С. А. Шестаков

ЕГЭ 2017. Математика
Задачи с параметром

Задача 18 (профильный уровень)

Под редакцией И. В. Ященко

Издание соответствует новому Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС)

Москва
Издательство МЦНМО
2017

УДК 373:51
ББК 22.1я72
Ш51

Шестаков С. А.

Ш51 ЕГЭ 2017. Математика. Задачи с параметром. Задача 18 (профильный уровень) / Под ред. И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2017. — 288 с.

ISBN 978-5-4439-1088-8

Пособия по математике серии «ЕГЭ 2017. Математика» ориентированы на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче единого государственного экзамена по математике. В данном учебном пособии представлен материал для подготовки к решению задачи 18.

На различных этапах обучения пособие поможет обеспечить уровневый подход к организации повторения, осуществить контроль и самоконтроль знаний по темам «Уравнения и системы уравнений», «Неравенства и системы неравенств», «Задачи с параметром».

По сравнению с прошлым годом книга существенно доработана и дополнена.

Пособие предназначено для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

Издание соответствует новому Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.1я72

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации Московский центр непрерывного математического образования включён в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, допущенных к использованию в образовательном процессе.

ISBN 978-5-4439-1088-8

© Шестаков С. А., 2017.
© МЦНМО, 2017.

Предисловие

Эта книга в значительной своей части посвящена уравнениям и неравенствам с параметрами, т. е. уравнениям и неравенствам, содержащим наряду с неизвестной величиной ещё и буквенные параметры, при различных числовых значениях которых меняется число решений уравнения или неравенства, а иногда и его вид. Решение задач с параметрами предполагает, в сущности, определённую исследовательскую деятельность, требующую внимания и уверенного владения материалом школьной программы по математике во всей её полноте, умения выдвигать и проверять гипотезы, проводить (в том числе и достаточно разветвлённые) логические построения и делать выводы. Поэтому такие задания относятся к сложным и располагаются в вариантах вступительных экзаменов и ЕГЭ по математике на последних позициях, предназначенных для тех выпускников и абитуриентов, которые претендуют на высокий экзаменационный балл.

По формулировке любую задачу с параметром можно отнести к одной из двух следующих групп:

— найти все значения параметра, для каждого из которых выполняются те или иные условия (уравнение, неравенство или система имеют определённое число решений; решение принадлежит определённому множеству или удовлетворяет определённым ограничениям и т. п.; сами решения находить при этом, как правило, не требуется);

— найти все значения параметра, при каждом из которых задача имеет хотя бы одно решение, и указать эти решения для каждого такого значения параметра (кратко: «при каждом значении параметра решить уравнение (неравенство, систему)».

В дальнейшем для экономии места условия задач второй группы будем иногда приводить именно в краткой формулировке.

Разумная классификация задач с параметром по методам решений достаточно затруднительна, поскольку каждая из них является в определённой степени нестандартной. В этой книге, как и в книге [1], послужившей для неё своего рода прообразом, задачи классифицируются по принципу «ключевой идеи» — идеи, позволяющей найти ключ к решению. В пояснительных текстах параграфов разъясняются эти идеи и приводятся примеры с решениями, иллюстрирующими применение этих идей. В каждом параграфе приведены упражнения для самостоятельного решения, позволяющие закрепить и отработать изученный материал. Большинство задач взяты из опубликованных

вариантов вступительных экзаменов и предметных олимпиад в различные вузы, открытых вариантов диагностических и тренировочных работ и ЕГЭ по математике; некоторые задачи составлены специально для этой книги.

Наряду с задачами с параметрами в книгу включены уравнения, неравенства и системы, которые принято считать нестандартными, поскольку их сведение к простейшим уравнениям и неравенствам основано не на стандартных алгебраических преобразованиях, а на иных идеях (монотонности, ограниченности, инвариантности, графических или геометрических интерпретациях и т. п.), аналогичных тем, что применяются для решения части задач с параметром.

По сравнению с прошлым годом книга существенно доработана и дополнена.

Автор признателен и благодарен О. А. Васильевой за внимательное и неравнодушное чтение рукописи, замечания и предложения, в немалой степени способствовавшие улучшению книги.

[1] *Шестаков С. А.*, *Юрченко Е. В.* Уравнения с параметром. Учебно-методическое пособие. — М.: Слог, 1993. — 110 с.

Глава 1. Логический перебор в задачах с параметром и нестандартных задачах

Эта глава посвящена своего рода знакомству с уравнениями, неравенствами и их системами, содержащими параметры: здесь представлены задачи, для решения которых не требуются какие-то специальные знания, алгоритмы или идеи — достаточно устойчивых навыков решения основных типов уравнений и неравенств, умения выполнять стандартные алгебраические преобразования и делать не слишком сложный и разветвлённый логический перебор. Так, например, уравнение $(a^2-a)x^2+2ax-3a^2+4a=0$ при $a=1$ является линейным уравнением $2x+1=0$ с единственным корнем $x=-0{,}5$; при $a=0$ обращается в тождество $0=0$, которое выполняется при любом значении x (это означает, что корнем данного уравнения при $a=0$ является любое действительное число); при значениях a, отличных от 0 или 1, данное уравнение является квадратным и либо не имеет действительных корней (если дискриминант уравнения отрицателен), либо имеет один корень (если дискриминант уравнения равен нулю), либо имеет два корня (при положительном дискриминанте). Уже из приведённого примера ясно, что для успешного решения подобных задач требуются наряду с базовыми навыками решения линейных и квадратных уравнений внимательность и скрупулёзность при анализе условия и логическом переборе возможных значений параметра.

§ 1.1. Линейные уравнения и неравенства с параметром

К числу самых простых задач с параметром относятся линейные уравнения и неравенства, а также их системы. Любое линейное уравнение с параметром может быть сведено к виду $f(a)\cdot x=g(a)$, а неравенство — к виду $f(a)\cdot x\vee g(a)$ (здесь a — параметр, $f(a)$ и $g(a)$ — алгебраические выражения, «$\vee$» — один из четырёх возможных знаков неравенств: «$>$», «$<$», «$\geqslant$», «$\leqslant$»). Такой вид линейного уравнения (неравенства) с параметром будем называть стандартным. Линейные уравнения и неравенства после приведения к стандартному виду обычно решаются с помощью логического перебора. В некоторых задачах, прежде чем перейти к исследованию линейного уравнения или неравенства, необходимо сделать замену переменной.

Для того чтобы ответить на вопрос о числе корней уравнения $f(a)\cdot x = g(a)$ (и при необходимости найти эти корни), достаточно рассмотреть два случая: 1) $f(a)=0$; 2) $f(a)\neq 0$. В первом случае число корней уравнения зависит от $g(a)$: если $f(a)=0$, а $g(a)\neq 0$, то корней нет; если $f(a)=0$ и $g(a)=0$, уравнение принимает вид $0\cdot x=0$, и его корнем является любое действительное число. Во втором случае уравнение имеет единственный корень $x=\dfrac{g(a)}{f(a)}$.

Для ответа на вопрос о решениях неравенства $f(a)\cdot x<g(a)$ нужно рассмотреть три случая: 1) $f(a)>0$; 2) $f(a)<0$; 3) $f(a)=0$. В первом случае при делении обеих частей неравенства на положительное число $f(a)$ знак неравенства не меняется, и тогда $x<\dfrac{g(a)}{f(a)}$, т. е. решение неравенства — промежуток $\left(-\infty;\dfrac{g(a)}{f(a)}\right)$. Во втором случае при делении обеих частей неравенства на отрицательное число $f(a)$ знак неравенства меняется на противоположный, и тогда $x>\dfrac{g(a)}{f(a)}$, т. е. решение неравенства — промежуток $\left(\dfrac{g(a)}{f(a)};+\infty\right)$. В третьем случае получаем неравенство $0\cdot x<g(a)$, и если $g(a)\leqslant 0$, то решений нет, если же $g(a)>0$, то решением неравенства является любое действительное число. Исследование неравенств $f(a)\cdot x>g(a)$, $f(a)\cdot x\leqslant g(a)$ и $f(a)\cdot x\geqslant g(a)$ проводится аналогично (каждый раз рассматриваются три случая: 1) $f(a)>0$; 2) $f(a)<0$; 3) $f(a)=0$).

При решении линейных уравнений и неравенств с параметрами следует помнить и о графической интерпретации линейного уравнения или неравенства с двумя переменными: при каждом конкретном значении параметра a (для которого хотя бы одно из чисел $f(a)$ или $g(a)$ отлично от нуля) уравнение $f(a)x+g(a)y=p(a)$ является уравнением прямой на плоскости Oxy, а неравенство $f(a)x+g(a)y>p(a)$ задаёт на плоскости Oxy множество всех точек, расположенных выше или ниже (в зависимости от значения параметра) этой прямой. При этом нужно понимать, что при некоторых значениях параметра такое уравнение или неравенство может либо выполняться для любых x и y, либо не иметь решений вовсе.

Пример 1. Найдите все пары чисел $(a;b)$, для каждой из которых имеет не менее трёх корней уравнение

$$(a-2)x+b(x-2)=(2b-1)x+(2x-1)a.$$

Решение. Степень переменной x в каждой из частей данного уравнения равна 1. Значит, это уравнение является линейным от-

носительно x, и его можно привести к стандартному виду. Для этого раскроем скобки в обеих частях уравнения и запишем его в виде $(a-2+b-2b+1-2a)x=2b-a$, откуда $(a+b+1)x=a-2b$. Если $a+b+1\neq 0$, уравнение имеет единственный корень $x=\frac{a-2b}{a+b+1}$. Если $a+b+1=0$, но $a-2b\neq 0$, уравнение не имеет корней. Если

$$\begin{cases} a+b+1=0, \\ a-2b=0, \end{cases}$$

уравнение принимает вид $0\cdot x=0$ и его корнем является любое действительное число. Значит, не менее трёх корней уравнение имеет только в последнем случае. Решив систему, получим $a=-\frac{2}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$.

Ответ: $\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

Пример 2. При каждом значении параметра a решите неравенство

$$2xa^2-(5x+2)a+2x+1\geqslant 0.$$

Решение. Данное неравенство является линейным относительно переменной x. Раскроем скобки, перегруппируем слагаемые и приведём его к стандартному виду: $(2a^2-5a+2)x\geqslant 2a-1$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части полученного неравенства являются числа $a=0{,}5$ и $a=2$, поэтому, разложив этот трёхчлен на линейные множители, придём к неравенству $(2a-1)(a-2)x\geqslant 2a-1$. Коэффициент при переменной в левой части неравенства в зависимости от значений параметра может быть равен нулю, положителен или отрицателен. Рассмотрим все возможные случаи. Если $a=0{,}5$, неравенство принимает вид $0\cdot x\geqslant 0$ и выполняется при любом значении переменной x. Если $a=2$, неравенство принимает вид $0\cdot x\geqslant 3$ и не выполняется ни при каких значениях x. Если $(2a-1)(a-2)>0$, т. е. $a\in(-\infty;0{,}5)\cup(2;+\infty)$, то, разделив обе части неравенства на положительное число $(2a-1)(a-2)$ и сократив дробь в правой части, получим $x\geqslant\frac{1}{a-2}$, т. е. $x\in\left[\frac{1}{a-2};+\infty\right)$. Если $(2a-1)(a-2)<0$, т. е. $a\in(0{,}5;2)$, то, разделив обе части неравенства на отрицательное число $(2a-1)(a-2)$ и сократив дробь в правой части, получим $x\leqslant\frac{1}{a-2}$, т. е. $x\in\left(-\infty;\frac{1}{a-2}\right]$.

Ответ: $\left[\frac{1}{a-2};+\infty\right)$ при $a\in(-\infty;0{,}5)\cup(2;+\infty)$; $(-\infty;+\infty)$ при $a=0{,}5$; $\left(-\infty;\frac{1}{a-2}\right]$ при $a\in(0{,}5;2)$; нет решений при $a=2$.

Пример 3. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет не менее семи решений система уравнений

$$\begin{cases} (3a^2-13a)x+8y=3a^2-16a-8, \\ 5x+4y=2. \end{cases}$$

Решение. Каждое уравнение системы является уравнением прямой на плоскости Oxy. Эти прямые либо параллельны (тогда они не имеют общих точек и, следовательно, система не имеет решений), либо пересекаются в одной точке (тогда система имеет единственное решение), либо совпадают (тогда система имеет бесконечно много решений). Не менее семи решений система будет иметь только в последнем случае. Напомним, что если $a_2\neq 0$, $b_2\neq 0$, $c_2\neq 0$, то две прямые $a_1x+b_1y=c_1$ и $a_2x+b_2y=c_2$ совпадают в том и только том случае, если соответствующие коэффициенты пропорциональны, т. е. если $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$. Таким образом, $\frac{3a^2-13a}{5}=\frac{8}{4}=\frac{3a^2-16a-8}{2}$. Решив уравнение $\frac{3a^2-13a}{5}=2$, получим $a=5$ или $a=-\frac{2}{3}$. Решив уравнение $\frac{3a^2-16a-8}{2}=2$, получим $a=6$ или $a=-\frac{2}{3}$. Единственным общим корнем этих уравнений является $a=-\frac{2}{3}$.

Ответ: $a=-\frac{2}{3}$.

Иногда уравнение или неравенство можно свести к линейному с помощью замены переменной. Сделав замену переменной, нужно обязательно переформулировать задачу, ведь новая переменная во многих случаях принимает значения только из определённого множества. Например, при замене $t=\cos x$ придётся учитывать, что переменная t может принимать значения только из отрезка $[-1;1]$; при замене $t=\log_5(x^2+5)$ — только из промежутка $[1;+\infty)$ и т. д. Переформулировка задачи для новой переменной в таких случаях является значимой частью решения.

Пример 4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет хотя бы одно решение система уравнений

$$\begin{cases} 12\cos^2 x+5\cos^2 y+11=6a, \\ 15\cos^2 x+4\cos^2 y+25=12a. \end{cases}$$

Решение. Данная система является системой линейных уравнений относительно $u=\cos^2 x$ и $v=\cos^2 y$. Ясно, что $u\in[0;1]$, $v\in[0;1]$. Задачу можно переформулировать так: найти все значения парамет-

ра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 12u+5v+11=6a, \\ 15u+4v+25=12a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условиям $u\in[0;1]$, $v\in[0;1]$. Поскольку коэффициенты при переменных не зависят от параметра, проще всего найти решение системы в общем виде. Умножим обе части первого уравнения на -4, обе части второго уравнения на 5 и рассмотрим почленную сумму полученных уравнений: $-48u+75u-44+125=-24a+60a$, откуда $u=\frac{4a-9}{3}$. Аналогично, умножив обе части первого уравнения на 5, обе части второго уравнения на -4 и рассмотрев почленную сумму полученных уравнений, после необходимых преобразований найдём $v=5-2a$. Условия $u\in[0;1]$, $v\in[0;1]$ выполняются в том и только том случае, если

$$\begin{cases} 0\leqslant \frac{4a-9}{3}\leqslant 1, \\ 0\leqslant 5-2a\leqslant 1. \end{cases}$$

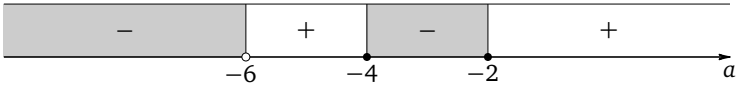
Из первого неравенства системы получим, что $a\in[2{,}25;3]$, из второго — что $a\in[2;2{,}5]$. Следовательно, $a\in[2{,}25;2{,}5]$.

Ответ: $a\in[2{,}25;2{,}5]$.

Пример 5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых следующее уравнение имеет хотя бы один корень:

$$6\log_{0,25}\sin x+a^2+6a+8=a\log_4\sin x.$$

Решение. Приведём логарифм в левой части уравнения к основанию 4. Получим $-6\log_4\sin x+a^2+6a+8=a\log_4\sin x$, откуда $(a+6)\log_4\sin x=a^2+6a+8$. Пусть $\log_4\sin x=t$. При всех допустимых значениях переменной $\sin x\leqslant 1$. Значит, $t\leqslant 0$. Теперь задачу можно переформулировать так: найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a+6)t=a^2+6a+8$ имеет хотя бы один неположительный корень. Корнями трёхчлена в правой части уравнения являются числа $a=-4$ и $a=-2$. Разложив квадратный трёхчлен на множители, получим $(a+6)t=(a+4)(a+2)$. Если $a=-6$, корней нет. Если $a\neq -6$, то $t=\frac{(a+4)(a+2)}{a+6}$. Условию $t\leqslant 0$ найденный корень удовлетворяет только в том случае, если $\frac{(a+4)(a+2)}{a+6}\leqslant 0$. Решение последнего неравенства найдём методом интервалов.



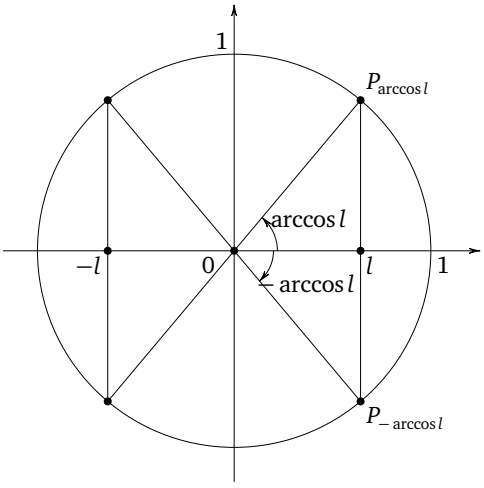
Ответ: $(-\infty;-6)\cup[-4;-2]$.

Замечание. Обратим внимание на то, что в двух последних примерах не требовалось делать обратную замену и возвращаться к прежней переменной. Эта ситуация является достаточно распространённой, и при правильной переформулировке с учётом необходимых ограничений на новую переменную возвращаться к старой не нужно, если, конечно, не требуется искать сами корни данного уравнения или решения данного неравенства. В последнем случае обратная замена является обязательной.

Пример 6. При каждом значении параметра a решите уравнение

$$a \cdot 5^{|\cos x|} + 1 = (a-1)^2.$$

Решение. Раскроем скобки в правой части уравнения и приведём подобные слагаемые. Получим уравнение $a \cdot 5^{|\cos x|} = a^2 - 2a$. Если $a = 0$, уравнение обращается в тождество, справедливое при любом значении переменной, т. е. в этом случае $x \in (-\infty; +\infty)$. Если $a \neq 0$, то, разделив обе части уравнения на a, получим $5^{|\cos x|} = a - 2$. Пусть $t = 5^{|\cos x|}$. Так как $0 \leqslant |\cos x| \leqslant 1$, получим, что $5^0 \leqslant t \leqslant 5^1$, или $1 \leqslant t \leqslant 5$. Значит, $1 \leqslant a - 2 \leqslant 5$, откуда $3 \leqslant a \leqslant 7$. Сделав обратную замену при найденных значениях a, получим $|\cos x| = \log_5(a-2)$. Решения уравнения $|\cos x| = l$ (где $0 \leqslant l \leqslant 1$) в наиболее компактной форме можно записать, воспользовавшись единичной окружностью.



Таким образом, $x = \pm\arccos(\log_5(a-2)) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pm\arccos(\log_5(a-2)) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, при $a \in [3; 7]$; $(-\infty; +\infty)$ при $a = 0$; при прочих a решений нет.

Замечание. При решении последнего примера можно было обойтись без формальной замены переменной, эта замена была сделана только для большей наглядности.

Упражнения к § 1.1

1. а) Для каждого значения параметра a найдите число корней уравнения

$$9(5x-1)a^2-(59x-55)a+6(x-1)=0.$$

б) Для каждого значения параметра a найдите число корней уравнения

$$7(2x-1)a^2-(23x-22)a+3(x-1)=0.$$

2. а) Для каждого значения параметра a найдите множество решений неравенства

$$4xa^2-(17x+4)a+4x+1\geqslant 0.$$

б) Для каждого значения параметра a найдите множество решений неравенства

$$5xa^2-(26x+1)a+5x+5\leqslant 0.$$

3. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|9x+7a-3|=|4x+3a+4|$$

имеет два различных корня, среднее арифметическое которых равно -8.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|7x+8a-5|=|9x+7a-2|$$

имеет два различных корня, среднее арифметическое которых равно 9.

4. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$|3x-5a-3|\leqslant 7-5a-x$$

имеет единственное решение.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$|3x-4a-1|\leqslant 5-4a-x$$

имеет единственное решение.

5. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет не менее трёх решений система уравнений

$$\begin{cases} (2a^2-11a)x-25y=2a^2-13a-30, \\ 8x-5y=3. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет не менее трёх решений система уравнений

$$\begin{cases} (9a^2-49a)x+36y=9a^2-58a+44, \\ 9y-5x=5. \end{cases}$$

6. а) Для каждого значения параметра a решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+7y=2, \\ 3x+y=a, \\ 3x+13y=a^2+3a. \end{cases}$$

б) Для каждого значения параметра a решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=2, \\ 2x-y=a, \\ 4x-y=a^2+2a. \end{cases}$$

7. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых следующая система уравнений имеет хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{2}{y}=4a, \\ \frac{2}{x}-\frac{6}{y}=3+4a. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет следующая система уравнений хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3a, \\ \frac{4}{x}+\frac{5}{y}=3-a. \end{cases}$$

8. а) Найдите все значения параметра a, при которых каждая из систем уравнений

$$\begin{cases} (x-6y)^{-1}=-0{,}1, \\ 7x-2y=2a \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 4x+y=2a, \\ \frac{1}{x-4y}=-\frac{1}{6} \end{cases}$$

имеет единственное решение и эти решения совпадают.

б) Найдите все значения параметра a, при которых каждая из систем уравнений

$$\begin{cases} (x-5y)^{-1} = -\frac{1}{8}, \\ 3x+y = 3a \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 7x-3y = 3a, \\ \frac{1}{x-3y} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

имеет единственное решение и эти решения совпадают.

9. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых следующая система уравнений хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} 12\cos^2 x + 11\cos^2 y + 33a = 31, \\ 33\cos^2 x + 4\cos^2 y + 151 = 198a. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых следующая система уравнений хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} 21\sin^2 x + 8\sin^2 y + 59 = 6a, \\ 24\sin^2 x + 7\sin^2 y + 91 = 9a. \end{cases}$$

10. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} 5^{x+2a} \leqslant 25^{x+a-4}, \\ 6^{x-3a-3} \geqslant 36^{x+a-3} \end{cases}$$

является отрезок числовой прямой, длина которого равна 3.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} 7^{x+2a+1} \leqslant 49^{x+a+1}, \\ 3^{x-a-2} \geqslant 9^{x+a+2} \end{cases}$$

является отрезок числовой прямой, длина которого равна 1.

11. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых следующее уравнение имеет хотя бы один корень:

$$6\log_7 \sin x + a\log_7 \sin x = a^2 + 5a + 4.$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет следующее уравнение имеет хотя бы один корень:

$$\log_{0,5} \cos x + 7a = a\log_{0,25} \cos x + a^2 + 12.$$

12. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых следующее уравнение имеет хотя бы один корень:

$$(2^{\sin x} - 1)a^2 - (3\cdot 2^{\sin x} - 1)a + 2^{\sin x + 1} = 0.$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых следующее уравнение имеет хотя бы один корень:

$$(3^{\cos x}-1)a^2-(5\cdot 3^{\cos x}-2)a+2\cdot 3^{\cos x+1}=0.$$

§ 1.2. Нелинейные уравнения и неравенства с параметром

Круг задач, решение которых основывается на стандартных преобразованиях и логическом переборе, довольно широк, а их формулировки достаточно разнообразны. Ключевым признаком такой задачи является то, что её решение, как отмечалось выше, не предполагает знакомства с какими-то новыми идеями и методами, которых нет в школьных учебниках, а требует лишь умения выполнять преобразования, отвечать на вопросы о существовании корней уравнения или решений неравенства, удовлетворяющих определённым условиям, находить, если требуется, сами эти решения, выполнять необходимый логический перебор.

Пример 1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^3-(a+4)x^2+4ax=0$ имеет ровно два различных корня.

Решение. Вынесем за скобку общий множитель левой части уравнения: $x(x^2-(a+4)x+4a)=0$, откуда $x=0$ или $x^2-(a+4)x+4a=0$. Корнями последнего уравнения являются $x=4$ и $x=a$ (эти корни можно найти, воспользовавшись формулами Виета или формулой корней квадратного уравнения). Ровно два различных корня данное уравнение имеет, только если $a=0$ или $a=4$.

Ответ: $a=0$, $a=4$.

Пример 2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнения $x^2+2x+a=17$ и $x^2+5x=3a+18$ имеют хотя бы один общий корень.

Решение. Пусть x_0 — корень каждого из данных уравнений. Тогда справедливы тождества

$$x_0^2+2x_0+a-17=0 \qquad (1)$$

и

$$x_0^2+5x_0-3a-18=0. \qquad (2)$$

Вычитая почленно равенство (1) из (2), получим $3x_0-4a-1=0$, откуда $x_0=\frac{4a+1}{3}$. Таким образом, данные уравнения имеют не более

одного общего корня $x_0 = \frac{4a+1}{3}$. Подставим $\frac{4a+1}{3}$ вместо x в любое из уравнений, например в первое. Получим

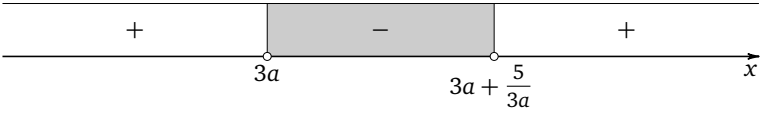
$$\left(\frac{4a+1}{3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{4a+1}{3} + a - 17 = 0.$$

Это уравнение является квадратным относительно a. Выполнив преобразования, приведём его к стандартному виду: $16a^2 + 41a - 146 = 0$. Корнями последнего уравнения являются $a = -\frac{73}{16}$ и $a = 2$.

Ответ: $a = -\frac{73}{16}$, $a = 2$.

Пример 3. При каждом значении параметра a решите неравенство $\frac{5}{x-3a} > 3a$.

Решение. Перенеся $\frac{5}{x-3a}$ в правую часть неравенства и приведя полученную разность к общему знаменателю, придём к неравенству $\frac{3ax - 9a^2 - 5}{x-3a} < 0$. При $a = 0$ неравенство примет вид $-\frac{5}{x} < 0$, откуда $x \in (0; +\infty)$. При $a > 0$ можно разделить обе части неравенства на положительное число $3a$. Получим $\frac{x - \left(3a + \frac{5}{3a}\right)}{x-3a} < 0$. Поскольку в этом случае $3a + \frac{5}{3a} > 3a$, решением неравенства является интервал $\left(3a; 3a + \frac{5}{3a}\right)$:



При $a < 0$ можно разделить обе части неравенства на отрицательное число $3a$, изменив знак неравенства на противоположный. Получим $\frac{x - \left(3a + \frac{5}{3a}\right)}{x-3a} > 0$. Поскольку в этом случае $3a + \frac{5}{3a} < 3a$, решением неравенства является объединение интервалов $\left(-\infty; 3a + \frac{5}{3a}\right) \cup (3a; +\infty)$:



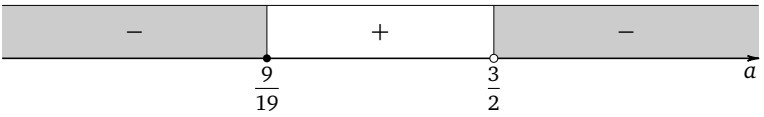
Ответ: $\left(-\infty; 3a + \frac{5}{3a}\right) \cup (3a; +\infty)$ при $a < 0$; $(0; +\infty)$ при $a = 0$; $\left(3a; 3a + \frac{5}{3a}\right)$ при $a > 0$.

Пример 4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x+\sqrt{x^2-4ax-7a}=3$ имеет хотя бы один корень.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\sqrt{x^2-4ax-7a}=3-x$. Левая часть уравнения неотрицательна в силу неотрицательности квадратного корня. Если правая часть уравнения отрицательна, корней оно не имеет. Если правая часть уравнения неотрицательна, возведение в квадрат обеих его частей является равносильным преобразованием, т. е. не приводит ни к потере корней, ни к приобретению посторонних корней. В этом случае приходим к системе

$$\begin{cases} x\leqslant 3,\\ x^2-4ax-7a=9-6x+x^2, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x\leqslant 3,\\ (6-4a)x=7a+9. \end{cases}$$

При $a=1{,}5$ уравнение системы не имеет корней. При $a\neq 1{,}5$ корнем уравнения системы является $x=\dfrac{7a+9}{6-4a}$. В этом случае данное уравнение имеет хотя бы один корень, только если $\dfrac{7a+9}{6-4a}\leqslant 3$. Перенеся 3 в левую часть неравенства и приведя полученную разность к общему знаменателю, придём к неравенству $\dfrac{19a-9}{6-4a}\leqslant 0$. Решив последнее неравенство методом интервалов, получим $a\in\left(-\infty;\,\dfrac{9}{19}\right]\cup\left(\dfrac{3}{2};\,+\infty\right)$:



Ответ: $\left(-\infty;\,\dfrac{9}{19}\right]\cup\left(\dfrac{3}{2};\,+\infty\right)$.

Пример 5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $3\cos 2x-(a^2-8a+6)\sin x=3$ имеет на отрезке $[0;\,2\pi]$ ровно 4 корня.

Решение. Перенесём все слагаемые левой части уравнения в его правую часть и, воспользовавшись формулой $1-\cos 2x=2\sin^2 x$, приведём полученное уравнение к виду $6\sin^2 x+(a^2-8a+6)\sin x=0$, откуда $\sin x=0$ или $\sin x=-\dfrac{a^2-8a+6}{6}$. Корнями уравнения $\sin x=0$ являются числа $x=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Отрезку $[0;\,2\pi]$ принадлежат ровно 3 корня этого уравнения: $x=0$, $x=\pi$, $x=2\pi$. Если $a^2-8a+6=0$, корни уравнения $\sin x=-\dfrac{a^2-8a+6}{6}$ совпадают с корнями уравнения $\sin x=0$, и только 3 корня данного уравнения принадлежат отрезку $[0;\,2\pi]$. Если $a^2-8a+6\neq 0$, корни уравнения $\sin x=-\dfrac{a^2-8a+6}{6}$

не совпадают с корнями уравнения $\sin x = 0$, и данное уравнение будет иметь ровно 4 корня на отрезке $[0; 2\pi]$ только в случае, если уравнение $\sin x = -\frac{a^2-8a+6}{6}$ имеет на этом отрезке единственный корень, что возможно, лишь если $\sin x = -1$ или $\sin x = 1$. Таким образом, $-\frac{a^2-8a+6}{6} = 1$ (откуда $a = 2$ или $a = 6$) или $-\frac{a^2-8a+6}{6} = -1$ (откуда $a = 0$ или $a = 8$).

Ответ: 0; 2; 6; 8.

Пример 6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых ни одно из чисел -9 и 8 не принадлежит множеству решений неравенства

$$(x^2+x-72)\sqrt{0{,}2\cdot 5^{x^2+x-71}+a^2-3a+1} \leqslant 0.$$

Решение. Заметим, что $0{,}2\cdot 5^{x^2+x-71} = \frac{1}{5}\cdot 5^{x^2+x-71} = 5^{x^2+x-72}$. Корнями квадратного трёхчлена x^2+x-72 являются числа -9 и 8. Разложив этот квадратный трёхчлен на множители, перепишем неравенство в виде $(x+9)(x-8)\sqrt{5^{(x+9)(x-8)}+a^2-3a+1} \leqslant 0$. Условие задачи будет выполнено только в том случае, если при $x = -9$ и при $x = 8$ значение подкоренного выражения будет отрицательным, т. е. если $a^2-3a+2<0$, откуда $a \in (1; 2)$.

Ответ: $(1; 2)$.

Пример 7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\lg(ax^2-(a+2)x+3)+\log_{0,1}(3x^2-(a+2)x+a) = 0$ имеет более двух корней.

Решение. Перейдя к основанию 10, перепишем данное уравнение в виде $\lg(ax^2-(a+2)x+3) = \lg(3x^2-(a+2)x+a)$. Полученное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} ax^2-(a+2)x+3 = 3x^2-(a+2)x+a, \\ 3x^2-(a+2)x+a > 0. \end{cases}$$

Уравнение системы приводится к виду $(a-3)x^2 = a-3$. Если $a \neq 3$, последнее уравнение является квадратным и более двух корней иметь не может. Если $a = 3$, корнем уравнения является любое действительное число. При этом неравенство системы принимает вид $3x^2-5x+3>0$ и выполняется при любом значении переменной в силу отрицательности дискриминанта и положительности старшего коэффициента квадратного трёхчлена в левой части неравенства.

Ответ: 3.

Пример 8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое решение неравенства $\log_2 x^2 \leqslant \log_2(3x+4)$ является решением неравенства $81x^2 \leqslant 16a^4$.

Решение. Неравенство $\log_2 x^2 \leqslant \log_2(x+2)$ равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 \leqslant 3x+4, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Решением первого неравенства системы является отрезок $[-1;\,4]$, поэтому решение системы есть $[-1;\,0)\cup(0;\,4]$. Из неравенства $81x^2 \leqslant 16a^4$ получаем $|x| \leqslant \frac{4a^2}{9}$. Требование задачи будет выполнено, если

$$\begin{cases} -\frac{4a^2}{9} \leqslant -1, \\ 4 \leqslant \frac{4a^2}{9}, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} a^2 \geqslant \frac{9}{4}, \\ a^2 \geqslant 9, \end{cases}$$

т. е. $a^2 \geqslant 9$ и, значит, $a \in (-\infty;\,-3]\cup[3;\,+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\,-3]\cup[3;\,+\infty)$.

Пример 9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любой корень уравнения

$$a\cos 2x + |a|\cos 4x + \cos 6x = 1 \tag{1}$$

является корнем уравнения

$$2\sin x\cos 2x + \sin 5x = 2\sin 2x\cos 3x \tag{2}$$

и, наоборот, каждый корень уравнения (2) является корнем уравнения (1).

Решение. Уравнение (2) не содержит параметра, поэтому целесообразно начать именно с его решения. Преобразовав в сумму произведение в правой части уравнения, получим

$$2\sin x\cos 2x + \sin 5x = \sin 5x - \sin x,$$

откуда $2\sin x(\cos 2x + 0{,}5) = 0$, и, значит, $\sin x = 0$ (откуда $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$) или $\cos 2x = -0{,}5$ (откуда $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$). Все найденные корни можно записать в более компактном виде (например, рассмотрев соответствующие им точки единичной окружности): $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, нужно найти все значения параметра a, при каждом из которых корнями уравнения (1) являются числа $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$, и только они. Подставим $x = \frac{\pi n}{3}$ в уравнение (1):

$$a\cos\frac{2\pi n}{3} + |a|\cos\frac{4\pi n}{3} + \cos 2\pi n = 1.$$

Поскольку при любом $n \in \mathbb{Z}$ справедливы равенства

$$\cos 2\pi n = 1, \quad \cos\frac{4\pi n}{3} = \cos\frac{2\pi n}{3} \neq 0$$

(что легко доказать, воспользовавшись единичной окружностью, применив перебор или формулы приведения), получим $a + |a| = 0$, откуда $a \leqslant 0$. Следовательно, если числа $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$, являются корнями уравнения (1), то $a \leqslant 0$. Но из этого вовсе не следует, что при $a \leqslant 0$ уравнение (1) не имеет других корней. Поэтому нужно рассмотреть, какие корни имеет уравнение (1) при $a \leqslant 0$. В этом случае оно принимает вид $a\cos 2x - a\cos 4x + \cos 6x = 1$. Применив формулы разности косинусов и косинуса удвоенного аргумента, после упрощений получим $2a\sin 3x \sin x - 2\sin^2 3x = 0$, откуда либо $\sin 3x = 0$, либо $a\sin x - \sin 3x = 0$. Корнями уравнения $\sin 3x = 0$ являются числа $x = \frac{\pi m}{3}$, $m \in \mathbb{Z}$, совпадающие с корнями уравнения (2). Уравнение $a\sin x - \sin 3x = 0$ преобразуется к виду $a\sin x - 3\cos^2 x \sin x + \sin^3 x = 0$, откуда

$$\sin x(a - 3\cos^2 x + \sin^2 x) = 0.$$

Из последнего уравнения получим, что либо $\sin x = 0$, либо $\cos^2 x = \frac{a+1}{4}$. Корни уравнения $\sin x = 0$ принадлежат множеству чисел $x = \frac{\pi m}{3}$, $m \in \mathbb{Z}$. Значит, чтобы уравнение (1) не имело других корней, кроме этих чисел, нужно чтобы либо уравнение $\cos^2 x = \frac{a+1}{4}$ вовсе не имело корней, либо его корнями были только числа $x = \frac{\pi m}{3}$, $m \in \mathbb{Z}$. Если $x = \frac{\pi m}{3}$, $m \in \mathbb{Z}$, то либо $\cos^2 x = \frac{1}{4}$ (и тогда $a = 0$; ясно, что при $a = 0$ других корней нет), либо $\cos^2 x = 1$ (что при $a \leqslant 0$ невозможно). Уравнение $\cos^2 x = \frac{a+1}{4}$ не имеет корней, если либо $\frac{a+1}{4} < 0$ (откуда $a < -1$), либо $\frac{a+1}{4} > 1$ (что при $a \leqslant 0$ невозможно). Таким образом, требование задачи выполнено, только если $a = 0$ или $a < -1$.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup \{0\}$.

Упражнения к § 1.2

1. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^3 - (a-5)x^2 - 5ax = 0$ имеет ровно два различных корня.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^3 + 2(a+3)x^2 + 12ax = 0$ имеет ровно два различных корня.

2. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнения $x^2+3x-9a+18=0$ и $x^2+6x-13a+25=0$ имеют хотя бы один общий корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнения $x^2-x-5a+8=0$ и $x^2+x-8a+12=0$ имеют хотя бы один общий корень.

3. а) Найдите все значения параметра $a\neq 0$, при каждом из которых положительны все абсциссы общих точек графиков функций $f(x)=\dfrac{7}{x^2+2x}$ и $g(x)=\dfrac{3a}{x}$.

б) Найдите все значения параметра $a\neq 0$, при каждом из которых положительны все абсциссы общих точек графиков функций $f(x)=\dfrac{8}{x^2+9x}$ и $g(x)=\dfrac{a}{x}$.

4. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнения $\dfrac{x}{x-a}=-a$ и $\dfrac{a}{x-a}=-x$ имеют хотя бы один общий корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнения $\dfrac{4x}{x+a}=a$ и $\dfrac{4a}{x+a}=x$ имеют хотя бы один общий корень.

5. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнения $\dfrac{8}{x}=\dfrac{ax}{8}$ и $\dfrac{9}{x-a}=\dfrac{ax}{8}$ имеют хотя бы один общий корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнения $\dfrac{4}{x}=-\dfrac{ax}{4}$ и $\dfrac{5}{x+a}=-\dfrac{ax}{4}$ имеют хотя бы один общий корень.

6. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства

$$\frac{x^2+7x+12}{x^2-(a-4)x-4a}<0$$

является объединение двух непересекающихся интервалов.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2-(a-1)x-a}<0$$

является объединение двух непересекающихся интервалов.

7. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства

$$\frac{x^2-(a-3)x-3a}{x^2-(a-5)x-5a}<0$$

является объединение двух непересекающихся интервалов.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства

$$\frac{x^2-(a-4)x-4a}{x^2-(a+6)x+6a}<0$$

является объединение двух непересекающихся интервалов.

8. а) При каждом значении параметра a решите неравенство

$$\frac{3}{x-a}>a.$$

б) При каждом значении параметра a решите неравенство

$$\frac{1}{x-2a}>2a.$$

9. а) При каждом значении параметра a решите неравенство

$$\frac{15}{ax+2a}>1.$$

б) При каждом значении параметра a решите неравенство

$$\frac{3}{ax+3a}>\frac{2}{3}.$$

10. а) Найдите все значения параметра b, при каждом из которых функция

$$y=\frac{10x^2+9x+8}{x^2-(2b-7)x+1}$$

определена на всей числовой прямой и принимает только положительные значения.

б) Найдите все значения параметра b, при каждом из которых функция

$$y=\frac{5x^2-6x+7}{3x^2-(5b-2)x+3}$$

определена на всей числовой прямой и принимает только положительные значения.

11. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{5ax+7a}=5x+7$ имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{2ax+3a}=2x+3$ имеет хотя бы один корень.

12. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства $(x-3a+4)\sqrt{x+a+2}\leqslant 0$ является отрезок числовой прямой, длина которого равна $|a|$.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства $(x-2a+1)\sqrt{x+2a-1}\leqslant 0$ является отрезок числовой прямой, длина которого равна $|a|$.

13. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(x-2a)\sqrt{x-5a+12}=0$ имеет единственный корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(x+4a)\sqrt{x-3a-7}=0$ имеет единственный корень.

14. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(ax^2-(a^2+8)x+8a)\sqrt{x+3}=0$ имеет ровно два различных корня.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(ax^2-(a^2+6)x+6a)\sqrt{x+5}=0$ имеет ровно два различных корня.

15. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $(x-2a+1)\sqrt{x-3a}\leqslant 0$ имеет единственное решение.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $(x+3a+1)\sqrt{x+a}\leqslant 0$ имеет единственное решение.

16. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $10\cos 2x=(a^2+13a+20)\sin x+10$ имеет на отрезке $[0;\,2\pi]$ ровно 4 корня.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2\cos 2x+(a^2-2a-4)\sin x=2$ имеет на отрезке $[0;\,2\pi]$ ровно 4 корня.

17. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(3\sin x-a-1)(3\sin x+2a-1)=0$ имеет на отрезке $[0;\,2\pi]$ ровно 2 корня.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(9\sin x-a-5)(9\sin x+2a+1)=0$ имеет на отрезке $[0;\,2\pi]$ ровно 2 корня.

18. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых число $\frac{5\pi}{4}$ не является корнем уравнения

$$\left(x-\frac{5\pi}{4}\right)(x-10\pi)\sqrt{a^2+7a+11+\cos\frac{4x}{5}}=0,$$

а число 10π является корнем этого уравнения.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых число $\frac{7\pi}{11}$ не является корнем уравнения

$$\left(x-\frac{7\pi}{11}\right)(x-14\pi)\sqrt{a^2-7a-4+4\cos\frac{11x}{7}}=0,$$

а число 14π является корнем этого уравнения.

19. а) Найдите все значения параметра b, при каждом из которых прямая $y=b$ имеет с графиком функции

$$y=\frac{18\sin x+17}{17\sin x+18}$$

хотя бы одну общую точку.

б) Найдите все значения параметра b, при каждом из которых прямая $y=b$ имеет с графиком функции

$$y=\frac{17\sin x+7}{\sin x+11}$$

хотя бы одну общую точку.

20. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $7\cos^2 x-(7a+9)\cos x+9a=0$ имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $3\cos^2 x-(3a+8)\cos x+8a=0$ имеет хотя бы один корень.

21. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых ни одно из чисел -3 и 1 не является корнем уравнения

$$(x^2+2x-3)\sqrt{6^{x^2+2x-3}+a^2-14a+44}=0.$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых ни одно из чисел -7 и 5 не является корнем уравнения

$$(x^2+2x-35)\sqrt{2^{x^2+2x-35}+a^2-9a-53}=0.$$

22. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$(7^x-49)((0{,}5)^{-x}-8)((0{,}2)^{-x}-125^a)(3^x-3\cdot 27^a)\leqslant 0$$

имеет ровно два решения. Укажите эти решения для каждого из найденных значений параметра.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$(6^x-6)((0{,}25)^{-x}-64)((0{,}5)^{-x}-4\cdot 8^a)(3^x-27^a)\leqslant 0$$

имеет ровно два решения. Укажите эти решения для каждого из найденных значений параметра.

23. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\log_5(ax^2-(a-2)x+7)+\log_{0,2}(7x^2-(a-2)x+a)=0$$

имеет более двух корней.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{0,5}(ax^2-(a-3)x-2)+\log_2(2x^2-(a-3)x-a)=0$$

имеет более двух корней.

24. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых только одно из чисел 2 и 3 является решением неравенства

$$(x^2-5x+6)\log_{0,3}(39+(x-2)a^2-16a(x-2)^2)\geqslant 0.$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых только одно из чисел 3 и 4 является решением неравенства

$$(x^2-7x+12)\log_{0,7}(72+(x-3)a^2-17a(x-3)^2)\geqslant 0.$$

25. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое решение неравенства $\log_3 x^2\leqslant\log_3(4x+5)$ является решением неравенства $16x^2\leqslant 25a^4$.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое решение неравенства $\log_2 x^2\leqslant\log_2(6x+7)$ является решением неравенства $9x^2\leqslant 49a^4$.

26. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнения

$$\sin 3x+2(|a|-2)\sin^2 x=a\sin x$$

и

$$\sin 3x+\cos 2x=1+2\sin x\cos 2x$$

имеют одно и то же множество корней.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнения

$$4\cos^2 x+|a-4|(1+\cos 2x)=a\cos x+\cos 3x$$

и

$$2\cos x\cos 2x=\cos 3x+\cos 2x+1$$

имеют одно и то же множество корней.

27. а) Найдите все пары чисел a и b, для каждой из которых имеет не менее шести решений $(x;y)$ система уравнений

$$\begin{cases} bx(2x-y)+(y-1)(2x-y)=bx+y-1,\\ 4x^2+y^2+axy=1. \end{cases}$$

б) Найдите все пары чисел a и b, для каждой из которых имеет не менее восьми решений $(x;y)$ система уравнений

$$\begin{cases} x^2-y^2+a(x+y)=x-y+a,\\ x^2+y^2+bxy=1. \end{cases}$$

28. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\big(\log_5(x+3)-\log_5(x-3)\big)^2-7\big(\log_5(x+3)-\log_5(x-3)\big)-$$
$$-4a^2-6a+10=0$$

имеет ровно два корня.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\big(\log_6(x+4)-\log_6(x-4)\big)^2-10\big(\log_6(x+4)-\log_6(x-4)\big)-$$
$$-4a^2+4a+24=0$$

имеет ровно два корня.

29. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(\log_2(x+a)-\log_2(x-a))^2-3a(\log_2(x+a)-\log_2(x-a))+$$
$$+2a^2-a-1=0$$

имеет ровно два корня.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\big(\log_7(x+a)-\log_7(x-a)\big)^2-3a\big(\log_7(x+a)-\log_7(x-a)\big)+$$
$$+2a^2+3a-9=0$$

имеет ровно два корня.

30. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(|x+1|+|x-a|)^2-2(|x+1|+|x-a|)+4a(1-a)=0$$

имеет ровно два корня.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(|x+3|+|x-a|)^2-6(|x+3|+|x-a|)+5a(6-5a)=0$$

имеет ровно два корня.

31. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$((a-1)x^2+3x)^2-2((a-1)x^2+3x)+1-a^2=0$$

имеет ровно два корня.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(ax^2-2x)^2+(a^2-a+2)(ax^2-2x)-a^2(a-2)=0$$

имеет ровно два корня.

§ 1.3. Задачи с целочисленными неизвестными

Этот параграф посвящён задачам с целочисленными неизвестными (только такие задачи и будут рассматриваться далее). Ключевой идеей решения задач с целочисленными неизвестными является идея делимости одних чисел на другие, а необходимым элементом решения — логический перебор. Идея делимости и логический перебор часто используются в последнем задании ЕГЭ по математике, обычно предполагающем ответы на два или три вопроса. И если последний из этих вопросов является довольно сложным, то ответы на первый и — во многих случаях — на второй вопросы могут оказаться по силам любому успевающему выпускнику, что подтверждает высокий ежегодный процент тех, кто получает за это задание хотя бы один балл. Небольшой параграф едва ли позволит полноценно подготовиться к решению этого задания (для систематической подготовки лучше в течение нескольких лет решать олимпиадные задачи и принимать участие в математических олимпиадах разных уровней), но поможет познакомиться на примерах с тем, как «работает» идея делимости и как делается логический перебор, чтобы впоследствии применить сходные рассуждения при самостоятельном решении подобных задач.

Начнём с нескольких относительно простых примеров (ещё раз напомним, что здесь и далее все переменные принимают только целочисленные значения). Сначала проиллюстрируем, как «работает» логический перебор.

Пример 1. Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел x и y, для которых $(x+2y)^2+(2x+3y-1)^2=9$.

Решение. Левая часть равенства представляет собой сумму двух неотрицательных целых чисел. Равенство может быть выполнено, только если это числа 0 и 9, или 1 и 8, или 2 и 7, или 3 и 6, или 4 и 5. Кроме того, каждое слагаемое левой части является квадратом целого числа. Поэтому из 4 вариантов остаётся только один: 0 и 9. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1: $(x+2y)^2=0$, $(2x+3y-1)^2=9$. Из первого уравнения находим $x=-2y$. Тогда второе уравнение принимает вид $(-y-1)^2=9$, или $(y+1)^2=9$, откуда $y=2$ (и тогда $x=-4$) или $y=-4$ (и тогда $x=8$).

Случай 2: $(x+2y)^2=9$, $(2x+3y-1)^2=0$. Из второго уравнения находим $x=\dfrac{1-3y}{2}$. Тогда первое уравнение принимает вид $\left(\dfrac{1-3y}{2}+2y\right)^2=9$, или $(y+1)^2=36$, откуда $y=5$ (и тогда $x=-7$) или $y=-7$ (и тогда $x=11$).

Ответ: $(-4; 2)$; $(8; -4)$; $(-7; 5)$; $(11; -7)$.

Теперь продемонстрируем, как используется идея делимости целых чисел, начав с совсем простого примера.

Пример 2. Докажите, что уравнение $7x + 14y = 76$ не имеет решений в целых числах.

Решение. Каждое слагаемое левой части уравнения делится на число 7, поэтому их сумма также делится на число 7, а число в правой части уравнения на 7 не делится. Следовательно, уравнение не имеет решений в целых числах.

Пример 3. Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел x и y, для которых $3x + 9 = 4y$.

Решение. Каждое слагаемое левой части данного равенства делится на число 3, поэтому их сумма делится на число 3. Значит, число в правой части равенства также должно делиться на 3. Но 4 не делится на 3, поэтому число y должно делиться на 3, т. е. $y = 3n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Но тогда $3x + 9 = 12n$, откуда $x = 4n - 3$.

Ответ: $(4n - 3; 3n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Рассмотренный пример, по сути, является примером уравнения вида $ax + by = c$ в целых числах (коэффициенты в таком уравнении также являются целыми). Это уравнение можно решить в общем виде, но в школьную программу соответствующий метод не входит (хотя и основывается на материале, изучаемом в средней школе); на практике для решения такого рода уравнений обычно достаточно использовать свойства делимости целых чисел.

Пример 4. Решите в целых числах уравнение

$$2015x + 2016y = 2017.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$y - 2 = 2015 - 2015x - 2015y.$$

Каждое слагаемое правой части полученного равенства делится на число 2015, поэтому их сумма делится на число 2015. Значит, число в левой части этого равенства также должно делиться на число 2015, т. е. $y - 2 = 2015n$, откуда $y = 2015n + 2$, где $n \in \mathbb{Z}$. Но тогда $2015n = 2015 - 2015x - 2015(2015n + 2)$, откуда $n = 1 - x - (2015n + 2)$ и $x = -2016n - 1$.

Ответ: $(-2016n - 1; 2015n + 2)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим ещё один характерный пример задачи с целочисленными неизвестными, при решении которой используются соображения делимости и идея решения уравнения вида $ax + by = c$, проиллюстрированная предыдущим примером. Правда, при её решении этот

приём придётся применить дважды, хотя второй раз — неявным образом, воспользовавшись соображениями чётности/нечётности чисел в каждой из частей уравнения.

Пример 5. На какое наибольшее натуральное число можно сократить дробь $\frac{7n+6}{5n+1}$, если $n \in \mathbb{Z}$?

Решение. Пусть данная дробь сократима на число d. Это означает, что её числитель $7n+6$ и знаменатель $5n+1$ делятся на d. Но тогда и числа $5(7n+6)$ и $7(5n+1)$ делятся на d. Поэтому разность $5(7n+6)-7(5n+1)$ этих чисел также делится на d. Но эта разность равна 23. Поэтому d является делителем числа 23. Наибольший делитель этого числа — само число 23. Остаётся показать, что найдётся n, при котором данная дробь сократима на 23. Пусть $7n+6=23l$, $5n+1=23k$ $(l \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z})$. Исключив из этих равенств по аналогии с предыдущим переменную n (т. е. умножив обе части первого уравнения на 5, второго — на 7 и рассмотрев почленную разность полученных уравнений), получим $23=5\cdot 23l-7\cdot 23k$, откуда $5l-7k=1$. Это уравнение вида $ax+by=c$. Перепишем уравнение, выделив в его левой части число, кратное 5. Получим $5l-5k=2k+1$. Значит, $2k+1$ делится на 5, откуда $2k+1=5r$, $r \in \mathbb{Z}$. Левая часть уравнения $2k+1=5r$ при любом целом k будет нечётным числом. Значит, r — нечётное число, т. е. $r=2m+1$, $m \in \mathbb{Z}$. Тогда $2k+1=5(2m+1)$, откуда $k=5m+2$. Положив, например, $m=0$, получим, что $k=2$. Но тогда $5n+1=23\cdot 2$, и $n=9$. Таким образом, данная дробь сократима на число 23, например, при $n=9$.

Ответ: 23.

Аналогичный приём используется и при решении следующей задачи, условие которой содержит уже две целочисленные переменные.

Пример 6. На какое наибольшее натуральное число можно сократить дробь $\frac{5n-3m}{3n+4m}$, если известно, что дробь $\frac{m}{n}$ несократима ($n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$)?

Решение. Пусть данная дробь сократима на число d. Это означает, что её числитель $5n-3m$ и знаменатель $3n+4m$ делятся на d. Но тогда и числа $3(3n+4m)$ и $4(5n-3m)$ делятся на d. Поэтому сумма этих чисел также делится на d. Но эта сумма равна $29n$. Аналогично числа $5(3n+4m)$ и $3(5n-3m)$ делятся на d. Поэтому их разность делится на d. Но эта разность равна $29m$. Таким образом, каждое из чисел $29n$ и $29m$ делится на d. Поскольку дробь $\frac{m}{n}$ несократима, числа m и n не имеют общих делителей. Поэтому d является делителем числа 29. Наибольший делитель этого числа — само число 29. Остаётся

показать, что числа n и m, при которых данная дробь сократима на 29, существуют. Пусть $3n+4m=29l$, $5n-3m=29k$ ($l\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$). Исключая из этих равенств по аналогии с предыдущим одну из переменных левой части, получим последовательно, что $n=3l+4k$, $m=5l-3k$. Выбрав, например, $l=k=1$, получим $n=7$, а $m=2$.

Ответ: 29.

Перейдём теперь к примерам и методам решения некоторых нелинейных уравнений в целых числах.

Пример 7. Решите в целых числах уравнение $(2x+3)(3y+2)=5$.

Решение. Левая часть уравнения представляет собой произведение двух целых чисел. По условию это произведение равно 5, а число 5 можно представить в виде произведения двух целых чисел 4 способами: 1 и 5, 5 и 1, -1 и -5, -5 и -1. Рассмотрим все 4 случая.

Случай 1: $2x+3=1$, $3y+2=5$. Из первого уравнения находим $x=-1$, из второго — $y=1$.

Случай 2: $2x+3=5$, $3y+2=1$. Из первого уравнения находим $x=1$, из второго — $y=-\frac{1}{3}$. Поскольку $-\frac{1}{3}$ не является целым числом, этот случай решений не даёт.

Случай 3: $2x+3=-1$, $3y+2=-5$. Из первого уравнения находим $x=-2$, из второго — $y=-\frac{7}{3}$. Поскольку $-\frac{7}{3}$ не является целым числом, этот случай также не даёт решений.

Случай 4: $2x+3=-5$, $3y+2=-1$. Из первого уравнения находим $x=-4$, из второго — $y=-1$.

Ответ: $(-1;1)$; $(-4;-1)$.

Этот пример (как и пример 1) показывает, что решение уравнений в целых числах обычно предполагает определённый логический перебор. Кроме того, он «подсказывает» одну из идей решения: нужно попытаться представить левую часть уравнения в виде произведения двух (или более) множителей так, чтобы в правой части при этом получилось целое число.

Следующий пример представляет собой уравнение в целых числах вида $ax+bxy+cy=d$. Существует по крайней мере два эффективных способа решения этого уравнения и подобных ему. Один из них связан с разложением на множители, другой (он будет рассмотрен позднее) основан на выражении одной из переменных (степень которой в уравнении равна 1) через другую в виде алгебраической дроби и выделении целой части этой дроби.

Как «работает» разложение на множители для решения такого уравнения, можно показать и в общем виде. Вынесем bx за скобки:

$bx\left(\frac{a}{b}+y\right)+cy=d$. Теперь преобразуем второе слагаемое в левой части. Вынесем c за скобки, в которых запишем выражение $\frac{a}{b}+y$, и вычтем из суммы $bx\left(\frac{a}{b}+y\right)+c\left(\frac{a}{b}+y\right)$ «корректирующее» число $\frac{ca}{b}$, чтобы получить выражение, тождественно равное выражению в левой части последнего уравнения: $bx\left(\frac{a}{b}+y\right)+c\left(\frac{a}{b}+y\right)-\frac{ca}{b}=d$, откуда $\left(\frac{a}{b}+y\right)(bx+c)=d+\frac{ca}{b}$. Умножив обе части полученного равенства на b, придём к уравнению $(a+by)(bx+c)=bd+ca$.

Пример 8. Решите в целых числах уравнение $4x+3y+1=6xy$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $4x-6xy+3y+1=0$ и преобразуем его левую часть по аналогии с тем, как это было сделано выше: $-6x\left(y-\frac{2}{3}\right)+3\left(y-\frac{2}{3}\right)+3=0$, откуда $\left(y-\frac{2}{3}\right)(-6x+3)=-3$ и $-3\left(y-\frac{2}{3}\right)(2x-1)=-3$. Последнее легко уравнение приводится к виду $(3y-2)(2x-1)=3$. Левая часть полученного уравнения представляет собой произведение двух целых чисел. По условию это произведение равно 3, а число 3 можно представить в виде произведения двух целых чисел 4 способами: 1 и 3, 3 и 1, -1 и -3, -3 и -1. Рассмотрим эти 4 случая.

Случай 1: $2x-1=1$, $3y-2=3$. Отсюда $x=1$, $y=\frac{5}{3}$. Число $\frac{5}{3}$ не является целым, значит, этот случай не даёт решений.

Случай 2: $2x-1=3$, $3y-2=1$. В этом случае $x=2$, $y=1$.

Случай 3: $2x-1=-1$, $3y-2=-3$. В этом случае $x=0$, $y=-\frac{1}{3}$. Число $-\frac{1}{3}$ не является целым, значит, этот случай также не даёт решений.

Случай 4: $2x-1=-3$, $3y-2=-1$. В этом случае $x=-1$, $y=\frac{1}{3}$. Число $\frac{1}{3}$ не является целым, значит, и этот случай не даёт решений.

Ответ: (2; 1).

В некоторых случаях для разложения на множители необходимо использовать формулы сокращённого умножения.

Пример 9. Решите в целых числах уравнение $x^2=y^2+2y+8$.

Решение. Выделим в правой части уравнения полный квадрат: $x^2=(y+1)^2+7$. Применим формулу разности квадратов, переписав уравнение в виде $x^2-(y+1)^2=7$. Получим $(x-y-1)(x+y+1)=7$. Левая часть последнего уравнения представляет собой произведение двух целых чисел. По условию это произведение равно 7, а число 7 можно представить в виде произведения двух целых чисел 4 способами: 1 и 7, 7 и 1, -1 и -7, -7 и -1. Рассмотрим все 4 случая.

Случай 1: $x-y-1=1$, $x+y+1=7$. Сложив уравнения почленно, находим $2x=8$, откуда $x=4$. Вычитая почленно из второго уравнения первое, находим $2y+2=6$, откуда $y=2$.

Случай 2: $x-y-1=7$, $x+y+1=1$. Сложив уравнения почленно, находим $2x=8$, откуда $x=4$. Вычитая почленно из второго уравнения первое, находим $2y+2=-6$, откуда $y=-4$.

Случай 3: $x-y-1=-1$, $x+y+1=-7$. Сложив уравнения почленно, находим $2x=-8$, откуда $x=-4$. Вычитая почленно из второго уравнения первое, находим $2y+2=-6$, откуда $y=-4$.

Случай 4: $x-y-1=-7$, $x+y+1=-1$. Сложив уравнения почленно, находим $2x=-8$, откуда $x=-4$. Вычитая почленно из второго уравнения первое, находим $2y+2=6$, откуда $y=2$.

Ответ: $(4;2)$; $(4;-4)$; $(-4;-4)$; $(-4;2)$.

