \rho(F, (ABD)) = \rho(F, (ACD)) = \rho(F, (BCD))$

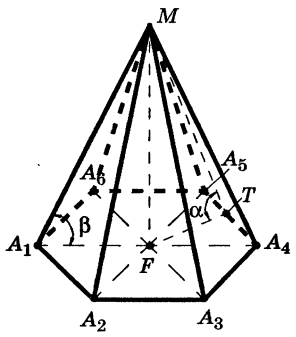
$FD = R = \frac{3}{4}H$

$FA = FB = FC = FD = R$; $S = S_{\triangle ABC}\ S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD}$

Правильная пирамида

Правильной называется пирамида, основание которой — правильный многоугольник, а вершина проектируется в центр основания

Все боковые ребра равны.
Все боковые грани — равные равнобедренные треугольники.
Все двугранные углы при ребрах основания равны (боковые грани одинаково наклонены к основанию).
Все плоские углы при вершине равны.
Все двугранные углы при боковых ребрах равны.
Все высоты боковых граней, опущенные на ребра основания (*апофемы*), равны



$MF \perp (A_1A_2A_3)$

$FA_1 = FA_2 = \ldots = FA_6$

MT — апофема пирамиды

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды

$S = kp$, где k — апофема, p — полупериметр основания.

$S = \frac{S_{осн}}{\cos\alpha}$, где $S_{осн}$ — площадь основания, α — двугранный угол при ребре основания

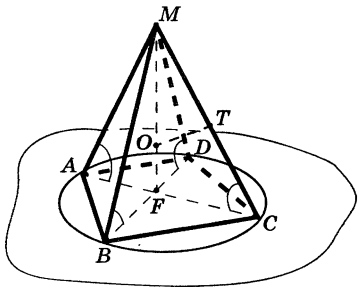
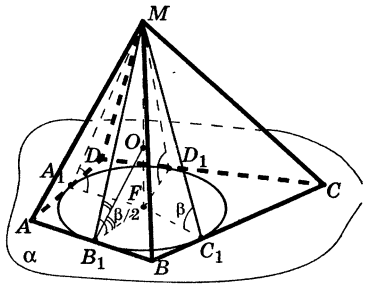
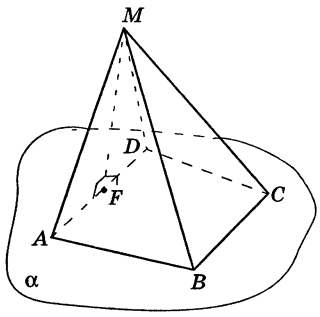
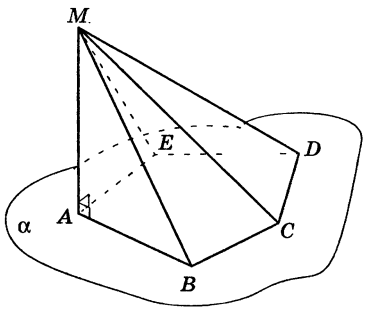
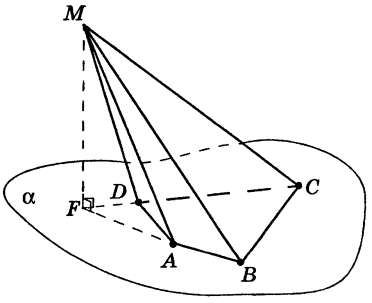
Пирамида, все боковые ребра которой равны между собой Около основания можно описать окружность и вершина пирамиды проектируется в центр этой окружности. Все ребра одинаково наклонены к основанию. Около такой пирамиды *можно описать шар*. Центр описанного шара лежит на прямой, содержащей высоту пирамиды	 $MA = MB = MC = MD \Rightarrow$ $FA = FB = FC = FD$; $MF = H$ $MF \perp (ABC)$ $MT = TC$, $OT \perp MC \Rightarrow$ $OA = OB = OC = OD = OM = R$ R — радиус описанного шара $(H - R)^2 + FC^2 = R^2$
Пирамида, все двугранные углы при ребрах основания которой равны между собой В основание можно вписать окружность и вершина пирамиды проектируется в центр этой окружности. *Площадь боковой поверхности* вычисляется по тем же формулам, что и для правильной пирамиды. *Высота* вычисляется по формуле: $H = r \operatorname{tg} \beta$, где r — радиус вписанной в основание окружности, а β — двугранный угол при ребре основания. В такую пирамиду *можно вписать шар*, центр которого лежит на высоте. $R = r \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$, где R — радиус вписанного шара, r — радиус вписанной в основание окружности	 $F \in \alpha$, $MF \perp (ABC) \Rightarrow$ $FA_1 \perp AD$; $FB_1 \perp AB$ $FC_1 \perp BC$; $FD_1 \perp CD$ $FA_1 = FD_1 = FC_1 = FB_1 = r$ — радиус вписанной в основание окружности $OF = R$ — радиус вписанного в пирамиду шара B_1O — биссектриса $\angle MB_1F$

Таблица 18. Пирамида

Пирамида, одна из боковых граней которой перпендикулярна основанию Высота лежит в грани, перпендикулярной основанию пирамиды	 $F \in \alpha$; $MF \perp (ABC)$ $MF \subset (AMD)$
Пирамида, две соседние боковые грани которой перпендикулярны основанию Высотой служит общее боковое ребро этих граней	 $\left.\begin{matrix}(MAB) \perp \alpha \\ (MAE) \perp \alpha\end{matrix}\right\} \Rightarrow MA \perp \alpha$
Пирамида, две несоседние грани которой перпендикулярны основанию Высота лежит вне пирамиды на прямой пересечения плоскостей, содержащих грани, перпендикулярные основанию	 $F \in \alpha$; $MF \perp \alpha$ $(MAB) \perp \alpha$; $(MDC) \perp \alpha$ $(ABM) \cap (DCM) = MF$

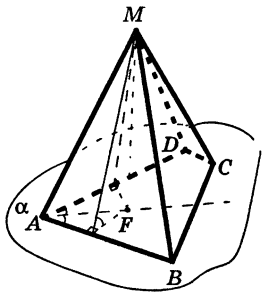
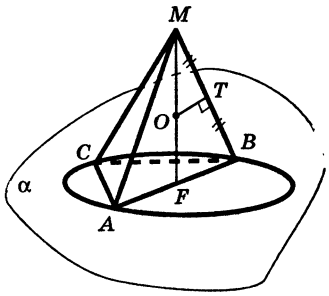
Пирамида, два двугранных угла при соседних ребрах основания которой равны Высота проектируется на биссектрису угла между данными ребрами	 $\angle (M, (AB), C) = \angle (M, (AD), C)$ $F \in \alpha$; $MF \perp \alpha$ AF — биссектриса $\angle BAD$
Пирамида, в основании которой прямоугольный треугольник и все боковые ребра равны	 $F \in \alpha$; $MF \perp \alpha$; $(MAB) \perp (ABC)$ $FA = FB = FC$ O — центр описанного шара $MT = TB$; $O \in MF$ $OM = OA = OB = OC = R$

Таблица 19. Усеченная пирамида

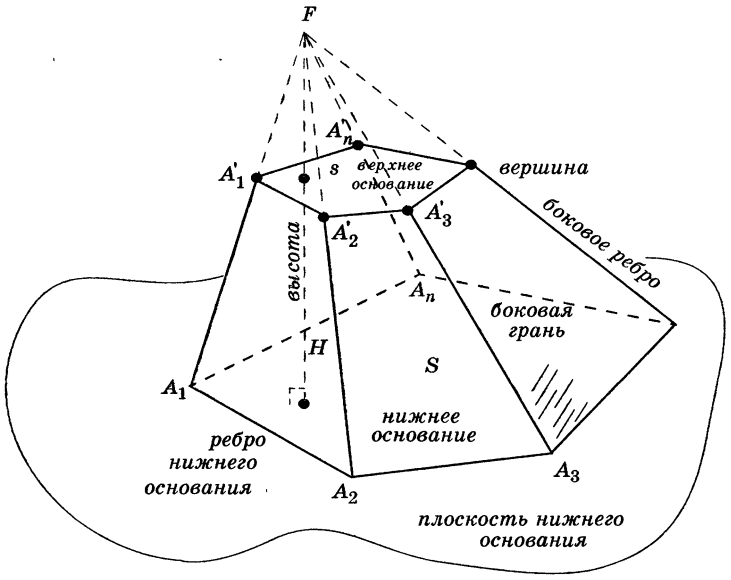
Усеченной пирамидой называется *часть полной* пирамиды, заключенная между основанием и параллельным ему сечением

Сечение называют *верхним основанием* усеченной пирамиды, а основание полной пирамиды — нижним основанием усеченной пирамиды. (Основания подобны.)

Боковые грани усеченной пирамиды — трапеции.

В усеченной пирамиде $3n$ ребер, $2n$ вершин, $n + 2$ грани, $n(n - 3)$ диагонали.

Расстояние между верхним и нижним основаниями — *высота* усеченной пирамиды (отрезок, отсеченный от высоты полной пирамиды)



Объем усеченной пирамиды

$V = \frac{1}{3}H(S + \sqrt{S \cdot s} + s)$, где

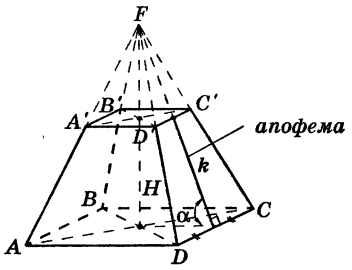
S и s — площади оснований,

H — высота

Площадь полной поверхности усеченной пирамиды равна сумме площадей ее граней

Таблица 19. Усе́ченная пирамида

Правильной усеченной пирамидой называется часть правильной пирамиды



ABCDA′B′C′D′— правильная усеченная четырехугольная пирамида. *ABCD*, *A′B′C′D′*— квадраты

Часть апофемы правильной пирамиды называется апофемой правильной усеченной пирамиды.