Кроме формул сокращённого умножения нужно помнить и формулу разложения квадратного трёхчлена ax^2+bx+c на линейные множители: если x_1 и x_2 — корни этого трёхчлена, то

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Пример 10. Решите в целых числах уравнение

$$9x^2+16xy-4y^2=-11.$$

Решение. Рассмотрим левую часть уравнения как квадратный трёхчлен относительно переменной x с коэффициентами 9, $16y$, $-4y^2$. Корнями этого трёхчлена (их можно найти с помощью формулы корней квадратного уравнения или с помощью формул Виета) являются числа $-2y$ и $\frac{2y}{9}$. Применив формулу разложения квадратного трёхчлена на линейные множители, получим

$$9(x+2y)\left(x-\frac{2y}{9}\right)=-11,$$

откуда $(x+2y)(9x-2y)=-11$.

Левая часть последнего уравнения представляет собой произведение двух целых чисел. По условию это произведение равно -11, а число -11 можно представить в виде произведения двух целых чисел 4 способами: 1 и -11, -11 и 1, -1 и 11, 11 и -1. Рассмотрим все 4 случая.

Случай 1: $x+2y=1$, $9x-2y=-11$. Сложив уравнения почленно, находим $10x=-10$, откуда $x=-1$. Тогда из первого уравнения получим, что $y=1$.

Случай 2: $x+2y=-11$, $9x-2y=1$. Сложив уравнения почленно, находим $10x=-10$, откуда $x=-1$. Тогда из первого уравнения получим, что $y=-5$.

Случай 3: $x+2y=-1$, $9x-2y=11$. Сложив уравнения почленно, находим $10x=10$, откуда $x=1$. Тогда из первого уравнения получим, что $y=-1$.

Случай 4: $x+2y=11$, $9x-2y=-1$. Сложив уравнения почленно, находим $10x=10$, откуда $x=1$. Тогда из первого уравнения получим, что $y=5$.

Ответ: $(-1;\,1)$; $(-1;\,-5)$; $(1;\,-1)$; $(1;\,5)$.

В более сложных случаях, рассматривая уравнение как квадратное относительно одной из переменных, приходится проявлять определённую изобретательность, для того чтобы дискриминант квадратного трёхчлена оказался полным квадратом.

Пример 11. Решите в целых числах уравнение

$$2x^2+5xy+2y^2-8x-7y+3=0.$$

Решение. Уравнение является квадратным относительно каждой из двух переменных. Поэтому можно попытаться выделить в его левой части квадратный трёхчлен относительно одной из переменных и представить его в виде произведения двух линейных множителей (использовав формулу разложения квадратного трёхчлена на линейные множители), чтобы получить уравнение вида «произведение двух множителей равно целому числу». Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно переменной x, переписав его в виде $2x^2+(5y-8)x+2y^2-7y+3=0$. Постараемся добиться того, чтобы дискриминант квадратного трёхчлена в левой части уравнения был полным квадратом, варьируя свободный коэффициент трёхчлена. Для этого введём вспомогательную неизвестную k, записав уравнение в виде $2x^2+(5y-8)x+2y^2-7y+k=k-3$. Теперь найдём дискриминант квадратного трёхчлена в левой части полученного уравнения:

$$D=25y^2-80y+64-16y^2+56y-8k=$$
$$=9y^2-24y+64-8k=(3y-4)^2+48-8k.$$

Если $48-8k=0$ (т. е. $k=6$), уравнение примет вид

$$2x^2+(5y-8)x+2y^2-7y+6=3,$$

и его левую часть можно будет разложить на линейные множители, поскольку дискриминант $(3y-4)^2$ квадратного трёхчлена в левой части уравнения будет полным квадратом. В этом случае

$$x=\frac{-(5y-8)\pm(3y-4)}{4},$$

откуда $x=-2y+3$ или $x=-\dfrac{y-2}{2}$, и, следовательно,

$$2\left(x+\frac{y-2}{2}\right)(x+2y-3)=3,$$

откуда $(2x+y-2)(x+2y-3)=3$. Число 3 можно представить в виде произведения двух целых чисел 4 способами: 1 и 3, 3 и 1, -1 и -3, -3 и -1. Рассмотрим эти 4 случая.

Случай 1: $2x+y-2=1$, $x+2y-3=3$, откуда $x=0$, $y=3$.

Случай 2: $2x+y-2=3$, $x+2y-3=1$, откуда $x=2$, $y=1$.

Случай 3: $2x+y-2=-1$, $x+2y-3=-3$, откуда $x=\frac{2}{3}$, $y=-\frac{1}{3}$. В этом случае целых решений нет.

Случай 4: $2x+y-2=-3$, $x+2y-3=-1$, откуда $x=-\frac{4}{3}$, $y=\frac{5}{3}$. В этом случае целых решений нет.

Ответ: $(2;1)$; $(0;3)$.

Если разложение на множители не представляется возможным, следует поискать другие пути. К одному из них подводит следующий пример.

Пример 12. Найдите все $n\in\mathbb{Z}$, при которых число A является целым, если $A=\frac{6n+7}{3n+2}$.

Решение. Идея решения подобных задач состоит в выделении целой части дроби с помощью деления многочлена на многочлен либо иным способом, один из которых проиллюстрируем следующим преобразованием:

$$\frac{6n+7}{3n+2}=\frac{2(3n+2)+3}{3n+2}=2+\frac{3}{3n+2}.$$

При таком преобразовании в числителе формально выделяется множитель, равный знаменателю, а затем добавляется или вычитается «корректирующее» число или выражение, которое позволяет получить выражение, тождественно равное числителю. Затем полученная сумма или разность почленно делится на знаменатель. В данном случае после деления получили $A=2+\frac{3}{3n+2}$. Поскольку числа A и 2 и являются целыми, в силу полученного равенства число $\frac{3}{3n+2}$ также должно быть целым. Знаменатель $3n+2$ дроби является целым числом. Поэтому он должен быть делителем числа 3, т. е. может принимать только значения 1, -1, 3, -3. Рассмотрим эти 4 случая.

Случай 1: $3n+2=1$. Отсюда $n=-\frac{1}{3}$. Полученное число не является целым, и, следовательно, этот случай решений не даёт.

Случай 2: $3n+2=-1$. Отсюда $n=-1$.

Случай 3: $3n+2=3$. Отсюда $n=\frac{1}{3}$. Полученное число не является целым, и, следовательно, этот случай решений не даёт.

Случай 4: $3n+2=-3$. Отсюда $n=-\frac{5}{3}$. Полученное число не является целым, и, следовательно, этот случай также не даёт решений.

Ответ: -1.

Если в этом примере заменить A на x, а n на y, переписать данное равенство так, чтобы оно не содержало знаменателя, и перенести все слагаемые в левую часть, получим $3xy+2x-6y-7=0$. Это пример уравнения в целых числах, один из методов решения которого, в сущности, и проиллюстрирован выше: выражаем одну переменную через другую, выделяем в полученной дроби целую часть и используем соображения делимости. Таким способом можно решить в целых числах любое уравнение вида $axy+bx+cy+d=0$, в котором все коэффициенты — целые числа. Правда, иногда для этого требуется проявлять чуть большую изобретательность. Это приходится делать в тех случаях, когда отношение коэффициента при переменной в числителе к коэффициенту при переменной в знаменателе не является целым числом, т. е. непосредственное выделение целой части невозможно. Напомним, что другой способ решения таких уравнений изложен перед примером 7 и проиллюстрирован им.

Пример 13. Решите в целых числах уравнение $x+11y+6=5xy$.

Решение. Выразим x через y, переписав уравнение в виде

$$5xy-x=11y+6,$$

откуда $x(5y-1)=11y+6$. Поскольку y — целое число, получим, что $5y-1\neq 0$. Поэтому $x=\frac{11y+6}{5y-1}$. Отношение коэффициента при переменной в числителе к коэффициенту при переменной в знаменателе дроби в правой части равенства не является целым числом, т. е. непосредственное выделение целой части здесь невозможно. В таких случаях можно использовать следующее рассуждение. Так как x — целое число, $5x$ тоже целое число. Но $5x=\frac{55y+30}{5y-1}$. Теперь указанное отношение является целым числом и можно выполнить стандартное преобразование:

$$\frac{55y+30}{5y-1}=\frac{11(5y-1)+41}{5y-1}=11+\frac{41}{5y-1}.$$

Итак, $5x=11+\frac{41}{5y-1}$, и, значит, $5y-1$ может принимать только значения 1, -1, 41, -41.

Рассмотрим эти 4 случая.

Случай 1: $5y-1=1$. Отсюда $y=0{,}4$. Полученное число не является целым, следовательно, этот случай решений не даёт.

Случай 2: $5y-1=-1$. Отсюда $y=0$. Тогда $5x=-30$ и $x=-6$.

Случай 3: $5y-1=41$. Отсюда $y=8{,}2$. Полученное число не является целым, следовательно, этот случай решений не даёт.

Случай 4: $5y-1=-41$. Отсюда $y=-8$. Тогда $5x=10$ и $x=2$.

Ответ: $(-6;0)$; $(2;-8)$.

Рассмотренный пример иллюстрирует общую идею решения определённого типа уравнений в целых числах: если уравнение с двумя переменными является линейным относительно одной из них, можно попытаться выразить эту переменную через другую, а затем выделить в полученном выражении «целую» часть.

Пример 14. Решите в целых числах уравнение

$$6y^2+2xy-3y-x=2.$$

Решение. Это уравнение является линейным относительно переменной x. Выразим эту переменную через y, переписав уравнение в виде $2xy-x=-6y^2+3y+2$, откуда $x(2y-1)=-6y^2+3y+2$. Заметим, что $2y-1\neq 0$, поскольку y принимает только целочисленные значения. Поэтому $x=\dfrac{-6y^2+3y+2}{2y-1}$. Выделим целую часть в полученном выражении. Это можно сделать, например, выполнив деление многочлена на многочлен столбиком. Мы попробуем поступить иначе, выделив в числителе множитель $2y-1$. Получим $-6y^2+3y+2=-3y(2y-1)+2$. Нам в каком-то смысле «повезло»: иногда такое выделение множителя приходится делать несколько раз, всегда начиная со старшей степени переменной. В таких случаях, разумеется, проще выполнить деление «столбиком» многочлена на многочлен. Теперь разделим почленно числитель на знаменатель: $\dfrac{-3y(2y-1)+2}{2y-1}=-3y+\dfrac{2}{2y-1}$. Итак, $x=-3y+\dfrac{2}{2y-1}$. Поскольку числа x и $-3y$ являются целыми, в силу полученного равенства число $\dfrac{2}{2y-1}$ также должно быть целым. Знаменатель $2y-1$ дроби также является целым числом. Поэтому он должен быть делителем числа 2, т. е. может принимать только значения 1, -1, 2, -2. Рассмотрим эти 4 случая.

Случай 1: $2y-1=1$. Отсюда $y=1$, и, следовательно, $x=-3\cdot 1+\dfrac{2}{1}=-1$.

Случай 2: $2y-1=-1$. Отсюда $y=0$, и, следовательно, $x=-3\cdot 0+\dfrac{2}{-1}=-2$.

Случай 3: $2y-1=2$. Отсюда $y=1{,}5$. Полученное число не является целым, следовательно, этот случай решений не даёт.

Случай 4: $2y-1=-2$. Отсюда $y=-0{,}5$. Полученное число не является целым, следовательно, этот случай также не даёт решений.

Ответ: $(-1;\,1)$; $(-2;\,0)$.

Уравнения, рассмотренные выше, могут возникать и при решении текстовых задач с целочисленными неизвестными.

Пример 15. Мастер делает за один час целое число деталей, большее 5, а каждый из учеников — на 2 детали меньше. Мастер выполняет заказ за целое число часов, а два ученика вместе — на час быстрее. Из какого числа деталей состоит заказ?

Решение. Пусть заказ состоит из x деталей, а мастер делает за час y деталей ($y>5$). Тогда ученик делает за час $y-2$ детали, а два ученика — $2y-4$ детали. Время, за которое сделает заказ мастер, равно $\frac{x}{y}$, а время, за которое сделают заказ два ученика, равно $\frac{x}{2y-4}$. Составим уравнение по условию задачи: $\frac{x}{y}=\frac{x}{2y-4}+1$, откуда $x(2y-4)=xy+2y^2-4y$. Полученное уравнение является линейным относительно переменной x. Выразим эту переменную через y, переписав уравнение в виде $x(2y-4)-xy=2y^2-4y$, откуда $x(y-4)=2y^2-4y$ и (напомним, что $y>5$) $x=\frac{2y^2-4y}{y-4}$. Но по условию $\frac{x}{y}$ является целым числом, а из полученного равенства следует, что $\frac{x}{y}=\frac{2y-4}{y-4}$. Выделим в числителе правой части множитель, равный её знаменателю: $2y-4=2(y-4)+4$. Теперь выполним почленное деление числителя на знаменатель:

$$\frac{2(y-4)+4}{y-4}=2+\frac{4}{y-4}.$$

Итак, $\frac{x}{y}=2+\frac{4}{y-4}$. Поскольку $y>5$, получаем, что либо $y-4=2$, откуда $y=6$, а $x=24$, либо $y-4=4$, откуда $y=8$, а $x=24$. В любом случае получаем, что $x=24$.

Ответ: 24.

Рассмотрим теперь несколько текстовых задач с целочисленными неизвестными, аналогичных реальным заданиям ЕГЭ по математике.

Пример 16. Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел $1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9$. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел $1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9$. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

1. Может ли в результате получиться 0?

2. Может ли в результате получиться 1?

3. Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Решение. 1. Среди восьми данных чисел нет противоположных. Значит, сумма чисел на каждой карточке не равна 0. Поэтому всё произведение не может равняться нулю.

2. Среди восьми данных чисел пять нечётных. Значит, на какой-то карточке попадётся два нечётных числа, и их сумма чётная. Поэтому всё произведение чётно и не может равняться 1.

3. Среди восьми данных чисел пять нечётных. Значит, хотя бы на двух карточках с обеих сторон написаны нечётные числа, и сумма чисел на каждой из этих карточек чётная. Поэтому всё произведение делится на 4. Наименьшее целое положительное число, делящееся на 4, — это 4. Оно получается при следующем наборе пар чисел на карточках: $(1; -2)$; $(-2; 1)$; $(-3; 4)$; $(4; -3)$; $(-5; 7)$; $(7; -5)$; $(-8; 9)$; $(9; -8)$.

Ответ: 1) нет; 2) нет; 3) 4.

Пример 17. Известно, что все члены арифметической прогрессии $\{a_n\}$ являются различными натуральными числами и что её второй член в 8 раз больше первого.

1. Может ли один из членов этой прогрессии быть больше другого её члена в 567 раз?

2. Найдите наименьшее возможное отношение двух членов этой прогрессии, отличных от a_1, если известно, что это отношение является целым числом, и укажите любую пару таких её членов.

3. Найдите третий член этой прогрессии, если известно, что один из её членов равен 546.

Решение. 1. Из условия следует, что $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия с разностью $d \neq 0$, для которой $a_2 = a_1 + d = 8a_1$, откуда $d = 7a_1$. Следовательно, любой член этой прогрессии может быть задан формулой $a_n = a_1 + 7a_1(n-1)$, откуда $a_n = a_1(7n-6)$. Предположим, что

$$\frac{a_k}{a_m} = \frac{a_1(7k-6)}{a_1(7m-6)} = \frac{7k-6}{7m-6} = 567.$$

Тогда $7k - 6 = 7 \cdot 567 \cdot m - 6 \cdot 567$, откуда $6 \cdot 566 = 7 \cdot 567 \cdot m - 7k$, что невозможно, поскольку правая часть этого равенства делится на 7, а левая не делится.

2. Из предыдущего следует, что любой член данной прогрессии начиная со второго может быть задан формулой $a_{n+1} = a_1 + 7a_1 n$, т. е. $a_{n+1} = a_1(7n+1)$. Рассмотрим отношение двух членов этой прогрессии, отличных от a_1, и предположим, что это отношение равно

натуральному числу x. Получим $\frac{a_{k+1}}{a_{m+1}} = \frac{a_1(7k+1)}{a_1(7m+1)} = \frac{7k+1}{7m+1} = x$ (здесь $k > m$). Тогда $7k + 1 = 7mx + x$ и $x - 1 = 7k - 7mx$. Следовательно, число $x - 1$ делится на 7. Наименьшим из таких натуральных чисел является 7, откуда $x = 8$. Тогда $k = 8m + 1$. Если $m = 1$, то $k = 9$ и такими членами являются a_2 и a_{10}.

3. Если $a_1 = 546$, то $a_3 = 546(7 \cdot 3 - 6) = 8190$. Пусть теперь $a_1 \neq 546$. Тогда $a_{n+1} = a_1(7n + 1) = 546$. Разложив число $a_{n+1} = a_1(7n + 1) = 546$ на простые множители, получим $a_1(7n + 1) = 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$, откуда $7n + 1 = 78$ (поскольку единственным числом, остаток от деления которого на 7 равен 1 и которое при этом либо является одним из чисел 2, 3, 13, либо равно произведению любых двух из этих чисел, либо равно произведению всех трёх чисел, будет именно $2 \cdot 3 \cdot 13 = 78$). Но тогда $n = 11$, $a_1 = 7$, и $a_3 = 7(7 \cdot 3 - 6) = 105$.

Ответ: 1) нет; 2) 8, a_2 и a_{10}; 3) 8190 или 105.

Пример 18. В некотором царстве было несколько (более двух) княжеств. Однажды некоторые из этих княжеств объявили себя царствами и разделились каждое на то же самое число княжеств, которое было в самом начале. Затем всё новые и новые княжества из числа прежних и вновь образующихся объявляли себя царствами и делились каждое на то же самое число княжеств, которое было в самом начале.

1. Могло ли сразу после одного из делений общее число княжеств стать равным 102?

2. Могло ли в какой-то момент времени общее число княжеств стать равным 320, если известно, что сразу после одного из делений общее число княжеств было равно 162?

3. Сколько княжеств было в самом начале, если сразу после какого-то из делений общее число княжеств стало ровно в 38 раз больше первоначального?

Решение. Пусть n — число княжеств, которое было в самом начале, $n > 2$.

1. Каждое деление добавляет к общему числу княжеств $n - 1$ княжество. Поэтому после k делений общее число княжеств будет равно $n + k(n - 1)$. Предположим, что

$$n + k(n - 1) = 102.$$

Тогда $n - 1 + k(n - 1) = 101$ и $(n - 1)(k + 1) = 101$. Поскольку 101 — простое число, получим, что либо $n - 1 = 1$, откуда $n = 2$ (что противоречит условию $n > 2$), либо $k + 1 = 1$, откуда $k = 0$, что противоречит тому, что было по крайней мере одно деление.

2. Предположим, что это возможно. Аналогично предыдущему получим, что в этом случае $(n-1)(k+1)=161=7\cdot 23$ и $(n-1)(l+1)=$ $=319=11\cdot 29$, где k и l — номера делений. Такого натурального числа $n-1>1$, для которого выполнялись бы оба равенства

$$(n-1)(k+1)=7\cdot 23 \quad \text{и} \quad (n-1)(l+1)=11\cdot 29,$$

очевидно, не существует.

3. Предположим, что это возможно. Получим, что в этом случае $n+k(n-1)=38n$, откуда $k(n-1)=37n$ и, следовательно, $k(n-1)=$ $=37(n-1)+37$. Далее, $(k-37)(n-1)=37$, и, поскольку, $n-1>1$, получаем, что $n-1=37$, $k-37=1$. Таким образом, $n=k=38$.

Ответ: 1) нет; 2) нет; 3) 38.

Пример 19. Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку — целое число баллов от 1 до 15 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки, и подсчитывается среднее арифметическое пяти оставшихся оценок.

1. Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{2}{45}$?

2. Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{2}{35}$?

3. Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания

Решение. Обозначим рейтинг кинофильма, вычисленный по старой системе оценивания, через A, а рейтинг кинофильма, вычисленный по новой системе оценивания, через B. Пусть x — наименьшая из оценок, z — наибольшая, а y — сумма остальных пяти оценок. Тогда $A=\frac{x+y+z}{7}$, $B=\frac{y}{5}$.

1. Рассмотрим разность

$$A-B=\frac{x+y+z}{7}-\frac{y}{5}=\frac{5x-2y+5z}{35}.$$

Предположим, что эта разность равна $\frac{2}{45}$, т. е. что $\frac{5x-2y+5z}{35}=\frac{2}{45}$, откуда $5x-2y+5z=\frac{14}{9}$. Равенство невозможно, поскольку его левая часть является целым числом, а правая — нет.

2. Предположим, что $A-B=\frac{2}{35}$, откуда аналогично предыдущему пункту находим, что $5x-2y+5z=2$. В этом равенстве нет противоречия. Попробуем подобрать искомый набор, выбрав в качестве наименьшей из оценок 1, т. е. положив $x=1$. Тогда $5-2y+5z=2$, откуда $5z=2y-3$. Если в качестве y взять сумму следующих за единицей оценок, то получим $y=2+3+4+5+6=20$. Но тогда $5z=40-3=37$, а число 37 на 5 не делится. Значит, набор слагаемых в сумме y надо изменить так, чтобы число $2y-3$ делилось на 5. Увеличение суммы y на 1 приводит к увеличению числа $5z$ на 2. Чтобы прибавлением двоек к 37 получить число, кратное 5, достаточно прибавить к 37 четыре двойки, т. е. увеличить сумму y на 4. В этом случае получим $5z=48-3=45$, откуда $z=9$. Увеличить сумму y на 4, выбирая оценки от 2 до 8, можно, например, заменив 5 на 7, а 6 на 8. Тогда $y=2+3+4+7+8=24$ и равенство $5x-2y+5z=2$ для набора оценок 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9 выполняется.

3. Ранее мы получили, что

$$A-B=\frac{5x-2y+5z}{35}.$$

Дробь будет максимальной, если её числитель равен наибольшему возможному числу. Для этого необходимо, чтобы вычитаемое $2y$ было наименьшим из возможных. Напомним, что x — наименьшая из оценок, z — наибольшая, y — сумма остальных пяти различных оценок. Эта сумма будет минимальной, если меньшая из её слагаемых-оценок наиболее близка к x, т. е. равна $x+1$, а каждая из следующих по возрастанию четырёх оценок наиболее близка к предыдущей, т. е. если $y=(x+1)+(x+2)+\ldots+(x+5)=5x+15$. Тогда

$$A-B=\frac{5x-2(5x+15)+5z}{35}=\frac{5z-5x-30}{35}.$$

Полученная дробь будет максимальной, если $z=15$ (самая большая из возможных оценок), а $x=1$ (самая маленькая из возможных оценок). При этом

$$A-B=\frac{5\cdot 15-5\cdot 1-30}{35}=\frac{40}{35}=\frac{8}{7}.$$

Осталось подобрать набор оценок, для которого найденное значение достигается. Самая маленькая и самая большая оценки у нас уже есть, как и правило выбора пяти промежуточных оценок. Искомый набор оценок — 1, 2, 3, 4, 5, 6, 15.

Ответ: 1) нет; 2) да; 3) $\frac{8}{7}$.

Пример 20. В течение четверти учитель ставил школьникам оценки «1», «2», «3», «4», «5». Среднее арифметическое оценок ученика оказалось равным 4,7.

1. Какое наименьшее количество отметок могло быть у ученика?

2. Какое наименьшее количество отметок могло быть у ученика, если среди этих отметок есть отметка «1»?

3. Учитель заменил четыре отметки «3», «3», «5», «5» двумя отметками «4». На какое наибольшее число может увеличиться среднее арифметическое отметок ученика после такой замены?

Решение. 1. Обозначим через n число оценок, через S — их сумму. По условию $\frac{S}{n} = 4{,}7$, откуда $S = 4{,}7n$. Так как $S = \frac{47n}{10}$ и S — натуральное число, n делится на 10. Следовательно, $n \geqslant 10$. Пример набора из 10 оценок, удовлетворяющего условию задачи: три «четвёрки» и семь «пятёрок».

2. Итак, отметок не меньше 10, и их число делится на 10. Если одна из оценок — «единица», то не существует набора из 10 оценок, удовлетворяющего условию задачи, поскольку если даже все девять остальных оценок — «пятёрки», то сумма всех десяти оценок равна $5 \cdot 9 + 1 = 46 < 47$. Значит, оценок в этом случае не меньше 20. Если оценок 20, то их сумма равна 94. Пример набора из 20 оценок, удовлетворяющего условию задачи: одна «единица», две «четвёрки» и семнадцать «пятёрок».

3. Среднее арифметическое набора оценок после замены равно

$$\frac{S-8}{n-2} = \frac{4{,}7n-8}{n-2} = 4{,}7 + \frac{1{,}4}{n-1}.$$

Значение полученного выражения максимально при наименьшем допустимом n, которое кратно 10. Если бы оценок было 10, то их сумма была бы равна 47. Но поскольку среди оценок есть две «тройки», максимальное значение их суммы равно $2 \cdot 3 + 8 \cdot 5 = 46 < 47$. Значит, оценок не менее 20. Если оценок 20, то их сумма равна 94. Пример набора из 20 оценок, удовлетворяющего условию задачи: две «тройки», две «четвёрки» и шестнадцать «пятёрок». В этом случае величина, на которую увеличится среднее арифметическое оценок, равна

$$\frac{1{,}4}{n-2} = \frac{1{,}4}{20-2} = \frac{7}{90}.$$

Ответ: 1) 10; 2) 20; 3) $\frac{7}{90}$.

Пример 21. Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них сходил и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{4}{13}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

1. Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

2. Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

3. Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов 1 и 2?

Решение. 1. Если группа состоит из 4 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 10 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 20 учащихся могло быть 10 мальчиков.

2. Предположим, что мальчиков было 11 или больше. Тогда девочек было 9 или меньше. Театр посетило не более 4 мальчиков, поскольку если бы их было 5 или больше, то доля мальчиков в театре была бы не меньше $\frac{5}{5+9}=\frac{5}{14}$, что больше $\frac{4}{13}$. Аналогично кино посетило не более 6 мальчиков, поскольку $\frac{7}{7+9}=\frac{7}{16}>\frac{2}{5}$. Но тогда хотя бы один мальчик не посетил ни театра, ни кино, что противоречит условию. В предыдущем пункте было показано, что в группе из 20 учащихся могло быть 10 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе — 10.

3. Предположим, что некоторый мальчик сходил и в театр, и в кино. Если бы вместо него в группе присутствовали два мальчика, один из которых посетил только театр, а другой — только кино, то доля мальчиков и в театре, и в кино осталась бы прежней, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек в группе можно считать, что каждый мальчик сходил или только в театр, или только в кино. Пусть в группе m_1 мальчиков, посетивших театр, m_2 мальчиков, посетивших кино, и d девочек. Оценим долю девочек в этой группе. Будем считать, что все девочки ходили и в театр, и в кино, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля в театре и в кино не уменьшится.

По условию $\frac{m_1}{m_1+d}\leqslant\frac{4}{13}$, откуда

$$\frac{m_1+d}{m_1}\geqslant\frac{13}{4},\quad\text{и}\quad 1+\frac{d}{m_1}\geqslant\frac{13}{4},$$

т. е. $\frac{d}{m_1}\geqslant\frac{9}{4}$, а $\frac{m_1}{d}\leqslant\frac{4}{9}$. Кроме того, $\frac{m_2}{m_2+d}\leqslant\frac{2}{5}$, откуда (аналогично предыдущему) $\frac{m_2}{d}\leqslant\frac{2}{3}$. Следовательно,

$$\frac{m_1+m_2}{d}\leqslant\frac{10}{9},$$

поэтому доля девочек в группе:

$$\frac{d}{m_1+m_2+d}=\frac{1}{\frac{m_1+m_2}{d}+1}\geqslant\frac{1}{\frac{10}{9}+1}=\frac{9}{19}.$$

Если группа состоит из 4 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 9 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено, а доля девочек в группе равна $\frac{9}{19}$.

Ответ: 1) да; 2) 10; 3) $\frac{9}{19}$.

Пример 22. Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

1. Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8.

2. Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор

1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 22?

3. Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор

9, 10, 11, 19, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 41, 42, 43, 52.

Решение. 1. Задуманные числа 2, 2, 2, 2 дают требуемый набор, записанный на доске.

2. Поскольку задуманные числа натуральные, наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, т. е. $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

3. Число 9 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части числа $\frac{52}{9}$, т. е. 5. Кроме того, числа 10 и 11 меньше, чем сумма двух чисел 9, поэтому они также являются

задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $52-9-10-11=22$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 9, оставшиеся задуманные числа — это 11 и 11 или 22. Для задуманных чисел 9, 10, 11, 11, 11 или 9, 10, 11, 22 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: 1) 2, 2, 2, 2; 2) нет; 3) 9, 10, 11, 11, 11 или 9, 10, 11, 22.

Упражнения к §1.3

1. Докажите, что данное уравнение не имеет решений в целых числах: а) $2x+2y=7$; б) $3x+6y=25$.

2. Докажите, что данное уравнение не имеет решений в целых числах: а) $3x^2+6xy+9y^2=1234$; б) $9x^2+6xy+3y^2=4321$.

3. Решите в целых числах уравнение: а) $xy=3$; б) $xy=-2$.

4. Решите в целых числах уравнение: а) $y=2+\frac{1}{x}$; б) $y=5+\frac{1}{x}$.

5. Решите в целых числах уравнение: а) $y=\frac{3x-2}{x}$; б) $y=\frac{2x-3}{x}$.

6. Найдите все пары $(x;y)$ целых чисел x и y, для которых:
а) $5x+10=7y$; б) $7x+21=11y$.

7. Решите в целых числах уравнение:
а) $5x+11y=12$; б) $7x-13y=29$.

8. Решите в целых числах уравнение:
а) $(2x+y+1)(x+2y+1)=1$; б) $(2x+3y+4)(3x+2y+4)=1$.

9. Решите в целых числах уравнение:
а) $x^2=y^2+4y+5$; б) $y^2=x^2+6x+10$.

10. Решите в целых числах уравнение:
а) $4x^2+8xy-5y^2=7$; б) $3x^2-4xy-4y^2=3$.

11. Решите в целых числах уравнение:
а) $3x-4xy+16y=5$; б) $2x-3xy+9y=1$.

12. Решите в целых числах уравнение:
а) $y^2-3xy+2=0$; б) $y^2-4xy+3=0$.

13. Решите в целых числах уравнение:
а) $3x^3-3xy+5x^2-2y+2x=5$; б) $4x^3-4xy-x^2-3y-3x=-7$.

14. Решите в целых числах уравнение:
а) $2x^3-3x^2y-2xy+3y^2=3$; б) $3x^3-5x^2y+3xy-5y^2=5$.

15. Решите в целых числах уравнение:
а) $3x^2+5xy-2y^2+5x-4y=7$; б) $4x^2+14xy-8y^2+7x-8y=9$.

16. Найдите все $n\in\mathbb{Z}$, при которых число A является целым, если: а) $A=\frac{3n+7}{n+1}$; б) $A=\frac{6n-2}{2n+3}$.

17. Найдите все $n\in\mathbb{Z}$, при которых число A является целым, если: а) $A=\frac{6n+5}{4n+3}$; б) $A=\frac{5n-3}{3n+4}$.

18. На какое наибольшее натуральное число можно сократить дробь A, если $n \in \mathbb{Z}$ и: а) $A = \frac{6n+7}{8n+9}$; б) $A = \frac{5n+6}{7n+8}$.

19. а) На какое наибольшее натуральное число можно сократить дробь $\frac{3n+4m}{4n+3m}$, если известно, что она сократима, а дробь $\frac{m}{n}$ несократима ($n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$)?

б) На какое наибольшее натуральное число можно сократить дробь $\frac{2n+3m}{4m-5n}$, если известно, что она сократима, а дробь $\frac{m}{n}$ несократима ($n \in Z$, $m \in Z$)?

20. а) Сумма пяти наименьших натуральных делителей натурального числа равна 17, а сумма четырёх наибольших его делителей равна 427. Найдите это число.

б) Сумма пяти наименьших натуральных делителей натурального числа равна 17, а сумма четырёх наибольших его делителей равна 671. Найдите это число.

21. а) Среднее арифметическое трёх натуральных чисел в $\frac{35}{11}$ раза больше, чем среднее арифметическое обратных чисел.

1. Докажите, что наименьшее из этих чисел равно 1.

2. Найдите эти числа.

б) Среднее арифметическое четырёх натуральных чисел в $\frac{42}{17}$ раза больше, чем среднее арифметическое обратных чисел.

1. Докажите, что наименьшее из этих чисел равно 1.

2. Найдите эти числа.

22. а) Каждое из чисел $2, 3, \ldots, 7$ умножают на каждое из чисел $13, 14, \ldots, 21$ и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают.

1. Какую наибольшую по модулю сумму можно получить в результате указанных действий?

2. Какую наименьшую по модулю сумму можно получить в результате указанных действий?

б) Перед каждым из чисел $2, 3, \ldots, 6$ и $10, 11, \ldots, 20$ произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 55 полученных результатов складывают.

1. Какую наибольшую по модулю сумму можно получить в результате указанных действий?

2. Какую наименьшую по модулю сумму можно получить в результате указанных действий?

23. а) Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности начиная со второго отличается от предыдущего либо на 10, либо в 6 раз. Сумма всех членов последовательности равна 257.

1. Какое наименьшее число членов может быть в последовательности?

2. Какое наибольшее число членов может быть в последовательности?

б) Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности начиная со второго отличается от предыдущего либо на 12, либо в 8 раз. Сумма всех членов последовательности равна 437.

1. Какое наименьшее число членов может быть в последовательности?

2. Какое наибольшее число членов может быть в последовательности?

24. а) Все члены геометрической прогрессии являются различными натуральными числами, заключёнными между числами 210 и 350.

1. Может ли такая прогрессия состоять из четырёх членов?

2. Может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

б) Все члены геометрической прогрессии являются различными натуральными числами, заключёнными между числами 510 и 740.

1. Может ли такая прогрессия состоять из четырёх членов?

2. Может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

25. а) В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности равен 1, а последний равен 2046.

1. Может ли последовательность состоять из трёх членов?

2. Может ли последовательность состоять из четырёх членов?

3. Может ли в последовательности быть меньше 2046 членов?

б) В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности равен 1, а последний равен 2076.

1. Может ли последовательность состоять из трёх членов?

2. Может ли последовательность состоять из четырёх членов?

3. Может ли в последовательности быть меньше 2076 членов?

26. а) Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности начиная со второго либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3024.

1. Может ли последовательность состоять из двух членов?

2. Может ли последовательность состоять из трёх членов?

3. Какое наибольшее число членов может быть в последовательности?

б) Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности начиная со второго либо в 13 раз больше, либо в 13 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3345.

1. Может ли последовательность состоять из двух членов?

2. Может ли последовательность состоять из трёх членов?

3. Какое наибольшее число членов может быть в последовательности?

27. а) На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8.

1. Сколько чисел написано на доске?

2. Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

3. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

б) На доске написано более 27, но менее 45 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 9, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -18.

1. Сколько чисел написано на доске?

2. Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

3. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

28. а) Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

1. На доске выписан набор $-13, -8, -6, -5, -1, 2, 7$. Какие числа были задуманы?

2. Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 7 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

3. Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

б) Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

1. На доске выписан набор $-9, -6, -4, -3, -1, 2, 5$. Какие числа были задуманы?

2. Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 5 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

3. Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

29. а) Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1008 и

1) пять; 2) четыре; 3) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

б) Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1512 и

1) пять; 2) четыре; 3) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

30. а) На листе бумаги написаны в строчку 14 единиц.

1. Докажите, что между этими единицами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 162.

2. Докажите, что если единицы, стоящие на чётных местах, заменить четвёрками, всё равно между числами полученного набора можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 162.

3. Докажите, что между любыми 14 натуральными числами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 162.

б) На листе бумаги написаны в строчку 13 единиц.

1. Докажите, что между этими единицами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 108.

2. Докажите, что если единицы, стоящие на чётных местах, заменить семёрками, всё равно между числами полученного набора можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 108.

3. Докажите, что между любыми 13 натуральными числами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 108.

31. а) 1. Чему равно число способов записать число 1595 в виде

$$1595 = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

где числа a_i целые, $0 \leqslant a_i \leqslant 99$, $i = 0; 1; 2; 3$?

2. Существуют ли 10 таких различных чисел N, что их можно представить в виде

$$N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

где числа a_i целые, $0 \leqslant a_i \leqslant 99$, $i = 0; 1; 2; 3$, ровно 160 способами?

3. Сколько существует таких чисел N, что их можно представить в виде

$$N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

где числа a_i целые, $0 \leqslant a_i \leqslant 99$, $i = 0; 1; 2; 3$, ровно 160 способами?

б) 1. Чему равно число способов записать число 1193 в виде

$$1193 = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

где числа a_i целые, $0 \leqslant a_i \leqslant 99$, $i = 0; 1; 2; 3$?

2. Существуют ли 10 таких различных чисел N, что их можно представить в виде

$$N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

где числа a_i целые, $0 \leqslant a_i \leqslant 99$, $i = 0; 1; 2; 3$, ровно 120 способами?

3. Сколько существует таких чисел N, что их можно представить в виде

$$N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

где числа a_i целые, $0 \leqslant a_i \leqslant 99$, $i = 0; 1; 2; 3$, ровно 120 способами?

32. а) Рейтинг изделия оценивается семью экспертами, каждый из которых ставит целую оценку от 0 до 12. При подсчёте рейтинга используется одна из двух моделей. В модели A учитываются все оценки экспертов и рейтинг R_A считается как среднее арифметическое всех семи оценок. В модели B отбрасываются самая высокая и самая низкая оценки экспертов и рейтинг R_B считается как среднее арифметическое оставшихся пяти оценок.

1. Может ли разность рейтингов $R_A - R_B$ быть равной $\frac{1}{25}$?

2. Может ли разность рейтингов $R_A - R_B$ быть равной $\frac{1}{35}$?

3. Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов $R_A - R_B$, если дополнительно известно, что среди оценок экспертов нет одинаковых.

б) Рейтинг изделия оценивается семью экспертами, каждый из которых ставит целую оценку от 0 до 10. При подсчёте рейтинга используется одна из двух моделей. В модели A учитываются все оценки экспертов и рейтинг R_A считается как среднее арифметическое всех семи оценок. В модели B отбрасываются самая высокая и самая низкая оценки экспертов и рейтинг R_B считается как среднее арифметическое оставшихся пяти оценок.

1. Может ли разность рейтингов $R_A - R_B$ быть равной $\frac{1}{30}$?

2. Может ли разность рейтингов $R_A - R_B$ быть равной $\frac{1}{35}$?

3. Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов $R_A - R_B$, если дополнительно известно, что среди оценок экспертов нет одинаковых.

33. а) Из натуральных нечётных чисел от 11 (включительно) до 67 (включительно) выбирают в порядке возрастания семь произвольных. Пусть R_A — среднее арифметическое всех семи выбранных чисел, R_B — четвёртое из выбранных чисел в порядке возрастания.

1. Может ли разность $R_A - R_B$ быть равной $\frac{1}{7}$?

2. Может ли разность $R_A - R_B$ быть равной $\frac{2}{7}$?

3. Найдите наибольшее возможное значение разности $R_A - R_B$.

б) Из натуральных нечётных чисел от 1 (включительно) до 59 (включительно) выбирают в порядке возрастания семь произвольных. Пусть R_A — среднее арифметическое всех семи выбранных чисел, R_B — четвёртое из выбранных чисел в порядке возрастания.

1. Может ли разность $R_A - R_B$ быть равной $\frac{1}{7}$?

2. Может ли разность $R_A - R_B$ быть равной $\frac{2}{7}$?

3. Найдите наибольшее возможное значение разности $R_A - R_B$.

34. а) За новогодним столом дети ели бутерброды и конфеты, причём каждый что-то ел и может быть так, что кто-то ел и то и другое. Известно, что мальчиков, евших бутерброды, было не более $\frac{5}{16}$ от общего числа детей, евших бутерброды, а мальчиков, евших конфеты, было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа детей, евших конфеты.

1. Могло ли за столом быть 13 мальчиков, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?

2. Какое наибольшее количество мальчиков могло быть за столом, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?

3. Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа детей за столом без дополнительного условия пунктов 1 и 2?

б) Дома у каждого ученика класса живёт кошка или собака, а у некоторых, возможно, и кошка, и собака. Известно, что мальчиков, имеющих собак, не более $\frac{1}{4}$ от общего числа учеников класса, имеющих собак, а мальчиков, имеющих кошек, не более $\frac{5}{11}$ от общего числа учеников класса, имеющих кошек.

1. Может ли в классе быть 11 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?

2. Какое наибольшее количество мальчиков может быть в классе, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?

3. Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учеников без дополнительного условия пунктов 1 и 2?

35. а) Гидролог вводит в компьютер измерения температуры забортной воды. Температура измеряется с точностью до одной десятой градуса, для целых значений после запятой ставится нуль. За время наблюдений температура была выше 10°C, но ниже 17°C. Всего гидролог ввёл 32 измерения, но из-за усталости, качки судна и плохой клавиатуры один раз вместо десятичной запятой он нажал клавишу «0», а в другой раз вообще не нажал десятичную запятую. После упорядочивания данных по возрастанию получился ряд из 32 чисел, начинающийся числами 12,2; 12,8; … Если из полученного ряда удалить два первых числа, среднее арифметическое оставшихся чисел будет равно 68,8, а если удалить два последних, то среднее арифметическое оставшихся будет равно 13,7. Определите, в каких числах и какие ошибки допустил гидролог.

б) Метеоролог вводит в компьютер измерения температуры воздуха. Температура измеряется с точностью до одной десятой градуса, для целых значений после запятой ставится нуль. За время наблюдений температура была выше 20°C, но ниже 26°C. Всего метеоролог ввёл 22 измерения, но из-за усталости и плохой клавиатуры один раз вместо десятичной запятой он нажал клавишу «0», а в другой раз вообще не нажал десятичную запятую. После упорядочивания данных по возрастанию получился ряд из 22 чисел, начинающийся числами 21,3; 21,7; … Если из полученного ряда удалить два первых числа, среднее арифметическое оставшихся чисел будет равно 149,53, а если удалить два последних, то среднее арифметическое оставшихся будет равно 23,28. Определите, в каких числах и какие ошибки допустил метеоролог.

36. а) На доске было написано 30 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стёрли.

1. Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14?

2. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?

3. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

б) На доске было написано 20 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) на доске написали числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли.

1. Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?

2. Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 34?

3. Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Глава 2. Квадратный трёхчлен в задачах с параметром и нестандартных задачах

Решение значительной части задач с параметром и нестандартных задач сводится к исследованию квадратного трёхчлена. Эти задачи можно разделить на две большие группы:

— задачи, для решения которых достаточно исследования дискриминанта и, в некоторых случаях, применения формул Виета (к этой группе относятся задачи, в которых дискриминант квадратного трёхчлена является полным квадратом; задачи на определение знаков корней квадратного трёхчлена; уравнения и неравенства с несколькими переменными, квадратные относительно хотя бы одной из них);

— задачи, связанные с исследованием расположения корней квадратного трёхчлена относительно заданных чисел, и сводимые к ним после некоторых предварительных действий, прежде всего замены переменной.

§ 2.1. Исследование дискриминанта и формулы Виета

В этом параграфе будут рассмотрены уравнения и неравенства, ключевой идеей решения которых является исследование дискриминанта квадратного трёхчлена. В самых простых случаях дискриминант квадратного трёхчлена является полным квадратом, что позволяет в явном виде получить корни трёхчлена и ответить на вопрос задачи. В более сложных задачах число неизвестных превосходит число уравнений или неравенств, но степень по крайней мере одной переменной в одном из уравнений или неравенств равна двум, что позволяет рассматривать такое уравнение или неравенство как квадратное относительно этой переменной.

При решении задач, связанных с определением знаков корней квадратного трёхчлена, полезными оказываются формулы Виета: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ (здесь x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$). Из этих формул следует, что квадратный трёхчлен имеет корни разных знаков в том и только том случае, если $\frac{c}{a} < 0$ (тогда, разумеется, $ac < 0$ и условие существования корней, т. е. условие положительности дискриминанта $D = b^2 - 4ac$, будет выполнено «автоматически», поскольку в этом случае $b^2 - 4ac > 0$; так что дискриминант можно не вычислять, если только не требуется искать сами корни трёхчлена). Два различных корня одного знака

квадратный трёхчлен будет иметь, только если $\frac{c}{a} > 0$ и $D > 0$ (здесь условие положительности дискриминанта, т. е. условие существования корней, уже является обязательным). Оба этих корня будут положительны, если их сумма положительна (т. е. дополнительно выполнено условие $\frac{b}{a} > 0$ или эквивалентное ему $ab > 0$); оба корня будут отрицательными, если их сумма отрицательна (т. е. дополнительно выполнено условие $\frac{b}{a} < 0$ или эквивалентное ему $ab < 0$). В задачах такого рода применение формулы корней квадратного уравнения с последующим выписыванием соответствующих (часто иррациональных) неравенств обычно приводит к громоздким выкладкам и существенно удлиняет решение. Основные утверждения о знаках корней квадратного трёхчлена теперь можно привести в компактной записи с помощью следующей таблицы.

Утверждения о знаках корней квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$, $D = b^2 - 4ac$)	Необходимые и достаточные условия
1) $f(x)$ имеет два корня разных знаков	$ac < 0$
2) $f(x)$ имеет два различных корня одного знака	$\begin{cases} D > 0, \\ ac > 0 \end{cases}$
3) $f(x)$ имеет два различных положительных корня	$\begin{cases} D > 0, \\ ac > 0, \\ ab < 0 \end{cases}$
4) $f(x)$ имеет два различных отрицательных корня	$\begin{cases} D > 0, \\ ac > 0, \\ ab > 0 \end{cases}$

Сформулированные утверждения позволяют отвечать и на более сложные вопросы. Например, для ответа на вопрос о необходимых и достаточных условиях того, что многочлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет хотя бы один положительный корень, нужно, вообще говоря, рассмотреть пять случаев: 1) $a = 0$ и многочлен $f(x) = bx + c$ имеет положительный корень; 2) $a \neq 0$ и многочлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет два различных положительных корня; 3) $a \neq 0$ и многочлен $f(x)$ имеет два корня разных знаков; 4) $a \neq 0$ и многочлен $f(x)$ имеет два корня, один из которых равен нулю, а другой положителен; 5) $a \neq 0$ и многочлен $f(x)$ имеет ровно один корень, причём этот корень положителен.

Формулы Виета можно использовать и для вычисления корней неприведенного квадратного уравнения. В самом деле, пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, корнями которого являются числа x_1 и x_2. Тогда, как уже отмечалось, справедливы формулы Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Если умножить обе части первого уравнения системы на a, а обе части второго уравнения на a^2, получим систему, которую можно записать так:

$$\begin{cases} (ax_1) + (ax_2) = -b, \\ (ax_1)(ax_2) = ac. \end{cases}$$

Таким образом, если найти два числа, произведение которых равно ac, а сумма равна $-b$, то это будут числа ax_1 и ax_2, после чего останется каждое из найденных чисел разделить на a и получить корни данного уравнения. При определённом навыке такие вычисления легко проводятся устно: на «роль» ax_1 и ax_2 претендуют делители числа ac, и, перебирая «по возрастанию» возможные делители этого числа (начиная с простейшего — единицы), можно довольно быстро получить ответ. Так, для вычисления корней уравнения $8x^2 - 73x + 9 = 0$ найдём сначала два числа, произведение которых равно $8 \cdot 9 = 72$, а сумма равна 73. Уже простейший делитель числа 72 позволяет получить ответ: $1 \cdot 72 = 72$, $1 + 72 = 73$. Осталось разделить найденные числа на 8 и получить корни данного уравнения: $\frac{1}{8}$ и $\frac{72}{8} = 9$. Рассмотрим ещё один пример, вычислив корни уравнения $9x^2 - 15x + 4 = 0$. Для этого сначала найдём два числа, произведение которых равно $9 \cdot 4 = 36$, а сумма равна 15. Перебирая пары делителей числа 36 «по возрастанию» меньшего делителя (1 и 36, 2 и 18, 3 и 12), уже на третьем «шаге» находим искомые числа, сумма которых равна 15: это 3 и 12. Разделив каждое из них на 9, получим корни данного уравнения: $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ и $\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$. Для вычисления корней уравнения $4x^2 + 5x - 6 = 0$ найдём два числа, произведение которых равно $4 \cdot (-6) = -24$, а сумма равна -5. Поскольку произведение двух этих чисел отрицательно, одно из них является положительным, другое — отрицательным. Сумма этих чисел также отрицательна, поэтому меньший делитель числа 24 будем «брать» со знаком «плюс», а больший — со знаком «минус»: 1 и -24, 2 и -12, ... На третьем «шаге»

получаем два числа, сумма которых равна -5: это 3 и -8. Разделив каждое из этих чисел на 4, найдём корни данного уравнения: $\frac{3}{4}$ и $\frac{-8}{4} = -2$. Разумеется, этот приём применим только в тех случаях, когда корни квадратного уравнения рациональны.

Перейдём теперь к более сложным задачам.

Пример 1. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых больший корень уравнения $x^2 - (14a - 1)x + 49a^2 - 7a = 0$ в пять раз больше, чем его меньший корень.

Решение. Рассмотрим данное уравнение как квадратное с переменной x. Из условия задачи следует, что это уравнение должно иметь два различных корня, что возможно в том и только том случае, если дискриминант D уравнения положителен. Пусть x_1 и x_2 — соответственно меньший и больший корни уравнения. Тогда $x_1 = \frac{14a - 1 - \sqrt{D}}{2}$, $x_2 = \frac{14a - 1 + \sqrt{D}}{2}$. Поскольку

$$D = (14a - 1)^2 - 4(49a^2 - 7a) = 1,$$

получим, что $x_1 = 7a - 1$, $x_2 = 7a$. По условию $x_2 = 5x_1$, поэтому $7a = 5(7a - 1)$, откуда $a = \frac{5}{28}$.

Ответ: $a = \frac{5}{28}$.

Замечание. Корни уравнения можно было найти, воспользовавшись формулами Виета: их произведение равно $49a^2 - 7a$, т. е. $7a(7a - 1)$, а сумма равна $14a - 1$, т. е. $7a + (7a - 1)$. Следует отметить, что в некоторых случаях знание формул Виета позволяет быстрее получить ответ, однако при отсутствии должной практики решения подобных задач лучше «честно» вычислять дискриминант.

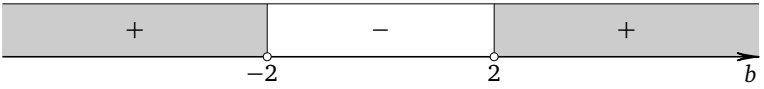
Пример 2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 2(a^2 - 4a + 1)x + 4 = 0$ имеет два различных отрицательных корня.

Решение. Обозначим $a^2 - 4a + 1$ через b и рассмотрим уравнение $x^2 - 2bx + 4 = 0$. Это уравнение имеет два различных корня в том и только том случае, если его дискриминант D положителен (или, что то же, если $\frac{D}{4} = b^2 - 4 > 0$). Из формул Виета следует, что если это уравнение имеет два различных корня, то эти корни — одного знака, так как их произведение равно положительному числу 4. Отрицательными эти корни будут, если их сумма отрицательна, т. е. если $b < 0$. Добавив к последнему неравенству условие положительности числа

$\frac{D}{4}$, получим систему

$$\begin{cases} b<0, \\ b^2-4>0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} b<0, \\ (b-2)(b+2)>0. \end{cases}$$

Решение второго неравенства системы — объединение двух лучей $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$:



С учётом первого неравенства системы получим, что $b<-2$, т. е. $a^2-4a+1<-2$, откуда $a^2-4a+3<0$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части последнего неравенства являются числа 1 и 3. Значит, $(a-1)(a-3)<0$, откуда $a\in(1;3)$:



Ответ: $(1;3)$.

Пример 3. Для каждого значения параметра a найдите корни уравнения $\arcsin(ax^2-ax-1)+\arcsin x=0$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\arcsin(ax^2-ax-1)=-\arcsin x$$

и воспользуемся нечётностью арксинуса:

$$\arcsin(ax^2-ax-1)=\arcsin(-x).$$

Арксинусы двух чисел равны в том и только том случае, если эти числа равны (это следует, например, из возрастания функции $y=\arcsin t$) и модуль каждого из них не превосходит единицы (в силу равенства чисел последнее ограничение достаточно записать только для одного из них). Таким образом, приходим к системе

$$\begin{cases} ax^2-ax-1=-x, \\ |-x|\leqslant 1, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} ax^2-(a-1)x-1=0, \\ |x|\leqslant 1. \end{cases}$$

Первое уравнение системы является либо линейным (при $a=0$), либо квадратным (при $a\neq 0$). Рассмотрим оба этих случая. Пусть $a=0$. В этом случае система примет вид

$$\begin{cases} x-1=0, \\ |x|\leqslant 1, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad x=1.$$

Пусть $a \neq 0$. В этом случае корнями уравнения системы являются числа $x_1 = 1$ и $x_2 = -\frac{1}{a}$ (их можно найти, воспользовавшись формулой корней квадратного уравнения или формулами Виета). Для первого из них неравенство системы выполнено, а для второго это неравенство примет вид $\left|-\frac{1}{a}\right| \leqslant 1$, откуда $\left|\frac{1}{a}\right| \leqslant 1$ и, значит, $|a| \geqslant 1$. Если $a = -1$, то $x_2 = x_1 = 1$. Если $a \in (-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$, уравнение имеет два корня.

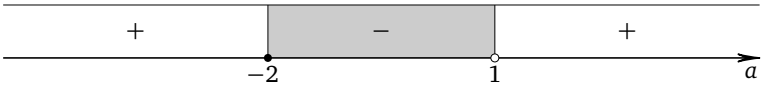
Ответ: $\left\{-\frac{1}{a}; 1\right\}$ при $a \in (-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$; $\{1\}$ при $a \in [-1; 1)$.

Пример 4. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение $\frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 2x + 2} = a$ имеет хотя бы один корень.

Решение. Заметим, что левая часть уравнения определена при любом действительном значении переменной, поскольку дискриминант квадратного трёхчлена в знаменателе дроби отрицателен и, следовательно, не обращается в нуль. Рассмотрим данное уравнение как уравнение второй степени с переменной x, приведя его к стандартному виду. Выполним необходимые преобразования: $x^2 - 2x - 1 = a(x^2 - 2x + 2)$, откуда $(a-1)x^2 - 2(a-1)x + 2a + 1 = 0$. При $a = 1$ уравнение принимает вид $0 \cdot x + 3 = 0$ и не имеет корней. При $a \neq 1$ уравнение является квадратным и имеет хотя бы один корень в том и только том случае, если его дискриминант D неотрицателен (или, что то же, если $\frac{D}{4} \geqslant 0$). Поскольку

$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - (a-1)(2a+1) = -(a-1)(a+2),$$

получаем неравенство $(a-1)(a+2) \leqslant 0$, из которого с учётом условия $a \neq 1$ находим, что $a \in [-2; 1)$.



Ответ: $[-2; 1)$.

Замечание. Аналогичным образом можно, не прибегая к применению производной, найти множество значений любой дробно-квадратичной функции, т. е. функции вида $y = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}$, где хотя бы один из коэффициентов a_1 или a_2 отличен от нуля (последнее условие можно коротко записать так: $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$). Вообще, как мы увидим в дальнейшем, рассмотрение уравнения с несколькими неизвестными как квадратного относительно одной из них оказывается весьма эффективным и для решения более сложных задач.

Пример 5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $121^x + (3a^2 - a + 4) \cdot 11^x - 5a - 2 = 0$ имеет единственный корень.

Решение. Сделаем замену переменной. Пусть $t = 11^x$. Уравнение примет вид $t^2 + (3a^2 - a + 4)t - 5a - 2 = 0$. Поскольку $11^x > 0$ при любом действительном значении переменной, задачу можно переформулировать так: найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $t^2 + (3a^2 - a + 4)t - 5a - 2 = 0$ имеет единственный положительный корень. Если это уравнение имеет корни t_1 и t_2, то их сумма равна $-3a^2 + a - 4$. Дискриминант квадратного трёхчлена $-3a^2 + a - 4$ отрицателен (он равен -47) и коэффициент при второй степени a отрицателен, поэтому $-3a^2 + a - 4 < 0$ при любом действительном a. Значит, $t_1 + t_2 < 0$, и только один корень уравнения $t^2 + (3a^2 - a + 4)t - 5a - 2 = 0$ может быть положителен. Для этого необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие $t_1 t_2 < 0$, т. е. $-5a - 2 < 0$, откуда $a > -0{,}4$.

Ответ: $(-0{,}4; +\infty)$.

Пример 6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых система уравнений

$$\begin{cases} x + 4y = 1, \\ x^2 + 20xy + 100y^2 - 8ax - 80ay + 97a^2 + 144a + 64 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Для того чтобы ответить на вопрос задачи, можно из первого уравнения выразить x через y, подставить полученное выражение во второе уравнение и рассмотреть его как квадратное относительно переменной y. Данная система будет иметь единственное решение в том и только том случае, если дискриминант полученного уравнения равен нулю. Приравняв дискриминант к нулю и решив полученное уравнение с переменной a, найдём ответ. Выкладки можно упростить, если заметить, что первые три слагаемых в левой части второго уравнения системы представляют собой квадрат суммы чисел x и $10y$, а $-8ax - 80ay = -8a(x + 10y)$, в силу чего это уравнение можно привести к виду $(x+10y)^2 - 8a(x+10y) + 97a^2 + 144a + 64 = 0$. Если последнее (квадратное относительно $t = x + 10y$) уравнение имеет два различных корня t_1 и t_2, то и данная система будет иметь два решения, поскольку каждая из систем

$$\begin{cases} x + 4y = 1, \\ x + 10y = t_1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + 4y = 1, \\ x + 10y = t_2 \end{cases}$$

будет иметь ровно одно решение и эти решения являются различными (объясните почему). Следовательно, данная система имеет единственное решение в том и только том случае, если уравнение $t^2-8at+97a^2+144a+64=0$ имеет единственный корень. Последнее возможно, только если дискриминант D этого уравнения равен нулю (или, что то же, если $\frac{D}{4}=0$). Поскольку

$$\frac{D}{4}=16a^2-(97a^2+144a+64)=-(81a^2+144a+64)=-(9a+8)^2,$$

условие равенства нулю дискриминанта выполняется только при $a=-\frac{8}{9}$.

Ответ: $a=-\frac{8}{9}$.

Пример 7. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых при любом значении параметра b система уравнений

$$\begin{cases} bx=y+az^2, \\ (b-6)x+2by=4z+4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y;z)$.

Решение. Здесь мы встречаемся с довольно типичной для нестандартных уравнений и неравенств (в том числе содержащих параметры) ситуацией: число уравнений меньше числа неизвестных, да к тому же система содержит параметр. Посмотрев на систему внимательней, видим, что относительно переменных x и y она является линейной. Выразив из первого уравнения y через x, получим $y=bx-az^2$. Подставим это выражение во второе уравнение системы, перенесём все слагаемые в левую часть и вынесем за скобки x. Получим систему

$$\begin{cases} y=bx-az^2, \\ (2b^2+b-6)x-2abz^2-4z-4=0. \end{cases}$$

Если $2b^2+b-6\neq 0$ (т. е. $b\neq -2$ и $b\neq\frac{3}{2}$), можно (начав со второго уравнения) довольно легко подобрать решение системы при любом значении параметра a, например $x=\frac{4}{2b^2+b-6}$, $z=0$, $y=bx=\frac{4b}{2b^2+b-6}$. Таким образом, при $b\neq -2$ и $b\neq\frac{3}{2}$ система имеет хотя бы одно решение (вне зависимости от значений параметра a). Остаётся найти все значения параметра a, при которых система имеет решения как при $b=-2$, так и при $b=\frac{3}{2}$. Пусть $b=-2$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} y=-2x-az^2, \\ az^2-z-1=0. \end{cases}$$

Эта система имеет решения, только если её второе уравнение имеет хотя бы один корень z_0. В самом деле, в этом случае, выбрав в качестве x любое действительное число x_0, из первого уравнения получим $y = -2x_0 - az_0^2$, и решением системы при любом a будет $(x_0; -2x_0 - az_0^2; z_0)$. Таким образом, нужно исследовать второе уравнение системы. Оно является либо линейным (при $a = 0$), либо квадратным (при $a \neq 0$). Рассмотрим оба этих случая. Пусть $a = 0$. Тогда корнем второго уравнения является $z = -1$, и система будет иметь решения. Пусть $a \neq 0$. Тогда второе уравнение имеет хотя бы один корень, только если его дискриминант D_1 неотрицателен. Поскольку $D_1 = 1 + 4a$, получим, что $1 + 4a \geqslant 0$, откуда $a \geqslant -\frac{1}{4}$. Значит, при $b = -2$ система имеет хотя бы одно решение только в случае $a \geqslant -\frac{1}{4}$. Пусть теперь $b = \frac{3}{2}$. Данную систему в этом случае можно переписать так:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x - az^2, \\ 3az^2 + 4z + 4 = 0. \end{cases}$$

Исследование этой системы проводится аналогично исследованию предыдущей: если $a = 0$, то система приводится к виду

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x, \\ z = -1 \end{cases}$$

и имеет бесконечно много решений; если $a \neq 0$, второе уравнение системы является квадратным, и система имеет хотя бы одно решение только в случае неотрицательности дискриминанта D_2 этого уравнения. Из условия неотрицательности D_2 получим $a \leqslant \frac{1}{3}$. Значит, данная система имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра b только при выполнении обоих неравенств $a \geqslant -\frac{1}{4}$ и $a \leqslant \frac{1}{3}$, откуда $a \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$.

В тех случаях, когда дано одно уравнение (неравенство) с несколькими переменными, часто удаётся ответить на вопрос задачи, рассмотрев это уравнение (неравенство) как квадратное относительно одной из переменных и исследовав дискриминант соответствующего квадратного трёхчлена. Эта идея является ключевой как для уравнений и неравенств с параметром, так и для не содержащих параметра

уравнений и неравенств с несколькими переменными, решение которых требуется найти.

При решении подобных задач приходится во многих случаях возводить в квадрат сумму трёх чисел. Напомним соответствующее правило: квадрат суммы трёх чисел равен сумме квадратов этих чисел, сложенной с суммой всех возможных удвоенных попарных произведений этих чисел: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$. Эта формула доказывается перемножением скобок $(a+b+c)(a+b+c)$ и приведением подобных слагаемых.

Пример 8. Найдите наименьшее значение параметра a, для которого существует хотя бы одна пара $(x;y)$ таких чисел x и y, что $x^2+2y^2-xy-ax+ay+a^2\leqslant 1$.

Решение. Рассмотрим данное неравенство как квадратное с переменной x, переписав его в виде $x^2-(y+a)x+2y^2+ay+a^2-1\leqslant 0$. Поскольку коэффициент при второй степени переменной положителен, квадратный трёхчлен в левой части неравенства может принимать неположительные значения в том и только том случае, если его дискриминант D_1 неотрицателен. Поскольку

$$D_1=(y+a)^2-4(2y^2+ay+a^2-1),$$

после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим

$$D_1=-7y^2-2ay-3a^2+4.$$

Рассмотрим D_1 как квадратный трёхчлен относительно y. Поскольку коэффициент при второй степени этого трёхчлена отрицателен, принимать неотрицательные значения он может только в том случае, если его дискриминант D_2 неотрицателен (или, что то же, если $\frac{D_2}{4}\geqslant 0$). Так как $\frac{D_2}{4}=a^2-(-7)(-3a^2+4)$, после упрощений приходим к неравенству $28-20a^2\geqslant 0$, откуда $a^2\leqslant 1{,}4$ и $|a|\leqslant\sqrt{1{,}4}$. Значит, $a\in[-\sqrt{1{,}4};\sqrt{1{,}4}]$, и наименьшим возможным значением параметра a является $-\sqrt{1{,}4}$.

Ответ: $-\sqrt{1{,}4}$.

Пример 9. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых существует хотя бы одна пара $(x;y)$ таких чисел x и y, что $3x^2+2xy+y^2-4x-4x\cos(\pi a)+4\cos^2(\pi a)+4=0$.

Решение. Рассмотрим данное уравнение как квадратное с переменной x, переписав его в виде

$$3x^2+2(y-2-2\cos(\pi a))x+y^2+4\cos^2(\pi a)+4=0.$$

Это уравнение имеет корни в том и только том случае, если его дискриминант D_1 неотрицателен (или, что то же, если $\frac{D_1}{4} \geqslant 0$). Поскольку $\frac{D_1}{4} = (y-2-2\cos(\pi a))^2 - 3(y^2 + 4\cos^2(\pi a) + 4)$, после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим

$$\frac{D_1}{4} = -2y^2 - 4y - 4y\cos(\pi a) - 8\cos^2(\pi a) + 8\cos(\pi a) - 8.$$

Из условия $\frac{D_1}{4} \geqslant 0$ после несложных преобразований получаем неравенство $y^2 + 2(1+\cos(\pi a))y + 4\cos^2(\pi a) - 4\cos(\pi a) + 4 \leqslant 0$. Левая часть этого неравенства представляет собой квадратный трёхчлен относительно y, коэффициент при второй степени которого положителен. Принимать неположительные значения этот квадратный трёхчлен может только в том случае, если его дискриминант D_2 неотрицателен (или, что то же, если $\frac{D_2}{4} \geqslant 0$). Так как

$$\frac{D_2}{4} = (1+\cos(\pi a))^2 - (4\cos^2(\pi a) - 4\cos(\pi a) + 4),$$

после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим $\frac{D_2}{4} = -3\cos^2(\pi a) + 6\cos(\pi a) - 3$, откуда $\frac{D_2}{4} = -3(\cos(\pi a) - 1)^2$. Поскольку $-3(\cos(\pi a) - 1)^2 \leqslant 0$ при любом значении параметра a, условие $\frac{D_2}{4} \geqslant 0$ выполняется, только если $-3(\cos(\pi a) - 1)^2 = 0$. Таким образом, $\cos(\pi a) = 1$, откуда $\pi a = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и $a = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $2n$, $n \in \mathbb{Z}$.

В заключение рассмотрим не содержащие параметра уравнение и систему уравнений с несколькими переменными. Как мы увидим ниже, ключевая идея — рассмотрение данного уравнения или какого-то из уравнений системы как квадратного относительно одной из переменных и исследование его дискриминанта — оказывается эффективной и в этом случае.

Пример 10. Найдите все тройки $(x; y; z)$ таких чисел x, y, z, что $2x^2 + 5\cdot 4^y + \log_2^2 z - 4x\cdot 2^y - 2x\log_2 z - 2^{y+1} + 1 = 0$.

Решение. Рассмотрим данное уравнение как квадратное с переменной x, переписав его в виде

$$2x^2 - 2(2\cdot 2^y + \log_2 z)x + 5\cdot 4^y + \log_2^2 z - 2^{y+1} + 1 = 0.$$

Это уравнение имеет корни в том и только том случае, если его дискриминант D_1 неотрицателен (или, что то же, если $\frac{D_1}{4} \geqslant 0$). Поскольку

$\frac{D_1}{4} = (2\cdot 2^y + \log_2 z)^2 - 2(5\cdot 4^y + \log_2^2 z - 2^{y+1} + 1)$, после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим

$$\frac{D_1}{4} = -6\cdot 4^y + 4\cdot 2^y \cdot \log_2 z + 2\cdot 2^{y+1} - \log_2^2 z - 2.$$

Из условия $\frac{D_1}{4} \geqslant 0$ после несложных преобразований получаем неравенство $6\cdot 4^y - 4(\log_2 z + 1)2^y + \log_2^2 z + 2 \leqslant 0$. Левая часть этого неравенства представляет собой квадратный трёхчлен относительно 2^y, коэффициент при второй степени которого положителен. Для того чтобы этот трёхчлен принимал неположительные значения, необходимо, чтобы его дискриминант D_2 был неотрицателен (или, что то же, $\frac{D_2}{4} \geqslant 0$). Заметим, что это условие не является достаточным, поскольку 2^y принимает не все действительные значения, а только положительные, и это, возможно, придётся учитывать в дальнейшем. Так как $\frac{D_2}{4} = 4(\log_2 z + 1)^2 - 6\cdot(\log_2^2 z + 2)$, после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим $\frac{D_2}{4} = -2\log_2^2 z + 8\log_2 z - 8$, откуда $\frac{D_2}{4} = -2(\log_2 z - 2)^2$. Поскольку $-2(\log_2 z - 2)^2 \leqslant 0$ при любом значении z, условие $\frac{D_2}{4} \geqslant 0$ выполняется, только если $-2(\log_2 z - 2)^2 = 0$. Таким образом, $\log_2 z = 2$, откуда $z = 4$. В этом случае $\frac{D_2}{4} = 0$, квадратный трёхчлен $6\cdot 4^y - 4(\log_2 z + 1)2^y + \log_2^2 z + 2$ относительно 2^y является полным квадратом и неравенство

$$6\cdot 4^y - 4(\log_2 z + 1)2^y + \log_2^2 z + 2 \leqslant 0$$

приводится к виду $6\cdot(2^y - 1)^2 \leqslant 0$. Последнее неравенство выполнено, только если $2^y = 1$, откуда $y = 0$. Это означает, что и $\frac{D_1}{4} = 0$, а значит, уравнение $2x^2 - 2(2\cdot 2^y + \log_2 z)x + 5\cdot 4^y + \log_2^2 z - 2^{y+1} + 1 = 0$ имеет единственный корень $x = \frac{2\cdot 2^y + \log_2 z}{2}$, где $z = 4$, $y = 0$, и, следовательно, $x = 2$.

Ответ: (2; 0; 4).

Пример 11. Решите систему

$$\begin{cases} (2-x)(3x-2z) = 3-z, \\ y^2 + 3y = x^2 - 3x + 2, \\ y^2 + z^2 = 6z, \\ z \leqslant 3. \end{cases}$$

Решение. Раскрыв скобки в левой части первого уравнения, после упрощений и приведения подобных слагаемых получим уравнение

$$3x^2-2(z+3)x+3z+3=0.$$

Рассмотрим полученное уравнение как квадратное относительно переменной x. Это уравнение имеет корни в том и только том случае, если его дискриминант D неотрицателен (или, что то же, если $\frac{D}{4}\geqslant 0$). Поскольку $\frac{D}{4}=z^2-3z$, приходим к неравенству $z^2-3z\geqslant 0$, откуда $z(z-3)\geqslant 0$. Решив неравенство, получим, что $z\leqslant 0$ или $z\geqslant 3$:



Третье уравнение системы можно переписать в виде $(z-3)^2+y^2=9$, откуда $(z-3)^2\leqslant 9$. Последнее неравенство можно решать разными способами, например, перейдя к неравенству $|z-3|\leqslant 3$ или — после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых — к неравенству $z^2-6z\leqslant 0$, откуда $z(z-6)\leqslant 0$. Решив неравенство, найдём, что $0\leqslant z\leqslant 6$:



Учитывая неравенство $z\leqslant 3$ данной системы, получим, что $0\leqslant z\leqslant 3$. Но поскольку $z\leqslant 0$ или $z\geqslant 3$, переменная z может принимать только два значения: $z=0$ или $z=3$. Рассмотрим оба этих случая. При $z=0$ первое уравнение данной системы приводится к виду $x^2-2x+1=0$, или $(x-1)^2=0$, откуда $x=1$. Третье уравнение системы принимает при этом вид $y^2=0$, откуда $y=0$. При $x=1$ и $y=0$ второе уравнение данной системы, очевидно, выполнено. Значит, тройка чисел $(1;0;0)$ является решением системы. При $z=3$ первое уравнение данной системы принимает вид $(2-x)(3x-6)=0$, откуда $x=2$. Тогда второе уравнение системы принимает вид $y^2+3y=0$, откуда $y=0$ или $y=-3$, а третье уравнение принимает вид $y^2=9$, откуда $y=\pm 3$. Значит, $y=-3$, и тройка чисел $(2;-3;3)$ — второе решение системы.

Ответ: $(1;0;0)$; $(2;-3;3)$.

Упражнения к § 2.1

1. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых больший корень уравнения $x^2-(6a-1)x+9a^2-3a=0$ в 9 раз больше, чем его меньший корень.

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых меньший корень уравнения $x^2-(8a-3)x+16a^2-12a=0$ в 10 раз меньше, чем его больший корень.

2. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых больший корень уравнения $x^2-(10a-19)x+25a^2-95a+90=0$ меньше 7.

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых больший корень уравнения $x^2-(4a-7)x+4a^2-14a+12=0$ меньше -4.

3. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение $(x+2a)^2+(x-6a)^2=200$ имеет два различных корня, среднее арифметическое которых равно 2.

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение $(x-2a)^2+(x-4a)^2=242$ имеет два различных корня, среднее арифметическое которых равно -3.

4. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых отношение дискриминанта уравнения $ax^2+x+2=0$ к квадрату разности его корней равно $8-2a$.

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых отношение дискриминанта уравнения $ax^2-x+4=0$ к квадрату разности его корней равно $4a+12$.

5. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a-2)x^2-2(a-2)x+3=0$ имеет единственный корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a+3)x^2-2(a+3)x-5=0$ имеет единственный корень.

6. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax^2+4x+a=3$ имеет более одного корня.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax^2+6x+a=8$ имеет более одного корня.

7. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(ax^2-(a^2+16)x+16a)\sqrt{x+5}=0$ имеет ровно два различных корня.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(ax^2-(a^2+9)x+9a)\sqrt{x+4}=0$ имеет ровно два различных корня.

8. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $(a^2-1)x^2+2(a-1)x+1>0$ выполнено при любом значении x.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $(a^2-4)x^2+2(a+2)x-1<0$ выполнено при любом значении x.

9. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2 - 6x + a^2 - 4a + 12 = 0$ принимает наибольшее возможное значение.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2 + 4x - a^2 + 6a - 7 = 0$ принимает наименьшее возможное значение.

10. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2 + 2(a^2 + 7a + 3)x + 9 = 0$ имеет два различных положительных корня.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2 + 2(a^2 - 6a - 3)x + 16 = 0$ имеет два различных отрицательных корня.

11. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax^2 - (a + 1)x + 2a^2 - 5a - 3 = 0$ имеет два корня разных знаков.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a^2 - a - 2)x^2 - x + a^2 + a - 2 = 0$ имеет два корня разных знаков.

12. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4\cos^4 3x - 4(a - 3)\cos^2 3x - 2a + 5 = 0$ имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4\sin^4 5x - 4(a + 1)\sin^2 5x - 2a - 3 = 0$ имеет хотя бы один корень.

13. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos^4 x - (a + 2)\cos^2 x - a - 3 = 0$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sin^4 x + (a - 6)\sin^2 x - 4a + 8 = 0$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

14. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos 14x + 2(5a + 9)\sin 7x - 110a + 43 = 0$ имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos 18x + 4(a - 1)\sin 9x - 20a + 69 = 0$ имеет хотя бы один корень.

15. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos 2x - 2(a + 1)\cos x - 4a - 11 = 0$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos 2x + (2a+9)\sin x - 5a - 11 = 0$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

16. а) Для каждого значения параметра a найдите корни уравнения $\arcsin((a-1)x - 1 - (a-1)x^2) + \arcsin x = 0$.

б) Для каждого значения параметра a найдите корни уравнения $\arccos(ax^2 - (a+1)x + 2) + \arccos(-x) = \pi$.

17. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение $\dfrac{2x^2-6x+3}{x^2-3x+4} = a+1$ имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4x+7} = \dfrac{a+2}{3}$ имеет хотя бы один корень.

18. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение $\dfrac{(2a+1)x^2-2(a+5)x+18a+9}{x^2-5x+9} = 3a$ имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение $\dfrac{(a+1)x^2+(5a+4)x+9a+9}{x^2+5x+9} = 2a$ имеет хотя бы один корень.

19. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых прямая $y = a$ имеет хотя бы одну общую точку с графиком функции $y = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x + 11}{3\operatorname{tg} x - 1}$.

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых прямая $y = a$ имеет хотя бы одну общую точку с графиком функции $y = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x + 14}{4\operatorname{tg} x + 1}$.

20. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $16^x + (3a^2+5a+7)\cdot 4^x - 2a + 3 = 0$ имеет единственный корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $49^x + (3a^2 - a + 3)\cdot 7^x - a - 2 = 0$ имеет единственный корень.

21. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $36^x - (8a-1)\cdot 6^x + 16a^2 - 4a - 2 = 0$ имеет единственный корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $25^x - (8a+5)\cdot 5^x + 16a^2 + 20a - 14 = 0$ имеет единственный корень.

22. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $4^x - (3a-1)\cdot 2^x + 2a^2 + a - 6 \leqslant 0$ имеет единственное решение.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $9^x-(3a-5)\cdot 3^x+2a^2-6a+4\leqslant 0$ имеет единственное решение.

23. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых один из корней уравнения $16^x-(4^{a+3}+16^{a+1})\cdot 4^x+4^{3a+5}=0$ больше другого в три раза.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых один из корней уравнения $25^x-(125^{a-1}+5^{2a-3})\cdot 5^x+5^{5a-6}=0$ больше другого в два раза.

24. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_{14}^2 x-(18a+5)\log_{14} x+81a^2+45a+6=0$ имеет два различных корня, среднее арифметическое которых равно 105.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_{16}^2 x-(16a+19)\log_{16} x+64a^2+152a+90=0$ имеет два различных корня, среднее арифметическое которых равно 8,5.

25. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $a\log_3^2 x-(a-2)\log_3 x-2\geqslant 0$ имеет единственное решение.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $a\log_5^2 x-(a+3)\log_5 x+3\leqslant 0$ имеет единственное решение.

26. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых система уравнений

$$\begin{cases} x-3y=-1, \\ x^2+6xy+9y^2-10ax-30ay+125a^2+60a+9=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых система уравнений

$$\begin{cases} x+5y=3, \\ x^2+8xy+16y^2-8ax-32ay+25a^2+12a+4=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

27. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых при любом значении параметра b система уравнений

$$\begin{cases} x+az^2=by, \\ 2bx+(b-6)y=8z+8 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y;z)$.

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых при любом значении параметра b система уравнений

$$\begin{cases} 2bx+y=a, \\ (b-1)x+z^2+z=by \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y;z)$.

28. а) Найдите наибольшее значение параметра a, для которого существует хотя бы одна пара $(x;\,y)$ таких чисел x и y, что

$$x^2+2y^2+xy-ax+ay+a^2\leqslant 3.$$

б) Найдите наименьшее значение параметра a, для которого существует хотя бы одна пара $(x;\,y)$ таких чисел x и y, что

$$2x^2+2y^2+xy-ax+ay+a^2\leqslant 2.$$

29. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых существует хотя бы одна пара $(x;\,y)$ таких чисел x и y, что

$$x^2-4xy+6y^2+2y+2y\sin(\pi a)+\sin^2(\pi a)+1=0.$$

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых существует хотя бы одна пара $(x;\,y)$ таких чисел x и y, что

$$11x^2+6xy+y^2-2x-2x\operatorname{tg}(\pi a)+\operatorname{tg}^2(\pi a)+1=0.$$

30. а) Найдите все пары $(x;\,y)$ таких чисел x и y, что

$$x^2-x\log_2(xy)-2x+0{,}5\log_2^2(xy)+2=0.$$

б) Найдите все пары $(x;\,y)$ таких чисел x и y, что

$$\log_{0,2}^2(xy)-4y\log_{0,2}(xy)+5y^2+2y+1=0.$$

31. а) Найдите все тройки $(x;\,y;\,z)$ таких чисел x, y, z, что

$$\log_{0,5}^2 x+2y^2+10\cdot 9^z+2y\log_{0,5}x-2y\cdot 3^{z+1}-2\cdot 3^z+1=0.$$

б) Найдите все тройки $(x;\,y;\,z)$ таких чисел x, y, z, что

$$17\cdot 25^x+\log_3^2 y+2z^2-8z\cdot 5^x-2\cdot 5^x-2z\log_3 y+1=0.$$

32. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых существует единственная тройка $(x;\,y;\,z)$ действительных чисел x, y, z, удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=z,\\ x+y+z=a. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых существует единственная тройка $(x;\,y;\,z)$ действительных чисел x, y, z, удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{cases} x^2+4y^2=x+y+z,\\ x+2y+3z=a. \end{cases}$$

33. а) Решите систему $\begin{cases} (2z-y)(y+2)=4y+9, \\ (x-3)^3+y+2=0, \\ x^2+z^2=4x, \\ z\geqslant 0. \end{cases}$

б) Решите систему $\begin{cases} 2(y-2)(y-z)=z-2, \\ 8x^3+z=3xy, \\ 4x^2+z^2=4z, \\ z\leqslant 2. \end{cases}$

§ 2.2. Расположение корней квадратного трёхчлена относительно данных чисел

Большинство задач с параметром предполагает ответ на вопрос о том, при каких значениях параметра множество решений уравнения, неравенства или системы удовлетворяет определённым условиям. Не являются исключением и задачи, связанные с исследованием квадратного трёхчлена. Как правило, в таких задачах требуется найти все значения параметра, при каждом из которых один или оба корня x_1, x_2 (здесь и далее будем считать, что $x_1 < x_2$) квадратного трёхчлена $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ больше или меньше данного числа, принадлежат данному промежутку и т. п. Обычно выделяют семь основных случаев расположения корней квадратного трёхчлена $f(x)$ относительно данных чисел l и m $(l<m)$:

— оба корня больше данного числа l;

— оба корня меньше данного числа m;

— оба корня принадлежат данному интервалу $(l; m)$;

— только меньший корень принадлежат данному интервалу $(l; m)$;

— только больший корень принадлежат данному интервалу $(l; m)$;

— один из корней меньше данного числа l, а другой корень больше данного числа m;

— один из корней меньше данного числа l, а другой корень больше этого числа.

Для получения необходимых и достаточных условий реализации каждого из этих случаев можно воспользоваться материалом предыдущего параграфа или свойствами квадратного трёхчлена. Рассмотрим сначала, как применить материал предыдущего параграфа. Пусть, например, требуется найти необходимые и достаточные условия того, что оба корня квадратного трёхчлена $f(x)$ больше данного числа l. Обозначим $x-l$ через t. Тогда $x=t+l$, а условие $x>l$ эквивалентно

условию $t > 0$. Выполнив замену переменной, получим квадратный трёхчлен $g(t) = a(t+l)^2 + b(t+l) + c$. Остаётся найти необходимые и достаточные условия того, что оба корня трёхчлена $g(t)$ положительны, т. е., приведя $g(t)$ к стандартному виду, воспользоваться таблицей из предыдущего параграфа. Сделаем это. Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим $g(t) = at^2 + (2al+b)t + al^2 + bl + c$, или $g(t) = at^2 + (2al+b)t + f(l)$. Оба корня квадратного трёхчлена $g(t)$ положительны, если

$$\begin{cases} D > 0, \\ af(l) > 0, \\ a(2al+b) < 0. \end{cases}$$

Найдём дискриминант: $D = (2al+b)^2 - 4a(al^2+bl+c)$, откуда после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим $D = b^2 - 4ac$. Таким образом, дискриминанты трёхчленов $f(x)$ и $g(t)$ одинаковы. Последнее наводит на мысль о том, что в дальнейшем можно обходиться без формальной замены переменной, ограничившись исследованием только данного трёхчлена $f(x)$. Для этого остаётся придать наглядный смысл третьему неравенству $a(2al+b) < 0$ системы. Условия отрицательности произведения и частного двух чисел a и $2al+b$ эквивалентны, поэтому перейдём к равносильному неравенству $\frac{2al+b}{a} < 0$, откуда $2l + \frac{b}{a} < 0$, или $l + \frac{b}{2a} < 0$, и, значит, $-\frac{b}{2a} > l$. Поскольку $-\frac{b}{2a} = x_0$, где x_0 — абсцисса вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$, последнее неравенство можно переписать в виде $x_0 > l$. Таким образом, необходимые и достаточные условия того, что оба корня квадратного трёхчлена $f(x)$ больше данного числа l, даются системой неравенств

$$\begin{cases} D > 0, \\ af(l) > 0, \\ x_0 > l. \end{cases}$$

Рассуждая аналогично, можно получить необходимые и достаточные условия для каждого из указанных в начале параграфа семи случаев расположения корней квадратного трёхчлена относительно данных чисел (для некоторых из них замену переменной придётся делать дважды, переходя сначала к квадратному трёхчлену от $t = x - l$, а затем — от $t = x - m$). При этом следует иметь в виду, что условие положительности дискриминанта в ряде случаев можно опустить. В самом деле, например, неравенство $af(m) < 0$ означает, что числа a и $f(m)$

имеют разные знаки. Поэтому если ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены вверх ($a > 0$), то $y(m) = f(m) < 0$, т. е. существует точка параболы, расположенная ниже оси абсцисс, и, значит, парабола пересекает эту ось. Следовательно, в данном случае условие неотрицательности дискриминанта (существования корней трёхчлена) будет выполнено как бы «автоматически»: оно является следствием неравенства $af(m) < 0$ и при выписывании необходимых и достаточных условий может быть опущено. Для наглядности приведём необходимые и достаточные условия для всех семи случаев расположения корней квадратного трёхчлена в виде таблицы. Заметим, что, как и условие положительности дискриминанта, неравенства для x_0 в ряде случаев не нужны (попробуйте объяснить почему).

Утверждения о расположении корней x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$) квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$, $D = b^2 - 4ac$, $x_0 = -\frac{b}{2a}$) относительно данных чисел l и m ($l < m$)	Необходимые и достаточные условия
1. Оба корня больше данного числа l: $\boldsymbol{l < x_1 < x_2}$	$\begin{cases} D > 0, \\ af(l) > 0, \\ x_0 > l \end{cases}$ (1)
2. Оба корня меньше данного числа m: $\boldsymbol{x_1 < x_2 < m}$	$\begin{cases} D > 0, \\ af(m) > 0, \\ x_0 < m \end{cases}$ (2)
3. Оба корня принадлежат данному интервалу $(l; m)$: $\boldsymbol{l < x_1 < x_2 < m}$	$\begin{cases} D > 0, \\ af(l) > 0, \\ af(m) > 0, \\ l < x_0 < m \end{cases}$ (3)
4. Только меньший корень принадлежит данному интервалу $(l; m)$: $\boldsymbol{l < x_1 < m < x_2}$	$\begin{cases} af(l) > 0, \\ af(m) < 0 \end{cases}$ (4)
5. Только больший корень принадлежит данному интервалу $(l; m)$: $\boldsymbol{x_1 < l < x_2 < m}$	$\begin{cases} af(l) < 0, \\ af(m) > 0 \end{cases}$ (5)
6. Один из корней меньше данного числа l, а другой корень больше данного числа m: $\boldsymbol{x_1 < l < m < x_2}$	$\begin{cases} af(l) < 0, \\ af(m) < 0 \end{cases}$ (6)
7. Один из корней меньше данного числа l, а другой корень больше этого числа: $\boldsymbol{x_1 < l < x_2}$	$af(l) < 0$ (7)

Обратим внимание на то, что все необходимые и достаточные условия выписаны в предположении, что квадратный трёхчлен имеет два различных корня и неравенства, которым удовлетворяют эти корни, являются строгими. При необходимости неравенство для дискриминанта может быть заменено на нестрогое, а случай, когда один из корней трёхчлена равен какому-то из чисел l или m, рассмотрен отдельно (либо соответствующее неравенство заменено на нестрогое). Кроме того, в условиях конкретных задач, как правило, не оговаривается, что речь идёт именно о квадратном трёхчлене $f(x)=ax^2+bx+c$, и случай $a=0$ также требует отдельного рассмотрения.

Как уже отмечалось, приведённую выше таблицу можно получить, основываясь только на свойствах квадратного трёхчлена и графических представлениях. В определённом смысле такой подход является более наглядным и позволяет исходя из требований конкретной задачи выписывать необходимые и достаточные условия без использования таблицы. Сделаем это. По-прежнему будем считать, что x_1 и x_2 $(x_1<x_2)$ — корни квадратного трёхчлена

$$f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0), \quad D=b^2-4ac, \quad x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

Предположим для определённости, что $a>0$ (случай $a<0$ рассматривается совершенно аналогично), т. е. что ветви параболы, являющейся графиком функции $y=ax^2+bx+c$, направлены вверх. В этом случае квадратный трёхчлен принимает положительные значения на промежутках $(-\infty;x_1)$ и $(x_2;+\infty)$, а отрицательные значения — на промежутке $(x_1;x_2)$. Условие «оба корня квадратного трёхчлена $f(x)$ больше данного числа l» означает, что $D>0$ (корни существуют) и

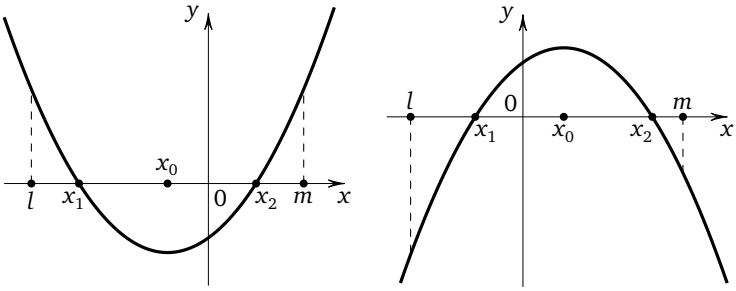


Рис. 1

$l \in (-\infty; x_1)$, т. е. $f(l) > 0$ и $l < x_1 < x_0$ (см. рис. 1а). Тем самым, имеет место система

$$\begin{cases} a > 0, \\ D > 0, \\ f(l) > 0, \\ x_0 > l. \end{cases}$$

Обратно, пусть дана последняя система. Условие $D > 0$ означает, что квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет два различных корня; условие $f(l) > 0$ означает (в силу неравенства $a > 0$), что $l \in (-\infty; x_1)$ или $l \in (x_2; +\infty)$, но из условия $l < x_0$ следует (поскольку $x_0 < x_2$), что $l < x_2$, т. е. $l \in (-\infty; x_1)$, и, значит, оба корня квадратного трёхчлена $f(x)$ больше l. Случай $a < 0$ (см. рис. 1б) рассматривается аналогично:

$$\begin{cases} a < 0, \\ D > 0, \\ f(l) < 0, \\ x_0 > l. \end{cases}$$

Заметим, что в каждом случае числа a и $f(l)$ одного знака, что можно записать с помощью неравенства $af(l) > 0$ и вместо двух систем рассматривать одну систему (1). Итак, оба корня больше числа l в том и только том случае, если имеет место система (1). Аналогично оба корня квадратного трёхчлена $f(x)$ меньше числа m в том и только том случае, если (рис. 1а и 1б)

$$\begin{cases} a > 0, \\ D > 0, \\ f(m) > 0, \\ x_0 < m \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ D > 0, \\ f(m) < 0, \\ x_0 < m, \end{cases}$$

т. е. (поскольку числа a и $f(m)$ одного знака) если имеет место система (2):

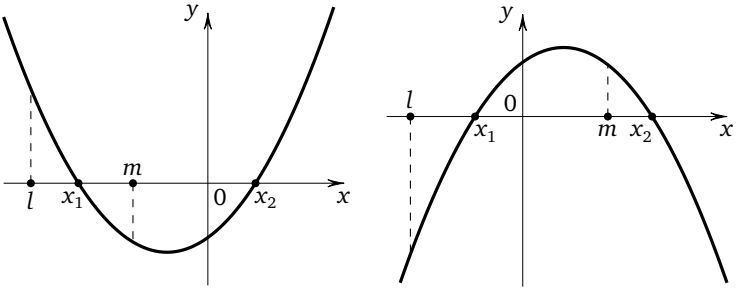
$$\begin{cases} D > 0, \\ af(m) > 0, \\ x_0 < m. \end{cases}$$

Понятно, что оба корня принадлежат данному промежутку $(l; m)$ в том и только том случае, если имеют место обе системы (1) и (2), что

более коротко можно записать с помощью одной системы (3):

$$\begin{cases} D > 0, \\ af(l) > 0, \\ af(m) > 0, \\ l < x_0 < m. \end{cases}$$

Подобным образом достаточно просто получить необходимые и достаточные условия для каждого из оставшихся случаев расположения корней квадратного трёхчлена относительно данных чисел. Начинать выписывать эти условия нужно с определения знака $f(x)$ в каждой из данных точек l и m. Затем следует установить, нужны ли условия на дискриминант и абсциссу вершины параболы. Как уже отмечалось, в случае если ветви параболы направлены вверх (соответственно вниз) и хотя бы в одной из данных точек квадратный трёхчлен $f(x)$ должен принимать отрицательное (соответственно положительное) значение, условие положительности дискриминанта будет выполнено «автоматически»: ведь в этом случае в силу непрерывности квадратичной функции парабола, являющаяся её графиком, обязательно пересекает ось абсцисс, т. е. квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет корни, и, значит, его дискриминант положителен. Как правило, в таких случаях и условие на абсциссу вершины параболы записывать не нужно. В самом деле, найдём, например, необходимые и достаточные условия того, что только меньший корень принадлежат данному интервалу $(l; m)$, рассмотрев два случая: $a > 0$ (рис. 2а) и $a < 0$ (рис. 2б).



а) б)

Рис. 2

Начинаем с определения знака $f(x)$ в каждой из точек l и m. Если $a > 0$ (рис. 2а), то $f(l) > 0$, $f(m) < 0$. В силу последнего неравенства $f(x)$ принимает отрицательное значение, значит, парабола, ветви ко-

торой направлены вверх, обязательно пересечёт ось абсцисс, и условие положительности дискриминанта будет выполнено. Аналогично если $a<0$ (рис. 2б), то $f(l)<0$, $f(m)>0$. Положение абсциссы вершины параболы при этом, как видно, не играет никакой роли: на рисунке 2а она находится справа от m, на рисунке 2б — слева от m. То, что необходимые и достаточные условия в данном случае даются только двумя неравенствами, можно обосновать и более формально. В самом деле, если

$$\begin{cases} a>0, \\ f(l)>0, \\ f(m)<0, \end{cases}$$

то это означает, что $l\in(-\infty;x_1)$ или $l\in(x_2;+\infty)$, а $m\in(x_1;x_2)$. Но $l<m$, значит, $l\in(-\infty;x_1)$, т. е. $l<x_1<m<x_2$, что и требовалось. Учитывая, что в обоих случаях числа a и $f(l)$ одного знака, а числа a и $f(m)$ разных знаков, необходимые и достаточные условия того, что только меньший корень квадратного трёхчлена $f(x)$ принадлежат данному интервалу $(l;m)$, можно записать с помощью одной системы (4):

$$\begin{cases} af(l)>0, \\ af(m)<0. \end{cases}$$

Необходимые и достаточные условия для оставшихся случаев 5—7 расположения корней квадратного трёхчлена относительно данных чисел легко получаются аналогичным образом с помощью свойств квадратного трёхчлена и наглядно-графических представлений.

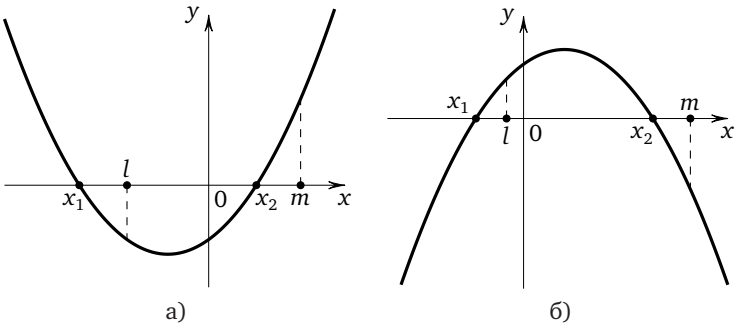


Рис. 3

Только больший корень квадратного трёхчлена $f(x)$ принадлежат данному интервалу $(l;\,m)$,

$$\text{если (рис. 3а)}\ \begin{cases} a>0,\\ f(l)<0,\\ f(m)>0 \end{cases} \quad \text{или (рис. 3б)}\ \begin{cases} a<0,\\ f(l)>0,\\ f(m)<0, \end{cases}$$

а значит, имеет место система (5):

$$\begin{cases} af(l)<0,\\ af(m)>0. \end{cases}$$

Один из корней меньше данного числа l, а другой корень больше данного числа m,

$$\text{если (рис. 4а)}\ \begin{cases} a>0,\\ f(l)<0,\\ f(m)<0 \end{cases} \quad \text{или (рис. 4б)}\ \begin{cases} a<0,\\ f(l)>0,\\ f(m)>0, \end{cases}$$

а значит, имеет место система (6):

$$\begin{cases} af(l)<0,\\ af(m)<0. \end{cases}$$

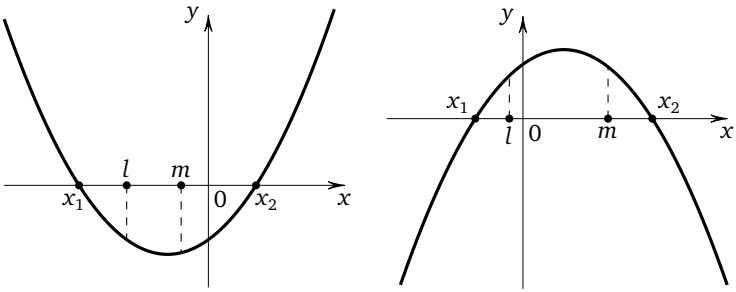


Рис. 4

Один из корней меньше данного числа l, а другой корень больше этого числа,

$$\text{если (рис. 5а)}\ \begin{cases} a>0,\\ f(l)<0 \end{cases} \quad \text{или (рис.5б)}\ \begin{cases} a<0,\\ f(l)>0, \end{cases}$$

а значит, имеет место неравенство (7): $af(l)<0$.

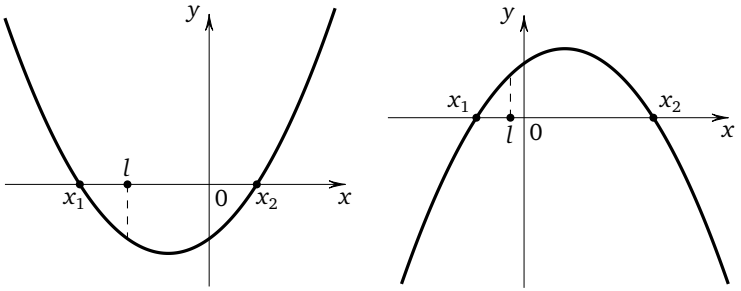


Рис. 5

Заметим, что формальное решение таких задач с помощью формулы корней квадратного уравнения обычно (за исключением задач, в которых дискриминант является полным квадратом, рассмотренных в предыдущем параграфе) приводит к довольно громоздким системам иррациональных неравенств (в отличие от изложенного метода, при использовании которого, как правило, приходится иметь дело лишь с линейными и квадратными неравенствами).

Перейдём к примерам.

Пример 1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a-4)x^2-3ax+a-2=0$ имеет два корня разных знаков.

Решение. Из условия задачи следует, что уравнение должно иметь два корня, поэтому $a \neq 4$. Пусть $f(x) = (a-4)x^2 - 3ax + a - 2$, x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$ — корни квадратного трёхчлена $f(x)$. Если $a > 4$, то ветви параболы, являющейся графиком функции $y = f(x)$, направлены вверх и тогда $f(0) < 0$ (рис.6а); если $a < 4$, то ветви параболы направлены вниз и тогда $f(0) > 0$ (рис. 6б).

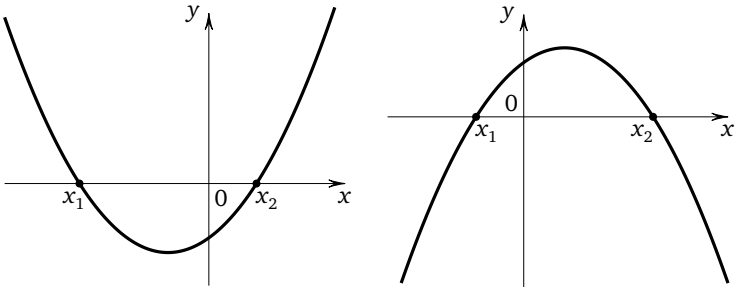


Рис. 6

Значит, необходимые и достаточные условия того, что один из корней трёхчлена $f(x)$ меньше данного числа нуль, а другой корень больше этого числа (или что данное число нуль лежит между корнями квадратного трёхчлена $f(x)$), даются двумя системами

$$\begin{cases} a > 4, \\ f(0) < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 4, \\ f(0) > 0. \end{cases}$$

Это означает, что числа $a-4$ и $f(0)$ должны иметь разные знаки, что более коротко можно записать с помощью одного неравенства $(a-4)f(0) < 0$. Поскольку $f(0) = a - 2$, приходим к неравенству $(a-4)(a-2) < 0$, решением которого является интервал $(2; 4)$.

Ответ: $(2; 4)$.

Пример 2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^2 - (4a+3)x + 3a + 4 = 0$ имеет два корня разных знаков, модуль каждого из которых меньше 5.

Решение. Пусть

$$f(x) = x^2 - (4a+3)x + 3a + 4,$$

x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$ — корни квадратного трёхчлена $f(x)$, старший коэффициент которого, не зависящий от параметра, положителен, и, значит, ветви параболы, являющейся графиком функции $y = f(x)$, направлены вверх. Условие задачи будет выполнено, если $x_1 \in (-5; 0)$, а $x_2 \in (0; 5)$ (рис. 7).

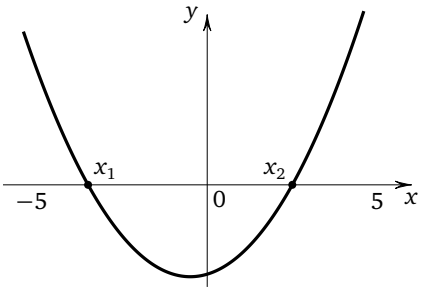


Рис. 7

Для выполнения условия $x_1 \in (-5; 0)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{cases} f(-5) > 0, \\ f(0) < 0. \end{cases}$$

Для выполнения условия $x_1 \in (0; 5)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{cases} f(5) > 0, \\ f(0) < 0. \end{cases}$$

Вместо двух систем можно записать одну:

$$\begin{cases} f(-5) > 0, \\ f(5) > 0, \\ f(0) < 0. \end{cases}$$

Поскольку $f(0) = 3a + 4$, $f(-5) = 23a + 44$, $f(5) = 14 - 17a$, получаем систему

$$\begin{cases} 23a + 44 > 0, \\ 14 - 17a > 0, \\ 3a + 4 < 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad -\frac{44}{23} < a < -\frac{4}{3}.$$

Ответ: $\left(-\frac{44}{23}; -\frac{4}{3}\right)$.

Пример 3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^2 + ax + a^2 + 6a < 0$ будет выполнено для любого значения x, принадлежащего интервалу $(0; 4)$.

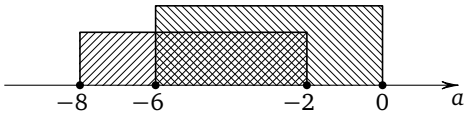
Решение. Пусть $f(x) = x^2 + ax + a^2 + 6a$, x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$ — корни квадратного трёхчлена $f(x)$. Старший коэффициент квадратного трёхчлена $f(x)$ положителен, значит, ветви параболы, являющейся графиком функции $y = f(x)$, направлены вверх. В этом случае $f(x)$ может принимать отрицательные значения только на промежутке $(x_1; x_2)$. Поэтому условие задачи будет выполнено, если $x_1 \leqslant 0 < 4 \leqslant x_2$ (x_1 может быть равен 0, а x_2 может быть равен 4, поскольку речь идёт о строгом неравенстве, которое должно выполняться на интервале, а не на отрезке). Необходимые и достаточные условия того, что $x_1 \leqslant 0 < 4 \leqslant x_2$, даются системой $\begin{cases} f(0) \leqslant 0, \\ f(4) \leqslant 0. \end{cases}$ Поскольку $f(0) = a^2 + 6a$, $f(4) = a^2 + 10a + 16$, последняя система приводится к виду

$$\begin{cases} a^2 + 6a \leqslant 0, \\ a^2 + 10a + 16 \leqslant 0, \end{cases}$$

откуда, разложив левую часть каждого неравенства на множители, получим

$$\begin{cases} a(a + 6) \leqslant 0, \\ (a + 2)(a + 8) \leqslant 0. \end{cases}$$

В соответствии со свойствами квадратного трёхчлена решением первого неравенства полученной системы является отрезок $[-6; 0]$, а решением второго неравенства — отрезок $[-8; -2]$. Следовательно, решение системы — отрезок $[-6; -2]$:



Ответ: $[-6; -2]$.

Пример 4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое решение неравенства $(a-2)x^2-(2a+3)x+a+1>0$ принадлежит отрезку $[-1; 1]$.

Решение. Пусть $f(x)=(a-2)x^2-(2a+3)x+a+1$. Рассмотрим два случая: 1) $a=2$; 2) $a\neq 2$. Если $a=2$, многочлен $f(x)$ принимает вид $f(x)=-7x+3$ и неравенство $f(x)>0$ выполняется, если $-7x+3>0$, откуда $x<\frac{3}{7}$. Ясно, что не все решения этого неравенства принадлежат отрезку $[-1; 1]$. Значит, $a=2$ не удовлетворяет условию задачи. Пусть теперь $a\neq 2$. В этом случае $f(x)$ является квадратным трёхчленом. Обозначим через x_1 и x_2 $(x_1\leqslant x_2)$ его корни, через D — его дискриминант, через x_0 — абсциссу вершины параболы, являющейся графиком функции $y=(a-2)x^2-(2a+3)x+a+1$. При $a>2$ старший коэффициент квадратного трёхчлена $f(x)$ положителен. Значит, если $D>0$, то $f(x)>0$ при $x\in(-\infty; x_1)\cup(x_2; +\infty)$, а если $D\leqslant 0$, то $f(x)\geqslant 0$ при любом действительном x. Следовательно, при $a>2$ все решения неравенства $f(x)>0$ не могут принадлежать отрезку $[-1; 1]$. При $a<2$ старший коэффициент квадратного трёхчлена $f(x)$ отрицателен, и он может принимать положительные значения только на интервале $(x_1; x_2)$. Следовательно, условие задачи будет выполняться, если $-1\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$, т. е. если квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет два различных корня, меньший из которых не меньше числа -1, а больший не больше числа 1. В этом случае (рис. 8) необходимые и достаточные условия даются системой

$$\begin{cases} a<2, \\ D>0, \\ f(-1)\leqslant 0, \\ f(1)\leqslant 0, \\ -1<x_0<1. \end{cases}$$

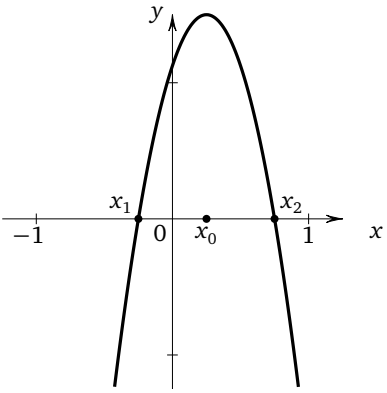


Рис. 8

Поскольку $D = (2a+3)^2 - 4(a-2)(a+1) = 16a + 17$, $f(-1) = a - 2 + 2a + 3 + a + 1 = 4a + 2$, $f(1) = a - 2 - 2a - 3 + a + 1 = -4$, $x_0 = \frac{2a+3}{2(a-2)}$, последняя система приводится к виду

$$\begin{cases} a < 2, \\ 16a + 17 > 0, \\ 4a + 2 \leqslant 0, \\ -4 \leqslant 0, \\ -1 < \frac{2a+3}{2(a-2)} < 1, \end{cases}$$

откуда, умножив все части последнего неравенства системы на $a - 2 < 0$, после преобразований получим

$$\begin{cases} a < 2, \\ a > -\frac{17}{16}, \\ a \leqslant -\frac{1}{2}, \\ a < \frac{1}{4}, \end{cases}$$

и, значит, $-\frac{17}{16} < a \leqslant -\frac{1}{2}$.

Ответ: $\left(-\frac{17}{16}; -\frac{1}{2}\right]$.

Пример 5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a-3)x^2-2(a+3)x-a-3=0$ имеет хотя бы один корень, меньший 1.

Решение. Пусть $f(x)=(a-3)x^2-2(a+3)x-a-3$. Рассмотрим два случая: 1) $a=3$; 2) $a\neq 3$. Если $a=3$, данное уравнение является линейным и принимает вид $-12x-6=0$, откуда $x=-0{,}5<1$. Значит, $a=3$ удовлетворяет условию задачи. Пусть теперь $a\neq 3$. В этом случае $f(x)$ является квадратным трёхчленом. Обозначим через x_1 и x_2 $(x_1\leqslant x_2)$ его корни, через D — его дискриминант, через x_0 — абсциссу вершины параболы, являющейся графиком функции $y=(a-3)x^2-2(a+3)x-a-3$. Условие задачи будет выполнено, если:

— $f(x)$ имеет единственный корень, и этот корень меньше 1;

— $f(x)$ имеет два различных корня, один из которых меньше 1, а другой больше или равен 1;

— $f(x)$ имеет два различных корня, каждый из которых меньше 1.

Рассмотрим все эти возможности. Для того чтобы квадратный трёхчлен $f(x)$ имел хотя бы один корень, должно выполняться неравенство $D\geqslant 0$, или $\frac{D}{4}\geqslant 0$, где $\frac{D}{4}=(a+3)^2+(a-3)(a+3)=2a(a+3)$. Если $\frac{D}{4}=0$, т. е. $a=0$ либо $a=-3$, квадратный трёхчлен имеет единственный корень $x=x_0=\frac{a+3}{a-3}$. При $a=0$ этот корень равен -1; при $a=-3$ он равен 0. В обоих случаях корень меньше 1, поэтому $a=0$ и $a=-3$ удовлетворяют условию задачи.

Если $\frac{D}{4}>0$, то $f(x)$ имеет два различных корня. Предположим, что один из них равен 1. Тогда $a-3-2(a+3)-a-3=0$, откуда $a=-6$. В этом случае данное уравнение примет вид $-9x^2+6x+3=0$, или $3x^2-2x-1=0$. Корнями последнего уравнения являются числа 1 и $-\frac{1}{3}$. Поскольку $-\frac{1}{3}<1$, значение $a=-6$ удовлетворяет условию задачи.

Осталось исследовать случаи, когда данное уравнение имеет два различных корня, ни один из которых не равен 1. Один из корней меньше 1, а другой больше 1 в том и только том случае, если $(a-3)f(1)<0$ (см. систему (7)). Так как

$$f(1)=a-3-2(a+3)-a-3=-2a-12,$$

последнее неравенство примет вид $(a-3)(-2a-12)<0$. Разделив обе части полученного неравенства на -2, придём к неравенству $(a-3)(a+6)>0$, откуда получим, что $a\in(-\infty;-6)\cup(3;+\infty)$.

Оба корня меньше 1 в том и только том случае (см. систему (2)), если

$$\begin{cases} \frac{D}{4} > 0, \\ (a-3)f(1) > 0, \\ x_0 < 1, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} 2a(a+3) > 0, \\ (a-3)(a+6) < 0, \\ \frac{a+3}{a-3} < 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a(a+3) > 0, \\ (a-3)(a+6) < 0, \\ \frac{6}{a-3} < 0. \end{cases}$$

Решение последней системы: $(-6;-3) \cup (0;3)$. Таким образом, $a \in (-\infty;-3] \cup [0;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-3] \cup [0;+\infty)$.

Упражнения к § 2.2

1. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a-2)x^2 - 4ax + a - 1 = 0$ имеет два корня разных знаков.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a+2)x^2 - 5ax + a - 3 = 0$ имеет два корня разных знаков.

2. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a^2-9)x^2 - (2a^2+5a-9)x + a + 3 = 0$ имеет два корня разных знаков.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(25-a^2)x^2 - (4a^2 - a - 7)x + a - 5 = 0$ имеет два корня разных знаков.

3. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax^2 - (a+1)x + 2a^2 - 5a - 3 = 0$ имеет два корня разных знаков.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a^2 - a - 2)x^2 - x + a^2 + a - 2 = 0$ имеет два корня разных знаков.

4. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a^2-a)x^2 - (a-2)x - a - 6 = 0$ имеет два различных корня, один из которых больше 1, а другой — меньше 1.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a^2 - a - 6)x^2 - 2ax + a^2 - 9 = 0$ имеет два различных корня, один из которых больше -1, а другой — меньше -1.

5. а) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^2-(2a-5)x+a-7=0$ имеет два корня разных знаков, модуль каждого из которых меньше 3.

б) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^2-(3a-7)x+a-4=0$ имеет два корня разных знаков, модуль каждого из которых меньше 2.

6. а) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(2a-1)x^2-(a-3)x+a+5=0$ имеет два корня разных знаков, модуль каждого из которых больше 1.

б) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(a+1)x^2-(2a+1)x+2a-5=0$ имеет два корня разных знаков, модуль каждого из которых больше 4.

7. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a-1)x^2-2(a+1)x-2a-1=0$ имеет два различных корня, каждый из которых больше -2.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(a-2)x^2+2(a-6)x-2a-18=0$$

имеет два различных корня, каждый из которых больше -4.

8. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a+1)x^2+2(a-1)x-2a+1=0$ имеет два различных корня, каждый из которых меньше 2.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a+2)x^2-2(a+4)x-2a+7=0$ имеет два различных корня, каждый из которых меньше 4.

9. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a-3)x^2-2(a+3)x-2a-3=0$ имеет два различных корня, принадлежащих интервалу $(-2;1)$.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a-5)x^2+2(a+1)x-2a+1=0$ имеет два различных корня, принадлежащих интервалу $(-1;2)$.

10. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a+6)x^2+2(a-6)x-2a+6=0$ имеет два различных корня, модуль каждого из которых меньше 2.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2(a+5)x^2+2(a-7)x-a+4=0$ имеет два различных корня, модуль каждого из которых меньше 1.

11. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^2-(a-5)x+a^2-4a-5<0$ будет выполнено для любого значения x, принадлежащего интервалу $(-4;0)$.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^2 + (a - 4)x + a^2 - 2a - 8 < 0$ будет выполнено для любого значения x, принадлежащего интервалу $(0; 4)$.

12. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $4x^2 + 2(a - 2)x + a^2 + 2a - 8 < 0$ будет выполнено для любого значения x, принадлежащего интервалу $(0; 2)$.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $4x^2 - 2(a - 1)x + a^2 + 4a - 5 < 0$ будет выполнено для любого значения x, принадлежащего интервалу $(-2; 0)$.

13. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое решение неравенства $4(a - 3)x^2 - 2(2a + 1)x + a > 0$ принадлежит отрезку $[-2; 2]$.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое решение неравенства $9(a - 1)x^2 - 3(2a + 5)x + a + 2 > 0$ принадлежит отрезку $[-3; 3]$.

14. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое решение неравенства $(a - 4)x^2 - 2(2a - 1)x + 4a - 4 > 0$ принадлежит отрезку $[-0{,}5; 0{,}5]$.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое решение неравенства $(a - 5)x^2 - (2a - 3)x + a - 2 > 0$ принадлежит отрезку $[-0{,}25; 0{,}25]$.

15. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a + 4)x^2 + 4(a + 1)x + 2a + 2 = 0$ имеет хотя бы один корень, больший -2.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a + 3)x^2 + 2(a - 3)x - a + 3 = 0$ имеет хотя бы один корень, больший -1.

16. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a - 4)x^2 - 6(a - 2)x + 7a - 10 = 0$ имеет хотя бы один корень, меньший 3.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a - 2)x^2 - 4(a + 1)x + 2a + 2 = 0$ имеет хотя бы один корень, меньший 2.

§ 2.3. Задачи, сводимые к исследованию квадратного трёхчлена

В этом параграфе будут рассмотрены задачи, решение которых сводится к исследованию расположения корней квадратного трёхчлена относительно некоторых чисел только после определённых предвари-

тельных действий: алгебраических преобразований, замены переменной и т. п. Существенным при решении задач такого рода является умение проводить правильные рассуждения и делать логически обоснованные выводы, а ключевым моментом — переформулировка, после которой данная задача сводится к задаче на исследование расположения корней квадратного трёхчлена. Например, для того чтобы ответить на вопрос о существовании корней квадратного относительно $\sin x$ уравнения с параметром, нужно ввести новую переменную, положив её равной $\sin x$, получить квадратное уравнение относительно новой переменной и с учётом того, что эта переменная принимает значения только из отрезка $[-1; 1]$, найти значения параметра, при которых хотя бы один корень полученного квадратного уравнения принадлежит отрезку $[-1; 1]$, рассмотрев все возможные случаи: оба корня принадлежат отрезку $[-1; 1]$; только меньший корень принадлежит отрезку $[-1; 1]$; только больший корень принадлежит отрезку $[-1; 1]$; уравнение имеет единственный корень, который принадлежит отрезку $[-1; 1]$. Типичной ошибкой при решении подобных задач является игнорирование принадлежности корней полученного квадратного уравнения отрезку $[-1; 1]$ и выписывание только условия неотрицательности дискриминанта. Поэтому решение каждой такой задачи целесообразно делить на два этапа, первый из которых состоит в сведении данной задачи к задаче на исследование квадратного трёхчлена (с соответствующей переформулировкой), а вторым является само исследование полученного квадратного трёхчлена с помощью сформулированных в предыдущем параграфе теорем.

Пример 1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{ax-a(1-a)}{a^2-ax-2} > 0$ выполнено для любых значений переменной x из отрезка $[-1; 1]$.

Решение. Поскольку частное двух чисел положительно в том и только том случае, если положительно их произведение, данное неравенство можно переписать в виде $(ax-a(1-a))(a^2-ax-2) > 0$. Пусть $f(x) = (ax-a(1-a))(a^2-ax-2)$, x_1 и x_2 $(x_1 \leqslant x_2)$ — корни квадратного трёхчлена $f(x)$. Заметим, что коэффициент при x^2 в выражении $f(x)$ равен $-a^2$ и, следовательно, неположителен. Если он равен нулю (т. е. $a = 0$), то неравенство принимает вид $0 > 0$ и не имеет решений. Если $a \neq 0$, ветви параболы, являющейся графиком функции $y = f(x)$, направлены вниз, и задачу можно переформулировать так: найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $f(x) > 0$ выполняется для любого значения x из отрезка

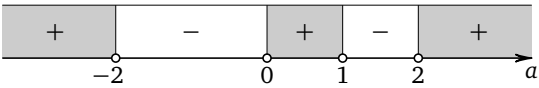
$[-1; 1]$. Последнее имеет место, только если

$$\begin{cases} f(-1) > 0, \\ f(1) > 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} (a^2-2a)(a^2+a-2) > 0, \\ a^2(a^2-a-2) > 0. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы, приведя его к виду

$$a(a-2)(a-1)(a+2) > 0$$

и применив метод интервалов:

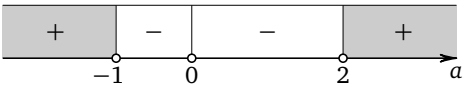


Решение первого неравенства системы: $(-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (2; +\infty)$.

Решим второе неравенство системы, приведя его к виду

$$a^2(a-2)(a+1) > 0$$

и применив метод интервалов:



Решение второго неравенства системы: $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Решение системы: $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Пример 2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^4 + 2(a-1)x^3 + 4x^2 + 8(a-1)x + 16 = 0$ имеет не менее двух различных отрицательных корней.

Решение. Заметим, что число 0 не является корнем уравнения. Поэтому можно разделить обе части уравнения на x^2, после чего перегруппировать слагаемые: $x^2 + \frac{16}{x^2} + 2(a-1)\left(x + \frac{4}{x}\right) + 4 = 0$. Обозначим

$$x + \frac{4}{x} = t, \tag{1}$$

тогда $x^2 + \frac{16}{x^2} = t^2 - 8$ и уравнение принимает вид

$$t^2 + 2(a-1)t - 4 = 0. \tag{2}$$

Тем самым задачу удалось свести к исследованию квадратного трёхчлена $f(t) = t^2 + 2(a-1)t - 4$. Попробуем установить, какие значения может принимать переменная t. Из уравнения (1) легко следует, что числа x и t одного знака. Кроме того, уравнение (1) можно

переписать в виде $x^2 - tx + 4 = 0$. Последнее уравнение имеет корни только в случае неотрицательности его дискриминанта $D = t^2 - 16$, т. е. если $t^2 - 16 \geqslant 0$, откуда $|t| \geqslant 4$, т. е. $t \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$. При этом если $t \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$, то уравнение $x^2 - tx + 4 = 0$ будет иметь два различных корня, если $t = \pm 4$, то единственный корень. Таким образом, если уравнение (2) имеет только положительные корни, данное уравнение отрицательных корней иметь не может. Если уравнение (2) имеет хотя бы один отрицательный корень, принадлежащий интервалу $(-\infty; -4)$, то исходное уравнение будет иметь по крайней мере два отрицательных корня. Теперь задачу можно переформулировать так: найти все значения параметра a, при которых уравнение (2) имеет хотя бы один отрицательный корень, принадлежащий промежутку $(-\infty; -4)$. Заметим, что $f(0) = -4$, следовательно, при любом значении параметра a квадратный трёхчлен имеет корни разных знаков. Поэтому исходное уравнение имеет не более двух различных отрицательных корней. Ровно два различных отрицательных корня оно будет иметь в том случае, если отрицательный корень квадратного трёхчлена $f(t)$ будет строго меньше -4. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $f(-4) < 0$, т. е. $16 - 8(a - 1) - 4 < 0$, откуда $a > 2{,}5$.

Ответ: $(2{,}5; +\infty)$.