Для правильной усеченной пирамиды (а также для усеченной пирамиды, все двугранные углы при ребрах нижнего основания которой равны) верны формулы:

$S_{бок} = k(P + p)$, где

P и p — полупериметры оснований, k — апофема;

$S_{бок} = (S - s) : \cos \alpha$, где

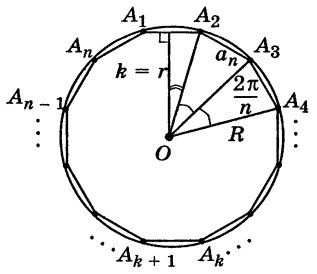
α — двугранный угол при ребре нижнего основания, S и s — площади оснований

Если в усеченную пирамиду можно вписать шар, то его радиус равен половине высоты пирамиды

Таблица 20. Правильные многоугольники и многогранники

Многоугольник называется *выпуклым*, если он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону.
Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все стороны равны между собой и все углы равны между собой.
Любой правильный многоугольник является вписанным и описанным, центры вписанной и описанной окружностей совпадают с *центром многоугольника* (точкой пересечения серединных перпендикуляров сторон, биссектрисс углов)

a_n — сторона
r_n — радиус вписанной окружности
R_n — радиус описанной окружности
k_n — апофема
P_n — периметр
S_n — площадь



Общие формулы

$$\alpha_n = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$$

$$r_n = k_n = \frac{a_n}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n} = R_n\cos\frac{180^\circ}{n};\quad R_n = \frac{r_n}{\cos\frac{180^\circ}{n}} = \frac{a_n}{2\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}}$$

$$S_n = \frac{n}{2}R_n^2\sin\frac{360^\circ}{n} = \frac{n}{4}a_n^2\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n} = \frac{1}{2}r_nP_n$$

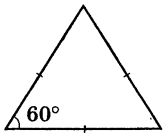
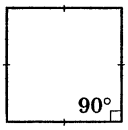
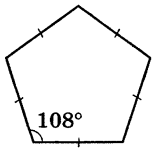
Формулы для многоугольников с числом сторон $n = 3, 4, 6, 8, 12$

n	α	r	R	S	Связь между r и R
3	60°	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$R = 2r$
4	90°	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	a^2	$R = r\sqrt{2}$
6	120°	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	a	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$	$R\sqrt{3} = 2r$
8	135°	$\frac{a(1+\sqrt{2})}{2}$	$\frac{a\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}$	$2a^2(1+\sqrt{2})$	$\frac{r}{R} = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
12	150°	$\frac{a(2+\sqrt{3})}{2}$	$a\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$	$3a^2(2+\sqrt{3})$	$\frac{r}{R} = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

Таблица 20. Правильные многоугольники и многогранники

Многогранник называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону плоскости каждого плоского многоугольника на его поверхности.

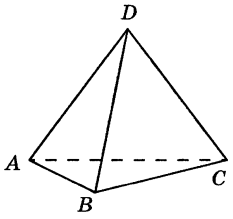
Выпуклый многогранник называется *правильным*, если все его грани — равные *правильные многоугольники* и в каждой *вершине* сходится *одинаковое количество ребер* (все многогранные углы при вершинах одноименны)

Грани — правильные треугольники Три ребра в одной вершине $3 \cdot 60° < 360°$ — *тетраэдр.* Четыре ребра в одной вершине $4 \cdot 60° < 360°$ — *октаэдр.* Пять ребер в одной вершине $5 \cdot 60° < 360°$ — *икосаэдр.* Шесть (и более) ребер в одной вершине сходиться не могут: $6 \cdot 60° = 360°$	 Правильный треугольник
Грани — правильные четырехугольники Три ребра в одной вершине $3 \cdot 90° < 360°$ — *куб* (*гексаэдр*). Четыре (и более) ребер в одной вершине сходиться не могут: $4 \cdot 90° = 360°$	 Квадрат
Грани — правильные пятиугольники Три ребра в одной вершине $3 \cdot 108° < 360°$ — *додекаэдр.* Четыре (и более) ребер в одной вершине сходиться не могут: $4 \cdot 108° > 360°$	 Правильный пятиугольник

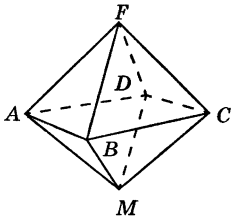
Правильные многоугольники, имеющие более пяти сторон, не могут быть гранями правильного многогранника (уже для шестиугольника: $3 \cdot 120° > 360°$)

Таблица 20. Правильные многоугольники и многогранники

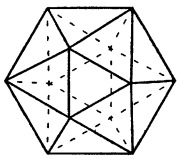
Общий вид



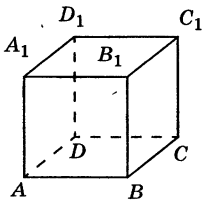
Тетраэдр



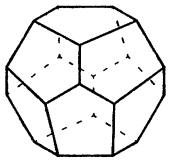
Октаэдр



Икосаэдр



Куб



Додекаэдр

Тип многогранника (длина ребра a)	Число			Площадь поверхности	Объем
	ребер	граней	вершин		
Тетраэдр	6	4	4	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Октаэдр	12	8	6	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
Икосаэдр	30	20	12	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5}{12}a^3(3-\sqrt{5})$
Куб (гексаэдр)	12	6	8	$6a^2$	a^3
Додекаэдр	30	12	20	$3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$\frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})$

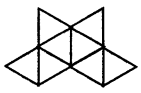
Для всех выпуклых многогранников выполняется *формула* (теорема) *Эйлера*

$P + 2 = B + \Gamma$, где P — число ребер, B — вершин, Γ — граней

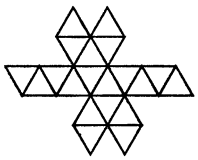
Примеры разверток



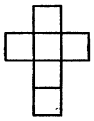
Тетраэдр



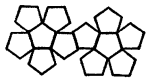
Октаэдр



Икосаэдр

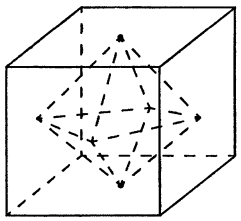


Куб

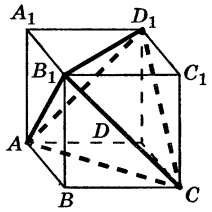


Додекаэдр

Вписанные и описанные многогранники

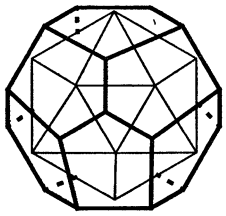


Куб и октаэдр

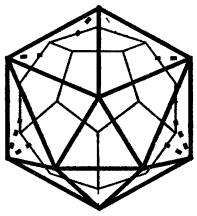


Куб и тетраэдр

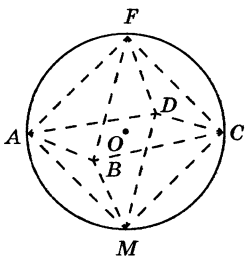
$A_1B_1 = a\sqrt{2}$
$AB = a$



Додекаэдр и икосаэдр



Икосаэдр и додекаэдр

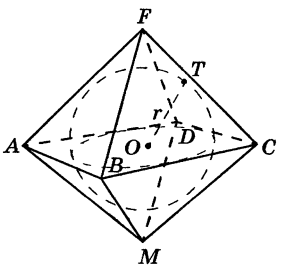


Шар и октаэдр

$AB = a$

$OA = OB = OF = OM = R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$FO = OM = FM = AC = BD = a\sqrt{2}$



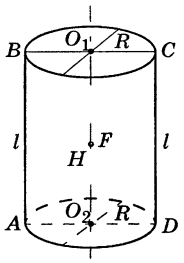
Октаэдр и шар

$AB = a$

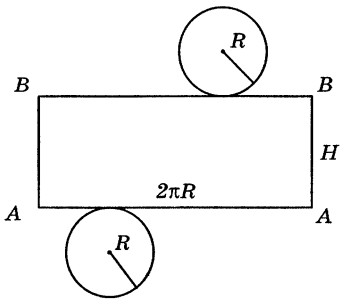
$OT = r = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$

Таблица 21. Цилиндр

Цилиндром (прямым, круговым) называется тело, полученное при вращении прямоугольника вокруг прямой, содержащей его сторону.
Круги с центрами O_1 и O_2 — *основания цилиндра*,
отрезок AB — *образующая* ($AB = l$),
отрезок $O_2A = O_1B$ — *радиус основания*,
отрезок O_1O_2 (расстояние между плоскостями оснований) — *высота цилиндра* ($H = l$),
прямоугольник $ABCD$ — *осевое сечение*,
отрезок AC — *диагональ осевого сечения*,
прямая O_1O_2 — *ось вращения*,
точка F (середина отрезка O_1O_2) — *центр симметрии*



Развертка цилиндра — прямоугольник и два круга



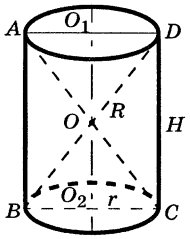
Площадь боковой поверхности цилиндра
$S_{бок} = 2\pi RH = 2\pi Rl$
Площадь полной поверхности цилиндра (площадь его развертки)
$S_{полн} = 2\pi R^2 + S_{бок} = 2\pi(R + H)R$

Объем цилиндра
$V = S_0 \cdot H = \pi R^2 H$

Около цилиндра всегда можно *описать шар*. Его центр лежит на середине высоты.

$R^2 = r^2 + 0{,}25H^2$, где

R — радиус шара, r — радиус основания цилиндра

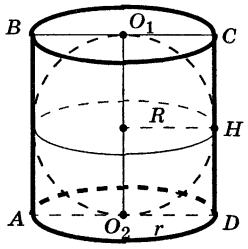


$AO = BO = CO = DO = R$

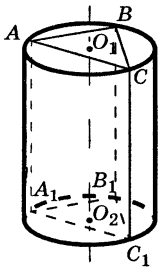
В цилиндр можно *вписать шар*, если диаметр основания цилиндра равен его высоте.