Замечание. Приведённый пример показывает, насколько важно учитывать область значений новой переменной. Эта область для $t = x + \frac{4}{x}$ была найдена с помощью условия существования корней квадратного уравнения (т. е. условия неотрицательности дискриминанта). Аналогично можно найти область значений переменной $t = kx + \frac{l}{x}$ при любых отличных от нуля k и l, переписав равенство $t = kx + \frac{l}{x}$ в виде квадратного уравнения $kx^2 - tx + l = 0$. Для того чтобы это уравнение имело хотя бы один корень, необходимо и достаточно потребовать неотрицательности дискриминанта $D = t^2 - 4kl$, т. е. выполнения условия $t^2 \geqslant 4kl$, которое при отрицательном произведении kl будет выполнено для всех действительных значений t, а при $kl > 0$ приводится к неравенству $|t| \geqslant 2\sqrt{kl}$, откуда $t \in (-\infty; -2\sqrt{kl}] \cup [2\sqrt{kl}; +\infty)$. Таким образом, если $kl > 0$, то $\left|kx + \frac{l}{x}\right| \geqslant 2\sqrt{kl}$. При положительных k и l это же неравенство может быть получено из неравенства Коши $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ для среднего арифметического и среднего геометрического двух неотрицательных чисел a и b, являющегося следствием очевидного неравенства

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$ и получающегося из последнего раскрытием скобок и переносом слагаемых. Переписав неравенство Коши в виде $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$, заключаем, что сумма двух неотрицательных чисел не меньше удвоенного корня из их произведения (знак равенства возможен, только если числа равны). Поэтому при положительных k, l и x получим $kx+\frac{l}{x} \geqslant 2\sqrt{kx\cdot\frac{l}{x}}$, т. е. $kx+\frac{l}{x} \geqslant 2\sqrt{kl}$. Если же k и l положительны, а x отрицательно, то $(-x)$ положительно и для него выполняется неравенство $k(-x)+\frac{l}{(-x)} \geqslant 2\sqrt{kl}$, откуда после умножения на -1 получим $kx+\frac{l}{x} \leqslant -2\sqrt{kl}$. Значит, $\left|kx+\frac{l}{x}\right| \geqslant 2\sqrt{kl}$. Доказанное двумя способами неравенство позволяет при замене $t=kx+\frac{l}{x}$ сразу записывать в случае положительности k и l область значений новой переменной: $|t| \geqslant 2\sqrt{kl}$, или $t \in (-\infty; -2\sqrt{kl}] \cup [2\sqrt{kl}; +\infty)$.

Рассмотрим ещё один пример.

Пример 3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\lg^2(2x^2-4x+3)+(3a^2+5a+7)\lg(2x^2-4x+3)-2a+3=0$$

имеет хотя бы один корень.

Решение. Выделив полные квадраты под знаками логарифмов, перепишем уравнение в виде

$$\lg^2(2(x-1)^2+1)+(3a^2+5a+7)\lg(2(x-1)^2+1)-2a+3=0.$$

Пусть $t=\lg(2(x-1)^2+1)$. Поскольку $2(x-1)^2+1 \geqslant 1$, получим, что $t \geqslant 0$. Тогда данное уравнение примет вид $t^2+(3a^2+5a+7)t-2a+3=0$ и задачу можно переформулировать так: найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $t^2+(3a^2+5a+7)t-2a+3=0$ имеет хотя бы один неотрицательный корень. Обозначим через t_1 и t_2 корни квадратного трёхчлена $f(t)=t^2+(3a^2+5a+7)t-2a+3$, считая, что $t_1 \leqslant t_2$. Графиком функции $y=f(t)$ является парабола, ветви которой направлены вверх, абсцисса вершины $t_0=-\frac{3a^2+5a+7}{2}$. Заметим, что дискриминант трёхчлена $3a^2+5a+7$ отрицателен (он равен -59). Следовательно, $3a^2+5a+7>0$, а $t_0<0$ при любом действительном a. Поэтому если $f(t)$ имеет единственный корень (т. е. $t_1=t_2=t_0$), то этот корень отрицателен. Если $f(t)$ имеет два различных корня, то меньший из них будет отрицателен, поскольку $t_1<t_0<0$. Следовательно, для того чтобы задача имела решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$t_1 < 0 \leqslant t_2$, т. е. $f(0) \leqslant 0$. Поскольку $f(0) = -2a + 3$, получаем неравенство $-2a + 3 \leqslant 0$, откуда $a \geqslant 1{,}5$.

Ответ: $[1{,}5; +\infty)$.

При исследовании неравенств с параметрами часто приходится рассматривать значительно большее число возможных вариантов.

Пример 4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого действительного значения x выполнено неравенство $a(\sin^2 x - 3)^2 + 2a + \cos^2 x < 4$.

Решение. Обозначим $\sin^2 x$ через t. Тогда $t \in [0; 1]$, $\cos^2 x = 1 - t$ и данное неравенство примет вид $a(t-3)^2 + 2a + 1 - t < 4$, откуда после раскрытия скобок, приведения подобных слагаемых и записи левой части в стандартном для квадратного неравенства виде получим $at^2 - (6a+1)t + 11a - 3 < 0$. Теперь задачу можно переформулировать так: найти все значения параметра a, для каждого из которых трёхчлен $f(t) = at^2 - (6a+1)t + 11a - 3$ будет отрицательным при любом $t \in [0; 1]$.

Рассмотрим три основных случая.

1. Пусть $a = 0$. В этом случае $f(t) = -t - 3$ и $f(t) < 0$ при любом $t \in [0; 1]$. Значит, $a = 0$ удовлетворяет требованию задачи.

2. Пусть $a > 0$. В этом случае ветви параболы, являющейся графиком функции $y = f(t)$, направлены вверх. Следовательно, необходимые и достаточные условия отрицательности $f(t)$ при любом $t \in [0; 1]$ даются системой

$$\begin{cases} a > 0, \\ f(0) < 0, \\ f(1) < 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} a > 0, \\ 11a - 3 < 0, \\ a - 6a - 1 + 11a - 3 < 0, \end{cases}$$

и, значит,

$$\begin{cases} a > 0, \\ a < \dfrac{3}{11}, \\ a < \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Из последней системы получим $0 < a < \dfrac{3}{11}$.

3. Пусть $a < 0$. В этом случае ветви параболы, являющейся графиком функции $y = f(t)$, направлены вниз и $f(t)$ будет принимать на отрезке $[0; 1]$ только отрицательные значения, лишь если:

а) график функции $y = f(t)$ целиком лежит ниже оси абсцисс, т. е. дискриминант $D = 1 + 24a - 8a^2$ отрицателен (рис. 1а);

б) любой корень квадратного трёхчлена $f(t)$ меньше нуля: $t_1 \leqslant t_2 < 0$ (рис. 1б);

в) любой корень квадратного трёхчлена $f(t)$ больше единицы: $1 < t_1 \leqslant t_2$ (рис. 1в).

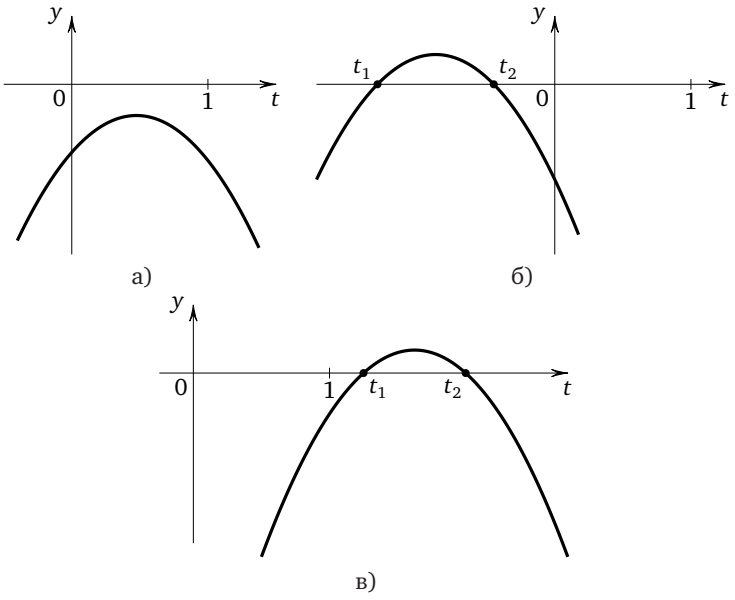


Рис. 1

В случае а) получим систему

$$\begin{cases} a < 0, \\ 1 + 24a - 8a^2 < 0. \end{cases}$$

Решение квадратного неравенства: $\left(-\infty; \frac{6-\sqrt{38}}{4}\right) \cup \left(\frac{6+\sqrt{38}}{4}; +\infty\right)$.

Следовательно, решение системы: $\left(-\infty; \frac{6-\sqrt{38}}{4}\right)$.

В случае б) необходимые и достаточные условия даются системой

$$\begin{cases} a < 0, \\ f(0) < 0, \\ D \geqslant 0, \\ t_0 < 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} a < 0, \\ 11a - 3 < 0, \\ 1 + 24a - 8a^2 \geqslant 0, \\ \frac{6a+1}{2a} < 0. \end{cases}$$

Из двух первых неравенств системы заключаем, что $a<0$. С учётом этого из неравенства $\frac{6a+1}{2a}<0$ получим, что $a>-\frac{1}{6}$. Решением квадратного неравенства является отрезок $\left[\frac{6-\sqrt{38}}{4};\frac{6+\sqrt{38}}{4}\right]$. Сравним $\frac{6-\sqrt{38}}{4}$ и $-\frac{1}{6}$. Предположим, что $\frac{6-\sqrt{38}}{4}\leqslant-\frac{1}{6}$. Тогда $\frac{\sqrt{38}-6}{4}\geqslant\frac{1}{6}$ и $\sqrt{38}\geqslant\frac{20}{3}$, откуда $38\geqslant\frac{400}{9}$. Последнее неравенство неверно. Значит, и сделанное допущение неверно. Следовательно, $\frac{6-\sqrt{38}}{4}>-\frac{1}{6}$. Поэтому решением системы является промежуток $\left[\frac{6-\sqrt{38}}{4};0\right)$.

В случае в) необходимые и достаточные условия даются системой

$$\begin{cases} a<0,\\ f(1)<0,\\ D\geqslant 0,\\ t_0>1, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} a<0,\\ 6a-4<0,\\ 1+24a-8a^2\geqslant 0,\\ \frac{6a+1}{2a}>1. \end{cases}$$

Из двух первых неравенств системы заключаем, что $a<0$. Последнее неравенство системы приводится к виду $\frac{4a+1}{2a}>0$. С учётом того, что $a<0$, из последнего неравенства получаем $a<-\frac{1}{4}$. Решением квадратного неравенства является отрезок $\left[\frac{6-\sqrt{38}}{4};\frac{6+\sqrt{38}}{4}\right]$. Выше было доказано, что $\frac{6-\sqrt{38}}{4}>-\frac{1}{6}$. Поэтому $\frac{6-\sqrt{38}}{4}>-\frac{1}{4}$ и решений рассматриваемая система не имеет.

Объединяя все найденные значения параметра, получим, что $a\in\left(-\infty;\frac{3}{11}\right)$.

Ответ: $\left(-\infty;\frac{3}{11}\right)$.

Замечание. Рассмотренный пример показывает, насколько разветвлённой может оказаться задача, связанная с исследованием расположения корней квадратного трёхчлена. Кроме этого, следует обратить внимание на сравнение чисел $\frac{6-\sqrt{38}}{4}$ и $-\frac{1}{6}$, а также оформление такого сравнения в тексте решения: ведь с необходимостью сравнения достаточно «неприятных» чисел приходится сталкиваться не только при решении задач с параметром, но и при решении самых разных уравнений и неравенств (например, задачи С3 ЕГЭ по математике). В некоторых случаях достаточно оценить корень (или логарифм) двумя целыми числами, между которыми он заключён,

но в данном случае из того, что $6 < \sqrt{38} < 7$, следует только, что $0 < \sqrt{38} - 6 < 1$, откуда $0 < \frac{\sqrt{38}-6}{4} < \frac{1}{4}$, и, значит, $-\frac{1}{4} < \frac{6-\sqrt{38}}{4} < 0$. Для сравнения с $-\frac{1}{6}$ такой оценки недостаточно, поэтому приходится уединять корень и сравнивать его с положительным рациональным числом путём сравнения квадрата этого рационального числа с подкоренным числом. Оформить такое сравнение на чистовике можно либо от противного (как это было сделано при разборе примера), либо записав в чистовике последовательность действий, обратную проделанной в черновике: ведь доказывать неравенство можно только опираясь на очевидное верное неравенство. В последнем случае в чистовике следует привести такое доказательство:

$$38 < \frac{400}{9} \Rightarrow \sqrt{38} < \frac{20}{3} \Rightarrow \sqrt{38} - 6 < \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{38}-6}{4} < \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{6-\sqrt{38}}{4} > -\frac{1}{6}.$$

Пример 5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $4^x - a \cdot 2^x - a + 3 \leqslant 0$ имеет хотя бы одно решение.

Решение. Пусть $t = 2^x$, $t > 0$. Тогда данное неравенство примет вид $t^2 - at - a + 3 \leqslant 0$ и задачу можно переформулировать так: найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $t^2 - at - a + 3 \leqslant 0$ имеет хотя бы одно положительное решение. Обозначим через t_1 и t_2 корни квадратного трёхчлена $f(t) = t^2 - at - a + 3$, считая, что $t_1 \leqslant t_2$, через D — его дискриминант: $D = a^2 + 4a - 12 = (a+6)(a-2)$. Графиком функции $y = f(t)$ является парабола, ветви которой направлены вверх, абсциссой вершины является $t_0 = \frac{a}{2}$. Рассмотрим все три случая, когда $f(t) \leqslant 0$ хотя бы при одном положительном t.

Случай 1: $t_1 < 0 < t_2$. Это условие выполняется в том и только том случае, если $f(0) < 0$. Поскольку $f(0) = -a + 3$, получаем неравенство $-a + 3 < 0$, откуда $a > 3$, т. е. $a \in (3; +\infty)$.

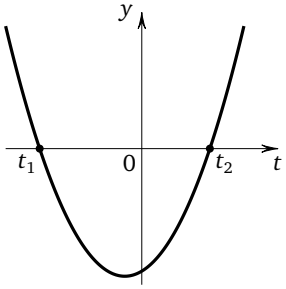


Рис. 2

Случай 2: $0 < t_1 \leqslant t_2$. Это условие выполняется в том и только том случае, если

$$\begin{cases} f(0) > 0, \\ D \geqslant 0, \\ t_0 > 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} -a+3 > 0, \\ (a+6)(a-2) \geqslant 0, \\ \dfrac{a}{2} > 0, \end{cases}$$

откуда $2 \leqslant a < 3$, и, следовательно, $a \in [2; 3)$.

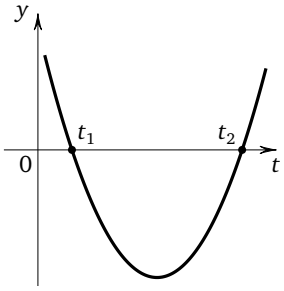


Рис. 3

Случай 3: один из корней квадратного трёхчлена $f(t)$ равен нулю. В этом случае $f(0) = -a + 3 = 0$, откуда $a = 3$. Но тогда $f(t) = t^2 - 3t$ и второй корень равен 3, т. е. значение $a = 3$ также удовлетворяет условию задачи. Объединяя решения, получим, что $a \in [2; +\infty)$.

Ответ: $[2; +\infty)$.

Во всех решениях, рассмотренных выше, требовалось лишь определить значение параметра, при которых задача имеет те или иные решения. Сами решения при этом находить не требовалось. Перейдём теперь к рассмотрению тех задач, где нужно не только определить все значения параметра, при которых уравнение или неравенство имеет решение, но и указать для найденных значений параметра все эти решения. Как уже отмечалось, иногда эти задачи коротко формулируют так: решить уравнение (неравенство, систему) с параметром.

Пример 6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x + \sqrt{a^2 - x^2} = 1$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\sqrt{a^2 - x^2} = -x + 1$ и вспомним, что квадратным корнем из числа b называется такое неотрица-

тельное число c, квадрат которого равен b. Поэтому от последнего уравнения можно перейти к системе

$$\begin{cases} a^2 - x^2 = x^2 - 2x + 1, \\ -x + 1 \geqslant 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} 2x^2 - 2x + 1 - a^2 = 0, \\ x \leqslant 1. \end{cases}$$

Теперь задачу можно переформулировать так: найти все значения параметра a, при каждом из которых квадратный трёхчлен $f(x) = 2x^2 - 2x + 1 - a^2$ имеет хотя бы один корень, не превосходящий 1, и указать корни для всех таких значений параметра a. Обозначим через x_1 и x_2 $(x_1 \leqslant x_2)$ корни трёхчлена $f(x)$, через D — его дискриминант, через x_0 — абсциссу вершины параболы, являющейся графиком функции $y = f(x)$, заметив, что ветви этой параболы направлены вверх. Тогда $\frac{D}{4} = 2a^2 - 1$, а $x_0 = 0{,}5 < 1$. Из последнего следует, в частности, что если $f(x)$ имеет корни, то по крайней мере один из них меньше 1. Возможны три случая.

1. Ровно один из корней трёхчлена $f(x)$ меньше 1, т. е. $x_1 < 1 < x_2$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $f(1) < 0$. Так как $f(1) = 1 - a^2$, получаем неравенство $1 - a^2 < 0$, откуда $|a| > 1$, т. е. $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. При этом $x = x_1 = \dfrac{1 - \sqrt{2a^2 - 1}}{2}$.

2. Любой из корней трёхчлена $f(x)$ меньше 1, т. е. $x_1 \leqslant x_2 < 1$. В этом случае необходимые и достаточные условия даются системой

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ f(1) > 0, \\ x_0 > 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} 2a^2 - 1 \geqslant 0, \\ 1 - a^2 > 0, \\ \frac{1}{2} < 1. \end{cases}$$

Из последней системы получаем, что $a \in \left(-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$. Корнями данного уравнения при этих значениях параметра являются числа $\dfrac{1 \pm \sqrt{2a^2 - 1}}{2}$.

3. Один из корней трёхчлена $f(x)$ равен 1. В этом случае $f(1) = 1 - a^2 = 0$, откуда $a = \pm 1$, и второй корень равен 0.

Объединяя решения, получим ответ.

Ответ: $\dfrac{1 - \sqrt{2a^2 - 1}}{2}$ при $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; $\dfrac{1 \pm \sqrt{2a^2 - 1}}{2}$ при $a \in \left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$; при прочих a корней нет.

Пример 7. Решите неравенство $144^{|x|} - 2 \cdot 12^{|x|} + a \geqslant 0$ при всех значениях a.

Решение. Пусть $t=12^{|x|}$. Поскольку $|x|\geqslant 0$, получим, что $t\geqslant 1$. Данное неравенство примет вид $t^2-2t+a\geqslant 0$. Обозначим через t_1 и t_2 $(t_1\leqslant t_2)$ корни квадратного трёхчлена $f(t)=t^2-2t+a$, через D — его дискриминант, через t_0 — абсциссу вершины параболы, являющейся графиком функции $y=f(t)$, заметив, что ветви этой параболы направлены вверх. Тогда $\frac{D}{4}=1-a$, а $t_0=1$. Рассмотрим следующие случаи.

Случай 1: $\frac{D}{4}\leqslant 0$, т. е. $1-a\leqslant 0$, откуда $a\geqslant 1$. В этом случае $f(t)\geqslant 0$ при любом t, а значит, и при $t\geqslant 1$. Тем самым, $12^{|x|}\geqslant 1$, откуда $|x|\geqslant 0$, т. е. $x\in(-\infty;+\infty)$.

Случай 2: $\frac{D}{4}>0$, т. е. $1-a>0$, откуда $a<1$. В этом случае квадратный трёхчлен $f(t)$ имеет два различных корня t_1 и t_2 $(t_1<t_2)$ и принимает неотрицательные значения на промежутках $(-\infty;t_1]$ и $[t_2;+\infty)$. Поскольку $t_0=1$, условие неотрицательности $f(t)$ при $t\geqslant 1$, будет выполнено, лишь если $t\in[t_2;+\infty)$. Найдя $t_2=1+\sqrt{1-a}$ и сделав обратную замену, приходим при $a<1$ к неравенству $12^{|x|}\geqslant 1+\sqrt{1-a}$, откуда $|x|\geqslant\log_{12}(1+\sqrt{1-a})$, т. е.

$$x\in(-\infty;-\log_{12}(1+\sqrt{1-a})]\cup[\log_{12}(1+\sqrt{1-a});+\infty).$$

Ответ: $(-\infty;+\infty)$ при $a\in[1;+\infty)$; $(-\infty;-\log_{12}(1+\sqrt{1-a})]\cup$ $\cup[\log_{12}(1+\sqrt{1-a});+\infty)$ при $a\in(-\infty;1)$.

Заметим, что в последнем примере равенство $t_0=1$ при условии $t\geqslant 1$ позволило исключить из рассмотрения ещё целый ряд случаев.

Подводя итоги, отметим следующее. Любую из рассмотренных задач можно было решить, непосредственно вычисляя корни соответствующих квадратных трёхчленов. Однако почти всегда вместо системы, содержащей лишь линейные и квадратные неравенства, при таком решении пришлось бы иметь дело с весьма громоздкими системами иррациональных неравенств, где вероятность арифметической ошибки довольно велика. Тем не менее, изученные приёмы, хотя и являются достаточно универсальными, в некоторых случаях могут оказаться не самыми оптимальными. И ещё раз обратим внимание на два ключевых момента. Во-первых, сделав замену переменной, необходимо указать область значений новой переменной и обязательно переформулировать задачу с учётом этой области. Во-вторых, при решении задач с параметрами следует остерегаться «подводных камней». В этом смысле особую аккуратность и тщательность следует проверять в тех случаях, когда выписываемые неравенства могут быть как строгими, так и нестрогими (например, если один из корней квадратного трёхчлена может совпадать с характерным значением

l или m из теорем предыдущего параграфа). В этих случаях, чтобы не запутаться, лучше пользоваться строгими неравенствами, а случаи $x_i = l$ и (или) $x_i = m$ $(i = 1, 2)$ рассматривать отдельно, как это было сделано при решении примеров 5 и 6. И последнее. Разумеется, решение задач с параметрами, требующих исследования квадратного трёхчлена, не ограничивается только изучением расположения корней квадратного трёхчлена относительно заданных чисел: здесь, как мы видели, приходится пользоваться самыми разными свойствами и фактами, опираясь как на алгебраические, так и на графические представления. Для успешного решения таких задач нужно постараться нарастить определённую математическую «мускулатуру», сделав приводимые ниже упражнения — достаточно разнообразные и вместе с тем связанные именно с квадратным трёхчленом и его свойствами.

Упражнения к § 2.3

1. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{2ax + a(1-2a)}{2a^2 + 2ax - 1} < 0$ выполнено для любых значений переменной x из отрезка $[-2; 2]$.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{6ax - a(2-a)}{a^2 - 6ax - 8} > 0$ выполнено для любых значений переменной x из отрезка $[-3; 3]$.

2. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2x^4 + (a-2)x^3 + 2x^2 + (a-2)x + 2 = 0$ имеет не менее двух различных отрицательных корней.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2x^4 - (5a+2)x^3 + 2x^2 - (5a+2)x + 2 = 0$ имеет не менее двух различных положительных корней.

3. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\lg^2(3x^2 + 6x + 4) + (5a^2 - a + 4)\lg(3x^2 + 6x + 4) - a - 2 = 0$ имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\lg^2(5x^2 - 10x + 6) + (3a^2 - 5a + 6)\lg(5x^2 - 10x + 6) - 4a + 3 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

4. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_3^2(7x^2 + 1) + (3a^2 - a + 3) \cdot \log_3(7x^2 + 1) + 4a^2 - a^4 = 0$ имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_5^2(4x^2+1)+(2a^2-3a+4)\cdot\log_5(4x^2+1)+9a^2-a^4=0$ имеет хотя бы один корень.

5. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $49^x+(2a^2-a+6)\cdot 7^x+2a^2+a-6=0$ имеет единственный корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $25^x+(2a^2-5a+12)\cdot 5^x+2a^2+5a-12=0$ имеет единственный корень.

6. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $36^x-2(a+1)\cdot 6^x+a^2+2a-8=0$ имеет единственный корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $9^x-2(2a+1)\cdot 3^x+a^2+4a-12=0$ имеет единственный корень.

7. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого действительного значения x выполнено неравенство $a(\cos^2 x-3)^2+2a+11\sin^2 x<44$.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого действительного значения x выполнено неравенство $a(\sin^2 x-3)^2+2a+88>22\cos^2 x$.

8. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $9^x-(a-1)\cdot 3^x-a+4\leqslant 0$ имеет хотя бы одно решение.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $49^x-(a+1)\cdot 7^x-a+2\leqslant 0$ имеет хотя бы одно решение.

9. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $5^x-(a-5)\cdot(0{,}2)^x+2\leqslant a$ имеет хотя бы одно решение.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $4^x-(a+2)\cdot(0{,}25)^x\leqslant a+5$ имеет хотя бы одно решение.

10. а) Решите уравнение $x+\sqrt{a^2-x^2+2x-1}=2$.

б) Решите уравнение $x+\sqrt{a^2-x^2+4x-4}=3$.

11. а) Решите неравенство $25^{|x|}-2\cdot 5^{|x|}+a\geqslant 1$.

б) Решите неравенство $36^{|x|}-2\cdot 6^{|x|}+a\geqslant 2$.

12. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{2x-a+5}=x-2a+4$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{2x-a-4}=x-2a-2$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

13. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $49^x-2(a-1)\cdot 7^x+a^2-4a-5=0$ имеет единственный корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $9^x - 2(a-3)\cdot 3^x + a^2 - 8a + 7 = 0$ имеет единственный корень.

14. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения x выполнено неравенство

$$a^2 + 2a - \sin^2 x - 2a\cos x > 2.$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения x выполнено неравенство

$$\cos^2 x + 2a\sin x - 2a < a^2 - 4.$$

15. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения x выполнено неравенство

$$1 + \log_5(x^2+1) \geqslant \log_5(ax^2 + 4x + a).$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения x выполнено неравенство

$$\log_{0,2}(4x^2+1) \leqslant 2 + \log_{0,2}(4ax^2 - 40x + a).$$

16. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения x выполнено неравенство

$$(a-1)\cdot 9^x + 4(a-2)\cdot 3^x + a > 2.$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения x выполнено неравенство

$$(a-2)\cdot 25^x + 4(a-1)\cdot 5^x + a < 1.$$

17. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_3(9^x + 9a) = x$ имеет два различных корня.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_2(4^x - a) = x$ имеет два различных корня.

18. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2 + \dfrac{6x}{\sqrt{\sin a}} + \dfrac{9\sqrt{3}}{\cos a} + 36 = 0$ имеет единственный корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2 + \dfrac{2x}{\sqrt{\sin a}} + \dfrac{1}{\cos a} + 2\sqrt{2} = 0$ имеет единственный корень.

19. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x(x+1)(x+2)(x+3) = a$ имеет не менее трёх различных отрицательных корней.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a + x(x-1)(x-2)(x-3) = 0$ имеет не менее трёх различных положительных корней.

20. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $3-|x-a|>x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $2>|x+a|+x^2$ имеет хотя бы одно положительное решение.

21. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|1-ax|=1+(1-2a)x+ax^2$ имеет единственный корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|(a+1)x-2|=(1+a)x^2-2ax+2$ имеет единственный корень.

22. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} x+2y+xy+1=0, \\ axy+x-y+1{,}5=0. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} 3y+2+xy=0, \\ x(y+1-a)+y(2a-3)+a+3=0. \end{cases}$$

23. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ x-y=a. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2+ay=1, \\ 3x+2y=3. \end{cases}$$

24. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых не имеет решений система уравнений

$$\begin{cases} 2x+a^2y=a-2+a^2, \\ x+2y=2. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых не имеет решений система уравнений

$$\begin{cases} 2x+(9a^2-2)y=3a, \\ x+y=1. \end{cases}$$

25. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=x^2+4y^2, \\ x+2y+3z=a. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ x+y+z=a. \end{cases}$$

26. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых следующая система уравнений имеет хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} 9x^2-6xy+y^2+6x-13y+3=0, \\ 13x^2+6xy+10y^2+16x+2y-4ax-6ay+a^2-2a+3=0. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых следующая система уравнений имеет хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} 4x^2-12xy+9y^2+2x-6y=0, \\ 5x^2-16xy+13y^2-6x+10y+2ax-4ay+a^2-2a-5=0. \end{cases}$$

27. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $((2x+a)\sqrt{22a-4a^2-24}-2(x^2+x)\lg a)\lg\frac{36a-9a^2}{35}=0$ имеет по крайней мере два корня, один из которых неотрицателен, а другой не превосходит -1.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$((4x-a)\sqrt{11a-a^2-18}+(x^2-x)\lg(3a-1))\lg\frac{36a-4a^2}{65}=0$$

имеет по крайней мере два корня, один из которых неположителен, а другой не меньше 1.

28. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любой из корней уравнения

$$3ax^2+(3a^3-12a^2-1)x-a(a-4)=0$$

удовлетворяет неравенству $|x|<1$.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любой из корней уравнения $ax^2+(3a^3-6a^2-1)x-3a(a-2)=0$ удовлетворяет неравенству $|x|<2$.

29. а) Найдите все пары $(a;b)$ действительных чисел a и b, для каждой из которых неравенство $|x^2+ax+b|>2$ не имеет ни одного решения на отрезке $[1;5]$.

б) Найдите все пары $(a;b)$ действительных чисел a и b, для каждой из которых неравенство $|2x^2+ax+b|>1$ не имеет ни одного решения на отрезке $[1;3]$.

30. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4(x-\sqrt{a\cdot 4^a})x+4(4^a-1)+a=0$ имеет хотя бы один корень, и определите знаки корней для каждого из найденных значений параметра a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4x^2-4x(a\cdot 5^a)^{0,5}+5^{a+1}+a-5=0$ имеет хотя бы один корень, и определите знаки корней для каждого из найденных значений параметра a.

31. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для всех положительных значений переменной x выполнено неравенство

$$(a^3+(1-\sqrt{2})a^2-(3+\sqrt{2})a+3\sqrt{2})x^2+2(a^2-2)x+a>-\sqrt{2}.$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для всех положительных значений переменной x выполнено неравенство

$$(a^3+(1-\sqrt{3})a^2-(4+\sqrt{3})a+4\sqrt{3})x^2+2(a^2-3)x+a>-\sqrt{3}.$$

32. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(x-a)^2(a(x-a)^2-a-1)=-1$ имеет больше положительных корней, чем отрицательных.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $((x-a-1)^2-2)(x-a-1)^2=a^2-1$ имеет больше положительных корней, чем отрицательных.

33. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $((x-a)^2-2a-4)(x-a)^2=-2a-3$ имеет больше отрицательных корней, чем положительных.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(x+2a)^2((x+2a)^2-a-a^4)=-a^5$ имеет больше отрицательных корней, чем положительных.

34. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция $f(x)=\sin 2x-8(a+1)\sin x+(4a^2+8a-14)x$ является возрастающей на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция $f(x)=\sin 2x-8(a+2)\cos x-(4a^2+16a+6)x$ является убывающей на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек.

35. а) Определите знак коэффициента a, если $f(x)=ax^2+bx+c$ и $f(-1)<1$, $f(1)>-1$, $f(3)<-4$.

б) Определите знак коэффициента a, если $f(x)=ax^2+bx+c$ и $f(-3)<-5$, $f(-1)>0$, $f(1)<4$.

36. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых $\min\limits_{[0;2]}(4x^2-4ax+a^2-2a+2)=3$.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых $\max\limits_{[0;1]}(-x^2+2ax-a^2+2a-3)=-2$.

37. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых квадратичная функция

$$f(x)=(\cos a)x^2+(2\sin a)x+\frac{\cos a-\sin a}{2}$$

является квадратом линейной функции.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых квадратичная функция

$$f(x)=(\sin a)x^2+(2\cos a)x+\frac{\cos a+\sin a}{2}$$

является квадратом линейной функции.

38. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых область значений функции $y(x)=\dfrac{\sin x+2(1-a)}{a-\cos^2 x}$ содержит отрезок $[1;2]$.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых область значений функции $y(x)=\dfrac{a-\cos x}{2a+\sin^2 x-1}$ содержит отрезок $\left[\frac{1}{5};\frac{1}{3}\right]$.

39. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для всех x, принадлежащих отрезку $[2;4]$, выполнено неравенство $\dfrac{x-0{,}25a}{x-2a}<0$.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для всех x, принадлежащих отрезку $[1;2]$, выполнено неравенство $\dfrac{x-2a-1}{x-a}<0$.

40. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для всех x, принадлежащих отрезку $[1;3]$, выполнено неравенство $(x-3a)(x-a-3)<0$.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для всех x, принадлежащих отрезку $[2;3]$, выполнено неравенство $(x+3-2a)(x+3a-2)<0$.

41. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых решением системы неравенств

$$\begin{cases} x^2-2x \leqslant a-1, \\ x^2-4x \leqslant 1-4a \end{cases}$$

является отрезок длины 1.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых решением системы неравенств

$$\begin{cases} x^2+6x+7+a \leqslant 0, \\ x^2+4x+7 \leqslant 4a \end{cases}$$

является отрезок длины 1.

42. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых многочлен $P(x)=x^4+2^{\operatorname{tg} a}\cdot x^2+(\cos a+\cos 2a)x+2^{\operatorname{tg} a-2}$ является квадратом квадратного трёхчлена от x.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых многочлен $P(x)=x^4+2^{\cos a}\cdot x^2+(\sin a+\operatorname{tg} a)x+2^{\cos a}-1$ является квадратом квадратного трёхчлена от x.

43. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_{\sqrt{2-x}}(4x+a)=4$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_{\sqrt{2-x}}\sqrt{2x+a}=2$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

44. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x+2a-2\sqrt{3ax+a^2}>0$ имеет хотя бы одно решение, и укажите все решения неравенства для каждого из найденных значений a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x+2a-\sqrt{3ax+4a^2}>0$ имеет хотя бы одно решение, и укажите все решения неравенства для каждого из найденных значений a.

45. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(x-3)(x+1)+3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=(a-1)(a+2)$$

имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(x+2)(x+4)+5(x+2)\sqrt{\frac{x+4}{x+2}}-(a+2)(a-3)=0$$

имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

46. а) Найдите все целые значения параметра a, при каждом из которых уравнение $5-4\sin^2 x-8\cos^2\frac{x}{2}=3a$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

б) Найдите все целые значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2-2\cos 2x=3a+4\sin x$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

47. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $a^2-9^{x+1}-8a\cdot 3^x>0$ имеет хотя бы одно решение, и укажите все решения неравенства для каждого из найденных значений a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $a^2-2\cdot 4^{x+1}-a\cdot 2^{x+1}>0$ имеет хотя бы одно решение, и укажите все решения неравенства для каждого из найденных значений a.

48. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\sqrt{a^2-x^2}>x+1$ имеет хотя бы одно решение, и укажите все решения неравенства для каждого из найденных значений a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\sqrt{1-x^2}<x+a$ имеет хотя бы одно решение, и укажите все решения неравенства для каждого из найденных значений a.

Глава 3. Применение свойств функций к решению уравнений и неравенств

Решение большого числа считающихся нестандартными уравнений, неравенств и их систем (с параметром и без) существенным образом опирается на такие свойства элементарных функций, изучаемых в школьном курсе, как монотонность, ограниченность, непрерывность, чётность или нечётность, периодичность, дифференцируемость, а также на графические интерпретации уравнений и неравенств. Обычные (стандартные) приёмы и методы решения, основанные на сведении уравнения (неравенства) к одному или нескольким простейшим с помощью алгебраических преобразований или замены переменной, в таких задачах оказываются, как правило, малоэффективными или неэффективными вовсе и являются лишь вспомогательными, «инструментальными», техническими средствами решения, которые будут совершенно бесполезными в отсутствие ключевой идеи. Знакомству с такими ключевыми идеями и посвящена эта глава.

§ 3.1. Монотонность

Приведём вначале основные утверждения, связанные с монотонными функциями (напомним, что монотоннымии называются возрастающие и убывающие функции), ограничившись теми утверждениями, которые наиболее часто используются при решении уравнений и неравенств.

Утверждение 1. Если функция $y = f(x)$ монотонна, то уравнение $f(x) = c$ (где c — любое действительное число) имеет не более одного корня.

Это утверждение легко следует из определения монотонной функции. В самом деле, если $f(x_1) = c$, $f(x_2) = c$ и, например, $x_1 < x_2$, то либо $f(x_1) < f(x_2)$ (при монотонном возрастании функции $y = f(x)$), либо $f(x_1) > f(x_2)$ (при монотонном убывании функции $y = f(x)$), что противоречит условию $f(x_1) = c = f(x_2)$.

Утверждение 2. Если функция $y = f(x)$ монотонно возрастает, а функция $y = g(x)$ монотонно убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня.

Доказательство этого утверждения также не представляет труда и может быть проведено разными способами. В самом деле, если функция $y = g(x)$ монотонно убывает, то функция $y = -g(x)$ монотонно возрастает (объясните почему), а значит, и функция

$u(x) = f(x) - g(x)$ является монотонно возрастающей (как сумма монотонно возрастающих функций). Поэтому в силу утверждения 1 уравнение $u(x) = 0$ (т. е. уравнение $f(x) - g(x) = 0$) имеет не более одного корня. Следовательно, и уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня.

Утверждения 1 и 2 позволяют обосновывать единственность решения уравнения в тех случаях, когда свести его к простейшему не удаётся, но довольно просто можно подобрать корень, который, как правило, является целым числом. Следует отметить, что решение уравнения «методом подбора» будет засчитано только при обосновании того, что других корней это уравнение не имеет. Такое обоснование часто удаётся сделать, опираясь на свойства монотонных функций.

Пример 1. Решите уравнение $2^{-x} = \lg(x+11) + 1$.

Решение. Ясно, что стандартным способом решить это уравнение не представляется возможным. Попробуем подобрать корень, перебирая небольшие по модулю целые числа. Число $x = -1$ является корнем уравнения. Обоснуем, что других корней уравнение не имеет. Функция $g(x) = 2^{-x}$ является монотонно убывающей, а функция $f(x) = \lg(x+11) + 1$ монотонно возрастает на всей области определения. Поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня. Так как $f(-1) = g(-1)$, то $x = -1$ — единственный корень уравнения.

Ответ: -1.

Пример 2. Решите уравнение $3^x + 4^x = 5^x$.

Решение. Те, кто помнит теорему Пифагора и простейший египетский треугольник, без труда подберут число, являющееся корнем этого уравнения: $x = 2$. Остаётся показать, что других корней уравнение не имеет. Но каждая из функций $y = 3^x + 4^x$ и $y = 5^x$ является возрастающей на всей числовой прямой, поэтому в данном случае утверждение 2 «не работает». Учитывая, что $5^x \neq 0$, и разделив обе части уравнения на 5^x, придём к уравнению $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$. Пусть

$$f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x.$$

Функция $y = f(x)$ является монотонно убывающей на всей числовой прямой (как сумма монотонно убывающих функций), следовательно, уравнение $f(x) = 1$ имеет не более одного корня. Так как $f(2) = 1$, то $x = 2$ — единственный корень уравнения.

Ответ: 2.

Пример 3. Решите уравнение

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}-1} + \frac{x+4}{\sqrt{x+5}-1} + \frac{x+9}{\sqrt{x+10}-1} = 8.$$

Решение. Умножим и разделим каждую дробь в левой части уравнения на выражение, сопряжённое её знаменателю, т. е. на $\sqrt{x+1}+1$, $\sqrt{x+5}+1$ и $\sqrt{x+10}+1$ соответственно, после чего преобразуем знаменатель каждой дроби по формуле разности квадратов. После сокращения дробей получим уравнение

$$\sqrt{x+1}+1+\sqrt{x+5}+1+\sqrt{x+10}+1=8,$$

откуда $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+5}+\sqrt{x+10}=5$. Обозначим левую часть последнего уравнения через $f(x)$. Функция $y=f(x)$ монотонно возрастает на промежутке $[-1;+\infty)$ (как сумма возрастающих функций). Поскольку $f(-1)=5$, в силу монотонности функции $y=f(x)$ единственным корнем уравнения является $x=-1$.

Ответ: -1.

Пример 4. Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+9}+\sqrt{x+25}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+4}+\sqrt{x+16}}=\dfrac{3}{2}$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+9}+\sqrt{x+25})=3(\sqrt{x}+\sqrt{x+4}+\sqrt{x+16}),$$

откуда

$$2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}+\sqrt{x+9}-\sqrt{x+4}+\sqrt{x+25}-\sqrt{x+16})=$$
$$=\sqrt{x}+\sqrt{x+4}+\sqrt{x+16}.$$

Обозначим правую часть уравнения через $g(x)$, заметив, что функция $y=g(x)$ монотонно возрастает на $[0;+\infty)$ (как сумма возрастающих функций). Далее, поскольку $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$, $\sqrt{x+9}-\sqrt{x+4}=\dfrac{5}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+4}}$ и $\sqrt{x+25}-\sqrt{x+16}=\dfrac{9}{\sqrt{x+25}+\sqrt{x+16}}$, левая часть уравнения примет вид

$$2\Big(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\frac{5}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+4}}+\frac{9}{\sqrt{x+25}+\sqrt{x+16}}\Big).$$

Обозначив полученное выражение через $f(x)$, заметим, что функция $y=f(x)$ является монотонно убывающей на $[0;+\infty)$ (как сумма монотонно убывающих функций). Следовательно, уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного корня. Осталось заметить, что $f(0)=g(0)$.

Ответ: 0.

Сформулируем теперь два утверждения о монотонных функциях, связанные с решением неравенств.

Утверждение 3. Если функция $y = f(x)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой, а функция $y = g(x)$ монотонно убывает на всей числовой прямой, то справедливы следующие утверждения: а) $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$ в том и только в том случае, когда $\alpha \leqslant \beta$; б) $g(\alpha) \leqslant g(\beta)$ в том и только в том случае, когда $\alpha \geqslant \beta$.

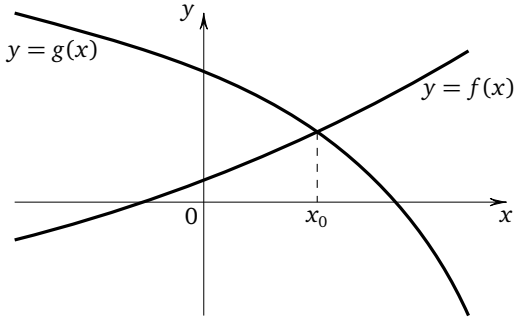
Это утверждение является, в сущности, простой переформулировкой определения возрастающей и убывающей функции.

Утверждение 4. Если функция $y = f(x)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой, функция $y = g(x)$ монотонно убывает на всей числовой прямой и $f(x_0) = g(x_0)$, то справедливы следующие утверждения:

а) $f(x) \leqslant g(x)$ в том и только в том случае, когда $x \in (-\infty; x_0]$;

б) $f(x) \geqslant g(x)$ в том и только в том случае, когда $x \in [x_0; +\infty)$.

Наглядный смысл этого утверждения очевиден (см. рисунок). Попробуйте доказать это утверждение формально, опираясь на определение возрастающей (убывающей) функции.



Заметим, что далеко не каждая функция является монотонной на всей числовой прямой. Во многих случаях приходится применять сформулированные утверждения, учитывая область определения функции не только при обосновании монотонности, но и при записи ответа.

Пример 5. Решите неравенство

$$\sqrt[3]{x^5 - 5} > \log_3(5 - x) + 2.$$

Решение. Опять-таки понятно, что стандартные преобразования здесь неприменимы. Перебирая небольшие по модулю целые числа, довольно быстро можно установить, что левая и правая части данного неравенства равны при $x = 2$. Функция $f(x) = \sqrt[3]{x^5 - 5}$ монотонно возрастает на всей числовой прямой, а функция $g(x) = \log_3(5 - x) + 2$ монотонно убывает на всей области определения. Поэтому неравен-

ство $f(x) > g(x)$ выполняется, если $x > 2$ и $x \in D(g)$, где $D(g)$ — область определения функции $y = g(x)$. Таким образом,

$$\begin{cases} x > 2, \\ 5 - x > 0, \end{cases} \quad \text{откуда } 2 < x < 5.$$

Ответ: $(2; 5)$.

Пример 6. Решите неравенство

$$7^{5x-2} + \log_7(5x-1) \leqslant 7^{x+2} + \log_7(x+3).$$

Решение. Обратим внимание на «похожесть» левой и правой частей неравенства. Рассмотрим функцию $f(t) = 7^t + \log_7(t+1)$, монотонно возрастающую на всей области определения. В силу возрастания функции $y = f(t)$ неравенство $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$ будет выполняться при допустимых α и β в том и только том случае, если $\alpha \leqslant \beta$. В нашем случае $\alpha = 5x - 2$, $\beta = x + 2$. Таким образом,

$$\begin{cases} 5x - 2 \leqslant x + 2, \\ 5x - 1 > 0, \\ x + 3 > 0, \end{cases} \quad \text{откуда } 0{,}2 < x \leqslant 1.$$

Ответ: $(0{,}2; 1]$.

Замечание. Уже эти относительно несложные примеры показывают, что для успешного решения подобных задач нужно хорошо знать свойства монотонных функций и уметь их использовать. Так, если при допустимых значениях переменных функция $y = f(t)$ монотонно возрастает, а функция $t = g(x)$ монотонно убывает, то функция $y = f(g(x))$ будет монотонно убывающей; если же при допустимых значениях переменных и функция $y = f(t)$ монотонно возрастает, и функция $t = g(x)$ монотонно возрастает, то функция $y = f(g(x))$ также будет монотонно возрастающей. Фактически именно эти утверждения, которые довольно просто получить непосредственно из определения возрастающей и убывающей функций, были неявным образом использованы при решении последних примеров.

Пример 7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5\sin x - 4y^3 + 3x = 5\sin y - 4x^3 + 3y, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Решение. Перепишем первое уравнение системы в виде

$$5\sin x + 4x^3 + 3x = 5\sin y + 4y^3 + 3y$$

и рассмотрим функцию $f(t)=5\sin t+4t^3+3t$. Первое уравнение системы имеет вид $f(x)=f(y)$. Если бы функция $f(t)=5\sin t+4t^3+3t$ была монотонной, можно было бы сделать вывод о том, что равенство $f(x)=f(y)$ выполняется только при $x=y$. Обоснованию монотонности «мешает» наличие $\sin t$. И здесь потухший было взгляд падает на второе уравнение системы, из которого следует, что $|x|\leqslant 1$ и $|y|\leqslant 1$. Но на отрезке $[-1;\,1]$ функция $y=\sin t$ монотонно возрастает, а значит, монотонно возрастает и функция $y=f(t)$ (как сумма возрастающих функций). Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x=y,\\ x^2+y^2=1, \end{cases}$$

решение которой несложно, оно даёт две пары чисел $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Пример 8. Решите уравнение $x^2+\dfrac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt{x^4-8x^3+16x^2+1}}=4x$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$(4x-x^2)\left(1+\sqrt{(4x-x^2)^2+1}\right)=\sqrt{3}\left(1+\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}\right)$$

и рассмотрим функцию $f(t)=t\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)$, возрастающую на всей числовой прямой. Последнее можно доказать, либо найдя производную функции, либо с помощью элементарных рассуждений. В самом деле, если $t_1<0<t_2$, неравенство $f(t_1)<f(t_2)$ очевидно, поскольку в этом случае $f(t_1)<0$, а $f(t_2)>0$. Если $0\leqslant t_1<t_2$, то

$$0<1+\sqrt{t_1^2+1}<1+\sqrt{t_2^2+1},$$

и, следовательно, $t_1\left(1+\sqrt{t_1^2+1}\right)<t_2\left(1+\sqrt{t_2^2+1}\right)$, т. е. $f(t_1)<f(t_2)$. Наконец, если $t_1<t_2\leqslant 0$, то $|t_1|>|t_2|\geqslant 0$, откуда $t_1^2>t_2^2\geqslant 0$ и

$$1+\sqrt{t_1^2+1}>1+\sqrt{t_2^2+1}>0.$$

Поэтому $t_1\left(1+\sqrt{t_1^2+1}\right)<t_2\left(1+\sqrt{t_2^2+1}\right)\leqslant 0$, а значит, $f(t_1)<f(t_2)$ и в этом случае. Таким образом, доказано, что для любой пары таких чисел t_1 и t_2, что $t_1<t_2$, выполняется неравенство $f(t_1)<f(t_2)$, т. е. функция $f(t)=t(1+\sqrt{t^2+1})$ является возрастающей. В силу

возрастания функции $y=f(t)$ равенство $f(\alpha)=f(\beta)$ будет выполняться тогда и только тогда, когда $\alpha=\beta$. В нашем случае $\alpha=4x-x^2$, $\beta=\sqrt{3}$. Получим уравнение $4x-x^2=\sqrt{3}$, откуда $x^2-4x+\sqrt{3}=0$ и $x=2\pm\sqrt{4-\sqrt{3}}$.

Ответ: $2\pm\sqrt{4-\sqrt{3}}$.

Прежде чем переходить к разбору следующих задач, сформулируем и докажем ещё одно полезное, но менее очевидное по сравнению с предыдущими утверждение.

Утверждение 5. Если функция $y=f(x)$ монотонно возрастает, то уравнения $f(x)=x$ и $f(f(x))=x$ имеют одно и то же множество корней.

Доказательство. Пусть число x_0 является корнем уравнения $f(x)=x$, т. е. $f(x_0)=x_0$. Тогда $f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$, т. е. x_0 — корень уравнения $f(f(x))=x$. Как видим, в этой части доказательства монотонность даже не потребовалась. Обратно, пусть число x_0 является корнем уравнения $f(f(x))=x$, т. е. $f(f(x_0))=x_0$. Докажем, что тогда и $f(x_0)=x_0$, т. е. x_0 — корень уравнения $f(x)=x$. Предположим, что это не так, т. е. что $f(x_0)\neq x_0$. Тогда либо $f(x_0)>x_0$, либо $f(x_0)<x_0$. В силу монотонного возрастания функции $y=f(x)$ из неравенства $f(x_0)>x_0$ следует неравенство $f(f(x_0))>f(x_0)$, но $f(f(x_0))=x_0$, поэтому $x_0>f(x_0)$, что противоречит неравенству $f(x_0)>x_0$. Аналогично если $f(x_0)<x_0$, то $f(f(x_0))<f(x_0)$, откуда $x_0<f(x_0)$, что противоречит неравенству $f(x_0)<x_0$. Значит, сделанное допущение неверно, и $f(x_0)=x_0$, т. е. x_0 является корнем уравнения $f(x)=x$. Утверждение доказано.

Отсюда легко выводится ещё одно утверждение, которое сформулируем как следствие доказанного.

Следствие. Если n — натуральное число, а функция $y=f(x)$ монотонно возрастает, то уравнения $f(x)=x$ и

$$\underbrace{f(f(\ldots f(x))\ldots)}_{n\text{ раз}}=x$$

имеют одно и то же множество корней.

Пример 9. Решите уравнение $x^3-7\sqrt[3]{7x-6}+6=0$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\sqrt[3]{7x-6}=\dfrac{x^3+6}{7}$, возведём в куб обе части последнего уравнения и выполним преобразования, уединив в правой части x. Получим уравнение $\dfrac{\left(\frac{x^3+6}{7}\right)^3+6}{7}=x$. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{x^3+6}{7}$, возрастающую на всей числовой

прямой. Полученное уравнение имеет вид $f(f(x))=x$ и в силу утверждения 5 имеет то же множество решений, что и уравнение $f(x)=x$, т. е. уравнение $\frac{x^3+6}{7}=x$, откуда $x^3-7x+6=0$. Последнее уравнение довольно просто решается с помощью разложения на множители его левой части (или с помощью стандартных приёмов, применяющихся при решении уравнений высоких степеней с целыми коэффициентами): $x^3-x-6x+6=0$, откуда $x(x^2-1)-6(x-1)=0$, и, значит, $x(x-1)(x+1)-6(x-1)=0$. Таким образом, приходим к уравнению $(x-1)(x^2+x-6)=0$, корнями которого являются числа -3; 1; 2.

Ответ: -3; 1; 2.

Пример 10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2+\sqrt{y+x^2+2}}=y, \\ \sqrt{y^2-7+\sqrt{x+y^2-7}}=x. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(t)=\sqrt{t+c}$, где c — некоторый параметр, не зависящий от переменной t. Эта функция возрастает на своей области определения, причём $f(f(t))=\sqrt{c+\sqrt{t+c}}$. Поэтому в силу утверждения 5 уравнение $f(f(t))=t$ имеет то же множество решений, что и уравнение $f(t)=t$. Положив $t=y$, $c=x^2+2$, получим, что первое уравнение данной системы можно заменить уравнением $\sqrt{y+x^2+2}=y$. Положив $t=x$, $c=y^2-7$, получим, что второе уравнение данной системы можно заменить уравнением $\sqrt{x+y^2-7}=x$. Таким образом, приходим к системе

$$\begin{cases} \sqrt{y+x^2+2}=y, \\ \sqrt{x+y^2-7}=x, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} y+x^2+2=y^2, \\ x+y^2-7=x^2, \\ x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0. \end{cases}$$

Заменив первое уравнение полученной системы почленной суммой её уравнений, получим

$$\begin{cases} y+x-5=0, \\ x+y^2-7=x^2, \\ x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0. \end{cases}$$

Тогда $y=5-x$ и второе уравнение принимает вид $x+(5-x)^2-7=x^2$, откуда после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим, что $x=2$. Следовательно, $y=3$.

Ответ: (2; 3).

Пример 11. Решите уравнение $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+\sqrt{x^8+1}}}}=x^{15}$.

Решение. Прежде всего заметим, что при $x \geqslant 1$ правая часть уравнения не меньше 1, а левая часть меньше 1. Следовательно, если уравнение имеет корни, то любой из них меньше 1. Далее, при $x \leqslant 0$ правая часть уравнения неположительна, а левая часть положительна, в силу того что $\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+\sqrt{x^8+1}}} > |x|$ (объясните почему). Значит, если уравнение имеет корни, то любой из них больше нуля. Таким образом, любой корень данного уравнения принадлежит интервалу (0; 1). Поэтому будем считать, что $x \in (0; 1)$, и все дальнейшие преобразования проводить с учётом этого условия. Умножив обе части данного уравнения на x, получим $\dfrac{x}{x+\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+\sqrt{x^8+1}}}}=x^{16}$. Теперь, разделив на x числитель и знаменатель левой части, получим $\dfrac{1}{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^8}}}}}=x^{16}$, откуда $1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^8}}}}=\frac{1}{x^{16}}$. Обозначив $\frac{1}{x^{16}}$ через t, где $t>0$, получим уравнение $1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{t}}}}=t$. Рассмотрим возрастающую на своей области определения функцию $f(t)=1+\sqrt{t}$. Полученное уравнение можно записать в виде $f(f(f(f(t))))=t$, и по следствию утверждения 5 оно имеет то же множество решений, что и уравнение $f(t)=t$, т. е. уравнение $1+\sqrt{t}=t$, откуда $t-\sqrt{t}-1=0$. Единственным положительным корнем этого квадратного относительно $\sqrt{t}$ уравнения является $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Значит, $\sqrt{t}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, откуда $\frac{1}{x^8}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, т. е. $x^8=\frac{2}{\sqrt{5}+1}$, или $x^8=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Следовательно, $x=\sqrt[8]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Ответ: $\sqrt[8]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Пример 12. Известно, что числа a, b, c и d положительны, а сумма всех действительных корней уравнений $ax^{321}+bx^{300}+cx^{100}+d=0$ и $dx^{321}+cx^{221}+bx^{21}+a=0$ равна $-2{,}9$. Найдите эти корни.

Решение. В силу положительности коэффициентов a, b, c и d ни одно из данных уравнений не имеет положительных корней. Если число x_0 — корень уравнения $ax^{321}+bx^{300}+cx^{100}+d=0$, то $ax_0^{321}+bx_0^{300}+cx_0^{100}+d=0$. Разделим обе части последнего тождества на x_0^{321} и запишем полученный результат в виде

$$d\left(\frac{1}{x_0}\right)^{321}+c\left(\frac{1}{x_0}\right)^{221}+b\left(\frac{1}{x_0}\right)^{21}+a=0,$$

откуда следует, что число $\frac{1}{x_0}$ — корень уравнения

$$dx^{321}+cx^{221}+bx^{21}+a=0.$$

Но функция $y=dx^{321}+cx^{221}+bx^{21}+a$ монотонно возрастает на всей числовой оси и принимает как отрицательные, так и положительные значения. Значит, уравнение $dx^{321}+cx^{221}+bx^{21}+a=0$ имеет единственный действительный отрицательный корень. Поэтому и уравнение $ax^{321}+bx^{300}+cx^{100}+d=0$ имеет единственный действительный отрицательный корень. Поскольку корни уравнений являются взаимно обратными отрицательными числами, сумма которых равна $-2{,}9=-\frac{5}{2}+\left(-\frac{2}{5}\right)=-2{,}5+(-0{,}4)$, это числа $-2{,}5$ и $-0{,}4$.

Ответ: $-2{,}5$, $-0{,}4$.

В заключение рассмотрим две задачи с параметром, ключевой идеей решения которых является применение свойств монотонных функций.

Пример 13. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение $8x^6+(a-x)^3+2x^2+a=x$ имеет хотя бы один корень.

Решение. Перепишем уравнение в виде $8x^6+2x^2=(x-a)^3+x-a$. Рассмотрим функцию $f(t)=t^3+t$, монотонно возрастающую на всей числовой прямой (как сумма возрастающих функций). В силу возрастания функции $y=f(t)$ равенство $f(\alpha)=f(\beta)$ будет выполняться в том и только том случае, если $\alpha=\beta$. В нашем случае $\alpha=2x^2$, $\beta=x-a$. Таким образом, данное уравнение можно переписать так: $2x^2=x-a$, откуда $2x^2-x+a=0$. Для того чтобы полученное (а значит, и данное) уравнение имело хотя бы один корень, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант $D=1-8a$ был неотрицателен, т. е. $1-8a\geqslant 0$, откуда $a\leqslant\frac{1}{8}$.

Ответ: $\left(-\infty;\frac{1}{8}\right]$.

Пример 14. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого действительного значения x выполнено неравенство

$$|\cos x + a^2 - a - 1| + |2\cos x + a^2 - 6a + 10| \leqslant 4\cos x + |2a^2 - 7a + 6| + 4.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$|\cos x + a^2 - a - 1| + |2\cos x + a^2 - 6a + 10| - 4\cos x - |2a^2 - 7a + 6| - 4 \leqslant 0,$$

введём новую переменную $t = \cos x$ и рассмотрим функцию $f(t) = |t + a^2 - a - 1| + |2t + a^2 - 6a + 10| - 4t - |2a^2 - 7a + 6| - 4$, определённую и непрерывную на всей числовой прямой. График этой функции представляет собой ломаную, состоящую из отрезков прямых и лучей, каждое звено которой является частью прямой вида $y = kt + l$, где $k < 0$ (поскольку при любом варианте «раскрытия» модулей коэффициент при t будет отрицательным). Следовательно, функция $y = f(t)$ убывает на $(-\infty; +\infty)$. Так как $t = \cos x$, то $t \in [-1; 1]$. Поэтому неравенство $f(t) \leqslant 0$ будет выполняться для любого $t \in [-1; 1]$ в том и только том случае, если $\max\limits_{[-1;1]} f(t) \leqslant 0$. В силу монотонного убывания функции $y = f(t)$ получим, что

$$\max_{[-1;1]} f(t) = f(-1) = |a^2 - a - 2| + |a^2 - 6a + 8| - |2a^2 - 7a + 6|.$$

Таким образом, приходим к неравенству

$$|a^2 - a - 2| + |a^2 - 6a + 8| - |2a^2 - 7a + 6| \leqslant 0,$$

или $|a^2 - a - 2| + |a^2 - 6a + 8| \leqslant |2a^2 - 7a + 6|$. Последнее неравенство представляет собой неравенство вида $|u| + |v| \leqslant |u + v|$. Но $|u| + |v| \geqslant |u + v|$ для любых действительных u и v. Значит, $|u| + |v| = |u + v|$, что возможно, только если числа u и v одного знака либо какое-нибудь из них равно нулю, т. е. если $uv \geqslant 0$. В нашем случае $u = a^2 - a - 2$, $v = a^2 - 6a + 8$. Значит, $(a^2 - a - 2)(a^2 - 6a + 8) \geqslant 0$. Разложив квадратные трёхчлены на множители, получим неравенство

$$(a + 1)(a - 2)^2(a - 4) \geqslant 0,$$

из которого находим, что $a \in (-\infty; -1] \cup \{2\} \cup [4; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -1] \cup \{2\} \cup [4; +\infty)$.

Разумеется, неравенство $|a^2 - a - 2| + |a^2 - 6a + 8| \leqslant |2a^2 - 7a + 6|$ может быть решено любым другим способом, в частности рассмотрением нескольких случаев.