$R = r = 0{,}5H$, где

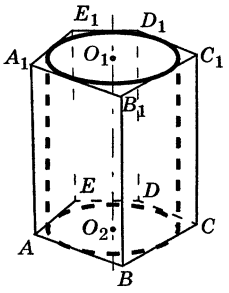
R — радиус шара, r — радиус основания цилиндра



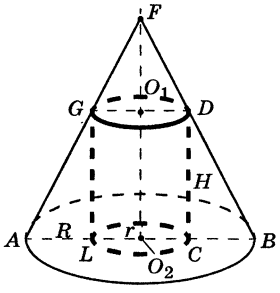
Призма, вписанная в цилиндр



Призма, описанная около цилиндра



Цилиндр, вписанный в конус



$AO_2 = O_2B = R$

$CD = GL = H$; $O_1G = r$

$$\frac{R - r}{H} = \frac{R}{FO_2} = \frac{r}{FO_2 - H} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{H_к}{H_к - H}$$

$H_к$ — высота конуса

H — высота цилиндра

Таблица 21. Цилиндр

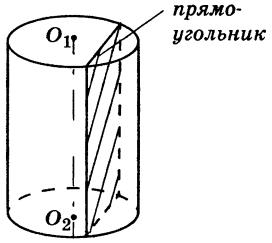
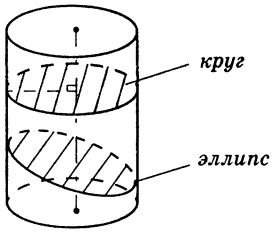
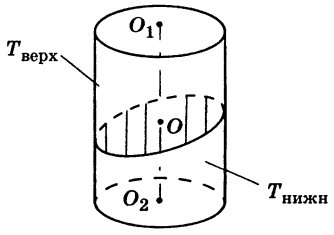
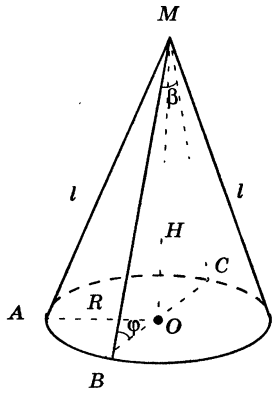
Сечения цилиндра плоскостями	
Сечение цилиндра плоскостью, паралелльной оси цилиндра, — прямоугольник	
Сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра, — круг	 
Сечение, проходящее через середину O_1O_2, делит цилиндр на два равных тела	 $OO_1 = OO_2 \Rightarrow T_{верх} = T_{нижн}$

Таблица 22. Конус

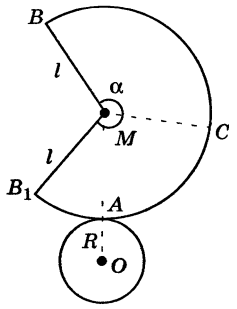
Конусом (прямым круговым) называется тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей катет.

Точка M — *вершина* конуса,
круг с центром O — *основание* конуса,
отрезок $MA = l$ — *образующая*,
отрезок $MO = H$ — *высота* конуса,
отрезок $OA = R$ — радиус основания,
отрезок $BC = 2R$ — диаметр основания,
треугольник MBC — *осевое сечение*,
$\angle BMC = \beta$ — угол при вершине осевого сечения,
$\angle MBO = \varphi$ — угол наклона образующей к плоскости основания



Развертка конуса — сектор круга и круг.
$\angle BMB_1 = \alpha$ — угол развертки.

Длина дуги развертки
$B\breve{C}B_1 = 2\pi R = l\alpha$ (α радиан)



Площадь боковой поверхности
$S_{бок} = \pi Rl$

Площадь полной поверхности (площадь развертки)
$S_{полн} = \pi R(l + R)$

Объем конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

Связь между углом α развертки и углом β при вершине осевого сечения

$$\alpha = 2\pi \sin\frac{\beta}{2}$$

Таблица 22. Конус

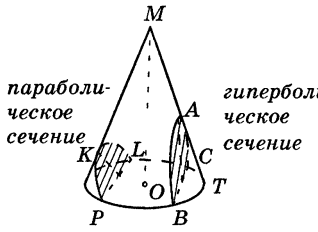
Сечения конуса плоскостями



Сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса, — равнобедренный треугольник.

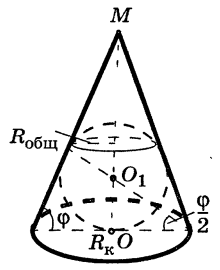


Сечение конуса плоскостью, перпендикулярной оси конуса, — круг.



$(ABC) \parallel MO$
$(KPL) \parallel MT$
MO — *высота конуса*
MT — *образующая*

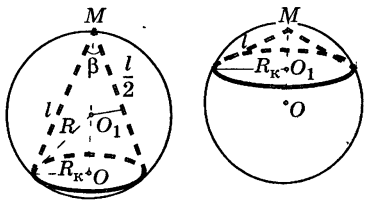
В конус всегда можно вписать шар. Его центр лежит на оси конуса и совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник, являющийся осевым сечением конуса



$$R_ш = R_к \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2};\ R_ш = \frac{HR_к}{R_к + l}$$

$$R_{общ} = R_ш \sin\varphi$$

Около конуса всегда можно описать шар. Его центр лежит на оси конуса и совпадает с центром окружности, описанной около треугольника, являющегося осевым сечением конуса

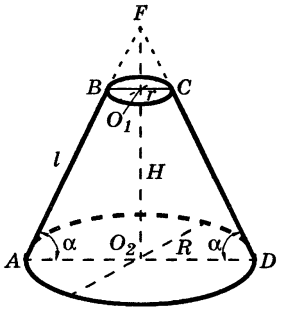


$$R_ш = \frac{R_к}{\sin\beta};\ R_ш^2 = (H - R_ш)^2 + R_к^2$$

$$R_ш = \frac{l^2}{2H};\ (2R_ш - H_к)\,H_к = R_к^2$$

Таблица 23. Усеченный конус

Усеченным конусом называется часть конуса, заключенная между основанием и параллельным основанию сечением конуса

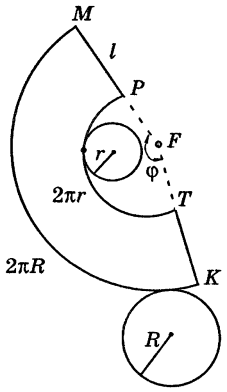


Круги с центрами O_1 и O_2 — *верхнее и нижнее основания усеченного конуса*,
r и R — радиусы оснований, отрезок $AB = l$ — *образующая*,
α — угол наклона образующей к плоскости нижнего основания, отрезок O_1O_2 — *высота* (расстояние между плоскостями оснований), трапеция $ABCD$ — *осевое сечение*.

$H = l \sin \alpha$

$H^2 + (R - r)^2 = l^2$

Развертка усеченного конуса — часть кругового кольца и два круга



Площадь боковой поверхности усеченного конуса

$S_{бок} = \pi l(r + R)$

Площадь полной поверхности усеченного конуса

$S_{полн} = S_1 + S_2 + S_{бок} =$
$\pi l(r + R) + \pi R^2 + \pi r^2$

$\angle MFK = \dfrac{2\pi(R - r)}{l} = \varphi$

φ — угол развертки

Объем усеченного конуса

$V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi H(R^2 + rR + r^2)$

Таблица 23. Усеченный конус

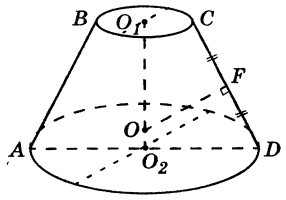
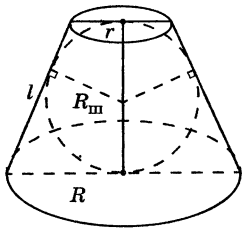
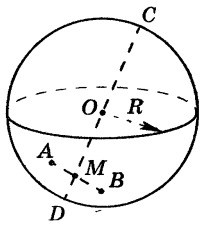
Около усеченного конуса всегда можно описать шар. Его центр лежит на прямой O_1O_2	 $CF = FD$; $OF \perp CD \Rightarrow$ $\Rightarrow O$ — центр описанного шара R — радиус описанного шара, равный радиусу окружности, описанной около $\triangle ACD$
В усеченный конус можно вписать шар тогда и только тогда, когда образующая равна сумме радиусов оснований. $R_ш = 0{,}5H$	 $l = R + r \Leftrightarrow$ существует вписанный шар

Таблица 24. Сфера и шар

Сферой называется множество точек пространства, удаленных от данной точки (центра сферы) на данное расстояние $R > 0$ (радиус сферы). (Сферой называют фигуру вращения полуокружности вокруг ее диаметра.)

Шаром называется множество точек пространства, находящихся от данной точки (центра шара) на расстоянии, не большем данного ($R > 0$ — радиус шара). (Шаром называют часть пространства, ограниченную сферой. Шаром называют фигуру вращения полукруга вокруг его диаметра.)	
Диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде	CD — диаметр сферы $A, B \in S$ $AM = MB \Rightarrow OM \perp AB$
Площадь поверхности сферы $S = 4\pi R^2$	**Объем шара** $V = \frac{4\pi R^3}{3}$

Шар (сфера) и плоскость

Плоскость, имеющая со сферой (шаром) одну общую точку, называется *касательной плоскостью*, более одной общей точки — *секущей плоскостью*.

Прямая, имеющая со сферой одну общую точку, называется *касательной* прямой, две общие точки — секущей прямой

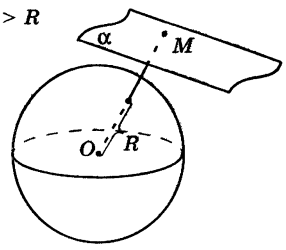
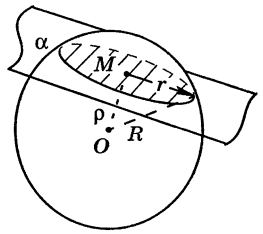
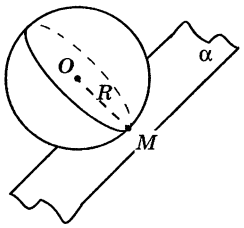
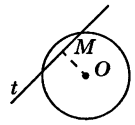
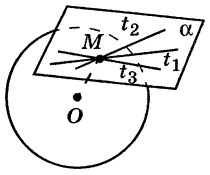
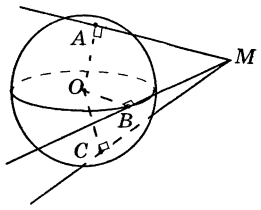
Пусть $\rho(O; \alpha)$ — расстояние от центра шара (сферы) с центром O и радиусом R до плоскости α. Если $\rho > R$, то шар (сфера) и плоскость общих точек не имеют	$\rho > R$  $OM \perp \alpha$; $OM = \rho(O, \alpha)$; $\rho > R$

Таблица 24. Сфера и шар

Если $\rho < R$, то пересечение шара (сферы) и плоскости есть круг (окружность) радиуса r. $r = \sqrt{R^2 - \rho^2}$ Всякое сечение шара (сферы) плоскостью есть круг (окружность)	$\rho < R$ 
Сечение шара плоскостью, проходящей через центр шара ($\rho = 0$), называется *большим кругом шара*. Эта плоскость является плоскостью симметрии шара и делит его на две равные части (два полушария)	$\rho = 0$ 
Признак касательной плоскости Если плоскость проходит через конец диаметра сферы и перпендикулярна ему, то эта плоскость касательная к сфере. Если $\rho = R$, плоскость и шар (сфера) имеют одну общую точку. Плоскость *касается* шара (сферы)	$\rho = R$ 
Свойство касательной плоскости Плоскость, касательная к сфере, перпендикулярна диаметру (радиусу), проходящему через точку касания	$OM \perp \alpha$
Признак касательной прямой Если прямая проходит через конец диаметра сферы и перпендикулярна ему, то эта прямая касательная к сфере	 $OM \cap t = M; OM \perp t \Rightarrow t$ — касательная
Все касательные прямые, проходящие через одну точку сферы, лежат в одной плоскости, касательной к этой сфере	 $t_1 \perp OM$; $t_2 \perp OM$; $t_3 \perp OM \Rightarrow$ $\Rightarrow t_1, t_2, t_3 \subset \alpha$; $\alpha \perp OM$

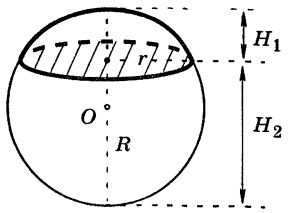
Отрезки касательных, проведенных из одной точки (лежащей вне сферы) к сфере, равны



A, B, C — точки касания $\Rightarrow$
$\Rightarrow MA = MB = MC$

Шаровой сегмент

Секущая плоскость разбивает шар на два *шаровых сегмента*.
H — высота сегмента, $0 < H < 2R$,
r — радиус основания сегмента,
$r = \sqrt{H(2R - H)}$



Объем шарового сегмента

$$V = \pi H^2\left(R - \frac{1}{3}H\right)$$

Площадь сферической поверхности шарового сегмента
$S = 2\pi RH$

Шаровой слой

Шаровым слоем называется часть шара, заключенная между двумя параллельными сечениями.
Расстояние (H) между сечениями называется *высотой слоя*, а сами сечения — *основаниями слоя*.
Площадь сферической поверхности (*объем*) шарового слоя может быть найдена как разность площадей сферических поверхностей (объемов) шаровых сегментов

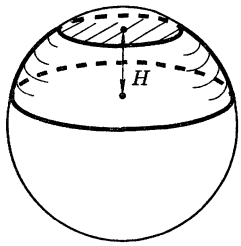


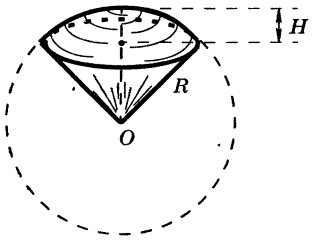
Таблица 24. Сфера и шар

Шаровой сектор

Шаровым сектором называется фигура вращения кругового сектора вокруг не имеющего с ним общих внутренних точек диаметра круга*

Объем шарового сектора

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$$



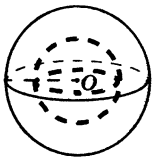
Площадь сферической поверхности шарового сектора равна площади сферической поверхности соответствующего шарового сегмента

Площадь полной поверхности шарового сектора

$$S = \pi R(2H + \sqrt{2RH - H^2})$$

Две сферы

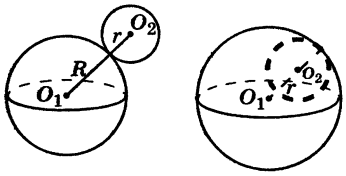
Две сферы, имеющие общий центр, называются *концентрическими*



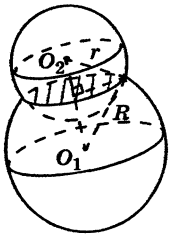
Две *сферы*, имеющие одну общую точку, *касаются* друг друга.

$O_1O_2 = R + r$ (внешнее касание)

$O_1O_2 = |R - r|$ (внутренее касание)



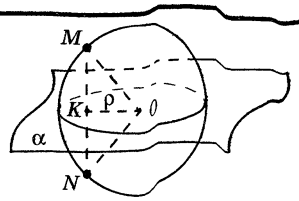
Если $|R - r| < O_1O_2 < R + r$, то *сферы пересекаются* по окружности, радиус которой может быть найден, например, как высота треугольника со сторонами R, r и O_1O_2, проведенная к стороне O_1O_2



* В школьном курсе обычно рассматривается вращение кругового сектора вокруг прямой, содержащий радиус, который ограничивает сектор.

Через две точки пространства можно провести бесконечное множество сфер. Их центры лежат на плоскости, проходящей через середину отрезка, перпендикулярно прямой, содержащей этот отрезок.

$R^2 = \rho^2 + 0{,}25a^2$

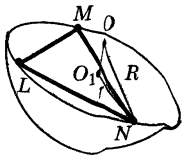


$MN = a$

$\rho = \rho\,(O, MN)$

Через три вершины треугольника можно провести бесконечное множество сфер. Их центры лежат на прямой, перпендикулярной плоскости треугольника и проходящей через центр описанной около треугольника окружности.

$R^2 = \rho^2 + r^2$



$\rho = \rho\,(O, (MLN))$

Через четыре не лежащие в одной плоскости точки можно провести сферу и притом только одну

Описанная сфера

Сфера называется *описанной около многогранника*, если она проходит через все его вершины

Для того чтобы около многогранника можно было описать сферу, необходимо (но недостаточно), чтобы около любой его грани можно было описать окружность

Центр описанной сферы (если таковая есть) лежит в плоскостях, перпендикулярных ребрам многогранника, проходящих через их середины; а также на прямых, перпендикулярных граням многогранника, проходящих через центры описанных около граней окружностей

Радиус описанной сферы равен радиусу сферы, проходящей через любые четыре, не лежащие в одной плоскости вершины многогранника

Около любой треугольной пирамиды можно описать сферу.

Около n-угольной пирамиды можно описать сферу тогда и только тогда, когда около ее основания можно описать окружность

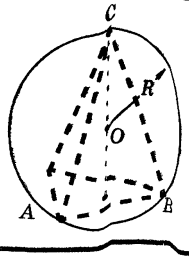
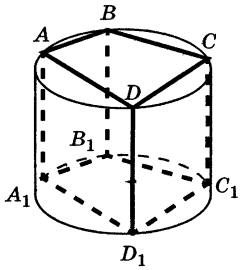
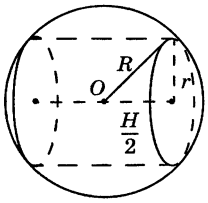
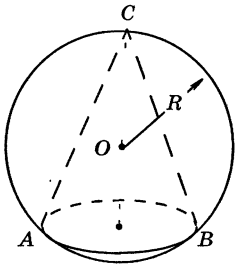
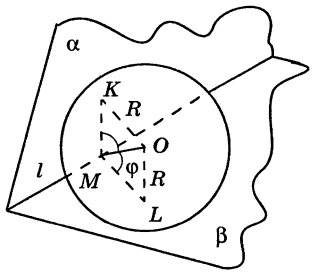


Таблица 24. Сфера и шар

Около призмы можно описать сферу тогда и только тогда, когда призма прямая и около ее основания можно описать окружность	
Сфера называется описанной около цилиндра, если на ней лежат окружности оснований цилиндра. Около цилиндра всегда можно описать сферу. $R^2 = 0{,}25H^2 + r^2$	
Сфера называется описанной около конуса, если на ней лежат вершина и окружность основания конуса. Около конуса всегда можно описать сферу; ее радиус равен радиусу окружности, описанной около осевого сечения конуса	
Если сфера касается граней двугранного угла, то ее центр лежит на полуплоскости, делящей этот двугранный угол на два равных двугранных угла. $R = OM \sin\varphi = ML \cdot \operatorname{tg}\varphi = m$, где 2φ — величина двугранного угла, OM — расстояние от центра сферы до ребра, m — расстояние от центра сферы до грани	 $MK \perp l$; $ML \perp l$ $OK \perp \alpha$; $OL \perp \beta$

Вписанная сфера

Сфера называется *вписанной в многогранник*, если она касается всех плоскостей, содержащих грани многогранника во внутренних точках граней

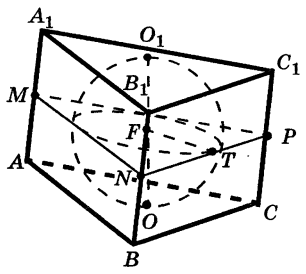
В треугольную пирамиду всегда можно вписать сферу.
В n-угольную пирамиду можно вписать сферу тогда и только тогда, когда биссекторные плоскости всех двугранных углов пирамиды имеют общую точку

В прямую призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда высота призмы равна диаметру окружности, вписанной в основание.
В призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда ее высота равна диаметру окружности, вписанной в ее перпендикулярное сечение

Если в многогранник можно вписать сферу, то:

$V = \frac{1}{3} RS_{\text{полн}}$, где

V — объем многогранника,
$S_{\text{полн}}$ — полная поверхность многогранника



Сфера называется вписанной в цилиндр, если она касается оснований цилиндра и цилиндрической поверхности.
В цилиндр можно вписать сферу тогда и только тогда, когда его высота (образующая) равна диаметру основания.
$R = 0{,}5H = R_{\text{сф}}$

Сфера называется вписанной в конус, если она касается основания конуса и конической поверхности.
В конус всегда можно вписать сферу.