Упражнения к § 3.1

1. а) Решите уравнение $3^{-x} = \log_3(x + 11) + 7$.

б) Решите уравнение $5^{-x}=\log_5(x+6)+4$.

2. а) Решите уравнение $6^x+8^x=10^x$.

б) Решите уравнение $5^x+12^x=13^x$.

3. а) Решите неравенство $2\sqrt[7]{x+3}>\log_7(5-x)+1$.

б) Решите неравенство $\sqrt[3]{7-x^5}>\log_5(x+6)+1$.

4. а) Решите неравенство $5^{2x-5}+\log_5(2x-3)\geqslant 5^{4-x}+\log_5(6-x)$.

б) Решите неравенство

$$(0{,}5)^{6-x}+\log_{0,2}(4-x)\geqslant(0{,}5)^{x+4}+\log_{0,2}(x+2).$$

5. а) Решите неравенство $\sqrt[7]{x-7}+\sqrt{x-4}\leqslant 11-\dfrac{x^3}{64}$.

б) Решите неравенство $\sqrt[5]{x-5}+\sqrt{x-2}<9-\dfrac{x^3}{36}$.

6. а) Решите неравенство $x^3+2x+\sqrt[5]{x-4}\geqslant 32$.

б) Решите неравенство $x^5+3x+\sqrt[3]{x-3}\leqslant 37$.

7. а) Решите уравнение

$$4\sqrt{6-5x}+|3x-2|=4x+|3\sqrt{6-5x}-2|.$$

б) Решите уравнение

$$5\sqrt{12-x}+|4x-3|=5x+|4\sqrt{12-x}-3|.$$

8. а) Решите уравнение

$$7\sqrt{5x+24}+2|3x+4|+7x=2|3\sqrt{5x+24}-4|.$$

б) Решите уравнение

$$8\sqrt{7x+30}+3|2x+5|+8x=3|2\sqrt{7x+30}-5|.$$

9. а) Решите систему уравнений

$$\begin{cases}4\sin x-3y^3+2x=4\sin y-3x^3+2y,\\ 9x^2+16y^2=9.\end{cases}$$

б) Решите систему уравнений

$$\begin{cases}7\sin x-6y^3+5x=7\sin y-6x^3+5y,\\ 16x^2+9y^2=4.\end{cases}$$

10. а) Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3x^7+7\sin x+3y^7+7\sin y=0,\\ 3|x|+7|y|=2.\end{cases}$$

б) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 9x^5+2\sin x+9y^5+2\sin y=0, \\ 6|x|+4|y|=1. \end{cases}$$

11. а) Решите уравнение

$$(2x+1)(1+\sqrt{(2x+1)^2+7})+x(1+\sqrt{x^2+7})=0.$$

б) Решите уравнение

$$(2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3})+3x(2+\sqrt{9x^2+3})=0.$$

12. а) Решите неравенство

$$\sqrt[5]{x^2+4x+11}+\sqrt[5]{1-2x^2}+\log_7\frac{x^2+4x+13}{2x^2+1}\geqslant 0.$$

б) Решите неравенство

$$\sqrt[7]{2x^2-x+10}+\sqrt[7]{2-3x^2}+\log_5\frac{2x^2-x+14}{3x^2+2}\leqslant 0.$$

13. а) Решите уравнение $x^3-4\sqrt[3]{4x-3}+3=0$.
б) Решите уравнение $x^3-5\sqrt[3]{5x-4}+4=0$.
14. а) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-2+\sqrt{y+x^2-2}}=y, \\ \sqrt{y^2-3+\sqrt{x+y^2-3}}=x. \end{cases}$$

б) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-3+\sqrt{y+x^2-3}}=y, \\ \sqrt{y^2-5+\sqrt{x+y^2-5}}=x. \end{cases}$$

15. а) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3+x+6=8y, \\ y^3+y+6=8z, \\ z^3+z+6=8x. \end{cases}$$

б) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 - 3y + 2 = 0, \\ y^3 - 3z + 2 = 0, \\ z^3 - 3x + 2 = 0. \end{cases}$$

16. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение $27x^6 + (3a - 4x)^3 + 3x^2 + 3a = 4x$ имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение $x^{10} + (a - 2x)^5 + x^2 + a = 2x$ имеет хотя бы один корень.

17. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение $\sin^{14} x + (a - 3\sin x)^7 + \sin^2 x + a = 3\sin x$ имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение $\cos^{18} x + (5\cos x - a)^9 + \cos^2 x + 5\cos x = a$ имеет хотя бы один корень.

18. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение

$$(\sin^2 x - a)^9 - (6\sin x + a)^3 = (6\sin x + a)^9 - (\sin^2 x - a)^3$$

имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение

$$(\cos^2 x + a)^7 - (4\cos x - a)^5 = (4\cos x - a)^7 - (\cos^2 x + a)^5$$

имеет хотя бы один корень.

19. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых любой корень уравнения $4\sqrt[3]{3{,}5x - 2{,}5} + 3\log_2(3x - 1) + 2a = 0$ принадлежит отрезку $[1; 3]$.

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых любой корень уравнения $3\sqrt[5]{6{,}2x - 5{,}2} + 4\log_5(4x + 1) + 5a = 0$ принадлежит отрезку $[1; 6]$.

20. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \sin^3 x + \sin^3 y + \sin^5 y = a^5 + 2a^3 + a, \\ \sin x + \sin^3 x + a^5 = \sin^3 y + \sin^5 y + a, \\ \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z = a^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите эти решения для найденных значений a.

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2^x+8^x+8^y+32^y=a^5+2a^3+a, \\ 2^x+8^x+a^5=8^y+32^y+a, \\ xyz=\log_2 a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите эти решения для найденных значений a.

21. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $||x+2a|-3a|+||3x-a|+4a|\leqslant 7x+24$ выполняется для всех значений $x\in[0;7]$.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $||x-2a|+3a|+||3x+a|-4a|\leqslant 5x+24$ выполняется для всех значений $x\in[0;6]$.

22. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого действительного значения x выполнено неравенство

$$|4\cos x+a+6|+|5\cos x+a^2+1|\leqslant 10\cos x+|a^2+a-2|+10.$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого действительного значения x выполнено неравенство

$$|3\sin x+a^2-22|+|7\sin x+a+12|\leqslant 11\sin x+|a^2+a-20|+11.$$

23. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$2x^3+9x+3|x+a-2|+2|2x-a+2|+\sqrt[5]{2x-3}\leqslant 16$$

выполняется для всех значений $x\in[-2;1]$.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$3x^5+11x+4|x-a+3|+2|3x+a-5|+\sqrt[3]{4x+5}\leqslant 25$$

выполняется для всех значений $x\in[-4;-1]$.

24. а) Известно, что числа a, b, c и d отрицательны, а сумма всех действительных корней уравнений

$$dx^{543}+cx^{43}+bx^3+a=0 \quad \text{и} \quad ax^{543}+bx^{540}+cx^{500}+d=0$$

равна 2,05. Найдите эти корни.

б) Известно, что числа a, b, c и d положительны, а сумма всех действительных корней уравнений

$$dx^{865}+cx^{65}+bx^5+a=0 \quad \text{и} \quad ax^{865}+bx^{860}+cx^{800}+d=0$$

равна $-4{,}25$. Найдите эти корни.

§ 3.2. Ограниченность

Следующую группу задач, которые с определённой степенью правдоподобия можно назвать нестандартными, составляют уравнения и неравенства (с параметром и без), решение которых основано на использовании свойств ограниченных функций, прежде всего на оценке множества значений функций. Такие задачи, как и задачи предыдущего параграфа, обычно невозможно свести к простейшим уравнениям (неравенствам) с помощью алгебраических преобразований или замены переменной: ключом к решению здесь обычно является исследование множества значений функций или алгебраических выражений, в результате которого удаётся установить, например, что одна из частей уравнения не больше некоторого действительного числа c, а другая — не меньше этого же числа, откуда следует, что уравнение будет иметь хотя бы один корень только в том случае, если его левая и его правая части равны числу c. При этом одна из частей уравнения может быть, скажем, логарифмом, а другая — синусом, да ещё и от разных аргументов, так что решить такое уравнение стандартными приёмами заведомо невозможно, а вот уравнения вида «логарифм равен числу» или «синус равен числу» будут решаться уже без особого труда и вполне стандартными методами. При решении таких задач, разумеется, приходится использовать не только свойства ограниченных функций, но и, например, свойства монотонных функций. Поэтому отнесение задачи к тому или иному типу порой является определённой условностью, но в любом случае ключевой идеей решения остаётся применение свойств элементарных функций, изучаемых в средней школе. Напомним основные свойства, связанные с ограниченностью функций или алгебраических выражений, и стандартные неравенства, которые понадобятся в дальнейшем:

1) $a^2+b^2 \geqslant 2ab$ для любых действительных a и b, причём $a^2+b^2 = 2ab$, только если $a=b$;

2) $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$ для любых неотрицательных a и b, причём $a+b = 2\sqrt{ab}$, только если $a=b$;

3) $a+\frac{1}{a} \geqslant 2$ при $a>0$, причём $a+\frac{1}{a}=2$, только если $a=1$; $a+\frac{1}{a} \leqslant -2$ при $a<0$, причём $a+\frac{1}{a}=-2$, только если $a=-1$;

4) $ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \geqslant c-\frac{b^2}{4a}$ при $a>0$;

$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \leqslant c-\frac{b^2}{4a}$ при $a<0$;

5) $|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$ при любых действительных x;

6) $|a\sin x + b\cos x| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$ при любых действительных a, b, x;

7) $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$; $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$; $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$; $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$.

На приведённых выше неравенствах и их комбинациях основывается решение большинства задач этого параграфа. Кроме того, весьма существенным элементом решения будет очевидное утверждение, о котором упоминалось выше. Сформулируем его в явном виде.

Утверждение 1. Если $\max f(x) = c$ и $\min g(x) = c$, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет то же множество решений, что и система

$$\begin{cases} f(x) = c, \\ g(x) = c. \end{cases}$$

Для решения некоторых неравенств применяется почти аналогичное утверждение.

Утверждение 2. Если $\max f(x) = c$ и $\min g(x) = c$, то неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ имеет то же множество решений, что и система

$$\begin{cases} f(x) = c, \\ g(x) = c. \end{cases}$$

Эти утверждения, разумеется, останутся в силе и в том случае, если f и g будут функциями не одного, а разных аргументов.

Во многих случаях при решении нестандартных неравенств оказывается полезным следующее столь же очевидное утверждение.

Утверждение 3. Для того чтобы неравенство $f(x) \geqslant g(x)$ имело хотя бы одно решение, необходимо (но не достаточно), чтобы выполнялось условие $\max f(x) \geqslant \min g(x)$.

Перейдём к примерам, начав с относительно несложных тригонометрических уравнений.

Пример 1. Решите уравнение $\cos(2\pi x) + \cos(2\sqrt{2}\pi x) = 2$.

Решение. Так как $\cos(2\pi x) \leqslant 1$ и $\cos(2\sqrt{2}\pi x) \leqslant 1$, левая часть данного уравнения не превосходит 2. Равной 2 она может быть в том и только том случае, если

$$\begin{cases} \cos(2\pi x) = 1, \\ \cos(2\sqrt{2}\pi x) = 1, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} 2\pi x = 2\pi n, \\ 2\sqrt{2}\pi x = 2\pi k, \end{cases}$$

и, значит,

$$\begin{cases} x = n, \\ \sqrt{2}x = k, \end{cases}$$

где $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$. Если $n = k = 0$, то $x = 0$ — решение системы. Если $n \neq 0$, то $x \neq 0$ и можно второе уравнение последней системы почленно раз-

делить на первое. Получим $\sqrt{2}=\frac{k}{n}$. Поскольку $\sqrt{2}$ — число иррациональное, а $\frac{k}{n}$ — число рациональное, равенство $\sqrt{2}=\frac{k}{n}$ не может выполняться ни при каких целых k и n. Следовательно, $x=0$ является единственным решением системы

$$\begin{cases} x=n, \\ \sqrt{2}x=k, \end{cases}$$

а вместе с ней и данного уравнения.

Ответ: 0.

Рассмотренный пример любопытен несколько неожиданным для многих школьников результатом: тригонометрическое уравнение имеет единственный корень, а не «привычное» бесконечное число решений. Это объясняется несоизмеримостью аргументов слагаемых в левой части уравнения.

Пример 2. Решите уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)\right)\right)\right)=0$.

Решение. Если $\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)=0$, то $\alpha=2k$, $k\in\mathbb{Z}$. Если при этом ещё $|\alpha|\leqslant 1$, то $k=0$, $\alpha=0$. Поэтому данное уравнение равносильно уравнению $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)=0$, откуда $x=2n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $2n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Пример 3. Решите уравнение $4\sin 3x+3\cos 4x=7$.

Решение. Так как $\sin 3x\leqslant 1$ и $\cos 4x\leqslant 1$, левая часть данного уравнения не превосходит 7. Равной 7 она может быть в том и только том случае, если

$$\begin{cases} \sin 3x=1, \\ \cos 4x=1, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}, \\ x=\frac{\pi k}{2}, \end{cases}$$

где $k\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}$. Остаётся установить, существуют ли такие целые k и n, при которых последняя система имеет решения. Для этого приравняем правые части уравнений этой системы: $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}=\frac{\pi k}{2}$, откуда после умножения обеих частей полученного равенства на 6 и деления на π получим $1+4n=3k$. Существует стандартный способ решения полученного уравнения в целых числах, который не входит в программу средней школы. Тем не менее, подобные задачи попадаются и в экзаменационных вариантах, и на олимпиадах разного уровня. Для их решения, как правило, достаточно использовать элементарные соображения, связанные с делимостью целых чисел, либо воспользоваться

единичной окружностью, отметив на ней точками решения каждого из уравнений и выбрав совпавшие точки. Последний способ часто ведёт к необходимости отмечать большое число точек, поэтому воспользуемся соображениями делимости. Из равенства $1+4n=3k$ следует, что $n=3k-3n-1=3(k-n)-1$, т. е. n — число вида $n=3l-1$, где $l\in\mathbb{Z}$. Но тогда $3k=1+4n=1+4(3l-1)=12l-3$, откуда $k=4l-1$. Таким образом, найдены целые k и n, при которых выполняется система

$$\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi n}{3}, \\ x=\dfrac{\pi k}{2}. \end{cases}$$

Осталось правую часть любого из уравнений этой системы выразить через l. Получим $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$.

Пример 4. Решите уравнение $\sin 7x\cdot\cos 6x=-1$.

Решение. Так как $|\sin 7x|\leqslant 1$ и $|\cos 6x|\leqslant 1$, левая часть уравнения будет равной -1 в том и только том случае, если

$$\begin{cases} \sin 7x=1, \\ \cos 6x=-1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin 7x=-1, \\ \cos 6x=1. \end{cases}$$

Вместо двух систем можно получить одну, если сначала воспользоваться формулой $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$ и перейти к уравнению $\sin 13x+\sin x=-2$, откуда

$$\begin{cases} \sin 13x=-1, \\ \sin x=-1, \end{cases} \quad \text{и, значит,} \quad \begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{26}+\dfrac{2\pi n}{13}, \\ x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, \end{cases}$$

где $k\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}$. Остаётся установить, существуют ли такие целые k и n, при которых последняя система имеет решения. Для этого приравняем правые части уравнений этой системы: $-\dfrac{\pi}{26}+\dfrac{2\pi n}{13}=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, откуда после упрощений получим $-1+4n=-13+52k$. Следовательно, $n=13k-3$, и решениями системы являются корни её второго уравнения, т. е. $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Пример 5. Решите уравнение $\sin^7 x+\cos^{13} x=1$.

Решение. Из неравенств $0 \leqslant |\sin 7x| \leqslant 1$ и $0 \leqslant |\cos 6x| \leqslant 1$ следует, что $\sin^7 x \leqslant \sin^2 x$, $\cos^{13} x \leqslant \cos^2 x$. Поэтому левая часть уравнения не превосходит $\sin^2 x + \cos^2 x$, т. е. не превосходит 1. Равной 1 она будет в том и только том случае, если

$$\begin{cases} \sin^7 x = \sin^2 x, \\ \cos^{13} x = \cos^2 x, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} \sin^2 x(\sin^5 x - 1) = 0, \\ \cos^2 x(\cos^{11} x - 1) = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения последней системы получаем, что $\sin x = 1$ или $\sin x = 0$. Если $\sin x = 1$, то $\cos x = 0$, и второе уравнение системы выполнено. Следовательно, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, Если $\sin x = 0$, то $\cos x = \pm 1$, но второму уравнению последней системы удовлетворяет только $\cos x = 1$. Значит, $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим теперь уравнение, в котором левая и правая части зависят от разных аргументов, т. е., по существу, уравнение с двумя переменными.

Пример 6. Найдите все пары $(x; y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых $2^{|x|} = \cos y$.

Решение. Из неравенства $|x| \geqslant 0$ следует, что $2^{|x|} \geqslant 1$, и, поскольку $\cos y \leqslant 1$, данное равенство возможно в том и только том случае, если

$$\begin{cases} 2^{|x|} = 1, \\ \cos y = 1, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 2\pi k, \end{cases} \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(0; 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Аналогичные идеи, как уже отмечалось, используются и при решении неравенств.

Пример 7. Решите неравенство $\log_3(8x^2 - 24x + 27) \leqslant |\sin(\pi x)| + 1$.

Решение. Сразу понятно, что стандартные приёмы и методы здесь не помогут. Попробуем использовать ограниченность синуса и модуля: $0 \leqslant |\sin \pi x| \leqslant 1$. Поэтому правую часть неравенства можно оценить так: $1 \leqslant |\sin \pi x| + 1 \leqslant 2$. Что касается левой части неравенства, то здесь сначала нужно выделить полный квадрат: $8x^2 - 24x + 27 = 8\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 9$. Поскольку $8\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 9 \geqslant 9$, получим, что $\log_3(8x^2 - 24x + 27) = \log_3\left(8\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 9\right) \geqslant \log_3 9$, откуда $\log_3(8x^2 - 24x + 27) \geqslant 2$. Таким образом, левая часть неравенства не меньше 2, а правая его часть не больше 2. Поэтому данное неравенство будет выполнено, только если и левая, и правая его части

равны 2, что возможно в том и только том случае, когда

$$\begin{cases} |\sin \pi x| = 1, \\ \log_3(8x^2 - 24x + 27) = 2. \end{cases}$$

Единственным корнем второго уравнения системы является, как следует из предыдущего, $x = 1{,}5$. Проверкой легко убедиться, что это число является и корнем первого уравнения системы.

Ответ: 1,5.

Пример 8. Найдите все пары $(x; y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых $30y + 3 \geqslant 25y^2 + 9x^2 + \frac{4}{x^2}$.

Решение. Перепишем неравенство в виде $30y + 3 - 25y^2 \geqslant 9x^2 + \frac{4}{x^2}$. Выделим в левой части полученного неравенства полный квадрат: $30y + 3 - 25y^2 = 12 - (5y - 3)^2$. Следовательно, $30y + 3 - 25y^2 \leqslant 12$. Оценим правую часть неравенства, воспользовавшись тем, что $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$. В нашем случае $a = 3|x|$, $b = \frac{2}{|x|}$. Поэтому $9x^2 + \frac{4}{x^2} \geqslant 2 \cdot 3|x| \cdot \frac{2}{|x|}$, откуда $9x^2 + \frac{4}{x^2} \geqslant 12$. Таким образом, левая часть неравенства не больше 12, а правая его часть не меньше 12. Поэтому данное неравенство будет выполнено, только если и левая, и правая его части равны 12, что возможно в том и только том случае, когда

$$\begin{cases} 12 - (5y - 3)^2 = 12, \\ 3|x| = \frac{2}{|x|}, \end{cases} \quad \text{и, значит,} \quad \begin{cases} y = \frac{3}{5}, \\ x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}; \frac{3}{5}\right); \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}; \frac{3}{5}\right)$.

Аналогичные приёмы применяются и при решении более сложных задач. Возникает естественный вопрос: как опознать такую задачу? Конечно, помогут в этом прежде всего навыки, полученные при самостоятельном решении подобных задач. Не последнюю роль играет и то обстоятельство, о котором уже не раз упоминалось: практически ни одна из этих задач не может быть решена с помощью стандартных приёмов: преобразований, замены переменной и т. п., хотя с ними приходится иметь дело и при решении таких задач. Кроме того, наводит на мысль о том, что та или иная задача относится к рассматриваемому типу, её «внешний вид»: наличие квадратных трёхчленов, суммы двух взаимно обратных величин, синусов, косинусов и других ограниченных функций. Рассмотрим ещё несколько примеров.

Пример 9. Решите уравнение

$$(4x^2+12x+11)\log_{\sin\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2(\pi x)+6\sin^2\frac{x}{2}-8\sin^4\frac{x}{2}+\cos 2x-\cos x+2\right)= \\ =-4.$$

Решение. Учитывая, что $\sin\frac{\pi}{4}=2^{-\frac{1}{2}}$, и перейдя к основанию 2 у логарифма, после несложных преобразований получим уравнение

$$((2x+3)^2+2)\log_2\left(\cos^2(\pi x)+6\sin^2\frac{x}{2}-8\sin^4\frac{x}{2}+\cos 2x-\cos x+2\right)=2.$$

Далее,

$$6\sin^2\frac{x}{2}-8\sin^4\frac{x}{2}+\cos 2x-\cos x= \\ =6\sin^2\frac{x}{2}-8\sin^4\frac{x}{2}+\cos 2x-1+2\sin^2\frac{x}{2}= \\ =8\sin^2\frac{x}{2}-8\sin^4\frac{x}{2}-2\sin^2 x.$$

Но $8\sin^2\frac{x}{2}-8\sin^4\frac{x}{2}=8\sin^2\frac{x}{2}\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)=8\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=2\sin^2 x$. Поэтому

$$\cos^2(\pi x)+6\sin^2\frac{x}{2}-8\sin^4\frac{x}{2}+\cos 2x-\cos x+2=\cos^2(\pi x)+2.$$

Таким образом, данное уравнение приводится к виду

$$((2x+3)^2+2)\log_2(\cos^2(\pi x)+2)=2.$$

Имеем $\cos^2(\pi x)+2\geqslant 2$, поэтому $\log_2(\cos^2(\pi x)+2)\geqslant 1$. Но $(2x+3)^2+2\geqslant \geqslant 2$. Следовательно, левая часть уравнения не меньше 2, и уравнение имеет корни, только если она равна 2, т. е. если

$$\begin{cases}\log_2(\cos^2(\pi x)+2)=1,\\ (2x+3)^2+2=2,\end{cases}\quad\text{откуда}\quad x=-1{,}5.$$

Ответ: $-1{,}5$.

Отметим, что именно «внешний вид» этого уравнения явился побудительной причиной для оценки его левой части: с первого взгляда ясно, что стандартные приёмы и методы ничего радостного здесь не сулят.

Пример 10. Найдите все пары $(x;y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых $\cos x-y^2\geqslant\sqrt{y-x^2-1}$.

Решение. Перепишем данное неравенство в виде

$$\cos x\geqslant y^2+\sqrt{y-x^2-1}$$

и попытаемся оценить левую и правую части полученного неравенства. С левой частью проблем нет: $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$. Для правой части единственной зацепкой является то, что она определена только при условии $y - x^2 - 1 \geqslant 0$, откуда $y \geqslant x^2 + 1$ и, следовательно, $y \geqslant 1$. Но тогда и $y^2 \geqslant 1$. Вот оно, недостающее звено: правая часть неравенства не меньше 1, а левая — не больше 1. Поэтому неравенство будет выполняться, только если и левая, и правая его части равны 1. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялась система

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ y^2 = 1, \\ \sqrt{y - x^2 - 1} = 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ: (0; 1).

Пример 11. Решите уравнение

$$\sqrt{2x(x-2)+3} + 2\sqrt[3]{3x(x-2)+4} + \ldots + (n-1)\sqrt[n]{nx(x-2)+n+1} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2x(x-2)+3}} + \frac{2}{\sqrt[3]{3x(x-2)+4}} + \ldots + \frac{n-1}{\sqrt[n]{nx(x-2)+n+1}}.$$

Решение. Несмотря на пугающий вид, для решения этого уравнения оказывается достаточным выполнить стандартное преобразование: выделение полного квадрата в каждом из подкоренных квадратных трёхчленов. В самом деле,

$$nx(x-2)+n+1 = nx^2 - 2nx + n + 1 = n(x-1)^2 + 1,$$

и, значит, $\sqrt[n]{nx(x-2)+n+1} \geqslant 1$.

Поэтому левая часть уравнения не меньше

$$1 + 2 + \ldots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

(как сумма нескольких первых членов арифметической прогрессии), а правая часть не больше

$$\frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \ldots + \frac{n-1}{1} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Следовательно, левая и правая части уравнения равны $\frac{n(n-1)}{2}$, что возможно, лишь если $x = 1$.

Ответ: 1.

Пример 12. Найдите все пары $(x; y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых

$$\begin{cases} y^6 + y^3 + 2x^2 = \sqrt{xy - x^2y^2}, \\ 4xy^3 + y^3 + 0{,}5 \geqslant 2x^2 + \sqrt{1 + (2x-y)^2}. \end{cases}$$

Решение. Первое знакомство с задачами такого рода вызывает обычно чувство глубокой безысходности. Ясно, что возведение в квадрат в данном случае могут позволить себе только любители «очень острых блюд». Мы же попытаемся сделать какие-то оценки левой и правой частей уравнения и неравенства, впрочем, быть может, без особой надежды на успех. Итак, рассмотрим уравнение данной системы. Выделим полный квадрат в подкоренном выражении правой части: $xy - x^2y^2 = 0{,}25 - (xy - 0{,}5)^2$. Следовательно, $\sqrt{xy - x^2y^2} \leqslant \sqrt{0{,}25}$, т. е. $\sqrt{xy - x^2y^2} \leqslant 0{,}5$. Значит, и $y^6 + y^3 + 2x^2 \leqslant 0{,}5$. Перейдём к неравенству данной системы. Поскольку $\sqrt{1 + (2x - y)^2} \geqslant 1$, имеем $4xy^3 + y^3 + 0{,}5 - 2x^2 \geqslant 1$, откуда $2x^2 - 4xy^3 - y^3 \leqslant -0{,}5$. Сложив почленно последнее неравенство с неравенством $y^6 + y^3 + 2x^2 \leqslant 0{,}5$, получим, что $y^6 - 4xy^3 + 4x^2 \leqslant 0$. И здесь с радостным изумлением мы замечаем в левой части полный квадрат: $(y^3 - 2x)^2 \leqslant 0$. Ясно, что неравенство $(y^3 - 2x)^2 \leqslant 0$ возможно, только если $y^3 = 2x$. Ясно и то, что полный квадрат появился не случайно, а значит, мы на верном пути. Поскольку $y^3 = 2x$, неравенство $y^6 + y^3 + 2x^2 \leqslant 0{,}5$ примет вид $6x^2 + 2x \leqslant 0{,}5$, а неравенство $2x^2 - 4xy^3 - y^3 \leqslant -0{,}5$ примет вид $-6x^2 - 2x \leqslant -0{,}5$, откуда $6x^2 + 2x \geqslant 0{,}5$. Таким образом, $6x^2 + 2x \leqslant 0{,}5$ и $6x^2 + 2x \geqslant 0{,}5$, что, как легко догадаться, возможно, лишь если $6x^2 + 2x = 0{,}5$. Корнями полученного квадратного уравнения являются числа $x = -\frac{1}{2}$ (тогда $y = -1$) и $x = \frac{1}{6}$ (тогда $y = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$). Следовательно, данная система может иметь в качестве решений только $(-0{,}5; -1)$ и $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$. Остаётся сделать проверку и установить, что единственным решением системы является $(-0{,}5; -1)$.

Ответ: $(-0{,}5; -1)$.

Перейдём к задачам с параметром.

Пример 13. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |y| + a = 6\sin x, \\ y^4 + z^2 = 6a, \\ (a-3)^2 = |z^2 + 6z| + \sin^2 2x + 9 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого из найденных значений a.

Решение. Поскольку $|y| \geqslant 0$ и $\sin x \leqslant 1$, из первого уравнения системы следует, что $a \leqslant 6$. Поскольку $y^4 + z^2 \geqslant 0$, из второго уравнения системы следует, что $a \geqslant 0$. Таким образом, $0 \leqslant a \leqslant 6$. Третье уравнение

системы, раскрывая скобки в левой его части и приводя подобные слагаемые, можно переписать так: $a^2 - 6a = |z^2 + 6z| + \sin^2 2x$. Поскольку $|z^2 + 6z| + \sin^2 2x \geqslant 0$, из последнего уравнения следует, что $a^2 - 6a \geqslant 0$, откуда $a \in (-\infty; 0] \cup [6; +\infty)$. Учитывая неравенство $0 \leqslant a \leqslant 6$, получаем, что допустимыми значениями параметра a являются только 0 и 6.

Пусть $a = 0$. Тогда из второго уравнения данной системы получим $y = z = 0$. Поэтому первое уравнение системы примет вид $\sin x = 0$, откуда $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. При $a = 0$, $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $y = z = 0$ третье уравнение системы, очевидно, выполнено.

Пусть $a = 6$. Тогда левая часть первого уравнения данной системы не меньше 6, а правая — не больше 6. Равенство возможно, только если $|y| = 0$ и $\sin x = 1$, откуда $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда второе уравнение данной системы принимает вид $z^2 = 36$, и, значит, $z = \pm 6$. При $a = 6$ и $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, последнее уравнение данной системы принимает вид $|z^2 + 6z| = 0$. Из двух значений $z = \pm 6$ только $z = -6$ является корнем уравнения $|z^2 + 6z| = 0$.

Ответ: $(\pi n; 0; 0)$, $n \in \mathbb{Z}$, при $a = 0$; $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 0; -6\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, при $a = 6$; при прочих a решений нет.

Решение двух следующих задач основывается как на свойствах ограниченных функций, так и на свойствах монотонных функций, что показывает определённую условность отнесения некоторых нестандартных задач к тому или иному типу. Поскольку в этих примерах монотонность играет хотя и весьма существенную, но вспомогательную роль (с её помощью доказывается ограниченность функции), они включены именно в этот, а не в предыдущий параграф.

Пример 14. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2 + 7|x| + 49\log_7(2x^2 + 7) = 7a + 3|2x - 7a|$ имеет хотя бы один корень.

Решение. Перепишем уравнение в виде

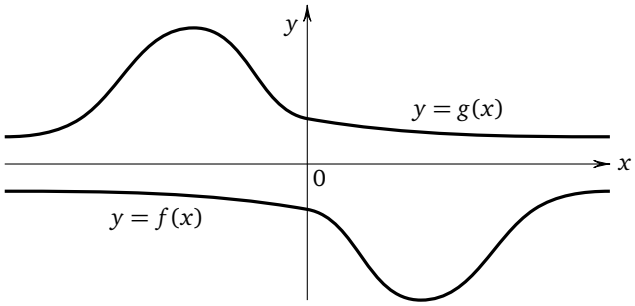
$$a^2 - 7a + 49\log_7(2x^2 + 7) = 3|2x - 7a| - 7|x|$$

и рассмотрим функции $f(x) = a^2 - 7a + 49\log_7(2x^2 + 7)$ и $g(x) = 3|2x - 7a| - 7|x|$, определённые и непрерывные на всей числовой прямой. График функции $y = g(x)$ представляет собой ломаную, состоящую из отрезков прямых и лучей. При $x \geqslant 0$ каждое звено ломаной является частью прямой вида $y = kb + l$, где $k < 0$ (поскольку вне зависимости от «раскрытия» другого модуля коэффициент при x будет отрицательным). Следовательно, на промежутке $[0; +\infty)$ функция $y = g(x)$ убывает от $g(0)$ до $-\infty$. Совершенно аналогично

можно показать, что на промежутке $(-\infty; 0]$ функция $y = g(x)$ возрастает от $-\infty$ до $g(0)$. Поэтому в точке $x = 0$ эта функция достигает своего наибольшего значения, т. е. $\max g(x) = g(0) = 21|a|$. Ясно, что $\min f(x) = f(0) = a^2 - 7a + 49$, причём на промежутке $[0; +\infty)$ функция $y = f(x)$ возрастает от $f(0)$ до $+\infty$, а на промежутке $(-\infty; 0]$ функция $y = f(x)$ убывает от $+\infty$ до $f(0)$. Поэтому для рассматриваемых функций уравнение $f(x) = g(x)$ имеет хотя бы один корень в том и только том случае, если $\min f(x) \leqslant \max g(x)$, т. е. если $a^2 - 7a + 49 \leqslant 21|a|$. При $a \geqslant 0$ последнее неравенство приводится к виду $a^2 - 28a + 49 \leqslant 0$, откуда $a \in [14 - 7\sqrt{3}; 14 + 7\sqrt{3}]$. При $a < 0$ неравенство $a^2 - 7a + 49 \leqslant 21|a|$ приводится к виду $a^2 + 14a + 49 \leqslant 0$, т. е. $(a+7)^2 \leqslant 0$, откуда $a = -7$.

Ответ: $\{-7\} \cup [14 - 7\sqrt{3}; 14 + 7\sqrt{3}]$.

Замечание. Условие $\min f(x) \leqslant \max g(x)$ является, вообще говоря, только необходимым условием существования корней уравнения $f(x) = g(x)$. Выполнение этого условия ещё не означает обязательного существования корней такого уравнения (см. рис.). Достаточность нуждается в более подробных обоснованиях (аналогичных сделанным при решении примера 14), обычно основанных на монотонном возрастании одной из данных функций и монотонном убывании другой на соответствующих промежутках.



При решении последнего примера этого параграфа используются схожие идеи, только вместо уравнения рассматривается неравенство, а число переменных увеличено до двух.

Пример 15. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любой пары $(u; v)$ действительных чисел u и v выполнено неравенство

$$13\sin u - 7|\sin u + v - 2a| + 3|\sin u - 2v - a - 1| \leqslant 16.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$13\sin u - 7|\sin u + v - 2a| + 3|\sin u - 2v - a - 1| - 16 \leqslant 0,$$

введём новую переменную $t=\sin u$ и рассмотрим функцию $f(t)=$ $=13t-7|t+v-2a|+3|t-2v-a-1|-16$, определённую и непрерывную на всей числовой прямой. График этой функции представляет собой ломаную, состоящую из отрезков прямых и лучей, каждое звено которой является частью прямой вида $y=kt+l$, где $k>0$ (поскольку вне зависимости от «раскрытия» модулей коэффициент при t будет положительным). Следовательно, функция $y=f(t)$ возрастает на $(-\infty;+\infty)$. Но $t=\sin u$, поэтому $t\in[-1;1]$. Неравенство $f(t)\leqslant 0$ будет выполняться для любого $t\in[-1;1]$ в том и только том случае, если $\max\limits_{[-1;1]} f(t)\leqslant 0$. В силу монотонного возрастания функции $y=f(t)$ получим, что

$$\max_{[-1;1]} f(t)=f(1)=-7|1+v-2a|+3|2v+a|-3.$$

Таким образом, приходим к неравенству

$$-7|1+v-2a|+3|2v+a|-3\leqslant 0,$$

которое должно выполняться при любом действительном v.

Рассмотрим теперь функцию $g(v)=-7|1+v-2a|+3|2v+a|-3$, определённую и непрерывную на всей числовой прямой. График функции $y=g(v)$ представляет собой ломаную, состоящую из отрезков прямых и лучей. При $v\geqslant 2a-1$ каждое звено ломаной является частью прямой вида $y=mv+p$, где $m<0$ (поскольку вне зависимости от «раскрытия» второго модуля коэффициент при v будет отрицательным). Следовательно, при $v\geqslant 2a-1$ функция убывает. Совершенно аналогично можно показать, что при $v\leqslant 2a-1$ функция возрастает. Поэтому в точке $v=2a-1$ эта функция достигает своего наибольшего значения, т. е. $\max g(v)=g(2a-1)=3|5a-2|-3$. Неравенство $g(v)\leqslant 0$ будет выполняться при любом действительном v в том и только том случае, если $\max g(v)\leqslant 0$, т. е. $3|5a-2|-3\leqslant 0$, откуда $|5a-2|\leqslant 1$. Решая последнее неравенство, получим $-1\leqslant 5a-2\leqslant 1$, откуда $0{,}2\leqslant a\leqslant 0{,}6$.

Ответ: $[0{,}2;\ 0{,}6]$.

В заключение сделаем несколько замечаний. Увидев задачу, в которой число неизвестных больше числа уравнений (неравенств), не следует пугаться. Как правило, все не так страшно, и недостающее уравнение или неравенство получить не так сложно. Кроме того, даже не вселяющие поначалу оптимизма уравнения, неравенства и системы путём более или менее очевидных оценок могут быть сведены к простейшим уравнениям или неравенствам. И последнее. Большинство задач этого типа не требует длительных вычислений, при их ре-

шении самое главное — делать логически безупречные выводы (впрочем, как и при решении любой нестандартной задачи). Успех в этом случае будет гарантирован.

Упражнения к § 3.2

1. а) Решите уравнение $2\cos(2\sqrt{3}\pi x)+3\cos(2\pi x)=5$.

б) Решите уравнение $5\cos(3\sqrt{5}\pi x)+2\cos(4\pi x)=7$.

2. а) Решите уравнение $5\cos 4x-4\sin 5x=9$.

б) Решите уравнение $6\sin 5x+5\cos 6x=-11$.

3. а) Решите уравнение $\sin 9x\cdot\cos 8x=-1$.

б) Решите уравнение $\cos 11x\cdot\cos 13x=1$.

4. а) Решите уравнение $\sin^9 x+\cos^{11} x=1$.

б) Решите уравнение $\sin^6 x+\cos^7 x=1$.

5. а) Решите уравнение $1+\cos^2 x=\log_2(x^2+4)$.

б) Решите уравнение $3+2\sin^2 x=\log_3(27-x^2)$.

6. а) Найдите все пары $(x;y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых $3^{|x-2|+2}=5\sin y+4$.

б) Найдите все пары $(x;y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых $5^{|y+3|+2}=13-12\cos x$.

7. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых следующее уравнение имеет хотя бы один корень:

$$\sqrt{7\cos(8x+9)+16}=8a-a^2-13.$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{5\sin(4x+3)+86}=5+4a-a^2$ имеет хотя бы один корень.

8. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых следующее неравенство имеет хотя бы одно решение:

$$15\sin^2(14x-13)\geqslant 25a^2+60a+51.$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $4\cos^2(5x-6)\geqslant 16a^2-24a+13$ имеет хотя бы одно решение.

9. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2+12a+34+3^{25x^2-60x+37}=\cos(10\pi x)$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $16a^2+40a+20+6^{100x^2-60x+10}+\sin(5\pi x)=0$ имеет хотя бы

один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

10. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(4a^2-17a+4)^8+(4^{x^2-x}-4a)^6=0$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(5a^2-26a+5)^6+(5^{x^2-x}-5a)^4=0$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

11. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых выражение $x+y$ принимает наименьшее возможное значение, если $(x;y)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} 12^x+11^y=12^{a^2+9}+11^{4-6a}, \\ 12^x+11^{4-6a}=12^{a^2+9}+11^y. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых выражение $x+y$ принимает наименьшее возможное значение, если $(x;y)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} 8^x+3^y=8^{a^2+100}+3^{5-20a}, \\ 8^x+3^{5-20a}=8^{a^2+00}+3^y. \end{cases}$$

12. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt[6]{\lg^2 x-3\lg x+a}+|a^2-5a+6|=0$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt[4]{a^2-2a-8}+|\lg^2 x-\lg x+a|=0$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

13. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_7 \frac{14}{12x^2-12x+5}=2(x+a-3)^2+4a^2-20a+26$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_3 \frac{18}{12x^2+36x+29}=3(x-a+3)^2+4a^2-12a+11$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

14. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sin^{100}(x-1)+\cos^{200}(x-1)=\sqrt{y-2}+\sqrt{z-3}+a^2-4a+5, \\ \sin^{300}(y-2)+\cos^{400}(y-2)=\sqrt{z-3}+\sqrt{x-1}+a^2-4a+5, \\ \sin^{500}(z-3)+\cos^{600}(z-3)=\sqrt{x-1}+\sqrt{y-2}+a^2-4a+5 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого из найденных значений a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sin^{600}(x+3)+\cos^{500}(x+3)=\sqrt{y+2}+\sqrt{z+1}+a^2+6a+10, \\ \sin^{400}(y+2)+\cos^{300}(y+2)=\sqrt{z+1}+\sqrt{x+3}+a^2+6a+10, \\ \sin^{200}(z+1)+\cos^{100}(z+1)=\sqrt{x+3}+\sqrt{y+2}+a^2+6a+10 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого из найденных значений a.

15. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \cos^{10}(x-10)=\sqrt{y-20}+|a+6|+a+7, \\ \cos^{20}(y-20)=\sqrt{z-30}+|a+6|+a+7, \\ \cos^{30}(z-30)=\sqrt{x-10}+|a+6|+a+7 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого из найденных значений a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \cos^{40}(x+40)=\sqrt{y+50}+|a-7|+a-6, \\ \cos^{50}(y+50)=\sqrt{z+60}+|a-7|+a-6, \\ \cos^{60}(z+60)=\sqrt{x+40}+|a-7|+a-6 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого из найденных значений a.

16. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x+2|x-3|-3|x-a-4|=7|x-a|$ имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $11|x+a|+2x+3|x-5|=5|x+a-4|$ имеет хотя бы один корень.

17. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x+1+2|x-2|=8|x-a+2|+3|x-a-2|$ имеет единственный корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $13|x-a+1|+3|x+7|=2x+5|x-a+5|+4$ имеет единственный корень.

18. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4|x+a|+2|x-a|+2=x+9|x-2|+2|3a+2|$ имеет два различных корня.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $3|x-a|+4|x+a|=x+13|x+1|+|7a-1|+1$ имеет два различных корня.

19. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$17|x-a|+|a^2-7x+12|+|a^2+2x-15|=|2a^2-6a+x-3|+|4|x|-|x+3a||$$

имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$18|x+a|+|a^2+8x+12|+|a^2-x-6|=|2a^2-8a-x+6|+|5|x|-|x-4a||$$

имеет хотя бы один корень.

20. а) Найдите все точки $(x;\,y)$ координатной плоскости Oxy, для каждой из которых $5|x-3|+3|x+2|=2\sqrt{49-y^2}+1$.

б) Найдите все точки $(x;\,y)$ координатной плоскости Oxy, для каждой из которых $9|x-1|+4|x+4|\leqslant 3\sqrt{25-y^2}+5$.

21. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одна такая пара $(x;\,y)$ чисел действительных чисел x и y, что $5|x-2|+3|x+a|\leqslant\sqrt{4-y^2}+7$.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одна такая пара $(x;\,y)$ чисел действительных чисел x и y, что $5|x-a|+3|x+2|\leqslant\sqrt{9-y^2}+6$.

22. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a+y^2=4\cos 2x, \\ \sqrt{y}+z^2=a, \\ (a-2)^2=|z^2-2z|+|\sin 4x|+4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого из найденных значений a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a+\sqrt{y}=2\sin 3x, \\ |y|+z^4=8a, \\ (a-1)^2=|z^2+2z|+|\sin 6x|+1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого из найденных значений a.

23. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любой пары $(u;v)$ действительных чисел u и v выполнено неравенство

$$13\sin u-9|\sin u-v+2a-1|+2|\sin u+3v+4a-1|\leqslant 15.$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любой пары $(u;v)$ действительных чисел u и v выполнено неравенство

$$23\cos u-17|\cos u+v-3a-1|+4|\cos u-3v+7a-1|\leqslant 31.$$

24. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых следующая система уравнений имеет хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} x^2+y^2=(a-2)^2, \\ \sqrt{x+y+a}=\log_4\dfrac{(2-a^2)(a^2-6)}{4}. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет следующая система уравнений хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} x^2+3x+5=a+y, \\ \sqrt{y-x-a}=\log_3\dfrac{(7-a^2)(a^2-1)}{9}. \end{cases}$$

25. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одна такая пара $(x;y)$ действительных чисел x и y, что

$$\sqrt[7]{7|x-5|+4|x+a|-1}\leqslant\sqrt[7]{7+\sqrt{16-y^2}}+\lg\frac{9+\sqrt{16-y^2}}{7|x-5|+4|x+a|+1}.$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одна такая пара $(x;y)$ действительных чисел x и y,

что

$$\sqrt[5]{5|x+4|+2|x-a|-2} \leqslant \sqrt[5]{2+\sqrt{36-y^2}} + \ln\frac{5+\sqrt{36-y^2}}{5|x+4|+2|x-a|+1}.$$

26. а) Решите неравенство $\cos^2(x+1)\lg(9-2x-x^2) \geqslant 1$.
б) Решите неравенство $(4x-x^2-3)\log_2(\cos^2\pi x+1) \geqslant 1$.
27. а) Решите неравенство $|\sqrt{2}|x|-1|\log_2(2-2x^2) \geqslant 1$.
б) Решите неравенство $2^{-|x-2|}\cdot\log_2(4x-x^2-2) \geqslant 1$.
28. а) Решите неравенство

$$(x^2-4x+3)\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\cos^2\pi x+\cos x+2\sin^2\frac{x}{2}\right) \geqslant 2.$$

б) Решите неравенство

$$\left(x-x^2-\frac{5}{4}\right)\log_{\sqrt{3}}(2+2\cos^2 x-\cos 2x+3\cos^2\pi x) \geqslant -2.$$

29. а) Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^2\pi(x+y)+\operatorname{ctg}^2\pi(x+y)=\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}}+1.$$

б) Решите уравнение

$$\log_3|\pi x|+\log_{|\pi x|}3=\frac{2}{\sin^2(x+y)-2\sin(x+y)+2}.$$

30. а) Найдите все тройки $(x;y;z)$ действительных чисел x, y, z, для каждой из которых $\left(\cos 4x+\frac{1}{4\cos 4x}\right)(5+\operatorname{tg}^2 5y)(6+\sin 6z)=25$.
б) Найдите все тройки $(x;y;z)$ действительных чисел x, y, z, для каждой из которых $\left(4\sin 4x+\frac{1}{\sin 4x}\right)(3+\operatorname{ctg}^2 3y)(2+\cos 2z)=12$.
31. а) Найдите все тройки $(x;y;z)$ действительных чисел x, y, z, для каждой из которых

$$\begin{cases}\operatorname{tg}x+3\operatorname{ctg}x=2\sqrt{3}\sin y,\\ \sin y+2\cos z=1.\end{cases}$$

б) Найдите все тройки $(x;y;z)$ действительных чисел x, y, z, для каждой из которых

$$\begin{cases}3\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=2\sqrt{3}\cos y,\\ \cos y+4\sin z=1.\end{cases}$$

32. а) Найдите все пары $(x;y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых $|x| \geqslant \sqrt{1-x^2-y^2}+|y|+1$.

б) Найдите все пары $(x;y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых $|x|+y^2+\sqrt{x^2-y^2-1}\leqslant 1$.

33. а) Найдите все пары $(x;y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых

$$\begin{cases}\sqrt{0{,}5(x-y)^2-(x-y)^4}=y^2-2x^2,\\ y\geqslant 4x^4+4yx^2+0{,}5.\end{cases}$$

б) Найдите все пары $(x;y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых

$$\begin{cases}4y^2-2x^2=\sqrt{2(x+2y)^2-(x+2y)^4},\\ x^4+2\leqslant 4y(x^2-1).\end{cases}$$

34. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых для любого действительного значения x выполнено неравенство $|3\sin^2 x+a\sin 2x+\cos^2 x+a|\leqslant 3$.

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых для любого действительного значения x выполнено неравенство

$$|5\sin^2 x+a\sin 2x+\cos^2 x+a+1|\leqslant 6.$$

35. а) Найдите все пары $(x;y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых

$$\sqrt{2-|y|}(5\sin^2 y-3\sin 2y-9\cos^2 y+3\sqrt[3]{33})=\arcsin^2 x+\arccos^2 x-\frac{5\pi^2}{4}.$$

б) Найдите все пары $(x;y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых

$$\sqrt{x^2-4}(3\sin^2 x+5\sin 2x+11\cos^2 x-2\sqrt[3]{301})=$$
$$=5\pi^2-4\arcsin^2 y-4\arccos^2 y.$$

36. а) Найдите все пары $(x;y)$ положительных действительных чисел x и y, для каждой из которых $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{y}}}}=\dfrac{2}{3}$.

б) Найдите все тройки $(x;y;z)$ положительных действительных чисел x, y, z, для каждой из которых $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z+\dfrac{1}{z}}}}}}=\dfrac{3}{4}$.

37. а) Найдите все наборы $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ положительных действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, для которых $\dfrac{1}{x_n+\dfrac{1}{x_n+\dfrac{1}{\ldots+\dfrac{1}{x_1+\dfrac{1}{x_1}}}}} = \dfrac{n}{n+1}$ (каждая переменная в левой части равенства написана ровно 2 раза).

б) Найдите все наборы $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ отрицательных действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, для которых $x_n + \dfrac{1}{x_n+\dfrac{1}{\ldots+\dfrac{1}{x_1+\dfrac{1}{x_1}}}} + \dfrac{1}{n} + 1 = 0$ (каждая переменная в левой части равенства написана ровно 2 раза).

38. а) Найдите все пары $(a; b)$ действительных чисел a и b, для каждой из которых следующее уравнение имеет хотя бы один корень:

$$(3x^2 - 2b^2 + ab)^2 + (3b^2 - ab + 2a^2 - 12x)^2 + 4 = 4x - x^2.$$

б) Найдите все пары $(a; b)$ действительных чисел a и b, для каждой из которых следующее уравнение имеет хотя бы один корень:

$$(3x - a^2 + ab - b^2)^2 + (6x - a^2 - ab)^2 + x^2 + 9 = 6x.$$

39. а) Найдите наибольшее значение параметра a, при котором следующее неравенство имеет хотя бы одно решение:

$$\sqrt{a^5}(8x - x^2 - 16) + \frac{\sqrt{a}}{8x - x^2 - 16} \geqslant -\frac{2}{3}a|\cos \pi x|.$$

б) Найдите наибольшее значение параметра a, при котором следующее неравенство имеет хотя бы одно решение:

$$a\sqrt{a}(x^2 - 2x + 1) + \frac{\sqrt{a}}{x^2 - 2x + 1} \leqslant \sqrt[4]{a^3}\left|\sin \frac{\pi x}{2}\right|.$$

40. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых следующая система неравенств имеет хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} x^2 + 2ax + 3a^2 + 3a + 3 \leqslant 3\sin y - 4\cos y, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых следующая система неравенств имеет хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} x^2 + 2ax + 4a^2 + 2a + 4 \leqslant 4\sin y + 3\cos y, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

41. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(1+(a+2)^2)\log_3(2x-x^2)+(1+(3a+1)^2)\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=$$
$$=\log_3(2x-x^2)+\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$$

имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(1+(3a+4)^2)\log_2(-2x-x^2)+(1+(a-2)^2)\log_7\left(1-\frac{x^2}{3}\right)=$$
$$=\log_7\left(1-\frac{x^2}{3}\right)+\log_2(-2x-x^2)$$

имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

42. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4\cos x\cdot\sin a+2\sin x\cdot\cos a-3\cos a=2\sqrt{7}$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $3\cos x\cdot\sin a-\sin x\cdot\cos a-4\cos a=3\sqrt{3}$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

43. а) Найдите все тройки $(x;y;z)$ действительных чисел x, y, z, для каждой из которых

$$\sqrt{\frac{3}{2}x^2-2y^2+2z^2+10z+6y+\frac{\sqrt{3}}{2}x-17}+$$
$$+\sqrt{3x^2-2\sqrt{3}x(\cos\pi y+\cos\pi z)+4}=0.$$

б) Найдите все тройки $(x;y;z)$ действительных чисел x, y, z, для каждой из которых

$$\sqrt{15x^2+2y^2-2z^2-3\sqrt{5}x-2y+10z-4}+$$
$$+\sqrt{5x^2-2\sqrt{5}x\cos\pi y\cos\pi z+1}=0.$$

44. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых следующее уравнение имеет хотя бы один целый корень:

$$\sqrt{(x+3a-3\pi-4)(|x+\pi|+a-2\pi+2)}+$$
$$+\log_{\pi}\frac{\pi^2+a^2+4}{2(a-\pi)|x+2|-x^2-4x+2a\pi}=0.$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых следующее уравнение имеет хотя бы один целый корень:

$$\log_{\frac{1}{\pi}}\frac{a^2+4\pi^2+4}{4x-x^2-2(a-2\pi)|x-2|+4\pi a}-$$
$$-\sqrt{(x-5a+10\pi-34)(|\pi-x|-a+\pi+2)}=0.$$

45. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых следующая система уравнений имеет хотя бы одно решение:

$$\begin{cases}\left|12\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}}-5\right|-\left|12\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}}-7\right|+\left|24\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}}+13\right|=\\ \qquad=11-\sqrt{\sin\frac{\pi(x-2y-1)}{3}},\\ 2(x^2+(y-a)^2)-1=2\sqrt{x^2+(y-a)^2-\frac{3}{4}}.\end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых следующая система уравнений имеет хотя бы одно решение:

$$\begin{cases}\left|6\sqrt{\cos\frac{\pi y}{4}}-5\right|-\left|1-6\sqrt{\cos\frac{\pi y}{4}}\right|+\left|12\sqrt{\cos\frac{\pi y}{4}}+1\right|=\\ \qquad=5-\left(\sin\frac{\pi(y-2x)}{12}\right)^2,\\ 10-9(x^2+(y-a)^2)=3\sqrt{x^2+(y-a)^2-\frac{8}{9}}.\end{cases}$$

46. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2+5|x|+7\sqrt{2x^2+49}=2x+2|x-7a|$ имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2+6|x|+5\sqrt{3x^2+25}=3x+2|x-5a|$ имеет хотя бы один корень.

47. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2+7|x-4|+3\sqrt{x^2-8x+25}+16=4x+2|x-3a-4|$ имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2+8|x-5|+2\sqrt{x^2-10x+29}+25=5x+2|x-2a-5|$ имеет хотя бы один корень.

48. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2+8|x|+4\log_2(5x^2+2)=5x+2|x-2a|$ имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2+4|x|+16\log_4(x^2+4)=x+2|x-4a|$ имеет хотя бы один корень.

49. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2+8|x-5|+36\log_6(x^2-10x+31)+25=5x+2|x-6a-5|$ имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2+8|x-5|+9\log_3(x^2-10x+28)+25=5x+2|x-3a-5|$ имеет хотя бы один корень.

50. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2+5|x-2|+7^{x^2-4x+6}+4=2x+2|x-7a-2|$ имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2+8|x-5|+3^{x^2-10x+27}+25=5x+2|x-3a-5|$ имеет хотя бы один корень.

51. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2+10|x|+5\sqrt{3x^2+25}=5a+3|3x-5a|$ имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2+13|x|+3\sqrt{4x^2+9}=3a+3|4x-3a|$ имеет хотя бы один корень.

52. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2+8|x-5|+2\sqrt{x^2-10x+29}=2a+3|x-2a-5|$ имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2+7|x-4|+5\sqrt{x^2-8x+41}=5a+3|x-5a-4|$ имеет хотя бы один корень.

53. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2+13|x|+9\log_3(4x^2+3)=3a+3|4x-3a|$ имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2+16|x|+36\log_6(5x^2+6)=6a+3|5x-6a|$ имеет хотя бы один корень.

54. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2+10|x-7|+16\log_4(x^2-14x+53)=4a+3|x-4a-7|$ имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2+6|x-3|+16\log_4(x^2-6x+13)=4a+3|x-4a-3|$ имеет хотя бы один корень.

55. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2+10|x-3|+4^{x^2-6x+11}=4a+3|3x-4a-9|$ имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2+13|x-4|+5^{x^2-8x+18}=5a+3|4x-5a-16|$ имеет хотя бы один корень.

56. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a^2+5a+6|x-5a|+25\log_{15}(2x^2-20ax+50a^2+15)=2x+3|x-10a|$$

имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a^2+2a+16|x-2a|+4\log_6(7x^2-28ax+28a^2+6)=7x+8|x-4a|$$

имеет хотя бы один корень.

§ 3.3. Инвариантность

В этом параграфе будут рассмотрены задачи, ключевым признаком которых является инвариантность (т. е. неизменяемость) уравнения или неравенства относительно замены переменной каким-либо алгебраическим выражением от этой переменной. Простейшим примером инвариантности является чётность: если $y=f(x)$ — чётная функция, то уравнение $f(x)=0$ инвариантно относительно замены x на $-x$, поскольку $f(-x)=f(x)=0$. Алгебраические выражения, которые не меняются при подстановке вместо переменной какого-либо алгебраического выражения от этой переменной, также будем называть инвариантными относительно такой подстановки, используя оба — в данном случае синонимических — термина: замена и подстановка. Так, выражение $f(x)+f(c-x)$ (здесь и далее c — произвольное действительное число, отличное от нуля) не меняется при замене x на $c-x$ и, значит, инвариантно относительно такой замены; выражение $f(x)+f\left(\frac{c}{x}\right)$ при допустимых значениях

переменной не меняется при подстановке $\frac{c}{x}$ вместо x, т. е. является инвариантным относительно такой подстановки. Задачи, в решении которых инвариантность играет ключевую роль, можно разделить на две основные группы. К первой — наиболее многочисленной — относятся задачи, связанные с поиском всех значений параметра, при которых уравнение, неравенство или система имеет единственное решение (единственный корень). Слово «единственное» в формулировке такой задачи является ключевым; его наличие служит своего рода сигналом для проверки уравнения, неравенства или системы на инвариантность: если, например, уравнение не меняется при замене x на $c - x$ и должно иметь единственный корень x_0, это означает, что $x_0 = c - x_0$ (откуда $x_0 = \frac{c}{2}$), ведь в противном случае вместе с числом x_0 корнем уравнения будет и число $c - x_0$, и, значит, уравнение заведомо имеет более одного корня либо вовсе не имеет корней. Таким образом, если такое уравнение имеет единственный корень, то им может быть только $x_0 = \frac{c}{2}$. Подставив $\frac{c}{2}$ в уравнение вместо x, можно найти все значения параметра, при которых число $\frac{c}{2}$ будет корнем уравнения, после чего останется проверить, при каких из найденных значений параметра это число будет единственным корнем, а при каких уравнение будет иметь и другие корни. Аналогично если уравнение не меняется при подстановке $\frac{c}{x}$ вместо x и должно иметь единственный корень x_0, это означает, что $x_0 = \frac{c}{x_0}$ (откуда $x_0 = \pm\sqrt{c}$ при $c > 0$; при $c < 0$ единственность невозможна); если уравнение не меняется при замене x на $-x$, и должно иметь единственный корень x_0, это означает, что $x_0 = -x_0$ (откуда $x_0 = 0$). Итак, когда в формулировке задачи требуется найти значения параметра, при которых решение единственно, нужно проверить, не обладает ли уравнение (неравенство, система) свойством инвариантности. При положительном ответе следует использовать алгоритм, схожий с приведённым выше:

1) установить, какое число может быть единственным решением;

2) подставить его в данное уравнение (неравенство, систему) и найти соответствующие значения параметра;

3) определить, при каких из найденных значений параметра это число является единственным решением, а при каких — нет.

При отрицательном ответе нужно поискать другой способ решения задачи. О второй — куда менее многочисленной — группе задач, которые принято называть функциональными уравнениями, речь пойдёт ниже, после решения ряда примеров.

Пример 1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственный корень.

Решение. Заметим, что если x_0 — корень уравнения, то и $-x_0$ — его корень. Для единственности решения необходимо, чтобы выполнялось условие $x_0 = -x_0$, т. е. $x_0 = 0$. Значит, если данное уравнение имеет единственный корень, то этим корнем может быть только число 0. Найдём все значения параметра, при каждом из которых число 0 является корнем данного уравнения. При $x = 0$ уравнение примет вид $-2a\sin 1 + a^2 = 0$, откуда $a = 0$ либо $a = 2\sin 1$. Таким образом, существуют только два значения параметра, при каждом из которых число 0 является корнем данного уравнения. Остаётся проверить, будет ли $x = 0$ единственным корнем уравнения при найденных значениях параметра или нет.

Пусть $a = 0$. В этом случае данное уравнение примет вид $x^2 = 0$ и его единственным корнем является $x = 0$. Значит, $a = 0$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a = 2\sin 1$. В этом случае данное уравнение примет вид

$$x^2 - 4\sin 1 \cdot \sin(\cos x) + 4\sin^2 1 = 0,$$

откуда $x^2 + 4\sin^2 1 = 4\sin 1 \cdot \sin(\cos x)$. Получили уравнение, которое стандартными методами не решить. Попробуем применить свойства монотонных и ограниченных функций, заметив, что $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, а на отрезке $[-1; 1]$ функция $y = \sin t$ монотонно возрастает и принимает своё наибольшее значение при $t = 1$. Поэтому $\sin(\cos x) \leqslant \sin 1$, а $4\sin 1 \cdot \sin(\cos x) \leqslant 4\sin^2 1$. Но левая часть $x^2 + 4\sin^2 1$ уравнения $x^2 + 4\sin^2 1 = 4\sin 1 \cdot \sin(\cos x)$ не меньше $4\sin^2 1$. Значит, уравнение имеет корни в том и только том случае, если

$$\begin{cases} x^2 + 4\sin^2 1 = 4\sin^2 1, \\ 4\sin 1 \cdot \sin(\cos x) = 4\sin^2 1, \end{cases}$$

откуда $x = 0$. Следовательно, $a = 2\sin 1$ также удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 0; $2\sin 1$.