$R = r \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = S_{\triangle ABC} : (r + l)$

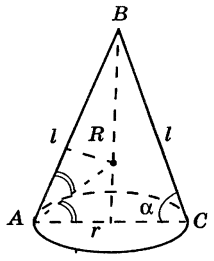
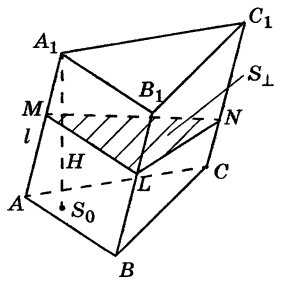


Таблица 25. Поверхности и объемы

Площадь полной поверхности многогранника равна сумме площадей его граней

Площадь боковой поверхности призмы можно вычислить как: сумму площадей боковых граней; произведение периметра перпендикулярного боковому ребру сечения призматической поверхности на длину бокового ребра.

$S_{бок} = P_{\perp} \cdot l$



Площадь полной поверхности призмы

$S_{полн} = 2S_0 + S_{бок}$

$(MLN) \perp AA_1$

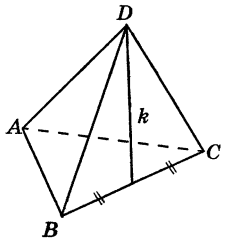
Площадь боковой поверхности пирамиды равна сумме площадей ее боковых граней.

Для правильной пирамиды

$S_{бок} = \frac{1}{2} Pk$

P — периметр основания

k — апофема

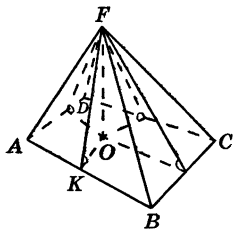


$S_{бок} = S_{\triangle ADC} + S_{\triangle ADB} + S_{\triangle BDC}$

Для пирамиды, все двугранные углы при основании которой равны между собой (все высоты боковых граней, проведенные к ребрам основания, равны).

$S_{бок} = \frac{S_0}{\cos \varphi}$

$S_0 = S_{ABCD}$



$\angle (F, (AB), C) = \angle FKO = \varphi$

Площадь полной поверхности пирамиды

$S_{полн} = S_0 + S_{бок}$

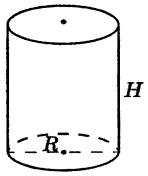
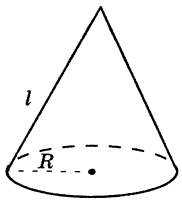
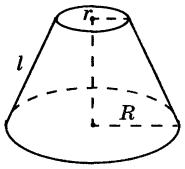
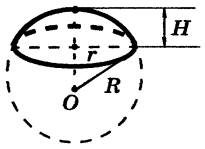
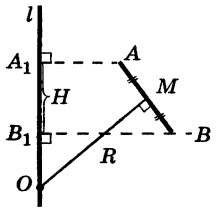
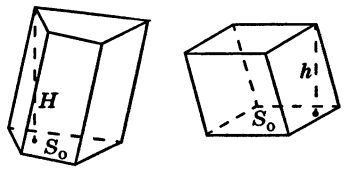
Площадь боковой поверхности цилиндра $S_{бок} = 2\pi RH$ *Площадь полной поверхности цилиндра* $S_{полн} = 2\pi R(R + H) = 2S_o + S_{бок}$	
Площадь боковой поверхности конуса $S_{бок} = \pi Rl$ *Площадь полной поверхности конуса* $S_{полн} = \pi R(R + l) = S_o + S_{бок}$	
Площадь боковой поверхности усеченного конуса $S_{бок} = \pi(R + r)l$ *Площадь полной поверхности усеченного конуса* $S_{полн} = \pi r^2 + \pi R^2 + \pi(R + r)l$	
Площадь поверхности сферы $S = 4\pi R^2$ *Площадь сферической поверхности сферического сегмента* $S_{бок} = 2\pi RH$ *Площадь полной поверхности сферического сегмента* $S_{полн} = S_{бок} + \pi r^2 = 2\pi RH + \pi r^2$	 $r^2 = R^2 - (R - H)^2 = (2R - H) \cdot H$
Поверхность вращения отрезка AB, не имеющего с осью l общих внутренних точек, равна произведению проекции этого отрезка на ось и длины окружности, радиусом которой служит отрезок серединного перпендикуляра отрезка с концами на оси и на отрезке	 $S = A_1B_1 \cdot 2\pi MO = 2\pi RH$
Отношение поверхностей подобных тел равно квадрату коэффициента подобия	

Таблица 25. Поверхности и объемы

Объемы равных тел равны.

Если тело разбито на несколько тел, не имеющих общих внутренних точек, то его объем равен сумме объемов этих тел.

Объем призмы равен:
произведению площади ее основания на высоту
$V = S_0H$;
произведению площади ее перпендикулярного сечения на боковое ребро
$V = S_\perp l$



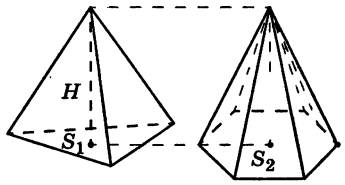
$V_1 = S_0 \cdot H$

$V_2 = S_0 \cdot h$

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{H}{h}$

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту.

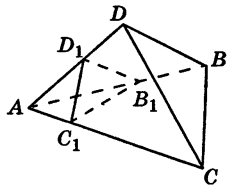
$V = \frac{1}{3} S_0H$



$V_1 = \frac{1}{3} S_1H$; $V_2 = \frac{1}{3} S_2H$; $\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2}$

Объемы призм (пирамид), имеющих равновеликие основания, относятся как их высоты. Объемы призм (пирамид), имеющих равные высоты, относятся как площади их оснований

Объемы тетраэдров, имеющих общий трехгранный угол, относятся как произведения ребер, содержащих этот угол

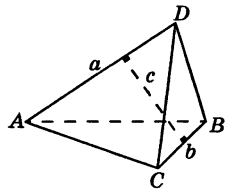


$\frac{V_{ABCD}}{V_{AB_1C_1D_1}} = \frac{AB \cdot AC \cdot AD}{AB_1 \cdot AC_1 \cdot AD_1}$

Объем тетраэдра может быть найден по формуле

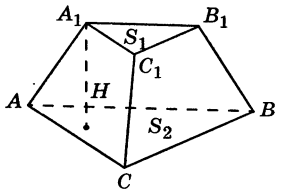
$V = \frac{1}{6} abc \sin \varphi$,

где a и b — длины скрещивающихся ребер, c — расстояние между ними, φ — угол между ними



Объем усеченной пирамиды

$$V = \frac{1}{3}H(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$$



Объем многогранника можно получить, разбив его на не имеющие общих внутренних точек тетраэдры (*триангуляция*) и суммировав их объемы

Если в многогранник можно вписать шар, то объем многогранника равен

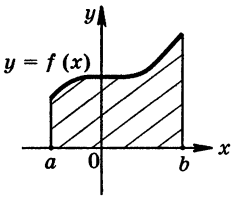
$V = \frac{1}{3}RS_{\text{полн}}$, где

R — радиус вписанного шара, $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности многогранника

Объем цилиндра	*Объем конуса*	*Объем усеченного конуса*
$V = \pi R^2 H$	$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$	$V = \frac{\pi}{3}H(R^2 + Rr + r^2)$
Объем шара	*Объем шарового сегмента*	*Объем шарового сектора*
$V = \frac{4}{3}\pi R^3$	$V = \pi H^2 \cdot \left(R - \frac{1}{3}H\right)$	$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$

Вычисление объема тела вращения с помощью интегралов.

$$V_{OX} = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$



Отношение объемов подобных тел равно кубу коэффициента подобия

Таблица 26. Метод координат

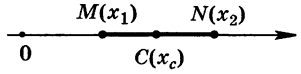
Координаты точки на прямой

Координаты середины отрезка.

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Длина отрезка в координатах (расстояние между двумя точками).

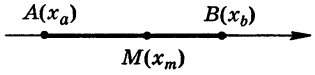
$MN = |x_1 - x_2|$



Точка M прямой AB делит отрезок AB в отношении λ (считая от A), если $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$ $(\lambda \neq -1)$.

Координаты точки, делящей отрезок AB в отношении λ.

$$x_m = \frac{x_a + \lambda x_b}{1 + \lambda}$$



Координаты точки на плоскости. Прямоугольная система координат

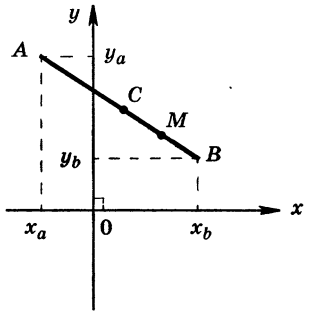
Координаты середины отрезка.

$AC = CB \Rightarrow$

$$\Rightarrow C\left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2}\right)$$

Длина отрезка в координатах.

$$AB = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$



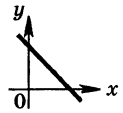
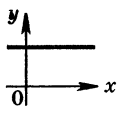
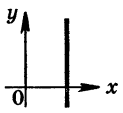
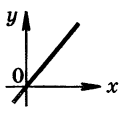
Координаты точки, делящей отрезок AB в отношении λ $(\lambda \neq -1)$.

$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB} \Rightarrow$

$$\Rightarrow M\left(\frac{x_a + \lambda x_b}{1 + \lambda}, \frac{y_a + \lambda y_b}{1 + \lambda}\right)$$

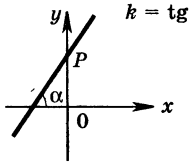
Уравнение прямой

Общее уравнение прямой l. $ax + by + c = 0 \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$

$abc \neq 0$	$a = 0$, $l \parallel Ox$	$b = 0$, $l \parallel Oy$	$c = 0$, $O \in l$
 $ax + by + c = 0$	 $by + c = 0$	 $ax + c = 0$	 $ax + by = 0$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом ($b \neq 0$).

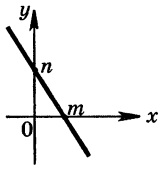
$y = kx + p$



$k = \operatorname{tg} \alpha$

Уравнение прямой в отрезках ($c \neq 0$).

$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$



Уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$ с угловым коэффициентом k	$y = y_0 + k \cdot (x - x_0)$
Условие параллельности двух прямых	$k_1 = k_2$
Условие перпендикулярности двух прямых	$k_1 \cdot k_2 = -1$
Угол между двумя (неперпендикулярными) прямыми	$\operatorname{tg} \varphi = \left\lvert \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right\rvert$
Расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $ax + by + c = 0$	$\frac{\lvert ax_0 + by_0 + c \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \rho(M, l)$
Уравнение пучка прямых (всех прямых, проходящих через точку $M(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(a, b)$)	$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

Таблица 26. Метод координат

Уравнение окружности	
с центром в начале координат	$x^2 + y^2 = r^2,\ r > 0$
с центром в точке $M(x_0, y_0)$	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,\ r > 0$

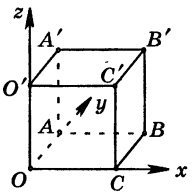
Любое уравнение вида $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ задает на плоскости либо окружность, либо точку, либо пустое множество.

$$\left(x + \frac{1}{2}a\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}b\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} - c$$

Координаты точки в пространстве. Прямоугольная система координат в пространстве

Координаты точек на кубе.

$O\ (0, 0, 0)$ $\quad A\ (0, a, 0)$
$B\ (a, a, 0)$ $\quad C\ (a, 0, 0)$
$O'\ (0, 0, a)$ $\quad A'\ (0, a, a)$
$B'\ (a, a, a)$ $\quad C'\ (a, 0, a)$

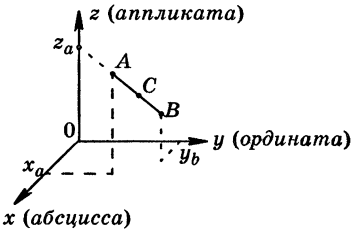


Координаты середины отрезка.
$AC = CB \Rightarrow$

$$C\left(\frac{x_a + x_b}{2},\ \frac{y_a + y_b}{2},\ \frac{z_a + z_b}{2}\right)$$

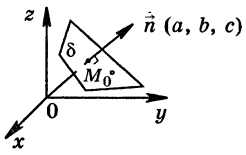
Длина отрезка в координатах.
$AB =$

$$= \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}$$

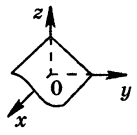
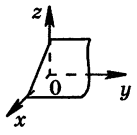
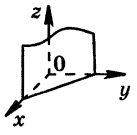
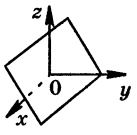


Координаты точки M, делящей отрезок AB в отношении λ, $\lambda \neq -1$.

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB} \quad \Rightarrow \quad M\left(\frac{x_a + \lambda x_b}{1 + \lambda},\ \frac{y_a + \lambda y_b}{1 + \lambda},\ \frac{z_a + \lambda z_b}{1 + \lambda}\right)$$

Уравнение плоскости	
Общее уравнение плоскости. $ax + by + cz + d = 0\ \ (a^2 + b^2 \neq 0)$	
Уравнения координатных плоскостей. $x = 0$ — плоскость yOz $y = 0$ — плоскость xOz $z = 0$ — плоскость xOy	$ax + by + cz + d = 0$ $\vec{n}\ (a, b, c) \perp \delta$ (нормальный вектор)

Частные уравнения плоскости

$a = 0$ $\delta \parallel Ox$	$b = 0$ $\delta \parallel Oy$	$c = 0$ $\delta \parallel Oz$	$d = 0$ $O \in l$
			
$by + cz + d = 0$	$ax + cz + d = 0$	$ax + by + c = 0$	$ax + by + cz = 0$

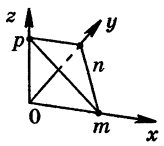
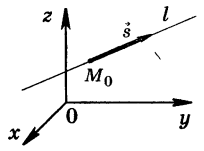
Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$, перпендикулярно вектору $\vec{n}\,(a, b, c)$	$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$
Уравнение плоскости в отрезках ($d \neq 0$)	 $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$
Угол между двумя плоскостями $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$	$\cos\varphi = \frac{\lvert a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2\rvert}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$
Условие параллельности двух плоскостей	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$
Условие перпендикулярности двух плоскостей	$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$
Расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $ax + by + cz + d = 0$	$\rho = \frac{\lvert ax_0 + by_0 + cz_0 + d\rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Таблица 26. Метод координат

Параметрическое уравнение прямой (проходящей через точку M_0 параллельно вектору $\vec{s}$). $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}$	 $\vec{s} \parallel l$ $\vec{s}$ — направляющий вектор прямой $M_0\,(x_0, y_0, z_0) \in l$ $\vec{s}(\alpha, \beta, \gamma) \parallel l$
Уравнение прямой, проходящей через две точки $M(x_1, y_1, z_1)$ и $N(x_2, y_2, z_2)$	$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$
Угол между двумя прямыми, заданными в параметрической форме	$\cos\varphi = \dfrac{\lvert\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2\rvert}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2} \cdot \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2}}$
Условие параллельности прямых, заданных параметрически	$\alpha_1 : \alpha_2 = \beta_1 : \beta_2 = \gamma_1 : \gamma_2$
Угол между прямой и плоскостью	$\sin\varphi = \dfrac{\lvert a\alpha + b\beta + c\gamma\rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$

Уравнение сферы

с центром в начале координат	$x^2 + y^2 + z^2 = r^2;\ r > 0$
с центром в точке $M(x_0, y_0, z_0)$	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ $r > 0$

Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ задает в пространстве либо сферу, либо точку, либо пустое множество.

$$\left(x + \frac{1}{2}a\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}b\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}c\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d$$

Таблица 27. Векторы и координаты

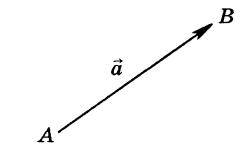
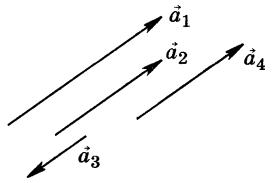
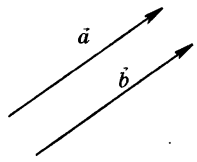
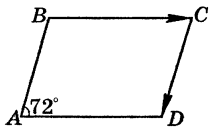
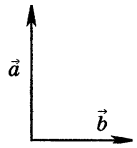
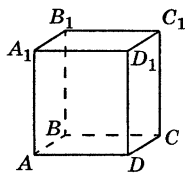
Вектором называется направленный отрезок. Вектор характеризуется *направлением* и *длиной*. *Направление* — множество сонаправленных лучей. *Длина вектора* $\lvert\vec{a}\rvert$ — *расстояние* от начала вектора до его конца	 $AB = \lvert\vec{a}\rvert = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert$
Коллинеарные векторы. Сонаправленные и противоположно направленные векторы	 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ — коллинеарные векторы ($\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \parallel \vec{a}_3 \parallel \vec{a}_4$) $\vec{a}_1 \uparrow\uparrow \vec{a}_2$ — сонаправленные векторы $\vec{a}_3 \downarrow\uparrow \vec{a}_4$ — противоположно направленные векторы
Равенство векторов	 $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \\ \lvert\vec{a}\rvert = \lvert\vec{b}\rvert \end{cases}$
Угол между векторами	 $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}) = \angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = 108°$ $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 72°$ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$ $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \angle(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = 72°$

Таблица 27. Векторы и координаты

Ортогональные векторы. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$	 $\vec{a} \perp \vec{b}$ — ортогональные векторы
Компланарные векторы — это векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях	 $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B_1B}$ — компланарные $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{D_1A_1}, \overrightarrow{C_1B_1}$ — компланарные $\overrightarrow{DD_1}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}$ — некомпланарные

Пример 1 (нахождение угла между двумя векторами на плоскости)

$\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 135°$; $\angle(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CD}) = 45°$.

Если $|\overrightarrow{AB}| = 2$; $|\overrightarrow{BC}| = 1$, то

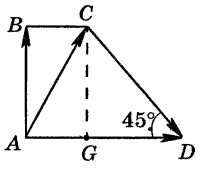
$\angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{GD}) = \operatorname{arctg} 2$; $\angle(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DC}) = \pi - \angle BDC$.

По теореме косинусов:

$BC^2 = BD^2 + DC^2 - 2BD \cdot DC \cdot \cos \angle BDC$.

$1 = 13 + 8 - 2\sqrt{13} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \cos \angle BDC$.

$\angle BDC = \arccos \frac{5\sqrt{26}}{26} \Rightarrow \angle(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DC}) = \pi - \arccos \frac{5\sqrt{26}}{26}$



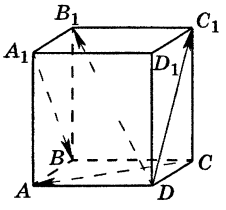
Пример 2 (нахождение угла между двумя векторами в пространстве)

$\angle(\overrightarrow{A_1B}; \overrightarrow{DC_1}) = 90°$; $\angle(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{DB_1}) = 90°$.

$\angle(\overrightarrow{DC_1}; \overrightarrow{CA}) = \angle(\overrightarrow{DC_1}, \overrightarrow{C_1A_1}) = 120°$, так как $\triangle DC_1A_1$ — равносторонний.

$\angle(\overrightarrow{DB_1}; \overrightarrow{DC}) = \angle D$ в $\triangle DB_1C \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle(\overrightarrow{DB_1}, \overrightarrow{DC}) = \operatorname{arctg} \sqrt{2}$

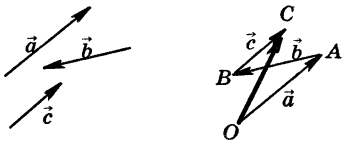


Сложение векторов

Правило ломаной.

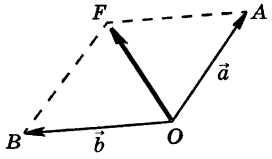
$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$,

где $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$



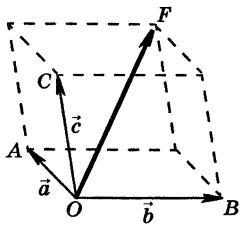
Правило параллелограмма.

$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OF}$



$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$; $OBFA$ — параллелограмм $\Rightarrow \overrightarrow{OF} = \vec{a} + \vec{b}$

Правило параллелепипеда.