Уже этот пример показывает, что в подобных задачах получение допустимых значений параметра — далеко не самая сложная часть решения. Наиболее сложной является проверка достаточности, т. е. доказательство или опровержение того, что при найденном значении параметра уравнение действительно имеет единственный корень. В тех случаях, когда такое доказательство провести не удаётся, следует подумать о том, не будет ли иметь задача ещё какое-либо решение. Как правило, такое решение можно довольно просто найти подбором.

Пример 2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|y|}+5|y|+3x+4=5y^2+3a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Заметим, что если $(x_0;\, y_0)$ — решение системы, то и $(x_0;\, -y_0)$ — решение системы. Следовательно, для единственности решения необходимо, чтобы выполнялось условие $-y_0=y_0$, т. е. $y_0=0$. При $y=0$ система примет вид

$$\begin{cases} 7+3x=3a, \\ x^2=1. \end{cases}$$

Если $x=1$, то $a=\frac{10}{3}$; если $x=-1$, то $a=\frac{4}{3}$. Итак, допустимыми значениями параметра являются лишь значения $a=\frac{4}{3}$ и $a=\frac{10}{3}$.

Пусть $a=\frac{4}{3}$. Тогда данная система примет вид

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|y|}+5|y|=-3x+5y^2, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Понятно, что стандартные методы решения здесь опять не работают. Попытаемся оценить левую и правую части первого уравнения полученной системы с учётом её второго уравнения. Поскольку $|y|\geqslant 0$, имеем $2^{|y|}\geqslant 1$, а $3\cdot 2^{|y|}\geqslant 3$. Из второго уравнения полученной системы следует, что $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$. Тогда $|y|\geqslant y^2$, $3\geqslant -3x$. Таким образом, $3\cdot 2^{|y|}\geqslant 3\geqslant -3x$, $5|y|\geqslant 5y^2$. Следовательно, $3\cdot 2^{|y|}+5|y|\geqslant -3x+5y^2$, причём знак равенства возможен только в случае, когда $3\cdot 2^{|y|}=3=$ $=-3x$ и $5|y|=5y^2$. Получаем систему

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|y|}=3, \\ -3x=3, \\ 5|y|=5y^2, \\ x^2+y^2=1, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x=-1, \\ y=0. \end{cases}$$

Значит, при $a=\frac{4}{3}$ данная система имеет единственное решение $(-1;\, 0)$.

Пусть теперь $a=\frac{10}{3}$. Тогда данная система примет вид

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|y|}+5|y|+3x=5y^2+6, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Здесь провести оценку аналогично тому, как это было сделано для случая $a=\frac{4}{3}$, уже не получится. Попробуем доказать, что последняя система имеет более одного решения. Для этого достаточно эти решения указать, найдя их, например, подбором. Одно из решений получить довольно просто, для него, как известно, $y=0$. Из первого уравнения получим, что в этом случае $x=1$, но тогда и второе уравнение обращается в верное равенство, т. е. $(1;0)$ — решение системы. Остаётся заметить, что и пара чисел $(0;1)$ является её решением. Таким образом, при $a=\frac{10}{3}$ система имеет более одного решения.

Ответ: $\frac{4}{3}$.

Как видим, в рассмотренных задачах при доказательстве единственности решения существенным образом используется оценка множества значений функции и свойства ограниченных функций. А в следующем примере при доказательстве единственности могут возникнуть уже и логические трудности.

Пример 3. Найдите все пары $(a;b)$ действительных чисел a и b, для каждой из которых имеет единственный корень уравнение

$$2\sin^2(\pi x)+3\sin^2(\pi bx)=5\sin^2(\pi a).$$

Решение. Заметим, что если x_0 — корень равнения, то и $-x_0$ — его корень. Для единственности решения необходимо, чтобы выполнялось условие $x_0=-x_0$, т. е. $x_0=0$. Значит, если данное уравнение имеет единственный корень, то этим корнем может быть только число 0. Найдём все значения параметров a и b, при которых число 0 является корнем данного уравнения. При $x=0$ уравнение примет вид $0=5\sin^2(\pi a)$, откуда $\pi a=\pi k$, т. е. $a=k$, $k\in\mathbb{Z}$. Таким образом, число 0 является корнем данного уравнения, если a — произвольное целое число. В этом случае уравнение примет вид $2\sin^2(\pi x)+3\sin^2(\pi bx)=0$, и, поскольку каждое слагаемое в левой части неотрицательно, полученное равенство возможно в том и только том случае, если

$$\begin{cases}2\sin^2(\pi x)=0,\\3\sin^2(\pi bx)=0,\end{cases}\quad\text{откуда}\quad\begin{cases}\pi x=\pi n,\\\pi bx=\pi m,\end{cases}\quad\text{т. е.}\quad\begin{cases}x=n,\\bx=m,\end{cases}$$

$n\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{Z}$. Остаётся исследовать полученную систему на единственность решения. Если $n=0$, то $x=0$, и, следовательно, $m=0$. Значит, $x=0$ является решением системы

$$\begin{cases}x=n,\\bx=m\end{cases}$$

при любом значении параметра b. Для того чтобы данное уравнение имело единственный корень, последняя система должна иметь единственное решение $x=0$. Пусть теперь $n\neq 0$. В этом случае $x\neq 0$ и можно почленно разделить второе уравнение этой системы на первое. Получим $b=\frac{m}{n}$. Если это равенство выполняется, система будет иметь и другие решения, отличные от $x=0$. Значит, нужно найти такие значения параметра b, для которых равенство $b=\frac{m}{n}$, где $n\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{Z}$, $n\neq 0$, невозможно. Правая часть этого равенства является рациональным числом, записанным в общем виде. Поэтому если b — отличное от нуля рациональное число, то всегда можно подобрать такие целые m и n, для которых $b=\frac{m}{n}$. Если b — произвольное иррациональное число, равенство $b=\frac{m}{n}$ невозможно. Следовательно, b — произвольное иррациональное число.

Ответ: a — произвольное целое число, b — произвольное иррациональное число.

Пример 4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{(x+7)^4+(a-5)^4}=|x+a+2|+|x-a+12|$ имеет единственный корень.

Решение. Уравнение не меняется при замене x на $-x-14$. Поэтому если число x_0 является корнем уравнения, то и число $-x_0-14$ является его корнем. Для того чтобы уравнение имело единственный корень, необходимо выполнение условия $x_0=-x_0-14$, откуда $x_0=-7$. Таким образом, если данное уравнение имеет единственный корень, то этим корнем может быть только число -7. Подставив $x=-7$ в данное уравнение, найдём, при каких значениях параметра число -7 является корнем уравнения. При $x=-7$ уравнение примет вид $(a-5)^2=2|a-5|$. Поскольку $(a-5)^2=|a-5|^2$, получим уравнение $|a-5|^2=2|a-5|$, откуда $|a-5|=0$ или $|a-5|=2$. Корнями двух последних уравнений являются $a=5$, $a=3$, $a=7$. При этих значениях параметра число -7 является корнем уравнения. Но из этого ещё не следует, что -7 будет единственным корнем. Поэтому нужно рассмотреть данное уравнение при всех допустимых значениях параметра и установить в каждом случае, будет ли число -7 единственным корнем уравнения или нет. При $a=5$ уравнение примет вид $(x+7)^2=2|x+7|$. Аналогичное уравнение, только относительно переменной a, было решено ранее. Корнями этого уравнения являются числа -9, -7, -5. Значит, при $a=-7$ уравнение имеет больше одного корня. При $a=3$ и $a=7$ уравнение принимает вид $\sqrt{(x+7)^4+16}=|x+5|+|x+9|$. При $x\geqslant -5$

уравнение сводится к уравнению $\sqrt{(x+7)^4+16}=2(x+7)$, откуда $(x+7)^4-4(x+7)^2+16=0$. Последнее уравнение, квадратное относительно $(x+7)^2$, не имеет корней в силу отрицательности дискриминанта. При $-9\leqslant x<-5$ уравнение принимает вид $\sqrt{(x+7)^4+16}=4$ и имеет единственный корень $x=-7$. При $x<-9$ получаем уравнение $\sqrt{(x+7)^4+16}=-2(x+7)$, откуда $(x+7)^4-4(x+7)^2+16=0$. Последнее уравнение, как было показано выше, не имеет корней. Значит, при $a=3$ и $a=7$ данное уравнение имеет единственный корень.

Ответ: $\{3;7\}$.

Заметим, что решение предыдущего примера можно сделать более очевидным в смысле поиска подстановки, относительно которой уравнение инвариантно, выполнив замену $t=x+7$, $b=a-5$ и приведя уравнение к виду $\sqrt{t^4+b^4}=|t+b|+|t-b|$, инвариантному относительно замены t на $-t$.

Пример 5. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых существует единственная тройка $(x;y;z)$ действительных чисел x, y, z, удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{cases} x^7+(4-x)^7=2y^7, \\ (x-2)^2+(y-2)^2+z^2+a^2=9, \\ 6yz^2-(a-3)y^2z+6=2a. \end{cases}$$

Решение. Система не изменится при замене x на $4-x$. Поэтому если тройка чисел $(x;y;z)$ является решением системы, то и тройка чисел $(4-x;y;z)$ будет её решением. Следовательно, для единственности решения необходимо выполнение условия $x=4-x$, откуда $x=2$. При $x=2$ первое уравнение системы примет вид $2\cdot 2^7=2y^7$, откуда $y=2$. При $x=2$, $y=2$ система примет вид

$$\begin{cases} z^2+a^2=9, \\ 6z^2-2(a-3)z+3-a=0. \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы следует, что $a^2\leqslant 9$. Второе уравнение полученной системы, квадратное относительно переменной z, имеет хотя бы одно решение в том и только том случае, если его дискриминант D неотрицателен, откуда $a^2-9\geqslant 0$, или $a^2\geqslant 9$. Таким образом, последняя система имеет хотя бы одно решение, только если $a^2=9$, откуда $a=\pm 3$. Остаётся проверить, при каких из найденных допустимых значений параметра данная система будет

иметь единственное решение. При $a=\pm 3$ второе уравнение данной системы принимает вид $(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=0$, откуда $x=2$, $y=2$, $z=0$. Для найденных значений переменных первое уравнение данной системы выполнено, а третье уравнение принимает вид $6=2a$ и выполняется только при $a=3$.

Ответ: 3.

Иногда при доказательстве единственности приходится проявлять куда большую изобретательность и использовать несколько менее очевидные приёмы и методы.

Пример 6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых существует единственная тройка $(x; y; z)$ действительных чисел x, y, z, удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{cases} 3^x+3^{\frac{1}{x}}=(a^2-1)^2+y^2+6, \\ |y|z^4+2z^2-4a^2z+a+3=0. \end{cases}$$

Решение. Система не изменится при замене x на $\frac{1}{x}$. Поэтому если тройка чисел $(x; y; z)$ является решением системы, то и тройка чисел $\left(\frac{1}{x}; y; z\right)$ будет её решением. Следовательно, для единственности решения необходимо выполнение условия $x=\frac{1}{x}$, откуда $x^2=1$, т. е. $x=\pm 1$. При $x=-1$ первое уравнение системы примет вид $\frac{2}{3}=(a^2-1)^2+y^2+6$. Правая часть полученного равенства не меньше 6 (объясните почему). Значит, это равенство не выполняется ни при каких a и y, и тройка чисел $(-1; y; z)$ не может быть решением данной системы. Пусть теперь $x=1$. Первое уравнение системы примет вид $6=(a^2-1)^2+y^2+6$, откуда $(a^2-1)^2+y^2=0$. Полученное равенство возможно, только если

$$\begin{cases} (a^2-1)^2=0, \\ y^2=0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} a=\pm 1, \\ y=0. \end{cases}$$

Рассмотрим оба этих случая: $a=1$, $y=0$ и $a=-1$, $y=0$. При $a=1$, $y=0$ второе уравнение данной системы приводится к виду $z^2-2z+2=0$. Дискриминант полученного квадратного уравнения отрицателен, следовательно, корней оно не имеет. При $a=-1$, $y=0$ второе уравнение данной системы приводится к виду $z^2-2z+1=0$, откуда $(z-1)^2=0$ и $z=1$. Таким образом, единственным допустимым значением параметра является $a=-1$. Но это только первая часть решения. Нужно ещё проверить, будет ли данная система при $a=-1$ иметь единственное решение или решений окажется больше одного.

Пусть $a=-1$. Данная система в этом случае примет вид

$$\begin{cases} 3^x+3^{\frac{1}{x}}=y^2+6, \\ |y|z^4+2z^2-4z+2=0. \end{cases}$$

Второе уравнение полученной системы можно, выделив полный квадрат, записать так: $|y|z^4+2(z-1)^2=0$. Каждое из слагаемых в левой части последнего равенства неотрицательно, поэтому это равенство выполняется в том и только том случае, если каждое слагаемое равно нулю, т. е. если

$$\begin{cases} |y|z^4=0, \\ 2(z-1)^2=0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} y=0, \\ z=1. \end{cases}$$

Осталось рассмотреть первое уравнение системы

$$\begin{cases} 3^x+3^{\frac{1}{x}}=y^2+6, \\ |y|z^4+2z^2-4z+2=0 \end{cases}$$

при условии $y=0$, т. е. уравнение $3^x+3^{\frac{1}{x}}=6$. Если $x<0$, каждое из слагаемых левой части этого уравнения заведомо меньше 1, поэтому отрицательных корней это уравнение не имеет. Пусть $x>0$. Оценим левую часть уравнения. Воспользуемся неравенством $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ (оно справедливо для всех неотрицательных чисел a и b и обращается в равенство при $a=b$; см. предыдущий параграф). Получим $3^x+3^{\frac{1}{x}}\geqslant 2\sqrt{3^x\cdot 3^{\frac{1}{x}}}$. Но $3^x\cdot 3^{\frac{1}{x}}=3^{x+\frac{1}{x}}$, а $x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}$, т. е. $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$ (в силу того же неравенства). Таким образом, $3^{x+\frac{1}{x}}\geqslant 3^2$, т. е. $3^{x+\frac{1}{x}}\geqslant 9$. Значит, $3^x+3^{\frac{1}{x}}\geqslant 2\sqrt{9}$, откуда $3^x+3^{\frac{1}{x}}\geqslant 6$ при любом $x>0$. Следовательно, уравнение $3^x+3^{\frac{1}{x}}=6$ будет иметь решения только в том случае, когда каждое из двух неравенств, использованных для оценки левой части этого уравнения, обращается в равенство, т. е. в случае, когда $x=\frac{1}{x}$ и $3^x=3^{\frac{1}{x}}$. Единственным положительным корнем каждого из этих уравнений является $x=1$. Итак, при $a=-1$ данная система имеет единственное решение $(1;0;1)$.

Ответ: -1.

Пример 7. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых существует единственная тройка $(x;y;z)$ действительных чи-

сел x, y, z, удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{cases} z\cdot\cos(x-y)+(2+xy)\cdot\sin(x+y)-z=0,\\ x^2+(y-1)^2+z^2=a+2x,\\ (x+y+a\cdot\sin^2 z)((1-a)\ln(1-xy)+1)=0. \end{cases}$$

Решение. На первый взгляд эта система не обладает свойством инвариантности. Однако, приведя её второе уравнение к виду

$$(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=a+1,$$

замечаем, что если тройка чисел $(x_0; y_0; z_0)$ является решением системы, то и тройка чисел $(y_0; x_0; z_0)$ является её решением. Следовательно, для единственности решения необходимо, чтобы выполнялось равенство $x_0=y_0$. При $x=y$ система примет вид

$$\begin{cases} (x^2+2)\sin 2x=0,\\ 2(x-1)^2+z^2=a+1,\\ (2x+a\cdot\sin^2 z)((1-a)\ln(1-x^2)+1)=0. \end{cases}$$

Теперь заметим, что если пара чисел $(x_0; z_0)$ является решением последней системы (а следовательно, тройка чисел $(x_0; x_0; z_0)$ — решением данной системы), то и пара чисел $(x_0; -z_0)$ является её решением (и, соответственно, тройка чисел $(x_0; x_0; -z_0)$ — решением данной системы). Значит, для единственности решения необходимо, чтобы выполнялось равенство $z_0=-z_0$, т. е. $z_0=0$. При $z=0$ система ещё больше упростится и примет вид

$$\begin{cases} (x^2+2)\sin 2x=0,\\ 2(x-1)^2=a+1,\\ 2x((1-a)\ln(1-x^2)+1)=0. \end{cases}$$

Третье уравнение полученной системы распадается на два: $x=0$ и $(1-a)\ln(1-x^2)=-1$. Рассмотрим оба этих случая. При $x=0$ первое уравнение полученной системы выполняется, а второе принимает вид $2=a+1$, откуда $a=1$. Во втором случае из первого уравнения системы находим $x=\dfrac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$, а из последнего уравнения следует, что $1-x^2\geqslant 0$, откуда $|x|\leqslant 1$. Но из чисел $x=\dfrac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$, только $x=0$ удовлетворяет условию $|x|\leqslant 1$. При $x=0$ уравнение $(1-a)\ln(1-x^2)=-1$ принимает вид $0=-1$, что невозможно. Итак, только $a=1$ является допустимым значением параметра. Проверим, будет ли в этом случае

решение данной системы единственным или нет. При $a=1$ она примет вид

$$\begin{cases} z\cdot\cos(x-y)+(2+xy)\cdot\sin(x+y)-z=0,\\ (x-1)^2+(y-1)^2+z^2=2,\\ x+y+\sin^2 z=0,\\ xy\leqslant 1. \end{cases}$$

Из третьего уравнения этой системы получаем, что $x+y=-\sin^2 z$, откуда $x+y\leqslant 0$. Из второго уравнения после раскрытия скобок и несложных преобразований находим, что $2(x+y)=x^2+y^2+z^2$, откуда $x+y\geqslant 0$. Таким образом, $x+y\leqslant 0$ и $x+y\geqslant 0$, что возможно, только если $x+y=0$. Но тогда второе уравнение $2(x+y)=x^2+y^2+z^2$ системы принимает вид $x^2+y^2+z^2=0$, откуда $x=0$, $y=0$, $z=0$. Легко проверить, что остальные уравнения и неравенство системы в этом случае выполняются. Итак, при $a=1$ система имеет единственное решение $(0;0;0)$.

Ответ: 1.

Вторую группу задач, при решении которых используется инвариантность относительно какой-либо подстановки, составляют, как уже отмечалось, так называемые функциональные уравнения, в которых наряду с конкретным, вполне определённым алгебраическим выражением $p(x)$ от переменной x, есть и пара неизвестных алгебраических выражений от этой переменной. Пару алгебраических выражений будем называть инвариантной относительно некоторой замены переменной (подстановки), если такая замена (подстановка) не приводит к изменению этой пары. Наиболее часто встречающимися примерами таких пар являются $f(x)$ и $f(c-x)$ (пара не меняется при замене x на $c-x$), $f(x)$ и $f\left(\frac{c}{x}\right)$ (пара не меняется при замене x на $\frac{c}{x}$). При этом алгебраическое выражение, составленное из такой пары, само может не быть инвариантным относительно этой замены (подстановки). Поэтому функциональные уравнения, строго говоря, нельзя назвать инвариантными, хотя идея инвариантности является ключевой и при их решении. Типичным примером такого уравнения является следующий: $rf(x)+qf(c-x)=p(x)$ (здесь r, q, c — отличные от нуля действительные числа; $|r|\neq|q|$). Для того чтобы решить такую задачу, нужно сначала найти $f(x)$ (а иногда только это и требуется условием). Поскольку пара алгебраических выражений $f(x)$ и $f(c-x)$ инвариантна относительно замены x на $c-x$, это позволяет, выполнив такую замену, получить ещё одно уравнение $rf(c-x)+qf(x)=p(c-x)$. Рассматривая полученное и данное

уравнение как систему уравнений относительно $f(x)$ и $f(c-x)$, можно из этой системы достаточно просто найти $f(x)$. Для этого нужно умножить обе части уравнения $rf(x)+qf(c-x)=p(x)$ на r, обе части уравнения $rf(c-x)+qf(x)=p(c-x)$ — на q и получить почленную разность уравнений: $r^2f(x)-q^2f(x)=rp(x)-qp(c-x)$, откуда $f(x)=\dfrac{rp(x)-qp(c-x)}{r^2-q^2}$.

Пример 8. Найдите корни уравнения $f(x)=31$, если $x\neq 0$ и

$$2f(x)+f\left(\frac{4}{x}\right)=6x.$$

Решение. Заметим, что пара алгебраических выражений $f(x)$ и $f\left(\frac{4}{x}\right)$ инвариантна относительно замены x на $\frac{4}{x}$. Заменив x на $\frac{4}{x}$ в равенстве $2f(x)+f\left(\frac{4}{x}\right)=6x$, получим $2f\left(\frac{4}{x}\right)+f(x)=\frac{24}{x}$. Умножив обе части данного равенства $2f(x)+f\left(\frac{4}{x}\right)=6x$ на число 2 и вычтя из полученного равенства почленно равенство $2f\left(\frac{4}{x}\right)+f(x)=\frac{24}{x}$, находим $3f(x)=12x-\frac{24}{x}$, откуда $f(x)=4x-\frac{8}{x}$. Теперь осталось решить уравнение $4x-\frac{8}{x}=31$, откуда $4x^2-31x-8=0$. Корнями последнего уравнения являются числа $x=-0{,}25$ и $x=8$.

Ответ: $-0{,}25$; 8.

Пример 9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $f(x)=a$ имеет хотя бы один корень, если

$$2f(x)+3f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos^2 x+8\sin x+12\cos x+2 \qquad (1)$$

для любого действительного значения x.

Решение. Заметим, что пара $f(x)$ и $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ инвариантна относительно замены x на $\frac{\pi}{2}-x$. Заменим x на $\frac{\pi}{2}-x$ в равенстве (1). Получим

$$2f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+3f(x)=\sin^2 x+8\cos x+12\sin x+2. \qquad (2)$$

Умножим на 3 обе части равенства (2), а обе части равенства (1) умножим на 2 и рассмотрим их почленную разность. После упрощений получим $5f(x)=5\sin^2 x+20\sin x$, откуда $f(x)=\sin^2 x+4\sin x$. Составим уравнение по условию задачи: $\sin^2 x+4\sin x=a$, или

$$\sin^2 x+4\sin x-a=0.$$

Пусть $t=\sin x$. Тогда $t^2+4t-a=0$ и $t\in[-1;1]$. Теперь задачу можно переформулировать так: найти все значения параметра a, при каж-

дом из которых уравнение $t^2+4t-a=0$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий отрезку $[-1;1]$. Пусть $f(t)=t^2+4t-a$. Обозначим через t_1 и t_2 корни квадратного трёхчлена $f(t)$, считая, что $t_1 \leqslant t_2$, а через t_0 — абсциссу вершины параболы, являющейся графиком функции $y=f(t)$. Заметим, что ветви параболы направлены вверх и что $t_0=-2$. Следовательно, $t_1 \leqslant t_0 < -1$, и только больший корень трёхчлена $f(t)$ может принадлежать отрезку $[-1;1]$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполненялись условия

$$\begin{cases} f(-1) \leqslant 0, \\ f(1) \geqslant 0, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} 1-4-a \leqslant 0, \\ 1+4-a \geqslant 0, \end{cases} \text{ откуда } -3 \leqslant a \leqslant 5.$$

Ответ: $[-3;5]$.

Пример 10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $h(x)=a-a^2$ имеет хотя бы один корень, если

$$h(x)+3h(-x)=4a+16|x|+16\sqrt{x^2+16}-6|x+4a|-2|x-4a|+2x \quad (1)$$

для любого действительного значения x.

Решение. Заметим, что пара $h(x)$ и $h(-x)$ инвариантна относительно замены x на $-x$. Заменив x на $-x$ и воспользовавшись свойством модуля ($|-x|=|x|$, а значит, $|-x+4a|=|x-4a|$, $|-x-4a|=|x+4a|$), получим

$$h(-x)+3h(x)=4a+16|x|+16\sqrt{x^2+16}-6|x-4a|-2|x+4a|-2x. \quad (2)$$

Умножим на 3 обе части равенства (2) и вычтем из результата почленно равенство (1). После приведения подобных слагаемых получим $8h(x)=8a+32|x|+32\sqrt{x^2+16}-16|x-4a|-8x$, откуда

$$h(x)=a+4|x|+4\sqrt{x^2+16}-2|x-4a|-x.$$

Составим уравнение по условию задачи:

$$a+4|x|+4\sqrt{x^2+16}-2|x-4a|-x=a-a^2,$$

и, значит, $a^2+4\sqrt{x^2+16}=x+2|x-4a|-4|x|$.

Теперь задача обретает более привычные черты: требуется найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2+4\sqrt{x^2+16}=x+2|x-4a|-4|x|$ имеет хотя бы один корень. Рассмотрим функции $f(x)=a^2+4\sqrt{x^2+16}$ и $g(x)=x+2|x-4a|-4|x|$, определённые и непрерывные на всей числовой прямой. График функции $y=g(x)$ представляет собой ломаную, состоящую из от-

резков прямых и лучей. При $x \geqslant 0$ каждое звено ломаной является частью прямой вида $y = kb + l$, где $k < 0$ (поскольку вне зависимости от «раскрытия» другого модуля коэффициент при x будет отрицательным). Следовательно, при $x \geqslant 0$ функция $y = g(x)$ убывает. Совершенно аналогично можно показать, что при $x \leqslant 0$ функция $y = g(x)$ возрастает. Поэтому в точке $x = 0$ эта функция достигает своего наибольшего значения, т. е. $\max g(x) = g(0) = 8|a|$. Поскольку $\min f(x) = f(0) = a^2 + 16$, уравнение имеет хотя бы один корень в том и только том случае, если $\min f(x) \leqslant \max g(x)$, т. е. если $a^2 + 16 \leqslant 8|a|$, откуда $(|a| - 4)^2 \leqslant 0$ и $a = \pm 4$.

Ответ: $\{-4; 4\}$.

В заключение заметим, что некоторые — обычно самые простые — задачи, связанные с инвариантностью, иногда можно решить и более традиционными способами, например, выполнив замену переменной и сведя уравнение к квадратному или используя графические интерпретации. Несколько таких задач приведено в упражнениях. Тем не менее, постарайтесь решить эти задачи (упражнения 1—3), используя именно инвариантность.

Упражнения к § 3.3

1. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение $3^x + 3^{2-x} = a^2 - 6a + 11$.

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение $2^x + 2^{4-x} = a^2 - 3a + 10$.

2. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение $x^3 + \left(\frac{4}{x}\right)^3 + 16 = 2a^2$.

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение $x^3 + \left(\frac{9}{x}\right)^3 + 54 = 3a^2$.

3. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение

$$x^2 + (a-3)^2 = |x - a + 3| + |x + a - 3|.$$

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение

$$x^2 + (a-4)^2 = |x - a + 4| + |x + a - 4|.$$

4. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение $x^2 - 4a\sin(\cos x) + a^2 = 0$.

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение $2x^2 - a\,\mathrm{tg}(\cos x) + a^2 = 0$.

5. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение $a^2+a\sqrt{3}+6+\sin^2 ax=6\cos x$.

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение $a^2+a\sqrt{2}+4+\sin^2 ax=4\cos x$.

6. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение

$$2^{-x^2}\cdot 4^x+\sin\frac{\pi x}{4}+\cos\frac{\pi x}{4}=a^3-3a^2+2a+2+\sqrt{2}.$$

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение

$$9^{1-x}\cdot 3^{x^2}+a^3-5a^2+4a+\sqrt{2}=\sin\frac{\pi x}{4}+\cos\frac{\pi x}{4}+3.$$

7. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение $2+3\sin^2 ax=2\cos x$.

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение $3+2|\sin ax|=3\cos 2x$.

8. а) Найдите все пары $(a;b)$ действительных чисел a и b, для каждой из которых имеет единственный корень уравнение

$$\sin^2(\pi x)+\sin^2(\pi ax)=\sin^2(\pi b).$$

б) Найдите все пары $(a;b)$ действительных чисел a и b, для каждой из которых имеет единственный корень уравнение

$$\cos(2\pi x)+\cos(2\pi bx)=|a|.$$

9. а) Найдите все пары $(a;b)$ действительных чисел a и b, для каждой из которых имеет единственный корень уравнение

$$4\cos(2\pi x)+\cos(2b\pi x)=a.$$

б) Найдите все пары $(a;b)$ действительных чисел a и b, для каждой из которых имеет единственный корень уравнение

$$\cos(2\pi x)+3\cos(2b\pi x)=a.$$

10. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} a(x^4+1)=y-|x|+2,\\ x^2+y^2=4. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} a(x^4+1)=y-|x|+3,\\ x^2+y^2=9. \end{cases}$$

11. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} ax^2+a+2|\sin x| = y+1, \\ \operatorname{tg}^2 x + y^2 = 1. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} ax^2+a+3|\sin x| = y+2, \\ \sin^2 x + y^2 = 4. \end{cases}$$

12. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} 2^{|x|}+|x|+4 = y+x^2+a, \\ x^2+y^2 = 1. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} a(|x|+1) = y+\cos x, \\ \sin^2 x + y^2 = 1. \end{cases}$$

13. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} 5\cdot 2^{|x|}+3|x|-2 = 5y+3x^2-5a, \\ x^2+y^2 = 1. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+2|x|-1 = 3y+2x^2-3a, \\ x^2+y^2 = 1. \end{cases}$$

14. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2-2(a+1)x+a^2-12 = 2y, \\ y^2-2(a+1)y+a^2-12 = 2x. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2-(2a+1)x+a^2-3 = y, \\ y^2-(2a+1)y+a^2-3 = x. \end{cases}$$

15. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственное решение система

$$\begin{cases} (3-2\sqrt{2})^y+(3+2\sqrt{2})^y-3a=x^2+6x+5, \\ y^2-(a^2-5a+6)x^2=0, \\ -6\leqslant x\leqslant 0. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственное решение система

$$\begin{cases} (2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x-5=a+2y+y^2, \\ x^2+(2-a-a^2)y^2=0, \\ -2\leqslant y\leqslant 0. \end{cases}$$

16. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых существует единственная тройка $(x;y;z)$ действительных чисел x, y, z, удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{cases} x^5+(6-x)^5=2y^5, \\ (x-3)^2+(y-3)^2+z^2+a^2=4, \\ 12yz^2-2(a-2)y^2z+18=9a. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых существует единственная тройка $(x;y;z)$ действительных чисел x, y, z, удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{cases} x^{11}+(8-x)^{11}=2y^{11}, \\ (x-4)^2+(y-4)^2+z^2+a^2=25, \\ 20yz^2-(a-5)y^2z+40=8a. \end{cases}$$

17. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых существует единственная тройка $(x;y;z)$ действительных чисел x, y, z, удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{cases} 2^x+2^{\frac{4}{x}}=(a^2-4)^2+y^2+8, \\ |y|z^4+2z^2-a^2z+a+4=0. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых существует единственная тройка $(x;y;z)$ действительных чисел x, y, z, удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{cases} 3^x+3^{\frac{1}{x}}=(a^2-9)^2+y^2+6, \\ y^2z^4+z^2-2a^2z+a+84=0. \end{cases}$$

18. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (x+2)^2+2(a+2y)+y^2+z^2=0, \\ (2+xyz^2(a+2)\sqrt{1-2xy})(a\sin^2 z+x+y)=0, \\ (xy+1)\operatorname{tg}(x+y)+\cos(x-y)=1. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (xy-2)\cdot\sin(y-x)+z=z\cdot\cos(x+y), \\ (x-1)^2+y^2+2y+z^2+a=0, \\ (a\cdot\sin^2 z+y-x)((a+1)\lg(xy+1)+1)=0. \end{cases}$$

19. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых существует единственная тройка $(x;y;z)$ действительных чисел x, y, z, удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=4z, \\ x+y+2z=2a. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых существует единственная тройка $(x;y;z)$ действительных чисел x, y, z, удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=9z, \\ x+y=3a+3z. \end{cases}$$

20. а) Найдите все пары $(a;b)$ действительных чисел a и b, для каждой из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} xyz+z=a, \\ xyz^2+z=b, \\ x^2+y^2+z^2=4. \end{cases}$$

б) Найдите все пары $(a;b)$ действительных чисел a и b, для каждой из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} 4xyz+x=a, \\ 8x^2yz+b=x, \\ x^2+y^2+z^2=1. \end{cases}$$

21. а) Найдите корни уравнения $f(x)=6$, если

$$3f(x)-2f(4-x)=2x^2+27x-56$$

для любого действительного значения x.

б) Найдите корни уравнения $f(x)=14$, если

$$4f(2-x)-f(x)=6x^2-47x+56$$

для любого действительного значения x.

22. а) Найдите корни уравнения $f(x)=6$, если $x\neq 0$ и

$$3f\left(\frac{3}{x}\right)-f(x)=8x.$$

б) Найдите корни уравнения $f(x)=-8$, если $x\neq 0$ и

$$4f\left(\frac{4}{x}\right)-f(x)=15x.$$

23. а) Найдите корни уравнения $f(x)=10$, если

$$2f(x)+f(-x)=2^{2x+1}+3\cdot 2^{x+1}+(0{,}25)^x+3\cdot(0{,}5)^x$$

для любого действительного значения x.

б) Найдите корни уравнения $f(x)=15$, если

$$f(x)+5f(-x)=25^x-2\cdot 5^x+(0{,}04)^{x-0{,}5}-2\cdot(0{,}2)^{x-1}$$

для любого действительного значения x.

24. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $f(x)=a$ имеет хотя бы один корень, если

$$2f(x)+f\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=3\cos^2 x+7\sin x-14\cos x+3$$

для любого действительного значения x.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $f(x)=a$ имеет хотя бы один корень, если

$$f(x)+2f\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=4\cos^2 x+9\cos x-18\sin x+4$$

для любого действительного значения x.

25. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $f(x)\leqslant 0$ справедливо для любого действительного значения x, если

$$2f(x)-f(-x)=21x+11|x+a-5|-19|x-a+5|-8a+28.$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $f(x)\geqslant 0$ справедливо для любого действительного значения x, если

$$2f(x)+f(-x)=3x+12|x+a-4|+21|x-a+4|-12a+30.$$

Глава 4. Графические интерпретации

Важной частью математической культуры, необходимой для овладения методами решения нестандартных уравнений и неравенств (в том числе и задач с параметром), является умение строить графики элементарных функций и использовать графические интерпретации уравнений и неравенств. Задачи, в решении которых графические интерпретации играют ключевую роль, можно с определённой степенью условности разделить на три основные группы. К первой отнесём задачи, в которых графические интерпретации позволяют наглядно представить решение и записать ответ, а поиск ответа с помощью только аналитических средств приводит к ощутимым логическим трудностям. В таких задачах степень параметра обычно равна 1, а по типу эти задачи представляют собой системы неравенств либо сводятся к таким системам. Последнее позволяет изобразить множество всех точек плоскости Oxa (здесь a — параметр), удовлетворяющих условию задачи, в виде некоторой фигуры (иногда говорят «области», а сам метод решения называют «методом областей»). После этого, рассматривая различные положения горизонтальной прямой $a = c$ (такую прямую часто называют «считывающей»; здесь c — число) относительно изображённой области, можно довольно просто найти ответ на вопрос задачи. Ко второй группе отнесём задачи, допускающие прямую графическую интерпретацию, т. е. предполагающие построение (в том числе с помощью известных элементарных преобразований) и, возможно, исследование графика функции. К третьей группе отнесём задачи, решение которых основывается на исследовании взаимного расположения известных фигур — прямых, отрезков, углов, окружностей — после соответствующей (графической или геометрической) интерпретации данных уравнений или неравенств (т. е. здесь, в отличие от задач предыдущих групп, рассматриваются не только графики функций, но и геометрические фигуры, заданные уравнениями или неравенствами).

§ 4.1. Метод областей

Начнём с задач первой группы, т. е. с задач, решаемых с помощью «метода областей», но сначала вспомним, какими отношениями связаны точки графика данной функции и все другие точки координатной плоскости.

Если дана функция $y = f(x)$, то все точки $(x; f(x))$ координатной плоскости Oxy и только они принадлежат графику этой функции. Очевидно, что все точки, ординаты которых больше чем $f(x)$, т. е. точки $(x; y)$, ординаты которых удовлетворяют неравенству $y > f(x)$, находятся над графиком функции; точки $(x; y)$, ординаты которых удовлетворяют неравенству $y < f(x)$, находятся под графиком функции (см. рис. 1).

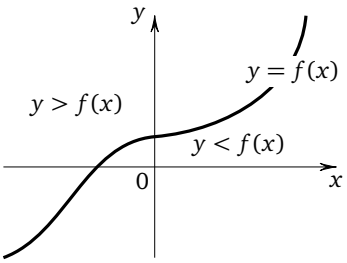


Рис. 1

Рассуждая аналогично, можно легко изобразить на координатной плоскости все точки, удовлетворяющие, например, неравенству $a \leqslant y \leqslant b$ при условии $a < b$: это горизонтальная полоса, ограниченная прямыми $y = a$ и $y = b$ (см. рис. 2).

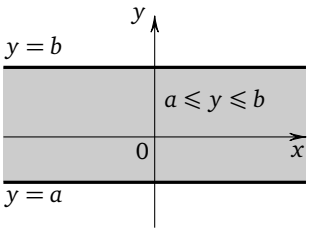


Рис. 2

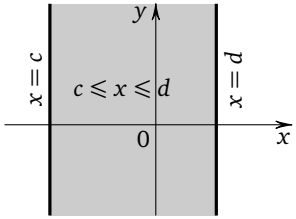


Рис. 3

Множеством всех точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству $c \leqslant x \leqslant d$ при условии $c < d$, является вертикальная полоса, ограниченная прямыми $x = c$ и $x = d$ (см. рис. 3).

Найдём теперь множество всех точек $(x; y)$ плоскости Oxy, координаты каждой из которых удовлетворяют неравенству

$$(2y - x - 4)(y + x - 4) \leqslant 0.$$

Произведение двух чисел неположительно, если эти числа имеют разные знаки или хотя бы одно из них равно нулю. Поэтому данное неравенство выполняется только в случае, если

$$\begin{cases} 2y-x-4\leqslant 0, \\ y+x-4\geqslant 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2y-x-4\geqslant 0, \\ y+x-4\leqslant 0. \end{cases}$$

Первая система легко приводится к виду

$$\begin{cases} y\leqslant 0{,}5x+2 \\ y\geqslant 4-x, \end{cases}$$

вторая — к виду

$$\begin{cases} y\geqslant 0{,}5x+2 \\ y\leqslant 4-x. \end{cases}$$

Это означает, что данному неравенству удовлетворяют все точки координатной плоскости, которые расположены не выше одной из прямых $y=0{,}5x+2$ или $y=4-x$ и не ниже другой из этих прямых. Таким образом, искомое множество ограничено парой вертикальных углов, образованных этими прямыми (на рис. 4 эти углы заштрихованы). Координаты любой точки, принадлежащей части плоскости, ограниченной другой парой вертикальных углов, образованных этими прямыми (на рис. 4 эти углы не заштрихованы), удовлетворяют, как легко понять, неравенству $(2y-x-4)(y+x-4)\geqslant 0$.

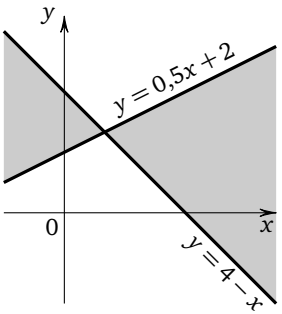


Рис. 4

Вообще, множеством всех точек $(x;y)$ плоскости Oxy, удовлетворяющих неравенству $f(x)g(x)<0$, являются все те точки $(x;y)$ этой плоскости, для которых числа $f(x)$ и $g(x)$ имеют разные знаки, т. е. все те точки, которые лежат выше одного из графиков функций $y=f(x)$ или $y=g(x)$, но ниже другого; множеством всех точек $(x;y)$

плоскости Oxy, удовлетворяющих неравенству $f(x)g(x) > 0$, являются все те точки этой плоскости, для которых числа $f(x)$ и $g(x)$ одного знака, т. е. все те точки, которые лежат выше каждого из графиков $y = f(x)$ и $y = g(x)$ или ниже каждого из них (см. рис. 5).

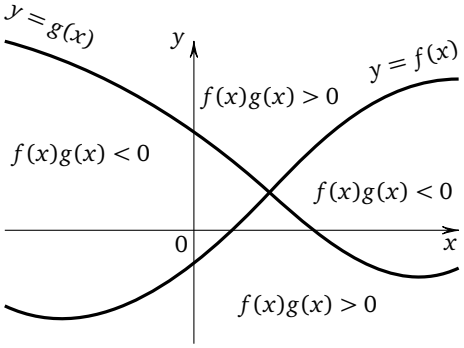


Рис. 5

Далее, если даны графики функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$, можно без труда изобразить множество всех таких точек $(x; y)$ плоскости Oxy, что, например,

$$\begin{cases} y \leqslant f(x), \\ y \geqslant g(x), \\ y \geqslant h(x) \end{cases}$$ (см. рис. 6).

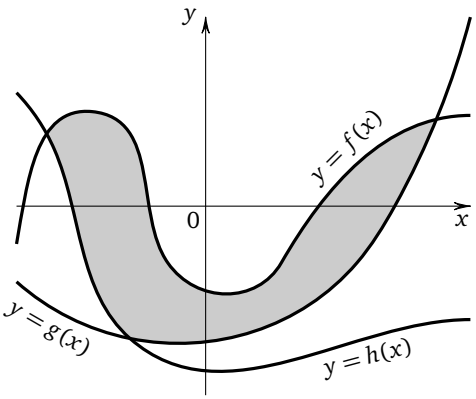


Рис. 6

Сформулируем для функций, графики которых изображены на рис. 6, новую задачу: найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} a \leqslant f(x), \\ a \geqslant g(x), \\ a \geqslant h(x) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и указать решения системы для каждого из найденных значений параметра a. Такая формулировка моделирует в достаточно общем виде почти любую задачу на «метод областей». Для ответа на поставленные вопросы удобно использовать плоскость Oxa, изобразив на ней множество всех точек, координаты которых удовлетворяют данной системе, и так называемую «считывающую прямую» (кавычки в дальнейшем будем опускать), т. е. прямую $a = c$ (здесь c — число), параллельную оси абсцисс. С помощью параллельного переноса этой прямой довольно просто определить, какие значения может принимать параметр a, и выписать решения системы для каждого из этих значений. На рис. 7 изображено одно из возможных положений считывающей прямой. Для

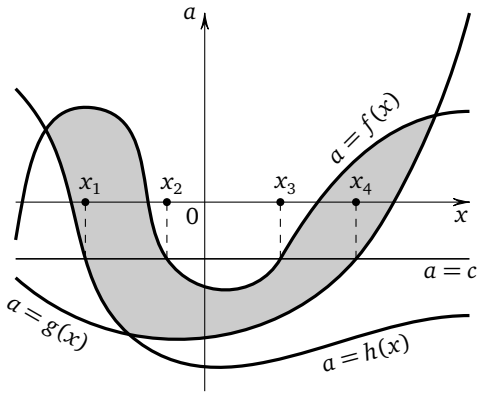


Рис. 7

соответствующего значения параметра решением системы является множество $[x_1; x_2] \cup [x_3; x_4]$, где число x_1 находится как корень уравнения $h(x) = a$, числа x_2 и x_3 — как корни уравнения $f(x) = a$, число x_4 — как корень уравнения $g(x) = a$.

Перейдём к конкретным примерам.

Пример 1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\arccos(3ax+1) \leqslant \arccos(2x+3a-1)$ имеет хотя бы одно решение, и укажите решения неравенства для каждого значения a.

Решение. Неравенство $\arccos l \leqslant \arccos q$ выполняется в том и только том случае, если

$$\begin{cases} l \geqslant q, \\ q \geqslant -1, \\ l \leqslant 1 \end{cases}$$

(первое из неравенств системы следует из того, что функция $y = \arccos t$ монотонно убывает на области определения, два последних — из того, что эта функция определена при $t \in [-1;\,1]$, и первого неравенства системы). Таким образом,

$$\begin{cases} 3ax+1 \geqslant 2x+3a-1, \\ 2x+3a-1 \geqslant -1, \\ 3ax+1 \leqslant 1, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} (3a-2)x \geqslant 3a-2, \\ x \geqslant -\frac{3}{2}a, \\ ax \leqslant 0. \end{cases}$$

Изобразим множество всех точек $(x;\,a)$ плоскости Oxa, удовлетворяющих последней системе. Для этого заметим, что при $a > \frac{2}{3}$ первое неравенство системы приводится к виду $x \geqslant 1$; при $a = \frac{2}{3}$ первое неравенство системы приводится к виду $0 \cdot x \geqslant 0$ (и его решением является любое действительное число); при $a < \frac{2}{3}$ первое неравенство системы приводится к виду $x \leqslant 1$. Искомое множество показано штриховкой на рис. 8. Для записи ответа удобно рассматривать различные

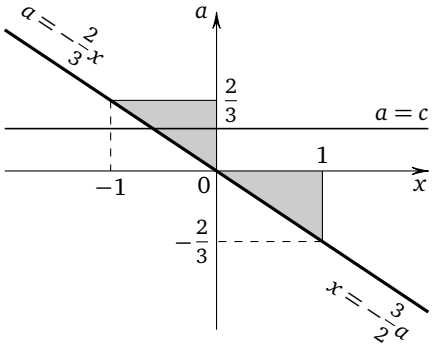


Рис. 8

положения считывающей прямой $a=c$ (c — действительное число), параллельной оси абсцисс. При $a<-\frac{2}{3}$ или $a>\frac{2}{3}$ эта прямая не имеет с заштрихованной областью ни одной общей точки. При $a=-\frac{2}{3}$ эта прямая имеет с заштрихованной областью единственную общую точку, лежащую на прямой $a=-\frac{2}{3}x$ (при этом $x=1$). При $a\in\left(-\frac{2}{3};0\right]$ эта прямая пересекает заштрихованную область по отрезку, левый конец которого лежит на прямой $a=-\frac{2}{3}x$ (и, значит, $x=-\frac{3}{2}a$), а правый — на прямой $x=1$. При $a\in\left(0;\frac{2}{3}\right]$ эта прямая пересекает заштрихованную область по отрезку, левый конец которого лежит на прямой $a=-\frac{2}{3}x$ (и, значит, $x=-\frac{3}{2}a$), а правый — на оси ординат (и, значит, $x=0$).

Ответ: решений нет при $a\in\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$; $\{1\}$ при $a=-\frac{2}{3}$; $\left[-\frac{3}{2}a;1\right]$ при $a\in\left(-\frac{2}{3};0\right]$; $\left[-\frac{3}{2}a;0\right]$ при $a\in\left(0;\frac{2}{3}\right]$.

Заметим, что в подобных задачах для упрощения записи решений удобно выражать переменную через параметр и указывать найденное выражение на соответствующем графике, как это сделано в нижней части рис. 8.

Пример 2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} a+3x\leqslant 12,\\ a+4x\geqslant x^2,\\ a\leqslant x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого значения a.

Решение. Приведём данную систему к виду

$$\begin{cases} a\leqslant 12-3x,\\ a\geqslant x^2-4x,\\ a\leqslant x \end{cases}$$

и построим в системе координат Oxa графики функций $a=12-3x$ (прямая, проходящая через точки $(4;0)$ и $(3;3)$), $a=x^2-4x$ (парабола, ветви которой направлены вверх, с вершиной в точке $(2;-4)$, пересекающая ось абсцисс в точках $(0;0)$ и $(4;0)$), $a=x$ (прямая,

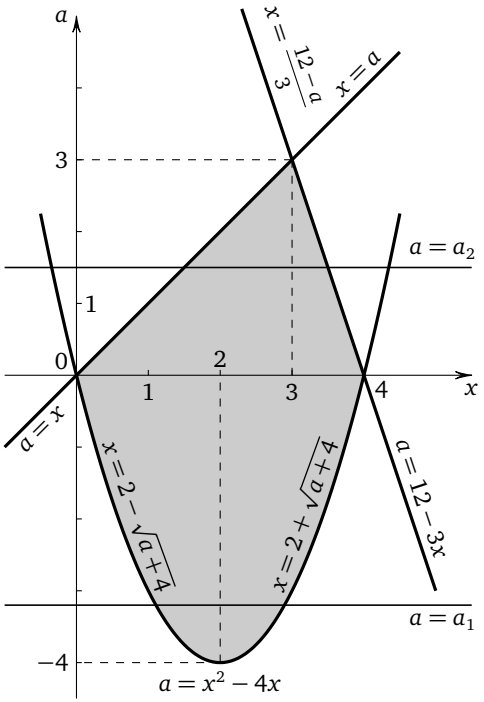


Рис. 9

проходящая через точки $(0;0)$ и $(3;3)$). Множество всех точек $(x;a)$ плоскости Oxa, удовлетворяющих данной системе, покажем серым цветом (см. рис. 9). Для записи ответа будем рассматривать различные положения считывающей прямой (два таких положения: $a=a_1$ и $a=a_2$ показаны на рис. 9). При $a<-4$ или $a>3$ считывающая прямая не имеет с заштрихованной областью ни одной общей точки. При $a=-4$ считывающая прямая имеет с заштрихованной областью единственную общую точку — вершину параболы (т. е. решением данной системы является $x=2$), при $a=3$ эта прямая имеет с заштрихованной областью также единственную общую точку — точку пересечения прямых $a=12-3x$ и $a=x$ (т. е. решением данной системы является $x=3$). При $a\in(-4;0]$ считывающая прямая пересекает заштрихованную область по отрезку, концы которого лежат на параболе $a=x^2-4x$. В этом случае левый конец отрезка является меньшим корнем уравнения $x^2-4x-a=0$ (этот корень

равен $2-\sqrt{a+4}$), а правый — большим корнем этого уравнения (он равен $2+\sqrt{a+4}$). При $a\in(0;3]$ считывающая прямая пересекает заштрихованную область по отрезку, левый конец которого лежит на прямой $a=x$ (и, значит, $x=a$), а правый — на прямой $a=12-3x$ (и, значит, $x=\frac{12-a}{3}$).

Ответ: решений нет при $a\in(-\infty;-4)\cup(3;+\infty)$; $x=2$ при $a=-4$; $x=3$ при $a=3$; $x\in[2-\sqrt{a+4};2+\sqrt{a+4}]$ при $a\in(-4;0]$; $x\in\left[a;\frac{12-a}{3}\right]$ при $a\in(0;3]$.

Пример 3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых хотя бы одно решение неравенства $x^2+a+|x-a-1|+1\leqslant 3x$ принадлежит отрезку $[0;1]$.

Решение. Перепишем неравенство в виде $|x-a-1|\leqslant 3x-x^2-a-1$ и воспользуемся тем, что $|p|\leqslant q$ в том и только том случае, если $-q\leqslant p\leqslant q$, т. е. если $\begin{cases}p\leqslant q,\\ p\geqslant -q.\end{cases}$ Получим систему неравенств

$$\begin{cases}x-a-1\leqslant 3x-x^2-a-1,\\ x-a-1\geqslant -3x+x^2+a+1,\end{cases}\quad\text{откуда}\quad\begin{cases}x(x-2)\leqslant 0,\\ a\leqslant -\frac{x^2}{2}+2x-1.\end{cases}$$

Множеством всех точек $(x;a)$ плоскости Oxa, координаты которых удовлетворяют неравенству $x(x-2)\leqslant 0$, является полоса, заключённая между прямыми $x=0$ и $x=2$ (включая эти прямые). Множеством всех точек $(x;a)$ плоскости Oxa, координаты которых удовлетворяют неравенству $a\leqslant -\frac{x^2}{2}+2x-1$, является парабола $a=-\frac{x^2}{2}+2x-1$ и часть плоскости, расположенная ниже этой параболы (см. рис. 10).

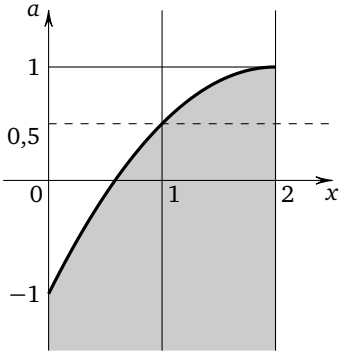


Рис. 10

Система неравенств

$$\begin{cases} x(x-2) \leqslant 0, \\ a \leqslant -\dfrac{x^2}{2} + 2x - 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[0; 1]$ только в том случае, если $a \leqslant 0{,}5$.

Ответ: $a \in (-\infty; 0{,}5]$.

Пример 4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства

$$a^2 - 2(2x+7)a - (x^2 - 2x + 7)(x^2 - 6x - 7) \leqslant 0$$

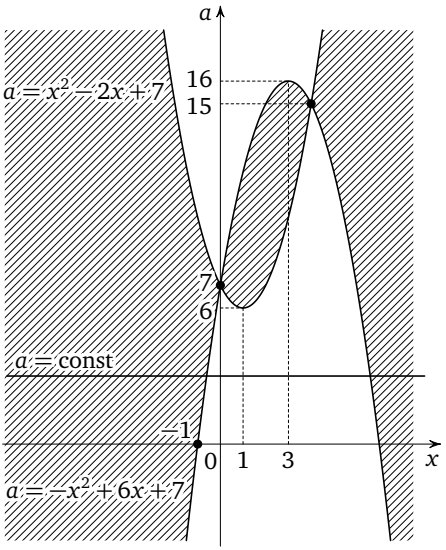
является объединение ровно двух непересекающихся промежутков числовой прямой.

Решение. Рассмотрим неравенство как квадратное относительно a и перепишем его в виде

$$a^2 - (4x+14)a + (x^2 - 2x + 7)(-x^2 + 6x + 7) \leqslant 0.$$

Заметим, что $(x^2 - 2x + 7) + (-x^2 + 6x + 7) = 4x + 14$. Поэтому согласно формулам Виета корнями квадратного трёхчлена в левой части неравенства являются $x^2 - 2x + 7$ и $-x^2 + 6x + 7$. Используя формулу разложения квадратного трёхчлена на множители, данное неравенство теперь можно записать так:

$$(a - (x^2 - 2x + 7))(a - (-x^2 + 6x + 7)) \leqslant 0.$$



Множество всех точек $(x; a)$ плоскости Oxa, координаты которых удовлетворяют полученному неравенству, лежит не выше одного из графиков функций $a = x^2 - 2x + 7$ или $a = -x^2 + 6x + 7$ и не ниже другого. Графиком функции $a = x^2 - 2x + 7$ является парабола, ветви которой направлены вверх, с вершиной в точке $(1; 6)$, пересекающая ось Oa в точке $(0; 7)$. Графиком функции $a = -x^2 + 6x + 7$ является парабола, ветви которой направлены вниз, с вершиной в точке $(3; 16)$, пересекающая ось Ox в точках $(-1; 0)$ и $(7; 0)$, а ось Oa — в точке $(0; 7)$. Найдём общие точки двух этих парабол (заметим, что одна из них уже найдена: это точка $(0; 7)$. Для этого решим уравнение $x^2 - 2x + 7 = -x^2 + 6x + 7$, откуда $x = 0$ или $x = 4$ (и тогда $a = 15$). Нарисуем эскизы графиков и отметим штриховкой искомое множество точек $(x; a)$ плоскости Oxa.

Условие задачи будет выполнено, если пересечение прямой $a = \text{const}$ и заштрихованной области состоит из двух промежутков, не имеющих общих точек, т. е. если $a \in (-\infty; 6) \cup \{7; 15\} \cup (16; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 6) \cup \{7; 15\} \cup (16; +\infty)$.

Упражнения к § 4.1

1. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} a \leqslant x + 3, \\ a + 2x \geqslant 12, \\ 3a \geqslant x + 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого значения a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 2a + x \leqslant 15, \\ 3a \geqslant 2x + 5, \\ a \leqslant 3x + 18 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого значения a.

2. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\arccos(ax - a + 1) \leqslant \arccos(2x + a - 3)$ имеет хотя бы одно решение, и укажите решения неравенства для каждого значения a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\arcsin(ax + a + 1) \geqslant \arcsin(2x + a + 1)$ имеет хотя бы одно решение, и укажите решения неравенства для каждого значения a.

3. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\arcsin(ax+2a+1)+\arccos(2x+a+3)\geqslant\frac{\pi}{2}$ имеет хотя бы одно решение, и укажите решения неравенства для каждого значения a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\arccos(ax-2a+1)+\arcsin(2x+a-5)\leqslant\frac{\pi}{2}$ имеет хотя бы одно решение, и укажите решения неравенства для каждого значения a.

4. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 2a+3x\leqslant 24,\\ 2a+8x\geqslant x^2,\\ 2a\leqslant x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого значения a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} a+x\leqslant 12,\\ 9a+12x\geqslant x^2,\\ 3a\leqslant x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого значения a.

5. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых хотя бы одно решение неравенства

$$x^2+|x+a-3|+5\leqslant 5x+a$$

принадлежит отрезку $[1;2]$.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых хотя бы одно решение неравенства $6x\geqslant 2x^2+a+|2x-a-2|+2$ принадлежит отрезку $[-1;0]$.

6. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одно число $x\in(1;2)$, не являющееся решением неравенства

$$a+\sqrt{a^2-2ax+x^2}\leqslant 3x-x^2.$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одно число $x\in(-2;1)$, не являющееся решением неравенства

$$2x^2+6x+a+\sqrt{a^2+4ax+4x^2}\leqslant 0.$$

7. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 7a+6x \geqslant x^2, \\ a \leqslant \sqrt{x}, \\ 3a+x \leqslant 10 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого значения a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 3a+2x \geqslant x^2, \\ a \leqslant 2\sqrt{x}, \\ 2a+x \leqslant 5 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого значения a.

8. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} |2x-a| \leqslant 4, \\ a+4 \geqslant x^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого значения a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} |3x+a| \leqslant 9, \\ a+x^2 \leqslant 9 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого значения a.

9. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $(a+4x-x^2)(a-x) \leqslant 0$ имеет хотя бы одно решение, и укажите решения неравенства для каждого значения a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $(a+6x+x^2)(a+x) \leqslant 0$ имеет хотя бы одно решение, и укажите решения неравенства для каждого значения a.

10. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} a \leqslant \sqrt{25-x^2}, \\ (4a-3x)(3a+4x) \geqslant 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого значения a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} a+\sqrt{169-x^2}\geqslant 0, \\ (5a-12x)(12a+5x)\leqslant 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого значения a.

11. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} ax\geqslant 2, \\ \sqrt{x-1}\geqslant a, \\ 3x\leqslant 2a+11 \end{cases}$$

является отрезок числовой прямой, длина которого равна 2.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} ax\geqslant 8, \\ \sqrt{x-4}\geqslant 2a, \\ 3x\leqslant 8a+44 \end{cases}$$

является отрезок числовой прямой, длина которого равна 4.

12. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} a\leqslant \log_2 x, \\ 2a+x\geqslant 4, \\ a+2x\leqslant 10 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите множество решений системы для каждого такого значения параметра a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} a\leqslant \log_2 x, \\ a+x\geqslant 1, \\ a+4x\leqslant 9 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите множество решений системы для каждого такого значения параметра a.

13. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} a \leqslant 3\log_3 x, \\ ax \geqslant 9, \\ |x-9|+|x-27| \leqslant 18 \end{cases}$$

является отрезок числовой прямой, длина которого равна 15.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} a \leqslant \log_3 x, \\ ax \geqslant 3, \\ |x-9|+|x-27| \leqslant 18 \end{cases}$$

является отрезок числовой прямой, длина которого равна 9.

14. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{(ax-8)(a-\log_2 x)}{x} \leqslant 0, \\ |x-2|+|x-8| \leqslant 6 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите множество решений системы для каждого такого значения параметра a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{(ax-4)(a-\log_2 x-1)}{x} \leqslant 0, \\ |x-1|+|x-4| \leqslant 3 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите множество решений системы для каждого такого значения параметра a.

15. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} |x|+2a \leqslant 4, \\ \sqrt{|x-1|} \leqslant a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите множество решений системы для каждого такого значения параметра a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} |x|+a \leqslant 2, \\ \sqrt{|2x-1|} \leqslant a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите множество решений системы для каждого такого значения параметра a.

16. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$(a+|x-1|-2)(a-\sqrt{|2x-3|}) \leqslant 0$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите множество решений неравенства для каждого такого значения параметра a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$(a+|x+1|-2)(a-\sqrt{|2x+1|}) \leqslant 0$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите множество решений неравенства для каждого такого значения параметра a.

17. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2+a \leqslant 3x, \\ a+3 \geqslant 2{,}5|x| \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите множество решений системы для каждого такого значения параметра a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 4x^2+a \leqslant 6x, \\ a+3 \geqslant 5|x| \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите множество решений системы для каждого такого значения параметра a.

18. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} a+3x \leqslant 12, \\ a+4x \geqslant x^2, \\ a \leqslant x \end{cases}$$

является отрезок числовой прямой, длина которого равна 2.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} a+6x \leqslant 24, \\ a+8x \geqslant 2x^2, \\ a \leqslant 2x \end{cases}$$

является отрезок числовой прямой, длина которого равна 2.

19. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2-8x+a \leqslant 0, \\ x^2-6x-a \leqslant 0 \end{cases}$$

является отрезок числовой прямой, длина которого равна 6.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2-6x+a \leqslant 0, \\ x^2-4x-a \leqslant 0 \end{cases}$$

является отрезок числовой прямой, длина которого равна 4.

20. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $|x+1|-a|x-3|=4$ имеет хотя бы одно решение, и укажите множество решений неравенства для каждого такого значения параметра a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $a|x-2|+2|x-1|=2$ имеет хотя бы одно решение, и укажите множество решений неравенства для каждого такого значения параметра a.

21. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства

$$(x^2-4x+a)(a-4|x|+9) \leqslant 0$$

является объединение ровно двух непересекающихся промежутков числовой прямой.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства

$$(x^2-6x+a)(a-5|x|+12) \leqslant 0$$

является объединение ровно двух непересекающихся промежутков числовой прямой.

22. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} 4|x|+|a| \leqslant 4, \\ x^2+2x \leqslant a+3 \end{cases}$$

является отрезок числовой прямой, длина которого равна 1.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} 2|x|+|a| \leqslant 4, \\ x^2+4x \leqslant 4a+12 \end{cases}$$

является отрезок числовой прямой, длина которого равна 2.

23. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} a+2x+8 \leqslant x^2, \\ a+9 \geqslant 4|x| \end{cases}$$

имеет единственное решение.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} a+2x+3 \leqslant x^2, \\ a+4 \geqslant 4|x| \end{cases}$$

имеет единственное решение.

24. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} a+2x+7 \geqslant x^2, \\ a+8 \leqslant 4|x| \end{cases}$$

состоит из отрезка числовой прямой и не принадлежащей ему точки этой прямой.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} a+2x+4 \geqslant x^2, \\ a+5 \leqslant 4|x|, \end{cases}$$

состоит из числовой прямой и не принадлежащей ему точки этой прямой.

25. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} (a+7x+4)(a-2x+4) \leqslant 0, \\ a+3x \geqslant x^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} (a+13x+9)(a-3x+9) \leqslant 0, \\ a+7x \geqslant x^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

26. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} a^2+6(2x+3)a-28x^2+108x+81 \leqslant 0, \\ x^2-8x-a \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} a^2+(7x+8)a-8x^2+28x+16 \leqslant 0, \\ x^2-4x-a \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

27. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства $\dfrac{(ax-6)(x-a-1)}{x} \geqslant 0$ является ровно один промежуток числовой прямой.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства $\dfrac{(ax-10)(x-a-3)}{x} \geqslant 0$ является ровно один промежуток числовой прямой.

28. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства $\dfrac{ax^2-(a^2+2a+8)x+8a+16}{x} \geqslant 0$ является ровно один промежуток числовой прямой.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства $\dfrac{ax^2-(a^2+2a+3)x+3a+6}{x} \geqslant 0$ является ровно один промежуток числовой прямой.

29. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства

$$(x^2-a-4)(x^2+a-2x)\geqslant 0$$

является объединение ровно двух непересекающихся промежутков числовой прямой.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства

$$(x^2-a-9)(x^2+a-3x)\geqslant 0$$

является объединение ровно двух непересекающихся промежутков числовой прямой.

30. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства

$$a^2+2ax+4x^3\leqslant x^4+3x^2$$

является объединение ровно трёх непересекающихся промежутков числовой прямой.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства

$$a^2+2ax+6x^3\leqslant x^4+8x^2$$

является объединение ровно трёх непересекающихся промежутков числовой прямой.

31. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$(x^2-4x)^2-(a^2-3a)(x^2-4x)+a^3-4a^2\leqslant 0$$

имеет ровно два различных решения.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$(x^2-6x)^2-(a^2-5a)(x^2-6x)+a^3-6a^2\leqslant 0$$

имеет ровно два различных решения.

32. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases}(a+4x)(a-2x+9)\geqslant 0,\\ x^2-4x-a\geqslant 0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} (a-6x)(a+4x-25) \geqslant 0, \\ x^2-6x+a \geqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

33. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} |2a-4x-3| \geqslant 9, \\ x^2+a \leqslant 4x+5 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} |a-4x+5| \geqslant 18, \\ x^2+a \leqslant 8x+9 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

34. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства

$$(6x^2-36x+48-a)(x^2-4x-a) \leqslant 0$$

является объединение ровно двух непересекающихся отрезков числовой прямой.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства

$$(12x^2-36x+24-a)(2x^2-2x-a) \leqslant 0$$

является объединение ровно двух непересекающихся отрезков числовой прямой.

35. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$2x^4-4x^3-3ax^2+2ax+a^2 \leqslant 0$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите множество решений неравенства для каждого такого значения параметра a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$2x^4-4x^3-3ax^2+4ax+a^2 \leqslant 0$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите множество решений неравенства для каждого такого значения параметра a.

§ 4.2. Преобразования графиков

Перейдём теперь к задачам, существенной частью решения которых является построение графика некоторой функции, в том числе при помощи элементарных преобразований графика известной функции. Даже если преобразования графиков ранее не изучались, понять, как они «устроены» и «работают», можно, задавая себе довольно очевидные вопросы и отвечая на них.

Например, как из графика функции $y = f(x)$ получить график функции $y = f(x) + b$? Ответ на этот вопрос достаточно прост: если абсциссы точек этих графиков одинаковы, то соответствующие им ординаты отличаются на $|b|$. Поэтому

- *график функции* $y = f(x) + b$ *получается из графика функции* $y = f(x)$ *параллельным переносом данного графика вдоль оси* Oy *на* $|b|$ *единиц вверх* (*если* $b > 0$) *или вниз* (*если* $b < 0$) (см. рис. 1).

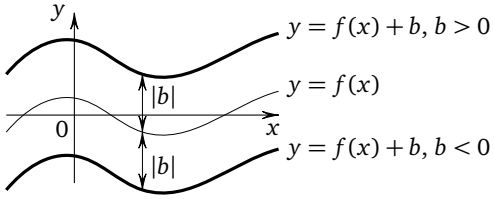


Рис. 1

А как из графика функции $y = f(x)$ получить график функции $y = f(x - a)$? Ответ на этот вопрос также не слишком сложен: если ординаты точек этих графиков одинаковы, то соответствующие им абсциссы отличаются на $|a|$. Поэтому

- *график функции* $y = f(x - a)$ *получается из графика функции* $y = f(x)$ *параллельным переносом данного графика вдоль оси* Ox *на* $|a|$ *единиц вправо* (*при* $a > 0$), *или влево* (*при* $a < 0$) (см. рис. 2).

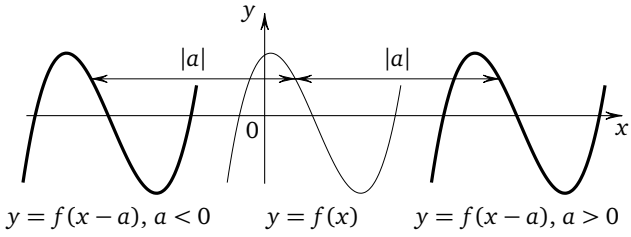
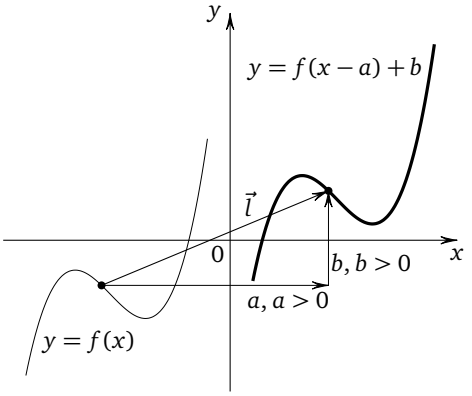
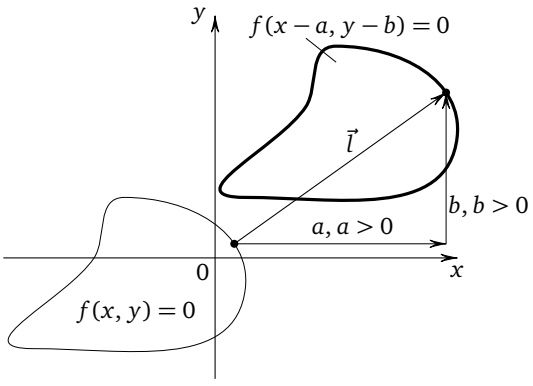


Рис. 2

Теперь можно сделать следующий вывод: график функции $y = f(x-a)+b$ получается последовательными параллельными переносами графика функции $y = f(x)$ на $|a|$ единиц вдоль оси Ox и на $|b|$ единиц вдоль оси Ox. Заметим, что такое преобразование можно описать короче: график функции $y = f(x-a)+b$ получается сдвигом (параллельным переносом) графика функции $y = f(x)$ на вектор $\vec{l}(a; b)$ (см. рис. 3а; здесь $a > 0$ и $b > 0$). Для дальнейшего важно, что и график уравнения $f(x-a; y-b) = 0$ получается сдвигом (параллельным переносом) графика уравнения $f(x; y) = 0$ на вектор $\vec{l}(a; b)$ (см. рис. 3б; здесь $a > 0$ и $b > 0$). Напомним, что графиком уравнения $f(x; y) = 0$ называют множество всех точек $(x; y)$ плоскости Oxy, для каждой из которых $f(x; y) = 0$.



а)



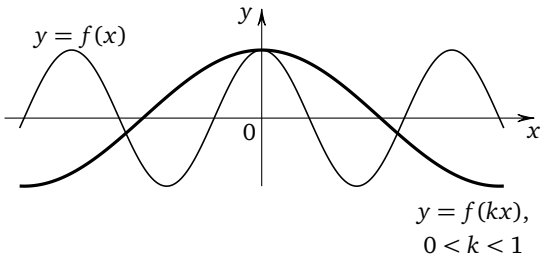
б)

Рис. 3

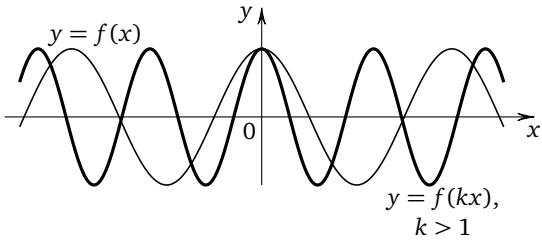
Ответим теперь на следующий вопрос: как из графика функции $y = f(x)$ получить, например, график функции $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ или $y = f(2x)$? И здесь нам помогут достаточно простые рассуждения. В самом деле, если ординаты точек графиков функций $y = f(x)$, $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ и $y = f(2x)$ одинаковы, то соответствующие им абсциссы точек графика $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ вдвое больше, а точек графика $y = f(2x)$ вдвое меньше, чем абсциссы точек графика $y = f(x)$. Поэтому для того, чтобы из графика функции $y = f(x)$ получить график функции $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$, нужно данный график «растянуть» в два раза вдоль оси абсцисс (иногда в таких случаях говорят о растяжении графика от оси Oy). Аналогично для того, чтобы из графика функции $y = f(x)$ получить график функции $y = f(2x)$, нужно данный график «сжать» в два раза вдоль оси абсцисс (иногда в таких случаях говорят о сжатии графика к оси Oy).

Вообще,

- *для построения графика функции* $y = f(kx)$ *при* $k > 0$, $k \neq 1$ *надо растянуть график функции* $y = f(x)$ *в* k *раз вдоль оси абсцисс*. При этом если $k > 1$, то часто говорят не о растяжении, а о сжатии графика (см. рис. 4а, 4б).



а)

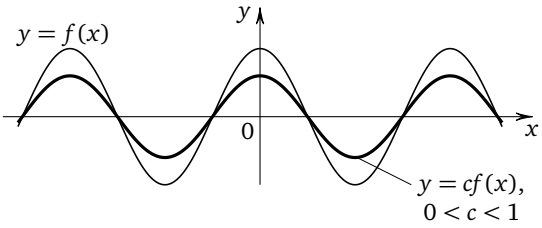


б)

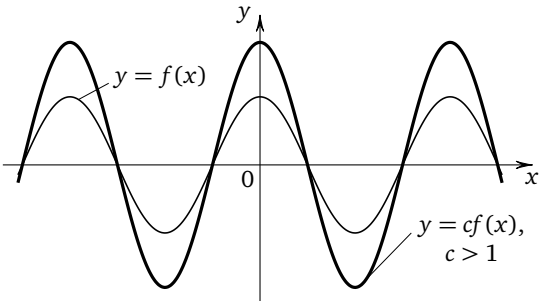
Рис. 4

Аналогично, рассматривая графики функций $y = f(x)$ и $y = c \cdot f(x)$, можно сделать следующий вывод:

- *для построения графика функции* $y = c \cdot f(x)$ *при* $c > 0$, $c \neq 1$ *надо растянуть график функции* $y = f(x)$ *в* c *раз вдоль оси ординат*. При этом если $c < 1$, то часто говорят не о растяжении, а о сжатии графика (см. рис. 5а, 5б).



а)



б)

Рис. 5

При изучении двух последних преобразований графиков функций коэффициенты растяжения (в некоторых учебниках и пособиях все такие преобразования называют сжатием) k и c считались положительными. Для того чтобы уметь строить графики и в том случае, если эти коэффициенты отрицательны, рассмотрим, с помощью каких преобразований можно из графика функции $y = f(x)$ получить графики функций $y = f(-x)$ и $y = -f(x)$. Если абсциссы точек графиков функций $y = f(x)$ и $y = f(-x)$ равны по абсолютной величине и имеют противоположные знаки, то соответствующие им ординаты одинаковы. Значит, графики этих функций симметричны относительно оси ординат. Если абсциссы точек графиков функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ равны, то соответствующие им ординаты равны по абсолютной величине и имеют противоположные знаки. Значит, графики

этих функций симметричны относительно оси абсцисс. Теперь можно сформулировать правило:

- *для построения графика функции* $y = f(-x)$ *надо зеркально отразить график функции* $y = f(x)$ *относительно оси ординат* (см. рис. 6а); *для построения графика функции* $y = -f(x)$ *надо зеркально отразить график функции* $y = f(x)$ *относительно оси абсцисс* (см. рис. 6б).

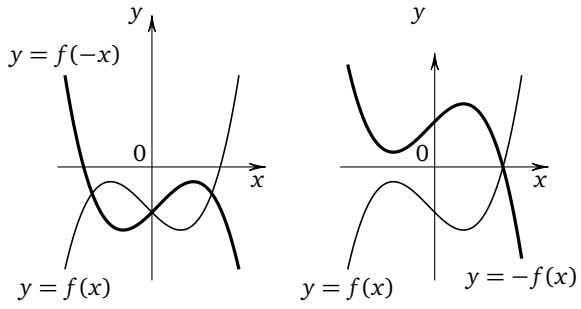


Рис. 6

С помощью последовательных преобразований графиков можно из графика функции $y = f(x)$ получить график функции $y = c \cdot f(kx + l) + b$. Рассмотрим возможную последовательность таких преобразований.

1. Представляем искомую функцию в виде $y = c \cdot f(k(x+a)) + b$. Для этого нужно вынести коэффициент k за скобку: $y = c \cdot f\left(k\left(x + \frac{l}{k}\right)\right) + b$ и обозначить $\frac{l}{k}$ через a.

2. Строим график функции $y = p_1(x)$, где $p_1(x) = f(kx)$.

3. Строим график функции $y = p_2(x)$, где

$$p_2(x) = p_1(x+a) = f(k(x+a)).$$

4. Строим график функции $y = p_3(x)$, где

$$p_3(x) = c \cdot p_2(x) = c \cdot f(k(x+a)).$$

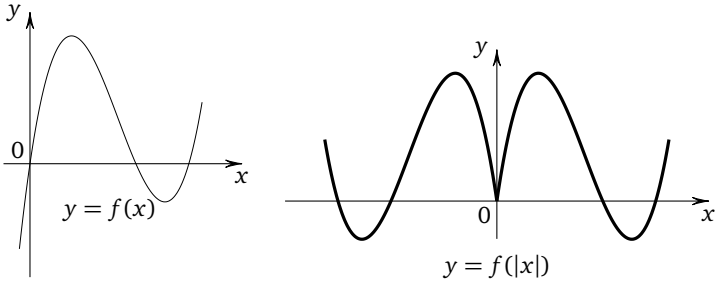
5. Строим график функции $y = p_4(x)$, где

$$p_4(x) = p_3(x) + b = c \cdot f(k(x+a)) + b.$$

Обратим внимание на то, что пункты 2, 3, 4 данного алгоритма можно выполнять в любой последовательности. Кроме того, если коэффициенты растяжения k и c отрицательны, то в пунктах 2 и 4 нужно

сначала выполнить растяжение в $|k|$ или в $|c|$ раз вдоль соответствующей оси, а затем зеркально отразить относительно другой оси полученный после растяжения график.

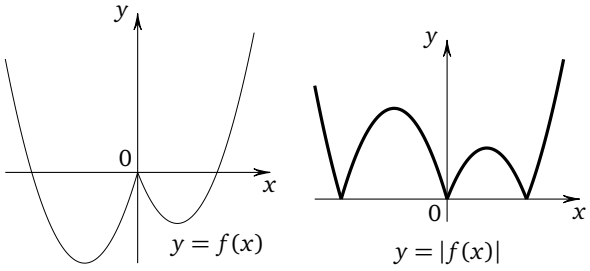
Дополним список преобразований графиков функций ещё двумя преобразованиями, связанными с построением графиков функций $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$ при условии, что график функции $y = f(x)$ задан. Рассмотрим построение графика функции $y = f(|x|)$. При $x \geqslant 0$ график этой функции совпадает с графиком функции $y = f(x)$, поскольку в этом случае $|x| = x$. При $x < 0$ искомый график совпадает с графиком функции $y = f(-x)$, поскольку в этом случае $|x| = -x$. Поэтому для построения искомого графика при $x < 0$ нужно зеркально отразить относительно оси ординат ту часть графика функции $y = f(x)$, для которой $x \geqslant 0$ (см. рис. 7а, 7б).



а) б)

Рис. 7

Для построения графика функции $y = |f(x)|$ достаточно заметить, что при $f(x) \geqslant 0$ он совпадает с графиком функции $y = f(x)$ (поскольку в этом случае $|f(x)| = f(x)$), а при $f(x) < 0$ ординаты точек графика $y = |f(x)|$ равны ординатам соответствующих точек графика $y = f(x)$ по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Поэтому гра-



а) б)

Рис. 8

фик функции $y = |f(x)|$ можно получить из графика функции $y = f(x)$, зеркально отразив относительно оси абсцисс те его части, которые расположены ниже этой оси, и оставив без изменения части, расположенные выше оси (см. рис. 8а, 8б).

Приведём сводную таблицу преобразований графиков.

$y = f(x) + b$	Параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy на $\|b\|$ единиц вверх (при $b > 0$) или вниз (при $b < 0$)
$y = f(x - a)$	Параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox на $\|a\|$ единиц вправо (при $a > 0$) или влево (при $a < 0$)
$y = f(kx), \quad k > 0$	Растяжение (сжатие) графика функции $y = f(x)$ в k раз вдоль оси Ox
$y = c \cdot f(x), \quad c > 0$	Растяжение (сжатие) графика функции $y = f(x)$ в c раз вдоль оси Oy
$y = f(-x)$	Симметрия графика функции $y = f(x)$ относительно оси Oy
$y = -f(x)$	Симметрия графика функции $y = f(x)$ относительно оси Ox
$y = f(\|x\|)$	Симметрия относительно оси Oy части графика функции $y = f(x)$, расположенной в правой координатной полуплоскости: при этом часть графика функции $y = f(x)$, расположенная в правой координатной полуплоскости, сохраняется, а его часть, расположенная в левой координатной полуплоскости, отбрасывается
$y = \|f(x)\|$	Симметрия относительно оси Ox части графика функции $y = f(x)$, расположенной в нижней координатной полуплоскости: при этом часть графика функции $y = f(x)$, расположенная в верхней координатной полуплоскости, сохраняется, а его часть, расположенная в нижней координатной полуплоскости, отбрасывается

Пользуясь этой таблицей, можно строить графики более сложных функций. Так, для построения графика функции $y = |f(|x|)|$ нужно построить сначала график функции $y = f(|x|)$, а затем ту его часть, которая лежит ниже оси Ox, отразить симметрично относительно этой оси.

Рассмотрим несколько характерных задач этой группы.

Пример 1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax+\sqrt{3-2x-x^2}=4a+2$ имеет единственный корень.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\sqrt{3-2x-x^2}=-ax+4a+2$ и рассмотрим графики функций $y=\sqrt{3-2x-x^2}$ и $y=-ax+4a+2$. Поскольку правая часть формулы $y=\sqrt{3-2x-x^2}$ неотрицательна, левая её часть тоже не может быть отрицательной. Поэтому

$$\begin{cases} y^2=3-2x-x^2, \\ y\geqslant 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} (x+1)^2+y^2=4, \\ y\geqslant 0. \end{cases}$$

Значит, графиком функции $y=\sqrt{3-2x-x^2}$ является та часть окружности $(x+1)^2+y^2=4$, ординаты точек которой неотрицательны, т. е. полуокружность радиуса 2 с центром в точке $(-1;0)$, расположенная не ниже оси абсцисс. Эта полуокружность имеет с осью абсцисс общие точки $A(-3;0)$ и $B(1;0)$. Графиком функции $y=-ax+4a+2$ является прямая. Заметим, что $y=-a(x-4)+2$ и если $x=4$, то $y=2$ вне зависимости от значений параметра. Поэтому прямая $y=-ax+4a+2$ при любом значении параметра проходит через точку $M(4;2)$. Данное уравнение имеет единственный корень только в том случае, когда эта прямая имеет с полуокружностью единственную общую точку. Последнее возможно, если эта прямая касается полуокружности либо расположена между прямыми MA и MB (см. рис. 9) так, что её угловой коэффициент $-a\in(a_1;a_2]$, где a_1 и a_2 — угловые коэффициенты прямых MA и MB соответственно. Поскольку наиболее удалённая от оси абсцисс точка полуокружности C имеет ту же ординату, что и точка M, прямая MC, параллельная оси абс-

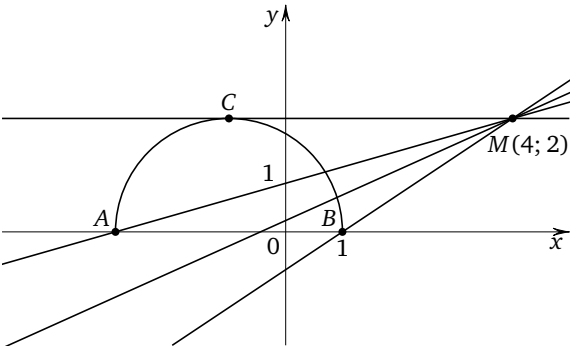


Рис. 9

цисс, будет касательной к полуокружности. В этом случае $a=0$. Найдём теперь a_1 и a_2. Поскольку точка $A(-3;0)$ принадлежит прямой $y=-ax+4a+2$, её координаты удовлетворяют уравнению этой прямой. Поэтому $0=3a+4a+2$, откуда $a=-\frac{2}{7}$. Таким образом, $a_1=\frac{2}{7}$. Поскольку точка $B(1;0)$ принадлежит прямой $y=-ax+4a+2$, её координаты удовлетворяют уравнению этой прямой. Поэтому $0=-a+4a+2$, откуда $a=-\frac{2}{3}$. Таким образом, $a_2=\frac{2}{3}$. Значит, $-a\in(a_1;a_2]$, если $\frac{2}{7}<-a\leqslant\frac{2}{3}$, откуда $-\frac{2}{3}\leqslant a<-\frac{2}{7}$.

Ответ: $\{0\}\cup\left[-\frac{2}{3};-\frac{2}{7}\right)$.

Замечание. Обратим внимание на то, что при выборе функций в таких задачах целесообразно руководствоваться следующим правилом (разумеется, в тех задачах, где это возможно): график одной из функций не должен зависеть от параметра. Кроме того, часто в решении таких задач удаётся существенно продвинуться, проанализировав функцию, зависящую от параметра, и найдя какое-то её общее для всех значений параметра свойство. В рассмотренном примере таким свойством являлась принадлежность точки $M(4;2)$ графику функции при любом значении параметра. В следующей задаче таким свойством является принадлежность вершины угла некоторой фиксированной прямой.

Пример 2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|x^2+2x-3|-2a=|x-a|+3$ имеет ровно три различных корня.

Решение. Перепишем данное уравнение в виде

$$|x^2+2x-3|=|x-a|+2a+3$$

и рассмотрим графики функций $y=|x^2+2x-3|$ и $y=|x-a|+2a+3$. График функции $y=|x^2+2x-3|$ получается из графика функции $y=x^2+2x-3$ (это парабола, ветви которой направлены вверх, вершина имеет координаты $(-1;-4)$, точками пересечения параболы с осями координат являются $(1;0)$, $(-3;0)$, $(0;-3)$) с помощью зеркального отражения (симметрии) относительно оси абсцисс части параболы, расположенной ниже этой оси. График функции $y=|x-a|+2a+3$ получается из графика функции $y=|x|$ (этот график представляет собой прямой угол с вершиной в точке $(0;0)$ и сторонами, лежащими на прямых $y=x$ и $y=-x$ выше оси абсцисс) параллельным переносом на вектор $\vec{l}(a;2a+3)$. Таким образом, графиком функции $y=|x-a|+2a+3$ является прямой угол с вершиной в точке $(x_0;y_0)$, где $x_0=a$, $y_0=2a+3$. Из двух послед-

них формул следует, что $y_0 = 2x_0 + 3$. Следовательно, вершина угла $y = |x - a| + 2a + 3$ лежит на прямой $y = 2x + 3$, а не является произвольной точкой плоскости. Данное уравнение имеет ровно три различных корня, если графики функций имеют ровно три общие точки, что возможно только в двух случаях: соответствующие положения угла $y = |x - a| + 2a + 3$ для этих случаев обозначены на рис. 10 цифрами (1) и (2). В случае (1) сторона угла $y = |x - a| + 2a + 3$

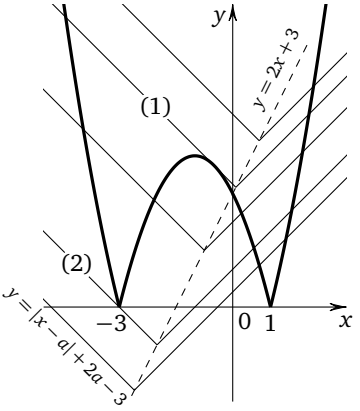


Рис. 10

касается параболы $y = |x^2 + 2x - 3|$ в точке, лежащей на отражённом участке параболы $y = x^2 + 2x - 3$ (отсюда $|x^2 + 2x - 3| = -x^2 - 2x + 3$) левее вершины угла, т. е. в точке, абсцисса которой меньше a (отсюда $|x - a| = -x + a$). Касание означает, что квадратное уравнение $-x^2 - 2x + 3 = -x + a + 2a + 3$ имеет единственный корень, т. е. что его дискриминант равен нулю. Приведём уравнение к стандартному виду $x^2 + x + 3a = 0$ и, приравняв дискриминант $D = 1 - 12a$ к нулю, найдём $a = \frac{1}{12}$. В случае (2) сторона угла, расположенная слева от его вершины (отсюда $|x - a| = -x + a$ и $y = -x + 3a + 3$), проходит через точку $(-3; 0)$. Поэтому $0 = -(-3) + 3a + 3$, откуда $a = -2$.

Ответ: $\frac{1}{12}$; -2.

Пример 3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax + \left|\frac{1}{x} + 4\right| = 2a$ имеет хотя бы один корень, и укажите число корней уравнения для каждого значения a.

Решение. Перепишем данное уравнение в виде $\left|\frac{1}{x} + 4\right| = 2a - ax$ и рассмотрим графики функций $y = \left|\frac{1}{x} + 4\right|$ и $y = 2a - ax$. График функ-

ции $y=\left|\frac{1}{x}+4\right|$ получается с помощью параллельного переноса гиперболы $y=\frac{1}{x}$ вдоль оси ординат на 4 единицы вверх и последующего зеркального отражения (симметрии) относительно оси абсцисс части полученного после параллельного переноса графика функции $y=\frac{1}{x}+4$, лежащей ниже оси абсцисс. Графиком функции $y=2a-ax$ является прямая. Заметим, что $y=-a(x-2)$ и если $x=2$, то $y=0$ вне зависимости от значений параметра. Поэтому прямая $y=2a-ax$ при любом значении параметра проходит через точку $A(2;0)$. На рис. 11 показаны три положения прямой $y=2a-ax$: AB и AC — касательные к графику функции $y=\left|\frac{1}{x}+4\right|$ (они касаются неотражённой части этого графика, т. е. графика функции $y=\frac{1}{x}+4$), AD соответствует значению $a=0$, совпадает с осью абсцисс и имеет с графиком единственную общую точку $P\left(-\frac{1}{4};0\right)$. Прямая AE на том же рисунке перпендикулярна оси абсцисс.

Найдём координаты точек B и C. Для этого достаточно найти отличные от нуля значения параметра, при которых уравнение $\frac{1}{x}+4=$ $=2a-ax$ имеет единственный корень. Это уравнение можно переписать в виде $ax^2-2(a-2)x+1=0$. Если $a\neq 0$, полученное уравнение имеет единственный корень $x=\frac{a-2}{a}$ только в случае равенства нулю его дискриминанта $\frac{D}{4}=(a-2)^2-a$, откуда $a^2-5a+4=0$ и $a=1$ или $a=4$. Если $a=1$, то $x=-1$ (точка B); если $a=4$, то $x=\frac{1}{2}$ (точка C). Следовательно, уравнениями прямых AB и AC являются соответственно $y=2-x$ и $y=8-4x$.

Число корней данного уравнения равно при каждом значении параметра a числу общих точек графика функции $y=\left|\frac{1}{x}+4\right|$ и прямой $y=2a-ax$, угловой коэффициент которой равен $-a$.

Данное уравнение имеет единственный корень, если

1) прямая $y=2a-ax$ лежит внутри пары вертикальных углов, один из которых — угол BAC, т. е. $k_{AC}<-a\leqslant k_{AB}$, где $k_{AB}=-1$ и $k_{AC}=-4$ — угловые коэффициенты прямых AB и AC соответственно, откуда $a\in(1;4)$;

2) прямая $y=2a-ax$ совпадает с прямой AD или лежит внутри пары вертикальных углов, один из которых — угол EAD, т. е. $-a\geqslant 0$, откуда $a\in(-\infty;0]$.

Данное уравнение имеет ровно два корня, если прямая $y = 2a - ax$ совпадает с прямой AB или с прямой AC, откуда $a = 1$ или $a = 4$.

Данное уравнение имеет три корня, если

1) прямая $y = 2a - ax$ лежит внутри пары вертикальных углов, один из которых — угол B_1AB (см. рис. 11), т. е. $k_{AB} < -a < 0$, откуда $a \in (0; 1)$;

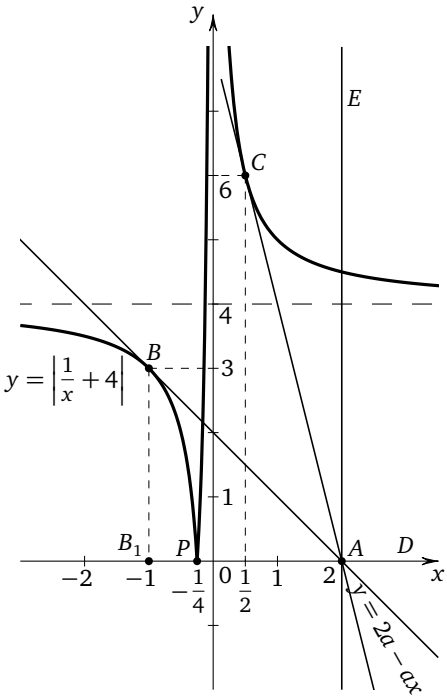


Рис. 11

2) прямая $y = 2a - ax$ лежит внутри пары вертикальных углов, один из которых — угол CAE, т. е. $-a < k_{AC}$, откуда $a \in (4; +\infty)$.

Ответ: один корень, если $a \in (-\infty; 0] \cup (1; 4)$; два корня, если $a \in \{1; 4\}$; три корня, если $a \in (0; 1) \cup (4; +\infty)$.

Пример 4. Решите неравенство $\dfrac{6}{2x+1} > \dfrac{1+\log_2(x+2)}{x}$.

Решение. При $x > 0$ данное неравенство приводится к виду

$$\frac{6x}{2x+1} - 1 > \log_2(x+2),$$

откуда

$$\frac{4x-1}{2x+1} > \log_2(x+2).$$

При $x<0$ аналогично получим неравенство $\frac{4x-1}{2x+1}<\log_2(x+2)$. Рассмотрим функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$, где

$$f(x)=\frac{4x-1}{2x+1}=\frac{2(2x+1)-3}{2x+1}=2-\frac{1{,}5}{x+0{,}5},\quad g(x)=\log_2(x+2),$$

и построим их графики. График функции $y=f(x)$ (определённой при всех $x\neq -0{,}5$) получается при помощи описанных ранее стандартных элементарных преобразований (растяжения в 1,5 раза от оси абсцисс и параллельного переноса на вектор $\vec{l}(-0{,}5;\,2)$) гиперболы, являющейся графиком функции $y=-\frac{1}{x}$. График функции $y=g(x)$ (определённой при всех $x>-2$) получается параллельным переносом графика функции $y=\log_2 x$ на две единицы влево вдоль оси абсцисс (см. рис. 12). Требуется найти все $x>0$, для каждого из которых $f(x)>g(x)$, и все $x<0$ (с учётом того, что $x>-2$, $x\neq -0{,}5$), для каждого из которых $f(x)<g(x)$.

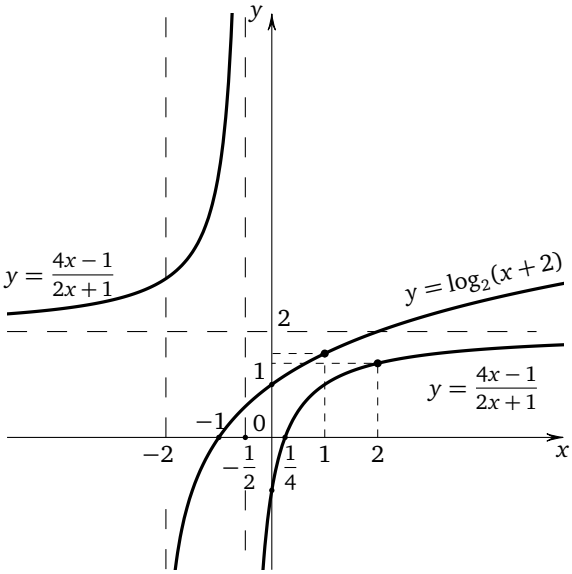


Рис. 12

При $x\in(-2;\,-0{,}5)$ неравенство $f(x)<g(x)$ (а значит, и данное неравенство) решений не имеет, так как $f(x)>2$, а $g(x)<2$.

При $x\in(-0{,}5;\,0)$ неравенство $f(x)<g(x)$ (а значит, и данное неравенство) выполняется, так как $f(x)<0$, а $g(x)>0$ для всех $x\in(-0{,}5;\,0)$.

При $x \in (0; 1)$ неравенство $f(x) > g(x)$ (а значит, и данное неравенство) решений не имеет, так как $f(x) < 1$, а $g(x) > 1$.

При $x \in (2; +\infty)$ неравенство $f(x) > g(x)$ (а значит, и данное неравенство) решений не имеет, так как $f(x) < 2$, а $g(x) > 2$.

Осталось рассмотреть отрезок $[1; 2]$. Здесь доказательство не столь очевидно (предыдущие легко следуют из свойств функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и простейших неравенств), но рисунок «подсказывает» идею доказательства: каждая из функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ возрастает на этом отрезке, достигая своего наименьшего значения в левом конце отрезка, а наибольшего — в правом, но похоже, что

$$\max_{[1;2]} f(x) = f(2) < \min_{[1;2]} g(x) = g(1).$$

Если это так, то и на отрезке $[1; 2]$ данное неравенство не будет иметь решений. Сравним $f(2) = \frac{7}{5}$ и $g(1) = \log_2 3$. Предположим, что $f(2) \geqslant g(1)$. Тогда $\frac{7}{5} \geqslant \log_2 3$ и, следовательно, $2^{\frac{7}{5}} \geqslant 3$, откуда $2^7 \geqslant 3^5$, т. е. $128 \geqslant 729$, что невозможно. Значит, допущение неверно. Поэтому и на отрезке $[1; 2]$ данное неравенство не имеет решений.

Ответ: $(-0{,}5; 0)$.

Упражнения к § 4.2

1. а) Постройте график функции $y = \dfrac{2x+1}{2x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

б) Постройте график функции $y = \dfrac{x-2}{2x-x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

2. а) Постройте график функции $y = x^2 - 2x - 4|x|$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c - 2$ имеет с графиком не менее одной, но не более трёх общих точек.

б) Постройте график функции $y = 3|x| + x - x^2$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c - 3$ имеет с графиком не менее одной, но не более двух общих точек.

3. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение

$$3a + \sqrt{-3 - 4x - x^2} = ax + 1.$$

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение

$$ax + \sqrt{-5 - 6x - x^2} = 5a + 2.$$

4. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение

$$ax+2a+3=\sqrt{-7+8x-x^2}.$$

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение

$$6a+\sqrt{-24-10x-x^2}=ax+1.$$

5. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$12|x^2-4|=2a+|a-12x+12|+36$$

имеет ровно три различных корня.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$6|x^2-4|=2a+|a+6x+6|+18$$

имеет ровно три различных корня.

6. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\frac{1}{2}ax+\left|\frac{1}{x}+2\right|=2a$ имеет хотя бы один корень, и укажите число корней уравнения для каждого значения a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\frac{1}{3}ax+\left|\frac{1}{x}+1\right|=a$ имеет хотя бы один корень, и укажите число корней уравнения для каждого значения a.

7. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax|x|+|3x+2|=2a|x|$ имеет ровно один корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax|x|+|5x+2|=6a|x|$ имеет ровно три различных корня.

8. а) Решите неравенство $\frac{3}{x+2}>\frac{\log_2(x+8)-1}{x}$.

б) Решите неравенство $\frac{3}{x+4}>\frac{\log_2(x+16)-2}{x}$.

9. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2+\left|\frac{5}{x}-3\right|=ax$ имеет более двух положительных корней.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4+\left|\frac{5}{x}-6\right|=2ax$ имеет более двух положительных корней.

10. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a|x-3|=\frac{5}{x+2}$ имеет более двух неотрицательных корней.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a|x-6|=\frac{10}{x+4}$ имеет более двух неотрицательных корней.

11. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} y=\sqrt{5+4x-x^2}+2, \\ y=\sqrt{9-a^2+2ax-x^2}+a. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} y=\sqrt{5-8x-4x^2}+2, \\ y+2a=\sqrt{9-4a^2+8ax-4x^2}. \end{cases}$$

12. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|x+3|-a|x-1|=4$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого значения a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a|x+3|+2|x+4|=2$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого значения a.

13. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax=12a+\sqrt{6|x|+2x-x^2}$ имеет нечётное число различных корней.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax=24a+\sqrt{12|x|+4x-x^2}$ имеет отличное от нуля чётное число различных корней.

14. а) а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y^2-(x^2+\sqrt{2|x|-x^2}-4)y+(x^2-4)\sqrt{2|x|-x^2}=0, \\ a+2x=y, \end{cases}$$

имеет нечётное число различных решений.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y^2-(x^2+\sqrt{4|x|-x^2}-16)y+(x^2-16)\sqrt{4|x|-x^2}=0, \\ a+4x=y, \end{cases}$$

имеет нечётное число различных решений.

15. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(5x+a)^2-(|x|+\sqrt{6|x|-x^2}-6)(5x+a)+(|x|-6)\sqrt{6|x|-x^2}=0$$

имеет отличное от нуля чётное число различных корней.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(3x+a)^2-(|x|+\sqrt{10|x|-x^2}-10)(3x+a)+(|x|-10)\sqrt{10|x|-x^2}=0$$

имеет нечётное число различных корней.

16. а) а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{(y^2-xy+3x-y-6)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}}=0,\\ x+y=a\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{(y^2-xy+2x-4y+4)\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}}=0,\\ x+y=a\end{cases}$$

имеет единственное решение.

17. а) а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{xy^2-2xy-4y+8}{\sqrt{x+4}}=0,\\ y=ax\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{xy^2-3xy-3y+9}{\sqrt{x+3}}=0,\\ y=ax\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

§ 4.3. Геометрические идеи

Этот параграф посвящён задачам, в которых графические интерпретации основываются ещё и на геометрических представлениях. Многие из таких задач связаны с уравнением окружности, формулой расстояния между двумя точками, уравнением прямой, т. е., в сущности, с расстояниями и методом координат. Действительно, между геометрическими и алгебраическими задачами, между языком алгебры («языком формул») и языком геометрии («языком расстояний») существует неоспоримая связь, ставшая со времён Декарта очевидной даже для не слишком искушённого взгляда. Решение многих геометрических задач сводится к решению систем алгебраических уравнений и требует умения применять соответствующий алгебраический инструментарий. Менее заметны (особенно школьнику) геометрические идеи, являющиеся основанием для решения ряда алгебраических задач: уравнений, неравенств, вычисления наибольших и наименьших значений некоторых выражений. Связано это, вероятнее всего, с тем, что алгебраический язык является своего рода первым математическим языком школьника, а геометрический язык — вторым. Изучение языка невозможно начинать без словаря или хотя бы разговорника. В нашем случае словарь довольно прост: в нём всего три строчки. Для удобства приведём его в виде таблицы.

Алгебраический язык (язык формул)	Геометрический язык (язык расстояний)
Числа и буквы	Расстояния до координатных осей (координаты)
Модуль разности двух чисел	Расстояние между двумя точками координатной прямой
Сумма квадратов двух чисел	Квадрат расстояния между двумя точками координатной плоскости

Попытаемся теперь с помощью этого словаря заняться «переводом» с геометрического языка на алгебраический, написав переводы нескольких довольно употребительных «фраз» — основу нашего «разговорника». При этом в левой колонке таблицы будут записаны фразы на языке расстояний, а в правой — их «переводы» на язык формул, снабжённые в некоторых случаях комментариями.

Расстояние между фигурами A и B (это могут быть точки, прямые, плоскости и т. п.) будем обозначать $r(A; B)$. Напомним, что расстоя-

ние между двумя фигурами — кратчайшее из всех возможных расстояний от точки одной фигуры до точки другой.

Язык расстояний	Перевод на язык формул
1. Расстояние от точки t числовой оси до точки -22 меньше 5.	$\lvert t+22\rvert<5$. *Комментарий.* Расстояние между точками a и b числовой оси равно модулю разности чисел a и b, т. е. $r(a;b)=\lvert a-b\rvert$.
2. Сумма расстояний от точки x числовой оси до точек -3 и 5 равна 12.	$\lvert x+3\rvert+\lvert x-5\rvert=12$
3. Точка 5 числовой оси равноудалена от точек $x-1$ и x^2-16.	$\lvert x-6\rvert=\lvert x^2-21\rvert$
4. Расстояние от точки, лежащей на прямой $y=3x-2$, до оси абсцисс в 5 раз больше расстояния до оси ординат.	$\lvert 3x-2\rvert=5\lvert x\rvert$. *Комментарий.* Расстояние от точки $(x;y)$ графика функции $y=f(x)$ до оси абсцисс равно $\lvert f(x)\rvert$, а до оси ординат равно $\lvert x\rvert$.
5. Точка $M(a;b)$ принадлежит окружности с центром в начале координат и радиусом 3.	$a^2+b^2=9$
6. Сумма расстояний от точки $M(x;y)$ до точек $P(3;4)$ и $K(-2;5)$ не больше 6.	$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y-5)^2}\leqslant 6$
7. Расстояние от точки $M(m;n)$ единичной окружности до точки $P(-4;1)$ равно 3.	$\begin{cases} m^2+n^2=1,\\ \sqrt{(m+4)^2+(n-1)^2}=3 \end{cases}$
8. Расстояние от точки $M(p;q)$ окружности с центром $(-2;-4)$ и радиусом 2 до точки $P(a;b)$ окружности с тем же центром и радиусом 6 равно 8.	$\begin{cases} (p+2)^2+(q+4)^2=4,\\ (a+2)^2+(b+4)^2=36,\\ \sqrt{(p-a)^2+(q-b)^2}=8 \end{cases}$
9. Сумма расстояний от точки M, лежащей на прямой $y=2x-1$, до точек $P(3;4)$ и $K(-1;1)$ равна 5.	$\sqrt{(x-3)^2+(2x-5)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(2x-2)^2}=5$. *Комментарий.* Если точка лежит на прямой $y=2x-1$, то её координаты: $(x;2x-1)$.
10. Расстояние от точки M, лежащей на прямой $y=x$, до точки P, лежащей на прямой $y=2x-3$, не меньше 9.	$\sqrt{(a-b)^2+(a-2b+3)^2}\geqslant 9$. *Комментарий.* В силу принадлежности точек данным прямым их координаты в общем виде можно записать так: $M(a;a)$, $P(b;2b-3)$, где a и b — произвольные действительные числа.

Обратим внимание на то, что условие принадлежности некоторой точки M той или иной фигуре (например, прямой или окружности), заданной уравнением, может быть записано с помощью различных букв, а не только с помощью букв x и y. Так, равенства

$$(p-3)^2+(q+2)^2=16 \quad \text{и} \quad (m-3)^2+(n+2)^2=16$$

означают, что и точка $(p; q)$, и точка $(m; n)$ принадлежат окружности с центром $(3; -2)$ и радиусом 4, т. е. окружности

$$(x-3)^2+(y+2)^2=16$$

координатной плоскости Oxy.

Теперь сделаем несколько «переводов» с алгебраического языка на геометрический, оформив и их в виде таблицы.

Язык формул	Перевод на язык расстояний
1. Решить уравнение $\lvert x-5\rvert=2\lvert x+3\rvert$.	Найти все точки x числовой оси, расстояние от каждой из которых до точки 5 в два раза больше расстояния до точки -3.
2. Имеет ли система уравнений $\begin{cases} p^2+q^2=16, \\ r^2+t^2=25, \\ (p-r)^2+(q-t)^2=100 \end{cases}$ хотя бы одно решение?	Можно ли на каждой из концентрических окружностей с центром в начале координат, радиусы которых равны 4 и 5, найти по точке, расстояние между которыми равно 10?
3. Найти наименьшее значение функции $y=\sqrt{(x-1)^2+9}+\sqrt{(x+3)^2+16}$.	На оси абсцисс найти точку, сумма расстояний от которой до точек $(1; 3)$ и $(-3; -4)$ минимальна. *Комментарий*. Число $\sqrt{(x-1)^2+9}$ равно расстоянию между точками $(x; 0)$ и $(1; 3)$; число $\sqrt{(x+3)^2+16}$ равно расстоянию между точками $(x; 0)$ и $(-3; -4)$.
4. Найти наименьшее значение функции $y=\sqrt{(x+2)^2+(2x+1)^2}+$ $+\sqrt{(x-3)^2+(2x-5)^2}$.	На прямой $y=2x$ найти точку, сумма расстояний от которой до точек $(-2; -1)$ и $(3; 5)$ минимальна. *Комментарий*. Число $\sqrt{(x+2)^2+(2x+1)^2}$ равно расстоянию между точками $(x; 2x)$ и $(-2; -1)$; число $\sqrt{(x-3)^2+(2x-5)^2}$ равно расстоянию между точками $(x; 2x)$ и $(3; -5)$.
5. Решить неравенство $(z-t)^2+(z-3t+5)^2\leqslant 18$.	Найти все такие точки на прямой $y=x$ и все такие точки на прямой $y=3x-5$, что квадрат расстояния от точки на прямой $y=x$ до точки на прямой $y=3x-5$ не превосходит 18. *Комментарий*. Сумма $(z-t)^2+(z-3t+5)^2$ равна квадрату расстояния между точками $(z; z)$ и $(t; 3t-5)$.
6. Решить уравнение с параметром $\lvert x\rvert=5\lvert ax-3\rvert$.	На графике функции $y=ax+3$ найти все точки, расстояние от каждой из которых до оси ординат в 5 раз больше расстояния до оси абсцисс.
7. Найти все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений $\begin{cases} (m-3)^2+(n-4)^2=a^2, \\ m^2+n^2=4. \end{cases}$	Найти радиус окружности с центром в точке $(3; 4)$, если известно, что эта окружность касается окружности, радиус которой равен 2, а центром является начало координат. *Комментарий*. Найденный радиус будет равен $\lvert a\rvert$.

Следует подчеркнуть, что правильные «переводы» у различных «переводчиков» могут отличаться (это является особенностью «переводов» в математике). Так в задании 3 вместо точки $(1; 3)$ можно было взять точку $(1; -3)$, а вместо точки $(-3; -4)$ рассматривать точку $(-3; 4)$. В задании 5 сумма $(z-t)^2+(z-3t+5)^2$ может означать квадрат расстояния между точками $(z; z)$ и $(t; 3t-5)$ (т. е. квадрат расстояния между точкой на прямой $y=x$ и точкой на прямой $y=3x-5$), а может означать и квадрат расстояния между точками $(z; z+5)$ и $(t; 3t)$ (т. е. квадрат расстояния между точкой на прямой $y=x+5$ и точкой на прямой $y=3x$). Впрочем, эта особенность присуща и переводам художественной литературы: при сохранении смысла и фабулы некоторые предложения в различных переводах могут отличаться весьма существенно. В нашем случае важно только, чтобы «перевод» был адекватен «оригиналу»: это позволит верно интерпретировать и решить задачу при любом правильном «переводе».

Теперь, после овладения определёнными «языковыми навыками», можно перейти к решению задач.

Пример 1. Найдите наименьшее значение функции

$$y=\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2-16x+89}.$$

Решение. Решение этой задачи с помощью производной приведёт, очевидно, к громоздким вычислениям, да и не во всех школьных учебниках можно найти формулу производной сложной функции. Попробуем перевести условие задачи с языка формул на язык расстояний. Для этого выделим полные квадраты в подкоренных выражениях: $y=\sqrt{(x-1)^2+4}+\sqrt{(x-8)^2+25}$. Каждое из слагаемых правой части последнего равенства представляет собой расстояние от точки $A(x; 0)$ оси абсцисс до некоторой точки с фиксированными координатами, не зависящими от переменной x. Таким образом, решить задачу — значит найти такую точку A оси абсцисс, сумма расстояний от которой до двух данных точек минимальна. Если данные точки B и C лежат по разные стороны от оси абсцисс, то искомая точка, очевидно, есть точка пересечения прямой BC с осью абсцисс, поскольку для любой другой точки A_1 оси абсцисс сумма расстояний от неё до точек B и C будет больше в силу неравенства треугольника: $AB+AC=BC$, $A_1B+A_1C>BC$ (см. рис. 1). Абсциссы точек B и C известны — это 1 и 8, а квадраты их ординат равны соответственно 4 и 25. Выберем знаки ординат точек B и C так, чтобы эти точки оказались лежащими по разные стороны от оси абсцисс: $B(1; -2)$ и $C(8; 5)$. Найти уравнение прямой BC не представляет труда (это можно сделать разными

способами): $y = x - 3$. Тогда абсцисса точки A равна 3, а искомый минимум равен $\sqrt{(3-1)^2+4}+\sqrt{(3-8)^2+25}$, т. е. $7\sqrt{2}$.

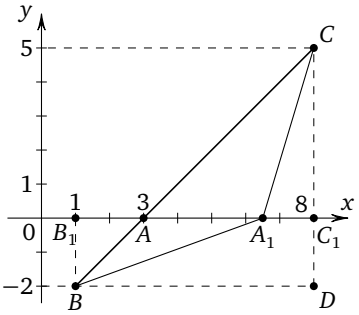


Рис. 1

Ответ: $7\sqrt{2}$.

Замечание 1. Найти расстояние BC можно и как гипотенузу прямоугольного треугольника BCD с катетами $BD = CD = 7$. Абсциссу точки A можно вычислить, не составляя уравнения прямой BC, а воспользовавшись подобием треугольников AB_1B и AC_1C, из которого находим $\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{BB_1}{CC_1} = \frac{2}{5}$ и, поскольку $B_1C_1 = 7$, получаем $AB_1 = 2$, а искомая абсцисса равна 3.

Замечание 2. В задачах на вычисление наибольшего или наименьшего значения функции обязательным является указание точки, в которой это значение достигается. Связано это с тем, что в таких задачах часто используется условие обращения некоторого нестрогого неравенства в равенство, что возможно далеко не всегда. И хотя в ответ записывается именно наибольшее или наименьшее значение функции, тем не менее без обоснования того, что это значение достигается, решение не может быть признано полным и засчитано. Для такого обоснования в большинстве случаев достаточно найти точку, в которой это значение достигается, что и было сделано при решении примера 1.

Пример 2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x-6)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-4)^2} = 2\sqrt{13}, \\ \sqrt{(x-9)^2+y^2}-\sqrt{x^2+(y-3)^2} = 3\sqrt{10}. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим на координатной плоскости Oxy точки $A(6;0)$, $B(0;4)$, $C(9;0)$, $D(0;3)$. Решить систему — означает найти все

точки $M(x;y)$, для каждой из которых $MA+MB=2\sqrt{13}$, $MC+MD=$ $=3\sqrt{10}$. Но $AB=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$, $CD=\sqrt{9^2+3^2}=3\sqrt{10}$ (см. рис. 2). Следовательно, $MA+MB=AB$ (т. е. точка M принадлежит отрезку AB), $MC+MD=CD$ (т. е. точка M принадлежит отрезку CD). Поэтому точку M можно найти как точку пересечения отрезков AB и CD. Уравнения прямых AB и CD, координаты двух точек каждой из которых известны, находятся без труда: $y=-\frac{2}{3}x+4$ — уравнение прямой AB; $y=-\frac{1}{3}x+3$ — уравнение прямой CD. Для вычисления абсциссы точки M осталось решить уравнение $-\frac{2}{3}x+4=-\frac{1}{3}x+3$, откуда $x=3$. Ордината точки M находится подстановкой полученной абсциссы в уравнение любой из прямых AB или CD: $y=-\frac{2}{3}\cdot 3+4=2$.

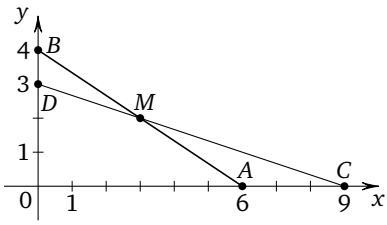


Рис. 2

Ответ: $(3;2)$.

Замечание 3. Найти уравнение прямой AB можно, в частности, воспользовавшись тем, что угловой коэффициент этой прямой отрицателен и равен $-\frac{|OB|}{|OA|}$, т. е. $-\frac{2}{3}$, а начальная ордината (ордината точки пересечения прямой с осью ординат) равна 4, откуда $y=-\frac{2}{3}x+4$. Аналогично находится и уравнение прямой CD.

В некоторых случаях при определённом навыке решения подобных задач можно обойтись и без рисунков, особенно когда используемые геометрические факты хорошо известны и не нуждаются в прямых иллюстрациях. Рассмотрим три таких примера.

Пример 3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2-6x+12+a^2-4a=0$ принимает наибольшее возможное значение.

Решение. Решим задачу двумя способами. Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения. Традиционное решение задачи состоит в вычис-

лении наибольшего значения функции $f(a)=|x_1-x_2|$, т. е. функции

$$f(a)=2\sqrt{-3+4a-a^2},\quad \text{или}\quad f(a)=2\sqrt{1-(a-2)^2},$$

равного, очевидно, 2 при $a=2$. Это решение требует определённой культуры вычислений. К тому же значительная часть учащихся, скорее всего, попытается провести исследование функции на наибольшее значение по традиционному алгоритму, требующему применения производной, и столкнётся на этом пути с неизбежными и довольно значительными трудностями, связанными с дифференцированием сложной функции и преобразованием иррациональных выражений. Второй способ заключается в «переводе» условия данной задачи с алгебраического языка на геометрический. Для этого выделим полные квадраты в левой части уравнения и перепишем его в виде $(x-3)^2+(a-2)^2=1$. Полученное уравнение является уравнением окружности в системе координат Oxa, а корни данного уравнения равны абсциссам точек пересечения окружности и прямой, параллельной оси абсцисс. Расстояние между этими точками максимально, если они являются концами диаметра окружности, равного 2.

Ответ: 2.

Пример 4. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $(a-d)^2+(b+p)^2+(c-q)^2$, если числа a, b, c, d, p, q таковы, что

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=9,\\ d^2+p^2+q^2=16. \end{cases}$$

Решение. Переведём условие задачи на язык расстояний: выражение $(a-d)^2+(b+p)^2+(c-q)^2$ представляет собой квадрат расстояния между точками $(a;b;c)$ и $(d;-p;q)$, первая из которых лежит на сфере с центром в начале координат и радиусом 3, вторая — на сфере с тем же центром и радиусом 4. Наибольшее расстояние между точками этих сфер равно сумме радиусов, т. е. 7, а наименьшее расстояние равно разности радиусов, т. е. 1. Поэтому искомые значения равны 49 и 1. Значение 49 достигается, например, при $a=d=c=q=0$, $b=3$, $p=4$. Значение 1 достигается, например, при $a=d=c=q=0$, $b=3$, $p=-4$.

Ответ: 49; 1.

Пример 5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (x+2a-1)^2+(y+5a-2)^2=4,\\ (x-3a+1)^2+(y-6a+5)^2=9. \end{cases}$$

Решение. На геометрическом языке условие задачи означает, что требуется найти все значения параметра a, при каждом из которых окружность с центром в точке $(-2a+1;-5a+2)$ и радиусом 2 касается окружности с центром в точке $(3a-1;6a-5)$ и радиусом 3. Это возможно в том и только том случае, если расстояние между центрами окружностей равно сумме радиусов (внешнее касание) или разности радиусов (внутреннее касание). Таким образом, получаем два уравнения: $\sqrt{(5a-2)^2+(11a-7)^2}=5$ или $\sqrt{(5a-2)^2+(11a-7)^2}=1$. Корнями первого уравнения являются числа $\frac{14}{73}$ и 1, а второе уравнение не имеет корней.

Ответ: $\frac{14}{73}$; 1.

В заключение параграфа рассмотрим несколько более сложных задач, связанных с геометрическими интерпретациями, предлагавшихся в разные годы на едином государственном экзамене по математике (задача 20).

Пример 6. Найдите все значения параметра, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2+(y-4)^2=16, \\ \sqrt{x^2+(y-12)^2}+\sqrt{(x-a)^2+y^2}=\sqrt{a^2+144}. \end{cases}$$

Решение. Первое уравнение системы является уравнением окружности с центром $C(0;4)$ и радиусом 4. Левая часть второго уравнения равна сумме расстояний от точки $M(x;y)$ координатной плоскости Oxy до точек $A(0;12)$ и $B(a;0)$ этой плоскости. Заметим, что длина отрезка AB равна $\sqrt{(0-a)^2+(12-0)^2}=\sqrt{a^2+144}$, т. е. равна правой части второго уравнения системы. Поэтому $MA+MB=AB$, откуда следует, что точка $M(x;y)$ принадлежит отрезку AB. Теперь условие задачи можно перевести с языка формул на язык расстояний: решить задачу — значит найти все значения параметра a, при каждом из которых существует единственная точка $M(x;y)$ координатной плоскости Oxy, которая принадлежит как окружности с центром $C(0;4)$ и радиусом 4, так и отрезку с концами $A(0;12)$ и $B(a;0)$. Таким образом, требуется найти такое положение точки $B(a;0)$ на оси абсцисс, при котором прямая AB касается окружности в точке $M(x;y)$. Последнее возможно в двух случаях (см. рис. 3), при этом соответственные значения параметра равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. В любом случае отрезок CM является радиусом, проведённым в точку касания, т. е. $CM=4$. Но $CA=8$, зна-

чит, угол $CAM = 30°$. Поэтому $OB = OA \cdot \operatorname{tg} 30° = 12 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$ (где точка O — начало координат). Следовательно, $a = \pm 4\sqrt{3}$.