$\overrightarrow{OF} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

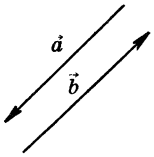
Законы сложения

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

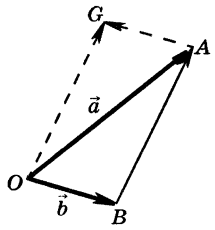
Противоположные векторы.



$\left.\begin{matrix} |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{a} = -\vec{b}$; $\vec{b} = -\vec{a}$; $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$

Вычитание векторов

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

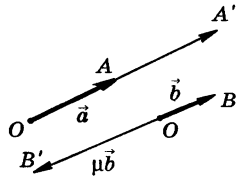
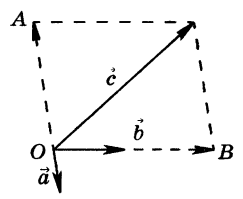
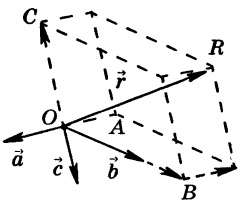


$\overrightarrow{AG} = -\vec{b}$; $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OG}$

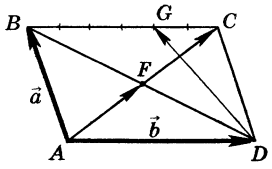
$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$

Таблица 27. Векторы и координаты

Умножение вектора на число	
Законы умножения вектора на число (скаляр). $\alpha \cdot (\lambda\vec{a}) = (\alpha\lambda) \cdot \vec{a}$ $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ $(\alpha + \lambda)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \lambda\vec{a}$ $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$	$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OA'} = \lambda \cdot \vec{a}$ $(\lambda > 0)$ $\lvert\overrightarrow{OA'}\rvert = \lambda \cdot \lvert\vec{a}\rvert$ $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{OB'} = \mu \cdot \vec{b}$ $(\mu < 0)$ $\lvert\overrightarrow{OB'}\rvert = -\mu \cdot \lvert\vec{b}\rvert$ $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$
Разложение вектора $\vec{c}$ на плоскости по двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $(\vec{a} \nparallel \vec{b})$	 $\vec{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = x\vec{a} + y\vec{b}$ — разложение вектора $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$; $\vec{a} \nparallel \vec{b}$
Разложение пространственного вектора $\vec{r}$ по трем некомпланарным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$	 $\vec{r} = \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} =$ $= x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ — разложение вектора $\vec{r}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, где $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некомпланарны

Примеры разложения вектора

Пример 1.



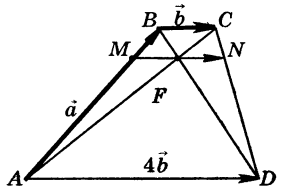
$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$; $BG : GC = 2$

$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG} = \vec{a} + \left(-\frac{1}{3}\right)\vec{b} = \vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

Пример 2.



$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$; $AD = 4BC \Rightarrow \overrightarrow{AD} = 4\vec{b}$

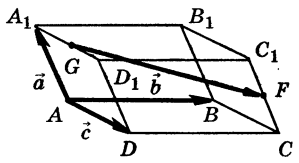
$\overrightarrow{AF} = \frac{4}{5}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b}$

$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AF} = 4\vec{b} - \left(\frac{4}{5}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b}\right) =$

$= -\frac{4}{5}\vec{a} + \frac{16}{5}\vec{b}$

$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{FN} = 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\vec{b}\right) = \frac{8}{5}\vec{b} = 0 \cdot \vec{a} + \frac{8}{5}\vec{b}$

Пример 3.



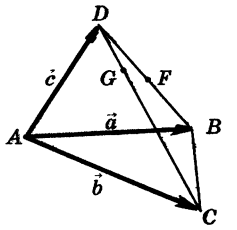
$\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$

$A_1G = GD_1$; $C_1F = FC$

$\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \left(-\frac{1}{2}\vec{c}\right) +$

$+ (-\vec{a}) + (\vec{b} + \vec{c}) + \left(\frac{1}{2}\vec{a}\right) = -\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

Пример 4.



$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$; $DG = \frac{1}{4}CD$; $DF = FB$

$\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AC} = \left(-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}\right) + \vec{b} =$

$= -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

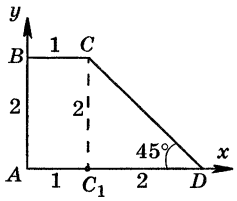
$\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} =$

$= \frac{1}{4}(\vec{c} - \vec{b}) + \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{c}) = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c}$

Таблица 27. Векторы и координаты

Условие коллинеарности двух векторов	$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0} \\ x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases}$ $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda\vec{b}$ или $\vec{b} = \mu\vec{a}$, если $\vec{a} \neq \vec{0}$; $\vec{b} \neq \vec{0}$
Условие компланарности трех векторов	$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — компланарные векторы $\Leftrightarrow \begin{cases} x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0} \\ x^2 + y^2 + z^2 \neq 0 \end{cases}$ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — ненулевые компланарные векторы, $\Rightarrow$ $\Rightarrow \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$
Скалярное умножение векторов	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \cos \angle (\vec{a}, \vec{b})$
Законы скалярного умножения	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ $\vec{a} \cdot \vec{a} \geqslant 0$; $\vec{a} \cdot \vec{a} = \lvert\vec{a}\rvert^2$ $-\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \leqslant \vec{a} \cdot \vec{b} \leqslant \lvert\vec{a} \cdot \vec{b}\rvert$ $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \text{пр}_a \vec{b} = \lvert\vec{b}\rvert \cdot \text{пр}_b \vec{a}$
Формулы применения скалярного умножения к решению задач	$\cos \angle (\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert}$ $\text{пр}_b \vec{a} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{b}\rvert}$

Пример 1. Определить угол между $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{DC}$.



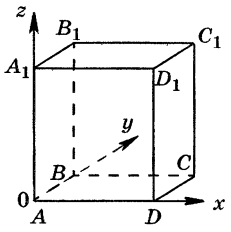
Введем систему координат. Тогда B (0, 2); C (1, 2); D (3, 0); $\overrightarrow{BD}$ (3, −2); $\overrightarrow{DC}$ (−2, 2).

$$\cos \angle(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DC}) = \frac{\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC}}{\lvert\overrightarrow{BD}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{DC}\rvert} =$$

$$= \frac{3 \cdot (-2) + (-2) \cdot 2}{\sqrt{3^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 2^2}} = \frac{-5}{\sqrt{26}} = -\frac{5\sqrt{26}}{26}.$$

$$\angle(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DC}) = \pi - \arccos \frac{5\sqrt{26}}{26}$$

Пример 2. Определить $\angle(\overrightarrow{DC_1}, \overrightarrow{CA}) = \alpha$.



Введем систему координат. Тогда $A(0, 0, 0)$; $C(a, a, 0)$; $D(a, 0, 0)$; $C_1(a, a, a)$;

$\overrightarrow{DC_1}(0, a, a)$; $\overrightarrow{CA}(-a, -a, 0)$.

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{DC_1} \cdot \overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{DC_1}| \cdot |\overrightarrow{CA}|} =$$

$$= \frac{0 \cdot (-a) + a \cdot (-a) + a \cdot 0}{\sqrt{0^2 + a^2 + a^2} \cdot \sqrt{(-a)^2 + (-a)^2 + 0^2}} = \frac{-a^2}{2a^2} = \frac{-1}{2}.$$

Следовательно, $\alpha = \angle(\overrightarrow{DC_1}, \overrightarrow{CA}) = 120°$

Координаты вектора на плоскости. Основные формулы

Если вектор $\vec{a}$ *плоскости* имеет координаты (x_1, y_1), а вектор $\vec{b}$ имеет координаты (x_2, y_2), то:	$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ $k\vec{a} = (kx_1, ky_1)$; $k \in R$ $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)$ $\alpha, \beta \in R$ $\vec{a}\,\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$
Длина вектора в координатах на плоскости	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, где $\vec{a}(x_1, y_1)$
Угол между двумя векторами на плоскости	$\angle(\vec{a}, \vec{b}) =$ $= \arccos \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$, где $\vec{a}(x_1, y_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2)$
Условие коллинеарности векторов $\vec{a}(x_1, y_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2)$ на плоскости	$x_1 : x_2 = y_1 : y_2$ или $\begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2 \end{cases}$ или $\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 = 0 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \end{cases}$
Условие ортогональности векторов $\vec{a}(x_1, y_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2)$ на плоскости	$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

Таблица 27. Векторы и координаты

Координаты вектора в пространстве. Основные формулы

Если вектор $\vec{a}$ *пространства* имеет координаты (x_1, y_1, z_1), а вектор $\vec{b}$ имеет координаты (x_2, y_2, z_2), то:	$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ $k\vec{a} = (kx_1, ky_1, kz_1)$; $k \in R$ $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2,$ $\alpha z_1 + \beta z_2)$; $\alpha, \beta \in R$ $\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$
Длина вектора в координатах в пространстве	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$; $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$

Угол между двумя векторами в пространстве.

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\ \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$

Условие коллинеарности векторов $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ в пространстве	$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow x_1 : x_2 = y_1 : y_2 = z_1 : z_2$ или $\left.\begin{aligned} x_1 &= \lambda x_2 \\ y_1 &= \lambda y_2 \\ z_1 &= \lambda z_2 \end{aligned}\right\}$ или $\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 = 0 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 = 0 \\ \alpha z_1 + \beta z_2 = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \end{cases}$
Условие ортогональности векторов $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ в пространстве	$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

Предметный указатель

Аксиома параллельности 8
Апофема правильной пирамиды 82
— правильного многоугольника 43, 88
Биссектриса треугольника 15
— угла 6
— внешнего угла треугольника 15, 22
Векторные формулы. . . . 120—122
Векторы 115
Вертикальные углы 7
Вневписанная окружность 22
Вписанная окружность. . . . 17, 36
— сфера 105
Вписанный угол 33
Высота ромба 24
— трапеции 26
— треугольника 14
Высоты параллелограмма 23
Градусная мера 6
Две сферы (расположение) . . . 102
— окружности (расположение) . 32
Двугранный угол. 65
Деление отрезка в отношении 110, 112
— на равные части 9
Длина окружности. 29
Додекаэдр. 90
Достаточное условие 5
Дуга окружности. 29
Икосаэдр 90
Касательная к окружности 31, 34, 35
— плоскость к шару 100
Катет против угла 30°. 19
Квадрат 25
Коллинеарные векторы . . . . . 115, 120—122
Компланарные векторы . 116, 120
Конус и цилиндр. 93
Конус. 95
Концентрические окружности . . 32
Координатные формулы . 111—114
Косинус угла в прямоугольном треугольнике. 18
Круг. 30
Куб 79, 90
— и сфера. 79
— и тетраэдр. 91
Линейный угол двугранного угла 65
Луч 6
Медиана треугольника 14
Метод координат 110
Многогранный угол 67
Наклонная 63
Необходимое условие 5
Необходимое и достаточное условие. 5
Неравенства в трапеции 26
Неравенство треугольника 12
Обратная теорема. 5
Общие касательные двух окружностей 34, 35
Объем конуса 96
— параллелепипеда 77
— пирамиды 81
— призмы. 75
— тела вращения. 109
— усеченного конуса 97
— усеченной пирамиды 86
— цилиндра 92
— шара 99
— шарового сегмента 101
— — сектора. 102
Объемы тел (формулы) . . 108, 109
Окружность 11, 29
— Аполлония 11
— вписанная в четырехугольник 36
— — в угол. 31
— и прямая 31
— и трапеция 28
— описанная около четырехугольника. 37
Октаэдр 90
— и шар. 91
— и куб 91
Описанная окружность. 37
— сфера 103, 104
Ортогональная проекция 72
Ортогональные векторы 116
Ортоцентр треугольника. 14
Осевое сечение цилиндра 92

Параллельные прямые в пространстве 47, 48
Параллелепипед 77
Параллелограмм 23
Параллельная проекция 73
Параллельность плоскостей 49, 50
— прямой и плоскости 48
Перпендикулярность прямой плоскости 51, 52
— плоскостей 51, 52, 66
— прямых 62
Пирамида 80
Плоский угол трехгранного угла 67
— — при вершине пирамиды . . 80
Площади поверхностей тел 106, 107
Площадь круга 43
— параллелограмма 24, 38
— поверхности конуса 95
— — пирамиды 81
— — призмы 75
— — сферы 99
— — усеченного конуса 97
— — усеченной пирамиды 86
— — цилиндра 92
— — шарового сегмента 101
— правильного многоугольника 43, 88
— проекции многоугольника . . 73
— прямоугольника 25
— ромба 24
— ромбоида 42
— сегмента в круге 44
— сектора в круге 43
— треугольника . . . . . 16, 38—40
— четырехугольника 42
Построение сечения куба . . 70, 71
— в пространстве 68, 69
Правильная призма 76
Правильные многогранники 90, 91
— многоугольники 88, 89
Правильный треугольник 21
Правильная пирамида 82
Призма 74
— и цилиндр 76, 77
Признаки параллельности плоскостей 49
— параллелограмма 24
— параллельности прямых . . 8, 48
— подобия треугольников 13
— прямоугольника 25
— ромба 24
Проекция (свойства) 72
Пропорциональные отрезки в трапеции 27, 28
— — в круге 30, 31
Противоположная теорема 5
Прямая призма 75
Прямой параллелепипед 78
Прямоугольник 25
Прямоугольный параллелепипед 78
— треугольник 17
Равнобедренный треугольник . . 20
Равнобокая (равнобедренная) трапеция 28
Равносторонний треугольник . . 21
Радианная мера 6
Радиус вписанной окружности 17, 36
Развертка конуса 95
— усеченного конуса 97
— цилиндра 92
Развертки многогранника 90
Разложение вектора 118
Расстояние от точки до плоскости 113
— — до прямой 111
Расстояния в пространстве . 55—58
Решение прямоугольных треугольников 19
Ромб 24
Свойства ромба 24
— параллелепипеда 77, 78
— параллелограмма 23
— проекций 72
— прямоугольника 25
— диагоналей параллелограмма 23
— параллельных сечений пирамиды 80
— равнобокой трапеции 28
Свойство диагоналей параллелепипеда 78
Сегмент круга 30
Секущая окружности 31
Серединный перпендикуляр отрезка 10, 30
— — треугольника 16
Сечение шара плоскостью 100
Сечение конуса 96
— цилиндра 94

Симметричность отношения 5
Синус угла в прямоугольном треугольнике. 18
Скрещивающиеся прямые . 45, 47
Смежные углы 7
Средняя линия трапеции 26
Сфера. 60, 99
— вписанная в двугранный угол 104
— и конус. 96, 98, 105
— и многогранники. 105
— и цилиндр. 104
— проходящая через заданные точки 103
Тангенс угла в прямоугольном треугольнике. 18
Теорема косинусов. 16
— — трехгранного угла 67
— Менелая 22
— о четырех точках трапеции. . 27
— о трех перпендикулярах. . . . 52
— Пифагора 17
— Птолемея 37
— синусов. 16
— — трехгранного угла 67
— Стюарта 22
— Фалеса 9
— Чевы 21
— Эйлера для многогранников . 90
Тетраэдр. 81
— и куб 92
— правильный 82
Транзитивность отношений. 5
Трапеция 26
Трехгранный угол 67
Триангуляция 42, 109
Тригонометрические функции в прямоугольном треугольнике . 18
Углы 6
— в окружности 33
— при параллельных и секущей .8
— треугольника (свойства) 12
— между прямыми в пространстве. 62
Угол между наклонной и плоскостью 53, 63
— — плоскостями 66
— — прямой и плоскостью. . . . 63
— — хордой и касательной. . . . 33
— правильного многоугольника 88
— при вершине развертки конуса 95
Уравнение окружности. 112
— плоскости 112, 113
— прямой. 111
— сферы. 114
Усеченная пирамида 86
Усеченный конус. 97
Хорда окружности (круга) 29
Центр вписанной окружности 17, 36
— описанной окружности. . 17, 37
— правильного многоугольника. 88
— тяжести треугольника 14
Центральный угол 33
Цилиндр. 92
— и конус. 93
— и призма. 93
— и шар. 93
Цилиндрическая поверхность . . 59
Шар. 99
— и плоскость. 99, 100
Шаровой сегмент. 101
— сектор 102
— слой. 101

Греческий алфавит						Латинский алфавит					
A	α	альфа	N	ν	ню	A	a	а	N	n	эн
B	β	бета	Ξ	ξ	кси	B	b	бе	O	o	о
Γ	γ	гамма	O	o	омикрон	C	c	це	P	p	пэ
Δ	δ	дельта	П	π	пи	D	d	де	Q	q	ку
E	ε	эпсилон	P	ρ	ро	E	e	э	R	r	эр
Z	ζ	дзета	Σ	σ	сигма	F	f	эф	S	s	эс
H	η	эта	T	τ	тау	G	g	же	T	t	тэ
Θ	θ	тета	Y	υ	ипсилон	H	h	аш	U	u	у
I	ι	йота	Φ	φ	фи	I	i	и	V	v	вэ
K	æ	каппа	X	χ	хи	J	j	жи	W	w	дубль-вэ
Λ	λ	лямбда	Ψ	ψ	пси	K	k	ка	X	x	икс
M	μ	мю	Ω	ω	омега	L	l	эль	Y	y	игрек
						M	m	эм	Z	z	зет

Содержание

От авторов 3

Таблица 1. Элементы теории доказательств 5

Планиметрия

Таблица 2. Углы и параллельность 6

Таблица 3. Множества (геометрические места) точек на плоскости 10

Таблица 4. Треугольник 12

Таблица 5. Параллелограмм 23

Таблица 6. Трапеция 26

Таблица 7. Окружность 29

Таблица 8. Площади 38

Стереометрия

Таблица 9. Основные аксиомы и определения 45

Таблица 10. Теоремы стереометрии 47

Таблица 11. Расстояния в пространстве 55

Таблица 12. Множества точек пространства, связанные с расстояниями 59

Таблица 13. Углы в пространстве 62

Таблица 14. Основные задачи на построение в пространстве . . . 68

Таблица 15. Построение сечения куба 70

Таблица 16. Ортогональное проектирование 72

Таблица 17. Призма 74

Таблица 18. Пирамида 80

Таблица 19. Усеченная пирамида 86

Таблица 20. Правильные многоугольники и многогранники . . . 88

Таблица 21. Цилиндр 92

Таблица 22. Конус 95

Таблица 23. Усеченный конус 97

Таблица 24. Сфера и шар 99

Таблица 25. Поверхности и объемы 106

Таблица 26. Метод координат 110

Таблица 27. Векторы и координаты 115

Предметный указатель 123

Греческий и латинский алфавиты 126

ГЕОМЕТРИЯ В ТАБЛИЦАХ

7—11 классы

Справочное пособие

Авторы-составители:
Звавич Леонид Исаакович
Рязановский Андрей Рафаилович

Ответственный редактор *М. Г. Циновская*
Оформление *А. В. Кузнецов*
Компьютерная верстка *О. А. Молочков*
Компьютерная графика *О. А. Молочков, С. А. Белых, И. С. Павлова*
Корректор *Г. И. Мосякина*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.15.953.Д.005481.08.04 от 25.08.2004.

Подписано к печати 07.06.05. Формат $84 \times 108\,^1/_{32}$.
Бумага типографская. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,72. Тираж 10 000 экз. Заказ № 5278.

ООО «Дрофа». 127018, Москва, Сущевский вал, 49.

Предложения и замечания по содержанию и оформлению книги просим направлять в учебную редакцию издательства «Дрофа»: 127018, Москва, а/я 79. Тел.: (095) 795-05-41. E-mail: chief@drofa.ru

По вопросам приобретения продукции издательства «Дрофа» обращаться по адресу:
127018, Москва, Сущевский вал, 49.
Тел.: (095) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (095) 795-05-52.

Торговый дом «Школьник».
109172, Москва, Малые Каменщики, д. 6, стр. 1А.
Тел.: (095) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.

Сеть магазинов «Переплетные птицы».
Тел.: (095) 912-45-76.

Отпечатано с готовых диапозитивов на ФГУП ордена «Знак Почета» Смоленская областная типография им. В. И. Смирнова.
214000, г. Смоленск, проспект им. Ю. Гагарина, 2.