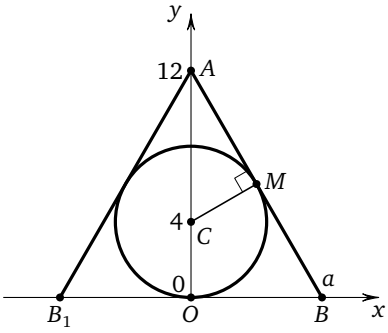


Рис. 3

Ответ: $a = \pm 4\sqrt{3}$.

Пример 7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (|x| - 6)^2 + (y - 12)^2 = 4, \\ (x + 1)^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

Решение. При $x \geqslant 0$ уравнение $(|x| - 6)^2 + (y - 12)^2 = 4$ является уравнением окружности ω_1 с центром в точке $C_1(6; 12)$ и радиусом 2. При $x < 0$ это уравнение является уравнением окружности ω_2 с центром в точке $C_2(-6; 12)$ и тем же радиусом (см. рис. 4).

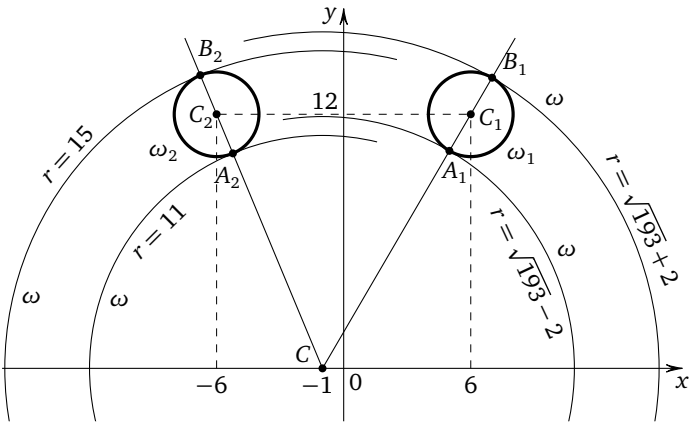


Рис. 4

Если $a=0$, второе уравнение данной системы принимает вид $(x+1)^2+y^2=0$, откуда $x=1$, $y=0$. Эти числа не являются решением первого уравнения системы. Если $a\neq 0$, второе уравнение данной системы является уравнением окружности ω с центром в точке $C(-1;0)$ и радиусом $r=|a|$. Таким образом, требуется найти все отличные от нуля значения параметра a, при каждом из которых окружность ω имеет единственную общую точку с объединением окружностей ω_1 и ω_2.

Из точки C проведём луч CC_1 и обозначим через A_1 и B_1 точки его пересечения с окружностью ω_1, где A_1 лежит между C и C_1. Так как $CC_1=\sqrt{(6+1)^2+12^2}=\sqrt{193}$, получаем, что $CA_1=\sqrt{193}-2$, $CB_1=\sqrt{193}+2$.

При $r<CA_1$ или $r>CB_1$ окружности ω и ω_1 не пересекаются.

При $CA_1<r<CB_1$ окружности ω и ω_1 имеют две общие точки.

При $r=CA_1$ или $r=CB_1$ окружности ω и ω_1 касаются.

Из точки C проведём луч CC_2 и обозначим через A_2 и B_2 точки его пересечения с окружностью ω_2, где A_2 лежит между C и C_2. Так как $CC_2=\sqrt{(-6+1)^2+12^2}=13$, получаем, что $CA_2=13-2=11$, $CB_2=13+2=15$.

При $r<CA_2$ или $r>CB_2$ окружности ω и ω_2 не пересекаются.

При $CA_2<r<CB_2$ окружности ω и ω_2 имеют две общие точки.

При $r=CA_2$ или $r=CB_2$ окружности ω и ω_2 касаются.

Данная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность ω касается ровно одной из двух окружностей ω_1 и ω_2 и не имеет ни одной общей точки с другой окружностью. Так как $CA_2<CA_1<CB_2<CB_1$, условию задачи удовлетворяют только числа $r=11$ и $r=\sqrt{193}+2$, откуда $a=\pm 11$ или $a=\pm(\sqrt{193}+2)$.

Ответ: $-\sqrt{193}-2$; -11; 11; $\sqrt{193}+2$.

Пример 8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет ровно три различных решения система уравнений

$$\begin{cases}(x-4)^2+(y-4)^2=9,\\ y=|x-a|+1.\end{cases}$$

Решение. Первое уравнение системы является уравнением окружности с центром в точке $(4;4)$ и радиусом 3. График функции $y=|x-a|+1$ получается параллельным переносом на вектор $\vec{l}(a;1)$ графика функции $y=|x|$. Поскольку график функции $y=|x|$ представляет собой прямой угол с вершиной в точке $(0;0)$ и сторонами, лежащими на прямых $y=x$ и $y=-x$ выше оси абсцисс, график функции $y=|x-a|+1$ также представляет собой прямой угол, но с вершиной

в точке $(a; 1)$ и сторонами, параллельными прямым $y = x$ и $y = -x$ (см. рис. 5). Сразу же заметим, что прямая $y = 1$, на которой лежит вершина угла, является касательной к окружности.

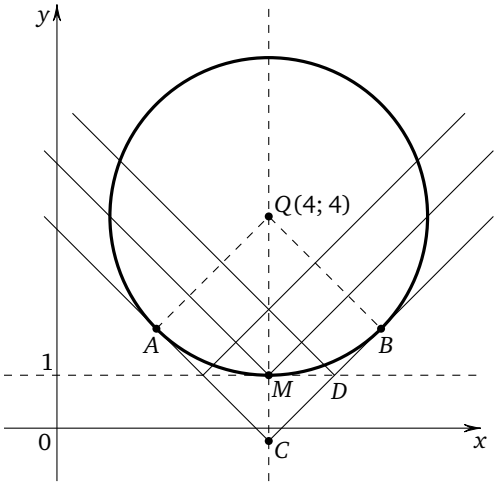


Рис. 5

Ровно три общие точки фигуры имеют в следующих случаях.

1. Вершина прямого угла лежит в точке M касания окружности и прямой $y = 1$, а его стороны пересекают окружность в двух точках (первый случай). Это возможно, только если $a = 4$.

2. Одна из сторон прямого угла пересекает окружность в двух точках, а другая касается окружности в точке A (второй случай) или в точке B (третий случай). Найдём значения параметра для этих двух случаев. Поскольку радиус окружности, проведённый в точку касания окружности и прямой, перпендикулярен прямой, четырёхугольник $BQAC$ является квадратом со стороной 3 и диагональю $3\sqrt{2}$. Тогда $MD = MC = QC - QM = 3\sqrt{2} - 3$. Следовательно, для случая касания в точке B получаем $a = 3\sqrt{2} - 3 + 4 = 1 + 3\sqrt{2}$. Для касания стороны угла и окружности в точке A аналогично получаем ещё одно значение параметра: $a = 4 - (3\sqrt{2} - 3) = 7 - 3\sqrt{2}$.

При $a < 7 - 3\sqrt{2}$ или $a > 1 + 3\sqrt{2}$ прямой угол имеет не более двух общих точек с окружностью.

При $7 - 3\sqrt{2} < a < 4$ или $4 < a < 1 + 3\sqrt{2}$ прямой угол имеет четыре общие точки с окружностью.

Ответ: $7 - 3\sqrt{2}$; 4; $1 + 3\sqrt{2}$.

Пример 9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых следующая система уравнений имеет хотя бы одно решение $(x; y; z)$:

$$\begin{cases} (x-4\sin z)^2+(y+4\cos z)^2=1, \\ |x|+|y|=a. \end{cases}$$

Решение. При любом действительном значении z первое уравнение данной системы является уравнением окружности ω плоскости Oxy с радиусом, равным 1, и центром в точке $(x_0; y_0)$, где $x_0=4\sin z$, $y_0=-4\cos z$. Поскольку $x_0^2+y_0^2=16$, центр окружности ω в свою очередь лежит на окружности с центром в начале координат и радиусом 4. Таким образом, множеством всех точек $(x; y)$ плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют первому уравнению данной системы, является кольцо, заключённое между двумя концентрическими окружностями (включая сами эти окружности) с центром в начале координат и радиусами 3 и 5 (рис. 6). Если $a \leqslant 0$,

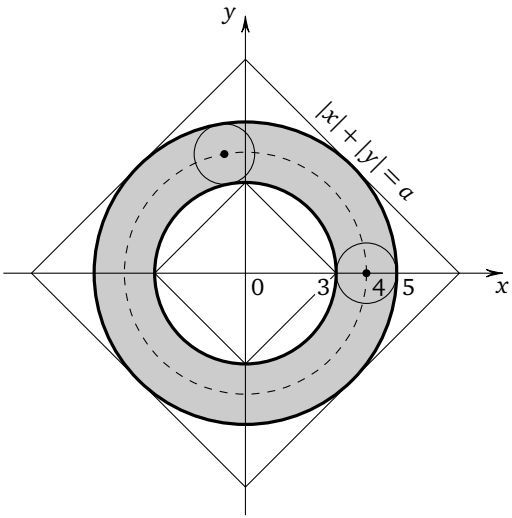


Рис. 6

данная система, очевидно, решений не имеет. Если $a>0$, множеством всех точек $(x; y)$ плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют второму уравнению данной системы, является квадрат с диагональю $2a$ и стороной $a\sqrt{2}$, ограниченный прямыми $y=a-x$ (при $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$), $y=a+x$ (при $x\leqslant 0$, $y\geqslant 0$), $y=-a-x$ (при $x\leqslant 0$, $y\leqslant 0$) и $y=-a+x$ (при $x\geqslant 0$, $y\leqslant 0$). Данная система имеет хотя бы одно

решение в тех и только тех случаях, когда квадрат либо вписан в меньшую окружность, ограничивающую кольцо (в этом случае $a = 3$), либо описан около большей окружности, ограничивающей кольцо (в этом случае $\frac{a\sqrt{2}}{2} = 5$, откуда $a = 5\sqrt{2}$), либо занимает промежуточное положение между двумя этими положениями (в этом случае $3 < a < 2\sqrt{5}$).

Ответ: $[3; 5\sqrt{2}]$.

Упражнения к § 4.3

1. а) Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{(x-2)^2+16} + \sqrt{(x-10)^2+4}.$$

б) Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{(x+3)^2+4} + \sqrt{(x-9)^2+9}.$$

2. а) Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2+9} + \sqrt{x^2-8x+20}.$$

б) Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-24x+153}.$$

3. а) Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2+6x+25} + \sqrt{x^2-10x+29}.$$

б) Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2+8x+20} + \sqrt{x^2-16x+73}.$$

4. а) Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{(x-3)^2+(x-7)^2} + \sqrt{(x-15)^2+(x-2)^2}.$$

б) Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{(x-1)^2+(x-2)^2} + \sqrt{(x-7)^2+(x+6)^2}.$$

5. а) Решите уравнение $\sqrt{x^2-6x+58} + \sqrt{x^2+10x+89} = 17$.

б) Решите уравнение $\sqrt{x^2+8x+20} + \sqrt{x^2-10x+125} = 15$.

6. а) Решите неравенство $\sqrt{x^2-20x+109}+\sqrt{x^2-2x+82}\leqslant 15$.

б) Решите неравенство $\sqrt{x^2+6x+58}+\sqrt{x^2-4x+29}\leqslant 13$.

7. а) Решите неравенство

$$\sqrt{(2x-1)^2+(x-7)^2}+\sqrt{(2x-13)^2+(x-2)^2}\leqslant 13.$$

б) Решите неравенство

$$\sqrt{(x-2)^2+(3x-7)^2}+\sqrt{(x-8)^2+(3x+1)^2}\leqslant 10.$$

8. а) Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения

$$(a-c)^2+(b-d)^2,$$

если числа a, b, c, d таковы, что

$$\begin{cases} a^2+b^2=4,\\ c^2+d^2=36. \end{cases}$$

б) Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения

$$(a+u)^2+(b+v)^2,$$

если числа a, b, u, v таковы, что

$$\begin{cases} a^2+b^2=64,\\ u^2+v^2=25. \end{cases}$$

9. а) Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения

$$(a+d)^2+(b-p)^2+(c+q)^2,$$

если числа a, b, c, d, p, q таковы, что

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=4,\\ d^2+p^2+q^2=121. \end{cases}$$

б) Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения

$$(a+d)^2+(b+p)^2+(c-q)^2,$$

если числа a, b, c, d, p, q таковы, что

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=25,\\ d^2+p^2+q^2=81. \end{cases}$$

10. а) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+(y-15)^2}+\sqrt{(x-8)^2+y^2}=17,\\ \sqrt{x^2+(y-12)^2}+\sqrt{(x-16)^2+y^2}=20. \end{cases}$$

б) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+(y-8)^2}+\sqrt{(x-6)^2+y^2}=10, \\ \sqrt{(x-5)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-12)^2}=13. \end{cases}$$

11. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=6x-16+8y, \\ (x-6)^2+(y-8)^2=a^2. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=8x-37+10y, \\ (x-7)^2+(y-9)^2=a^2. \end{cases}$$

12. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (x-2a-3)^2+(y-3a-5)^2=100, \\ (x-3a-8)^2+(y-4a-3)^2=9. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (x-5a-6)^2+(y-4a+5)^2=36, \\ (x-6a-5)^2+(y-5a+8)^2=16. \end{cases}$$

13. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (x-a-2)^2+(y-a-4)^2=(2a-1)^2, \\ (x-2a+1)^2+(y-2a-3)^2=(a-1)^2. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (x-a-1)^2+(y-a-3)^2=(2a-3)^2, \\ (x-2a+3)^2+(y-2a-1)^2=(a-2)^2. \end{cases}$$

14. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2+(y-6)^2=36, \\ \sqrt{x^2+(y-18)^2}+\sqrt{(x-a)^2+y^2}=\sqrt{a^2+324}. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2+(y-5)^2=25, \\ \sqrt{x^2+(y-15)^2}+\sqrt{(x-a)^2+y^2}=\sqrt{a^2+225}. \end{cases}$$

15. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет ровно два решения система уравнений

$$\begin{cases} (x+a-8)^2+(y-a)^2=32, \\ \sqrt{x^2+(y-8)^2}+\sqrt{(x-8)^2+y^2}=8\sqrt{2}. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет ровно два решения система уравнений

$$\begin{cases} (x+a-10)^2+(y-a)^2=50, \\ \sqrt{x^2+(y-10)^2}+\sqrt{(x-10)^2+y^2}=10\sqrt{2}. \end{cases}$$

16. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} y^2-(2a+1)y+a^2+a-2=0, \\ \sqrt{(x-a)^2+y^2}+\sqrt{(x-a)^2+(y-3)^2}=3. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} y^2+(2a+5)y+a^2+5a+4=0, \\ \sqrt{(x+a)^2+(y+3)^2}+\sqrt{(x+a)^2+y^2}=3. \end{cases}$$

17. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (|x|-5)^2+(y-4)^2=9, \\ (x+2)^2+y^2=a^2. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (|x|-10)^2+(y-5)^2=16, \\ (x+2)^2+y^2=a^2. \end{cases}$$

18. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет ровно три различных решения система уравнений

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-6)^2=25, \\ y=|x-a|+1. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет ровно три различных решения система уравнений

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y-5)^2=9, \\ y=|x-a|+2. \end{cases}$$

19. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет ровно три решения система уравнений

$$\begin{cases} y+a=|x|+5, \\ x^2+(y-2a+5)^2=4. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет ровно три решения система уравнений

$$\begin{cases} y+6=|x|+a, \\ x^2+(y+3a-13)^2=9. \end{cases}$$

20. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} y=a|x|+a+2, \\ x^2+(y-a^2)^2=16. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} y=a|x|+a+1, \\ x^2+(y+a^2)^2=9. \end{cases}$$

21. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y=\sqrt{3}|x|+4a+5, \\ x^2+(y-5a-4)^2=36 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите число решений системы для каждого значения a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y=\sqrt{3}|x|+5a+4, \\ x^2+(y-6a-5)^2=49 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите число решений системы для каждого значения a.

22. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет хотя бы одно решение $(x;\,y;\,z)$ система уравнений

$$\begin{cases} (x+3\sin z)^2+(y+3\cos z)^2=4,\\ |x|+|y|=a. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых следующая система уравнений имеет хотя бы одно решение $(x;\,y;\,z)$:

$$\begin{cases} (x-5\sin z)^2+(y-5\cos z)^2=9,\\ |x|+|y|=a. \end{cases}$$

23. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых следующая система уравнений имеет хотя бы одно решение $(x;\,y;\,z)$:

$$\begin{cases} (x+\sqrt{25-z})^2+(y-\sqrt{z})^2=9,\\ a+x=y. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых следующая система уравнений имеет хотя бы одно решение $(x;\,y;\,z)$:

$$\begin{cases} (x-\sqrt{z})^2+(y-\sqrt{16-z})^2=4,\\ x+y=a. \end{cases}$$

24. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет ровно два решения система неравенств

$$\begin{cases} 16y^2\geqslant 9x^2,\\ (x-6a+1)^2+y^2\leqslant 9a^2. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет ровно два решения система неравенств

$$\begin{cases} 9y^2\geqslant 16x^2,\\ (x-7a+4)^2+y^2\leqslant 16a^2. \end{cases}$$

25. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет конечное число решений система неравенств

$$\begin{cases} (y-3x)(3y-x)\leqslant 0,\\ (x-a)^2+(y+a)^2\leqslant 16a. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет конечное число решений система неравенств

$$\begin{cases} (y-4x)(4y-x)\leqslant 0,\\ (x-a)^2+(y+a)^2\leqslant 25a. \end{cases}$$

26. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2-2x+y^2-4y=2|x+2y-5|, \\ 2x-y=a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2-8x+y^2+4y+15=4|2x-y-10|, \\ x+2y=a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

27. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |3x-y+2| \leqslant 12, \\ (x-3a)^2+(y+a)^2=3a+4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x+2y+1| \leqslant 11, \\ (x-a)^2+(y-2a)^2=a+2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

28. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2=5xy, \\ (x-a)^2+(y-a)^2=5a^4 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2=10xy, \\ (x-a)^2+(y-a)^2=10a^4 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

29. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x-4)^2+(y-a)^2}+\sqrt{(x-7)^2+(y-a)^2}=3, \\ \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=5 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x-6)^2+(y-a)^2}+\sqrt{(x-10)^2+(y-a)^2}=4, \\ \sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}=10 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

30. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x-2y-2=|x^2+y^2-1|, \\ y=a(x-1) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 4x-4y-8=|x^2+y^2-4|, \\ y=a(x-2) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

31. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+5x+y^2-y-|x-5y+5|=52, \\ y-2=a(x-5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+7x+y^2+y-|x-5y+1|=46, \\ y-1=a(x-4) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

32. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+|x^2-2x|=y^2+|y^2-2y|, \\ x+y=a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+|x^2-x|=y^2+|y^2-y|, \\ 2x+2y=a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

33. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y^2 - x - 2 = |x^2 - x - 2|, \\ x - y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2y^2 - x - 1 = |2x^2 - x - 1|, \\ 2x - 2y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

34. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 20x + y^2 - 20y + 75 = |x^2 + y^2 - 25|, \\ x - y = a \end{cases}$$

имеет более одного решения.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 4x + y^2 - 4y + 3 = |x^2 + y^2 - 1|, \\ 5x - 5y = a \end{cases}$$

имеет более одного решения.

Глава 5. Другие методы

Эта глава посвящена менее общим по сравнению с рассмотренными ранее методам решения нестандартных уравнений и неравенств (в том числе, уравнений и неравенств с параметром). Знакомство с этими методами и овладение ими помогут более уверенно чувствовать себя на экзамене по математике любого уровня сложности, в частности, при решении заданий части 2 Единого государственного экзамена по математике.

§ 5.1. Метод упрощающего значения

В этом параграфе будут рассмотрены задачи, ключевым признаком каждой из которых является наличие слова «любой» или его производных (как правило, относящихся к параметру, но иногда и к переменной) в формулировке. К некоторым (далеко не ко всем!) из таких задач применима следующая идея решения. Поскольку параметр может принимать любые значения из некоторого множества, можно попытаться подобрать такое его значение из этого множества, что при подстановке этого значения в данное уравнение или неравенство удаётся упростить задачу, сведя её к стандартному уравнению или неравенству. В силу этого будем называть рассматриваемый метод (устоявшейся терминологии нет) методом упрощающего значения.

Пример 1. Найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\log_2(a^2x^3 - 5a^2x^2 + \sqrt{6-x}) = \log_{a^2+2}(3 - \sqrt{x-1})$$

при любом значении параметра a.

Решение. Понятно, что стандартными способами решить это уравнение невозможно: основания логарифмов различны, причём одно из них является числовым, а другое зависит от параметра, а переход к одному основанию ещё больше усложнит задачу. Попробуем применить идею, изложенную выше. Поскольку нужно найти все значения x, удовлетворяющие данному уравнению при любом значении параметра a, постараемся подобрать такое значение параметра, при котором решение уравнения стандартными способами не будет представлять особых сложностей. В данном случае такое упрощающее значение достаточно очевидно: это $a = 0$. При $a = 0$ уравнение примет вид $\log_2 \sqrt{6-x} = \log_2(3 - \sqrt{x-1})$. Основания логарифмов одинаковы, поэтому числа под знаками логарифмов равны, причём каждое из них должно быть положительным. В силу равенства чисел

условие положительности достаточно записать только для одного из них. Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} \sqrt{6-x} = 3 - \sqrt{x-1}, \\ 3 - \sqrt{x-1} > 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} 6 - x = (3 - \sqrt{x-1})^2, \\ \sqrt{x-1} < 3. \end{cases}$$

После очевидных преобразований последняя система примет вид

$$\begin{cases} 3\sqrt{x-1} = x + 1, \\ 1 \leqslant x < 10. \end{cases}$$

Поскольку обе части уравнения системы неотрицательны (левая — в силу неотрицательности арифметического квадратного корня, правая — в силу неравенства системы), можно обе части уравнения возвести в квадрат:

$$\begin{cases} 9x - 9 = x^2 + 2x + 1, \\ 1 \leqslant x < 10, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x^2 - 7x + 10 = 0, \\ 1 \leqslant x < 10. \end{cases}$$

Корнями квадратного уравнения являются числа 2 и 5, каждое из которых удовлетворяет неравенству системы. Итак, при $a = 0$ данное уравнение может иметь только два корня: $x = 2$ и $x = 5$. Остаётся проверить (и эта часть решения является не менее важной, чем предыдущая), какие из найденных значений x являются корнями данного уравнения не только при $a = 0$, но и при любых других значениях параметра a. Пусть $x = 2$. Тогда уравнение примет вид $\log_2(2 - 12a^2) = \log_{a^2+2} 2$. Ясно, что оно выполняется не при любом значении a — хотя бы потому, что его левая часть определена не при любом значении параметра. Пусть $x = 5$. Тогда данное уравнение примет вид $\log_2 1 = \log_{a^2+2} 1$. Полученное равенство является тождеством и выполняется при всех значениях параметра a, поскольку обе части этого равенства тождественно равны нулю при любом a.

Ответ: 5.

Пример 2. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых при любом значении параметра b следующая система уравнений имеет хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} 2(1 + |y|)^a + (b^2 - 2b + 2)^z = 3, \\ zy(z + b - 1) = 2a^2 - 3a + 1. \end{cases}$$

Решение. Здесь подобрать упрощающее значение параметра нёсколько сложней, чем в предыдущем примере. Выделив полный квадрат, второе слагаемое в левой части первого уравнения системы можно привести к виду $((b-1)^2 + 1)^z$. Наиболее простой вид это слагаемое будет иметь при $b = 1$. Так как система должна иметь решение при

любом значении параметра b, она должна иметь решение и при $b=1$. При $b=1$, как легко видеть, вся система существенно упрощается и принимает вид

$$\begin{cases} (1+|y|)^a = 1, \\ z^2 y = 2a^2 - 3a + 1. \end{cases}$$

Так как $|y| \geqslant 0$ при любом y, получаем, что $1+|y| \geqslant 1$ при любом y. Поэтому если $y \neq 0$ и $a > 0$, то $(1+|y|)^a > 1$; если $y \neq 0$ и $a < 0$, то $(1+|y|)^a < 1$. Отсюда следует, что $(1+|y|)^a = 1$ только при $a=0$ или $y=0$. Если $y=0$, то из второго уравнения последней системы получаем, что $2a^2 - 3a + 1 = 0$, т. е. $a=1$ либо $a=0{,}5$. Таким образом, при $b=1$ система может иметь хотя бы одно решение лишь в трёх случаях: $a=0$, $a=1$, $a=0{,}5$. Проверим, действительно ли при этих значениях a система имеет хотя бы одно решение при любом значении b.

Пусть $a=0$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} (b^2-2b+2)^z = 1, \\ zy(z+b-1) = 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} ((b-1)^2+1)^z = 1, \\ zy(z+b-1) = 1. \end{cases}$$

Понятно, что первое уравнение полученной системы будет выполнено при любых значениях параметра b только в случае $z=0$. Но тогда левая часть второго уравнения обращается в нуль, а правая его часть отлична от нуля. Следовательно, второе уравнение системы (а значит, и вся система) решений не имеет. Итак, при $a=0$ данная система имеет решение не при любых значениях параметра b.

Пусть $a=1$ или $a=0{,}5$. Тогда данная система примет вид

$$\begin{cases} 2(1+|y|)^a + (b^2-2b+2)^z = 3, \\ zy(z+b-1) = 0. \end{cases}$$

Ясно, что пара чисел $y=0$, $z=0$ является решением системы при любом значении b.

Ответ: 0,5; 1.

Эти два примера демонстрируют основную идею, использующуюся при решении подобных задач. Параметр может принимать любые значения, поэтому, подобрав такое значение параметра, которое существенно упрощает задачу, мы тем самым ограничиваем число возможных решений. После этого остаётся показать, действительно ли эти решения будут решениями задачи при любых допустимых значениях параметра, а не только при упрощающих. Последний этап в решении является обязательным, так как из того, что задача имеет решение при некотором конкретном значении параметра, ещё не следует, что она будет иметь решение и при любых других значениях

этого параметра. Рассмотрим ещё одну задачу, в которой указанную идею приходится применять лишь после некоторых преобразований.

Пример 3. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых для любого значения параметра a следующее неравенство имеет хотя бы одно решение:

$$\left|\log_4 \frac{x}{16} - \frac{7a+10b-11}{5}x^2 - 49a^2 + 21a - 1\right| \leqslant$$
$$\leqslant \log_4 \frac{16}{x} - \frac{7a+10b-21}{5}x^2 + 2(7a-1)x + 49a^2 - 35a + 3.$$

Решение. Здесь не сразу можно сказать, какое значение параметра a является упрощающим. Поскольку $|f(x)| \leqslant g(x)$ в том и только том случае, если

$$\begin{cases} f(x) \leqslant g(x), \\ f(x) \geqslant -g(x), \end{cases}$$

данное неравенство после преобразований приводится к системе

$$\begin{cases} \log_4 x \leqslant x^2 + (7a-1)x + (7a-2)^2, \\ \dfrac{7a+10b-16}{5}x^2 - (7a-1)x + 7a - 1 \leqslant 0. \end{cases}$$

Теперь понятно, какое значение параметра является упрощающим: это $a = \frac{1}{7}$. Обозначим $7a-1$ через p, чтобы ещё больше упростить систему. Поскольку a принимает любые значения, p тоже принимает любые значения, и наоборот. Поэтому в дальнейшем о параметре a можно «забыть». С учётом нового обозначения последняя система приводится к виду

$$\begin{cases} \log_4 x \leqslant x^2 + px + (p-1)^2, \\ \dfrac{p+10b-15}{5}x^2 - px + p \leqslant 0. \end{cases}$$

Так как p может принимать любые значения, положив $p = 0$ (т. е. $a = \frac{1}{7}$), получим, что второе неравенство последней системы примет вид $(2b-3)x^2 \leqslant 0$. Поскольку $\log_4 x$ определён лишь при $x > 0$, для выполнения неравенства $(2b-3)x^2 \leqslant 0$ необходимо, чтобы выполнялось неравенство $2b - 3 \leqslant 0$, т. е. $b \leqslant 1{,}5$. Попробуем доказать, что это условие является достаточным, т. е. что при $b \leqslant 1{,}5$ система

$$\begin{cases} \log_4 x \leqslant x^2 + px + (p-1)^2, \\ \dfrac{p+10b-15}{5}x^2 - px + p \leqslant 0 \end{cases}$$

(а следовательно, и данное неравенство) имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра p (а следовательно, и при любом значении параметра a). Второе неравенство системы можно переписать в виде $\frac{p}{5}\cdot(x^2-5x+5)+(2b-3)x^2\leqslant 0$. Квадратный трёхчлен x^2-5x+5 обращается в нуль при $x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$, и, поскольку $b\leqslant 1{,}5$, эти два числа являются решениями неравенства $\frac{p}{5}\cdot(x^2-5x+5)+(2b-3)x^2\leqslant 0$ при любом p. Далее, $\log_4 x<x$ при $x>0$ (докажите!), а $x^2+px+(p-1)^2\geqslant x$ при любых p и любых x. Последнее следует из того, что дискриминант $D=-3(p-1)^2$ квадратного трёхчлена $x^2+(p-1)x+(p-1)^2$ неположителен, а значит, неравенство $x^2+(p-1)x+(p-1)^2\geqslant 0$ выполняется при любом значении x, откуда и следует выполнение неравенства $x^2+px+(p-1)^2\geqslant x$ при любом значении x. Итак, $\log_4 x<x\leqslant x^2+px+(p-1)^2$, т. е. $\log_4 x\leqslant x^2+px+(p-1)^2$ при любых положительных значениях x и, в частности, при $x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$. Тем самым доказано, что числа $x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$ являются решениями системы

$$\begin{cases}\log_4 x\leqslant x^2+px+(p-1)^2,\\ \dfrac{p+10b-15}{5}x^2-px+p\leqslant 0\end{cases}$$

при любых p и $b\leqslant 1{,}5$. Итак, при $b\leqslant 1{,}5$ эта система (а значит, и данное неравенство) имеет решение при любом значении параметра p (а значит, и параметра a).

Ответ: $(-\infty;\,1{,}5]$.

Замечание. В примере 3, в отличие от предыдущих, допустимыми значениями параметра явились не отдельные числа, а промежуток. Достаточно часто в таких случаях именно найденный промежуток и является решением задачи, что, в свою очередь, требует строгого обоснования, так как находится этот промежуток исходя из необходимых условий существования решения, а достаточность, естественно, требует дополнительных обоснований.

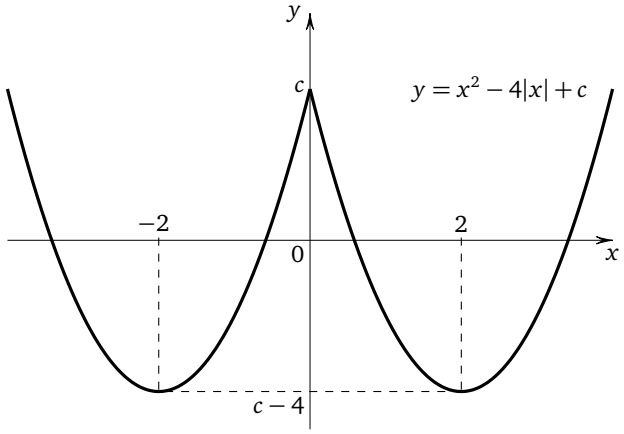
Пример 4. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых при любом значении параметра b уравнение

$$x^2-4|x|-7|b-a|+3|b-3|-2b+5a-15=0$$

имеет ровно два корня.

Решение. Обозначим $-7|b-a|+3|b-3|-2b+5a-15$ через c и рассмотрим график чётной функции $y=x^2-4|x|+c$, состоящий из

двух частей парабол $y = x^2 - 4x + c$ (при $x \geqslant 0$) и $y = x^2 + 4x + c$ (при $x < 0$) с вершинами в точках $(2; c-4)$ и $(-2; c-4)$ соответственно. При $c < 0$ график пересекает ось абсцисс в двух точках; при $c = 0$ — в трёх точках, при $0 < c < 4$ — в четырёх точках; при $c = 4$ — в двух точках; при $c > 4$ график не имеет с осью абсцисс ни одной общей точки.



Данное уравнение имеет ровно два корня, если график пересекает ось абсцисс в двух точках, т. е. если $c = 4$ или $c < 0$. Рассмотрим оба этих случая.

Пусть $c = 4$, т. е. $-7|b-a| + 3|b-3| - 2b + 5a - 15 = 4$, откуда $7|b-a| - 3|b-3| + 2b - 5a + 19 = 0$. Последнее равенство должно выполняться при любом значении b, в частности при $b = 3$. В этом случае получаем $7|3-a| + 6 - 5a + 19 = 0$, или $7|a-3| = 5a - 25$. В силу неотрицательности модуля корни последнего уравнения должны удовлетворять неравенству $5a - 25 \geqslant 0$, т. е. неравенству $a \geqslant 5$. Но тогда $7a - 21 = 5a - 25$ и $a = -2$ либо $7a - 21 = 25 - 5a$ и $a = \frac{23}{6}$. Ни одно из найденных значений a не удовлетворяет неравенству $a \geqslant 5$. Следовательно, в этом случае решений нет.

Пусть $c < 0$, т. е. $-7|b-a| + 3|b-3| - 2b + 5a - 15 < 0$. Обозначим $g(b) = -7|b-a| + 3|b-3| - 2b + 5a - 15$. График непрерывной функции $y = g(b)$ представляет собой ломаную, состоящую из отрезков прямых и лучей. При $b > a$ каждое звено ломаной является частью прямой вида $y = kb + l$, где $k < 0$ (поскольку вне зависимости от «раскрытия» второго модуля коэффициент при b будет отрицательным). Следовательно, при $b > a$ функция $y = g(b)$ убывает. Совершенно аналогично можно показать, что при $b < a$ функция $y = g(b)$

возрастает. Поэтому в точке $b = a$ эта функция достигает своего наибольшего значения, т. е. $\max g(b) = g(a)$. Поэтому неравенство $-7|b-a| + 3|b-3| - 2b + 5a - 15 < 0$ будет выполняться при любом значении b в том и только том случае, если $\max g(b) < 0$, т. е. если $g(a) < 0$. Но $g(a) = 3|a-3| + 3a - 15$. Остаётся решить неравенство $3|a-3| + 3a - 15 < 0$. Преобразуем неравенство к виду $|a-3| < 5 - a$ и перейдём к системе

$$\begin{cases} a - 3 < 5 - a, \\ a - 3 > a - 5. \end{cases}$$

Второе неравенство системы выполняется при любом значении a; из первого неравенства получаем $a < 4$.

Ответ: $(-\infty; 4)$.

Упражнения к § 5.1

1. а) Найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$2\log_{a^2+2}(4 - \sqrt{7+2x}) = \log_{2+a^2x^2}(4-3x)$$

при любом значении параметра a.

б) Найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$2\log_{3a^2+2}(7 - \sqrt{34+x}) = \log_{2a^2+3}(3-x)$$

при любом значении параметра a.

2. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых при любом значении параметра b следующая система уравнений имеет хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} (1+3x)^{2a} + (b^2 - 4b + 5)^y = 2, \\ x^2y^2 - (2-b)xy + a^2 + 2a = 3. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых при любом значении параметра b следующая система уравнений имеет хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} 2(1+|z|)^a + (b^2 - 2b + 2)^y = 3, \\ zy(y + b - 2) = 2a^2 - 7a + 3. \end{cases}$$

3. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых при любом значении параметра b следующая система уравнений имеет хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} (x^2+1)^a + (b^2+1)^y = 2, \\ a + bxy + x^2y = 1. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых при любом значении параметра b следующая система уравнений имеет хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} 2^{bx} + (a+1)by^2 = a^2, \\ (a-1)x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

4. а) Найдите все значения параметра b, при каждом из которых для любого значения параметра a следующее неравенство имеет хотя бы одно решение:

$$\left|\log_6 \frac{x}{36} + \frac{10b+3a+31}{5}x^2 - 9a^2 - 9a - 1\right| \leqslant$$
$$\leqslant \log_6 \frac{36}{x} + \frac{10b+3a+41}{5}x^2 - 2(3a+1)x + 9a^2 + 15a + 3.$$

б) Найдите все значения параметра b, при каждом из которых для любого значения параметра a следующее неравенство имеет хотя бы одно решение:

$$\left|\log_5 \frac{x}{25} - \frac{a+5b-11}{5}x^2 - a^2 + 3a - 1\right| \leqslant$$
$$\leqslant \log_5 \frac{25}{x} - \frac{a+5b-21}{5}x^2 + 2(a-1)x + a^2 - 5a + 3.$$

5. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых при любом значении параметра b уравнение

$$x^2 - 4|x| - 7|a+b+1| + 3|b-1| - 2b - 5a - 14 = 0$$

имеет ровно два корня.

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых при любом значении параметра b уравнение

$$x^2 - 4|x| - 7|a+2b-1| + 3|2b+3| - 4b + 5a - 20 = 0$$

имеет ровно два корня.

6. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения x выполнено неравенство

$$a(4 - \sin x)^4 - 3 + \cos^2 x + a > 0.$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения x выполнено неравенство

$$2a - 4 + a(3 - \sin^2 x)^2 + \cos^2 x < 0.$$

7. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения x справедливо неравенство $\log_{\frac{a+1}{a+2}}(x^2+3) > 1$.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения x справедливо неравенство $\log_{\frac{a}{a+1}}(x^2+2)>1$.

8. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых возрастает и не имеет критических точек на всей прямой функция $y(x)=8ax-a\sin 6x-7x-\sin 5x$.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых убывает и не имеет критических точек на всей прямой функция $y(x)=a\sin 7x+8ax+\sin 4x-5x$.

§ 5.2. Параметр как переменная

Этот параграф посвящён задачам двух типов, ключевой идеей решения для каждого из которых является рассмотрение параметра как переменной. Задачи первого типа представляют собой, как правило, целые рациональные уравнения (неравенства), причём степени переменных в этих уравнениях и неравенствах относительно высоки, а степень параметра не выше второй. Рассматривая или решая подобное уравнение (неравенство) как линейное или квадратное относительно параметра, часто удаётся ответить на вопрос задачи. Такой метод (назовём его методом решения относительно параметра) схож с методом решения уравнений или неравенств с несколькими переменными, рассматриваемых как линейные или квадратные относительно одной из них (см. § 2.1). Ко второму типу отнесём задачи, в которых требуется найти наименьшее или наибольшее значение некоторого выражения, зависящего (в большинстве случаев линейно) от нескольких переменных, при определённой связи между ними. В таких задачах нужно обозначить искомое выражение какой-то буквой, введя её в качестве параметра. Затем следует выразить одну из переменных через остальные и введённый параметр, подставить полученное выражение в уравнение (неравенство) связи и, рассматривая полученное уравнение как, например, квадратное относительно одной из оставшихся переменных, ответить на вопрос задачи, исследовав дискриминант уравнения. Такой метод будем называть методом введения параметра. Он схож с методом решения относительно параметра, но требует ещё одного предварительного шага — введения параметра. Этот метод можно с успехом использовать при решении некоторых типов задач с экономическим содержанием. Перейдём к примерам, начав с задач первого типа.

Пример 1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2x^3-(a+2)x^2-ax+a^2=0$ имеет хотя бы один ко-

рень, и указать корни уравнения для каждого из найденных значений a.

Решение. Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно параметра a, переписав его в виде $a^2-x(x+1)a-2x^2+2x^3=0$. Найдём дискриминант D этого уравнения:

$$D = x^2(x+1)^2-8(x^3-x^2) = x^4-6x^3+9x^2 = x^2(x-3)^2.$$

Далее, поскольку дискриминант является полным квадратом, получим, используя формулу корней квадратного уравнения, что

$$\left[\begin{array}{l} a = 2x, \\ a = x^2-x, \end{array}\right. \quad \text{откуда} \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{a}{2}, \\ x^2-x-a = 0. \end{array}\right.$$

Уравнение $x^2-x-a=0$ имеет хотя бы один корень в том и только том случае, если его дискриминант $4a+1$ неотрицателен. В этом случае $x=\frac{1\pm\sqrt{4a+1}}{2}$. Определим, при каких значениях $a>-\frac{1}{4}$ числа $\frac{a}{2}$ и $\frac{1\pm\sqrt{4a+1}}{2}$ равны. Для этого рассмотрим равенство $a=1\pm\sqrt{4a+1}$, или $a-1=\pm\sqrt{4a+1}$. После возведения обеих частей последнего равенства в квадрат и упрощений получим, что $a^2-6a=0$. Итак, $a=0$ или $a=6$. Оба найденных значения удовлетворяют условию $a>-\frac{1}{4}$. Поскольку при возведении в квадрат могут появиться посторонние корни, нужно сделать проверку. Подстановкой $a=0$ в уравнение $a=1\pm\sqrt{4a+1}$ убеждаемся, что при этом значении параметра выполняется равенство $a=1-\sqrt{4a+1}$, или $\frac{a}{2}=\frac{1-\sqrt{4a+1}}{2}$. Подстановкой $a=6$ в уравнение $a=1\pm\sqrt{4a+1}$ убеждаемся, что при этом значении параметра выполняется равенство $a=1+\sqrt{4a+1}$, или $\frac{a}{2}=\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$. Таким образом, если $a\in\left(-\frac{1}{4};0\right)\cup(0;6)\cup(6;\infty)$, данное уравнение имеет три корня: $x=\frac{a}{2}$, $x=\frac{1-\sqrt{4a+1}}{2}$, $x=\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$; если $a=0$, данное уравнение имеет два корня: $x=0$ и $x=1$; если $a=6$, данное уравнение имеет два корня: $x=-2$ и $x=3$; если $a=-\frac{1}{4}$, данное уравнение имеет два корня: $x=-\frac{1}{8}$ и $x=\frac{1}{2}$; если $a<-\frac{1}{4}$, данное уравнение имеет один корень $x=\frac{a}{2}$.

Ответ: если $a\in\left(-\frac{1}{4};0\right)\cup(0;6)\cup(6;\infty)$, то $x=\frac{a}{2}$, $x=\frac{1-\sqrt{4a+1}}{2}$, $x=\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$; если $a=0$, то $x=0$ и $x=1$; если $a=6$, то $x=-2$ и $x=3$; если $a=-\frac{1}{4}$, то $x=-\frac{1}{8}$ и $x=\frac{1}{2}$; если $a\in\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right)$, то $x=\frac{a}{2}$.

Пример 2. Найдите все целые значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$2x^7-4x^6+11x^5-18x^4+25x^3-2(a+16)x^2+25x-5a-23=0$$

имеет хотя бы один целый корень.

Решение. Заметим, что относительно параметра уравнение является линейным и его можно переписать в виде

$$(2x^2+5)a=2x^7-4x^6+11x^5-18x^4+25x^3-32x^2+25x-23,$$

откуда

$$a=\frac{2x^7-4x^6+11x^5-18x^4+25x^3-32x^2+25x-23}{2x^2+5}.$$

Деля «уголком» числитель правой части на знаменатель, получим $a=x^5-2x^4+3x^3-4x^2+5x-6+\frac{7}{2x^2+5}$. Поскольку по условию задачи числа a и x являются целыми, число $\frac{7}{2x^2+5}$ тоже должно быть целым, что (с учётом положительности числа $2x^2+5$) возможно, только если $2x^2+5=1$ или $2x^2+5=7$. Первое уравнение корней не имеет. Корнями второго уравнения являются $x=-1$ и $x=1$. Если $x=-1$, то $a=-1-2-3-4-5-6+1=-20$; если $x=1$, то $a=1-2+3-4+5-6+1=-2$.

Ответ: -20; -2.

Пример 3. Для каждого неотрицательного значения параметра a найдите множество решений неравенства $a^3x^4+6a^2x^2-x+9a+3\geqslant 0$.

Решение. Если $a=0$, то $x\leqslant 3$. Пусть теперь $a>0$. В этом случае, умножив обе части неравенства на положительное число a, получим $a^4x^4+6a^3x^2-ax+9a^2+3a\geqslant 0$. Временно обозначив ax через p, рассмотрим неравенство $p^4+6ap^2-p+9a^2+3a\geqslant 0$ как квадратное относительно a, переписав его в виде $9a^2+3(2p^2+1)a+p^4-p\geqslant 0$. Найдём дискриминант D квадратного трёхчлена в левой части последнего неравенства: $D=9(4p^4+4p^2+1)-36(p^4-p)=(6p+3)^2$. Следовательно, корнями квадратного трёхчлена $9a^2+3(2p^2+1)a+p^4-p$ являются $a=\frac{p-p^2}{3}$ и $a=-\frac{p^2+p+1}{3}$. Теперь, используя формулу разложения квадратного трёхчлена на множители, можно привести неравенство $9a^2+3(2p^2+1)a+p^4-p\geqslant 0$ к виду

$$9\left(a-\frac{p-p^2}{3}\right)\left(a+\frac{p^2+p+1}{3}\right)\geqslant 0.$$

Заметим, что $a+\frac{p^2+p+1}{3}>0$, поскольку $a>0$ и квадратный трёхчлен p^2+p+1 положителен при любом p в силу положительности старшего коэффициента и отрицательности дискриминанта. Поэтому

$a - \frac{p-p^2}{3} \geqslant 0$, откуда $p^2 - p + 3a \geqslant 0$. Возвращаясь к прежним обозначениям и деля обе части неравенства на a (что можно сделать в силу положительности a), получаем неравенство $ax^2 - x + 3 \geqslant 0$. Дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 - x + 3$ (ветви графика которого направлены вверх, так как $a > 0$) равен $1 - 12a$. Таким образом, если $0 < a < \frac{1}{12}$, то решением неравенства является множество $\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{1-12a}}{2a}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{1-12a}}{2a}; +\infty\right)$; если $a \geqslant \frac{1}{12}$, то неравенство выполняется при всех действительных x.

Ответ: если $a = 0$, то $x \in (-\infty; 3]$;
если $a \in \left(0; \frac{1}{12}\right)$, то $x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{1-12a}}{2a}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{1-12a}}{2a}; +\infty\right)$;
если $a \in \left[\frac{1}{12}; +\infty\right)$, то $x \in (-\infty; +\infty)$.

Пример 4. Найдите все значения параметра a, при которых среди решений неравенства $(a - x^2)(a + 2x - 8) < 0$ нет ни одного решения неравенства $x^2 < 4$.

Решение. Искать значения параметра, при которых неравенство имеет решения, обычно привычней и проще, чем искать значения параметра, при которых неравенство не имеет решений. В таких случаях условие задачи целесообразно переформулировать в «позитивном» ключе. Не является исключением и данная задача. Её можно переформулировать так: найти все значения параметра a, при которых неравенство $(a - x^2)(a - (-2x + 8)) \geqslant 0$ выполнено при любом значении x, удовлетворяющем условию $x^2 < 4$, т. е. при любом $x \in (-2; +2)$. Рассматривая неравенство $(a - x^2)(a - (-2x + 8)) \geqslant 0$ как квадратное относительно параметра a, заключаем, что его решением относительно a будет вся числовая прямая за исключением интервала, концами которого являются числа x^2 и $-2x + 8$. Если $x \in (-2; +2)$, то $x^2 \in [0; 4)$, $(-2x) \in (-4; 4)$, а $(-2x + 8) \in (4; 12)$. Таким образом, x^2 принимает значения от 0 до 4, а $(-2x + 8)$ принимает значения от 4 до 12. Значит, из решения неравенства $(a - x^2)(a - (-2x + 8)) < 0$ должен быть исключён интервал $(0; 12)$. Таким образом, $a \in (-\infty; 0] \cup [12; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 0] \cup [12; +\infty)$.

Прежде чем переходить к задачам второго типа, ещё раз отметим, что рассмотренный метод можно с успехом использовать не только при решении уравнений и неравенств с параметрами, но и при решении уравнений и неравенств с несколькими переменными. Этот метод оказывается наиболее эффективным в тех случаях, когда решаемое уравнение (неравенство) является квадратным относительно одной из переменных или может быть сведено к квадратному после

некоторых преобразований (как это было сделано в примере 3). Рассмотрим теперь несколько задач, которые решаются с помощью метода введения параметра.

Пример 5. Числа x, y, z таковы, что $x^2+3y^2+z^2=2$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $2x+y-z$?

Решение. Обозначим $2x+y-z$ через a. Тогда $z=2x+y-a$. Подставив вместо z в уравнение $x^2+3y^2+z^2=2$ полученное выражение, придём к уравнению $x^2+3y^2+4x^2+y^2+a^2+4xy-2ay-4ax=2$. Рассмотрим полученное уравнение как квадратное относительно x, переписав его в виде $5x^2+4(y-a)x+4y^2-2ay+a^2-2=0$. Теперь задачу можно переформулировать так: найти наибольшее значение параметра a, при котором уравнение

$$5x^2+4(y-a)x+4y^2-2ay+a^2-2=0$$

имеет хотя бы один корень. Для того чтобы это уравнение имело хотя бы один корень, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант D был неотрицателен, или $\frac{D}{4}\geqslant 0$. Но $\frac{D}{4}=4(y-a)^2-5(4y^2-2ay+a^2-2)$, откуда $\frac{D}{4}=-16y^2+2ay-a^2+10$. Рассмотрим выражение $-16y^2+$ $+2ay-a^2+10$ как квадратный трёхчлен относительно y. Для того чтобы этот квадратный трёхчлен, старший коэффициент которого отрицателен, принимал неотрицательные значения, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант D_1 был больше либо равен нулю, или, что то же самое, $\frac{D_1}{4}\geqslant 0$. Поскольку $\frac{D_1}{4}=a^2+16(-a^2+10)=$ $=-15a^2+160$, остаётся решить неравенство $-15a^2+160\geqslant 0$, откуда $a^2\leqslant\frac{32}{3}$ и $|a|\leqslant\sqrt{\frac{32}{3}}$. Таким образом, наибольшим значением a является $\sqrt{\frac{32}{3}}$.

Ответ: $\sqrt{\frac{32}{3}}$.

Замечание. В данном случае не нужно находить значения переменных, так как ответ получен исходя из необходимых и достаточных условий существований корней уравнений.

Пример 6. Найдите наименьшее возможное значение выражения $2\sin x+3\sin y$, если $2\sin^2 x+3\sin^2 y=4$.

Решение. Обозначим $2\sin x+3\sin y$ через a. Тогда $3\sin y=a-$ $-2\sin x$. Умножим обе части равенства $2\sin^2 x+3\sin^2 y=4$ на 3 и заменим $3\sin y$ на $a-2\sin x$. Получим уравнение

$$6\sin^2 x+(a-2\sin x)^2=12,$$

откуда $10\sin^2 x - 4a\sin x + a^2 - 12 = 0$. Пусть $t = \sin x$, $t \in [-1; 1]$. Уравнение примет вид $10t^2 - 4at + a^2 - 12 = 0$, и задачу можно переформулировать так: найти наименьшее значение параметра a, при котором уравнение $10t^2 - 4at + a^2 - 12 = 0$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий отрезку $[-1; 1]$. Для того чтобы полученное уравнение имело хотя бы один корень (не обязательно на отрезке $[-1; 1]$), необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был неотрицателен. Условие неотрицательности дискриминанта после несложных преобразований можно привести к виду $a^2 - 20 \leqslant 0$, откуда $|a| \leqslant 2\sqrt{5}$. Наименьшим решением неравенства $|a| \leqslant 2\sqrt{5}$ является $a = -2\sqrt{5}$. При этом значении a дискриминант уравнения $10t^2 - 4at + a^2 - 12 = 0$ равен нулю, и его единственным корнем будет $t_0 = \frac{a}{5} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Тогда

$$\sin y = \frac{a - 2\sin x}{3} = \frac{a - 2t_0}{3} = \frac{a}{5} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Заметим, что $-\frac{2\sqrt{5}}{5} \in [-1; 1]$. Поэтому значения x и y, при которых $a = -2\sqrt{5}$, существуют.

Ответ: $-2\sqrt{5}$.

Следующий пример представляет собой типичную задачу с экономическим содержанием. В таких задачах обычно заданы определённые условия производства какой-либо продукции или услуги (это могут быть любые изделия, сельхозпродукты, полезные ископаемые, транспортные перевозки и т. д. и т. п.) и нужно найти значения некоторых величин с целью максимизации прибыли или минимизации расходов. Связи между данными величинами задаются линейными уравнениями и неравенствами (поэтому эти задачи часто относят к задачам линейного программирования). Вводя в качестве параметра величину, максимум или минимум которой надо найти и которую обычно называют целевой функцией, мы придём к традиционной с точки зрения элементарной математики — и притом одной из наиболее простых — задаче на метод областей, поскольку будут даны система линейных неравенств и уравнений, задающих условия производства продукции или услуги, и линейная функция с параметром, наибольшее или наименьшее значение которого надо найти. На координатной плоскости такая система задаёт многоугольник, расположенный в первой координатной четверти (поскольку в подобных задачах речь идёт о неотрицательных величинах), а графиком линейной функции является прямая, с помощью параллельных переносов которой и можно найти требуемое значение параметра — например, максимальное значение, при котором эта прямая будет иметь с построен-

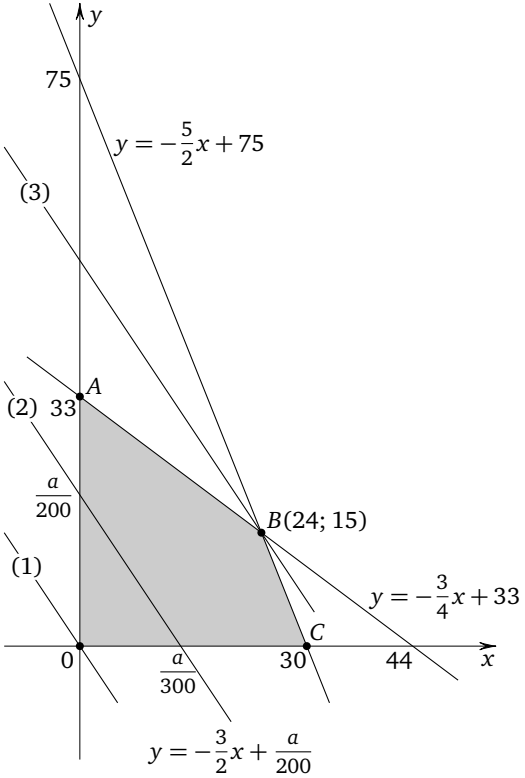
ной областью хотя бы одну общую точку. Иногда приходится учитывать и то, что общая точка прямой и многоугольника должна иметь целые координаты. Отметим, что в таких задачах порой используются абстрактные денежные единицы (обозначение: д. е.) Это могут быть рубли, тысячи, миллионы рублей или единиц других валют.

Пример 7. Малое предприятие выпускает изделия двух типов. Для изготовления изделия первого типа требуется пять часов работы станка *А* и три часа работы станка *Б*, а для изготовления изделия второго типа требуется два часа работы станка *А* и четыре часа работы станка *Б* (станки могут работать в любой последовательности). По техническим причинам станок *А* может работать не более 150 часов в месяц, а станок *Б* — не более 132 часов в месяц. Каждое изделие первого типа приносит предприятию 300 д. е. прибыли, а каждое изделие второго типа — 200 д. е. прибыли. Найдите наибольшую возможную ежемесячную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует выпускать для получения этой прибыли.

Решение. Обозначим через x число изделий первого типа, через y — число изделий второго типа, а через a — прибыль предприятия. Тогда $a = 300x + 200y$, откуда $y = -\frac{3}{2}x + \frac{a}{200}$, а условия производства даются системой

$$\begin{cases} 5x+2y \leqslant 150, \\ 3x+4y \leqslant 132, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \end{cases}$$

где x и y — целые числа. На координатной плоскости Oxy система неравенств задаёт четырёхугольник $OABC$ с внутренней областью, ограниченный осями координат и прямыми $y = -\frac{5}{2}x + 75$ и $y = -\frac{3}{4}x + 33$ (см. рис.); три различных положения прямой $y = -\frac{3}{2}x + \frac{a}{200}$ обозначены на рисунке: положение (1) соответствует значению $a = 0$, положение (3) соответствует наибольшему возможному значению a, положение (2) соответствует промежуточному значению a. При $a > 0$ прямая $y = -\frac{3}{2}x + \frac{a}{200}$ пересекает ось абсцисс в точке с абсциссой $\frac{a}{300}$, а ось ординат — в точке с абсциссой $\frac{a}{200}$. Наибольшее значение каждой из этих величин соответствует



максимальной прибыли a и достигается, если прямая $y=-\frac{3}{2}x+\frac{a}{200}$ проходит через точку B — точку пересечения прямых $y=-\frac{5}{2}x+75$ и $y=-\frac{3}{4}x+33$, абсцисса и ордината которой находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} y=-\frac{5}{2}x+75, \\ y=-\frac{3}{4}x+33 \end{cases}$$

и равны соответственно 24 и 15. Подставив эти абсциссу и ординату в уравнение прямой $y=-\frac{3}{2}x+\frac{a}{200}$, находим $a=10\,200$.

Ответ: 24 изделия первого типа; 15 изделий второго типа; максимальная прибыль равна 10 200 д. е.

Заметим, что для упрощения вычислений можно было в рассмотренной задаче положить $a = 3x + 2y$, а после вычисления максимального значения a умножить результат на 100. В более сложных случаях координаты точки B могут оказаться дробными числами. В таких случаях можно найти ближайшие к B точки четырёхугольника $OABC$ и его внутренней области (разумеется, это справедливо и для любого другого многоугольника), имеющие целые координаты, и выбрать ту из них, для которых прямая $y = -\frac{3}{2}x + \frac{a}{200}$ (или аналогичная ей) пересекает ось абсцисс (или ось ординат) в точке, наиболее удалённой от начала координат.

Упражнения к § 5.2

1. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^3 - (a+2)x^2 - 2ax + 4a^2 = 0$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4x^3 - 2(a+1)x^2 - ax + a^2 = 0$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

2. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^4 - 4x^3 - 8ax^2 + 36ax - 9a^2 = 0$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^4 - 2x^3 - 17ax^2 + 32ax + 16a^2 = 0$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

3. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^4 - 6x^3 - 5ax^2 + 24ax + 4a^2 = 0$ имеет ровно три различных корня.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^4 - 8x^3 - 10ax^2 + 72ax + 9a^2 = 0$ имеет ровно три различных корня.

4. а) Найдите все целые значения параметра a, при каждом из которых уравнение $10x^3 + x^2 - (2a + 21)x - 3a + 5 = 0$ имеет хотя бы один целый корень.

б) Найдите все целые значения параметра a, при каждом из которых уравнение $6x^3 + 25x^2 - (2a - 25)x - 5a + 7 = 0$ имеет хотя бы один целый корень.

5. а) Найдите все целые значения параметра a, при каждом из которых уравнение $6x^5 + 8x^4 + 13x^3 - 3ax^2 - 2(2a + 5)x - 2a - 13 = 0$ имеет хотя бы один целый корень.

б) Найдите все целые значения параметра a, при каждом из которых уравнение $8x^5+2x^4-11x^3-2(2a-1)x^2+5(a+1)x-2a+1=0$ имеет хотя бы один целый корень.

6. а) Для каждого неотрицательного значения параметра a найдите множество решений неравенства $4a^3x^4+4a^2x^2+32x+a+8\geqslant 0$.

б) Для каждого неотрицательного значения параметра a найдите множество решений неравенства $a^3x^4+2a^2x^2-8x+a+4\geqslant 0$.

7. а) Найдите все значения параметра a, при которых среди решений неравенства $(a-x^2)(a+x-2)<0$ нет ни одного решения неравенства $x^2<1$.

б) Найдите все значения параметра a, при которых среди решений неравенства $(9a-4x^2)(3a+4x-24)<0$ нет ни одного решения неравенства $x^2<9$.

8. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^3-2(a+4)x^2+12ax+8a^2\leqslant 0$ имеет хотя бы одно решение, и укажите решения неравенства для каждого значения a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^3+2(a+6)x^2+28ax+8a^2\leqslant 0$ имеет хотя бы одно решение, и укажите решения неравенства для каждого значения a.

9. а) Числа x, y, z таковы, что $x^2+3y^2+4z^2=2$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $2x+y-2z$?

б) Числа a, b, c таковы, что $2a^2+b^2+c^2=3$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $a-2b+c$?

10. а) Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\cos x+3\cos y,\quad \text{если } \sin^2 x+3\sin^2 y=2.$$

б) Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$4\sin x+\sin y,\quad \text{если } 4\cos^2 x+\cos^2 y=3.$$

11. а) Предприятие непрерывного цикла занимается испытанием готовых изделий двух типов. Ежемесячно предприятие получает для испытаний не более 600 изделий первого типа и не более 300 изделий второго типа. Качество каждого изделия проверяется на двух стендах *А* и *Б* (стенды могут использоваться для испытания каждого изделия в любой последовательности). Для проверки одного изделия первого типа требуется 20 минут испытаний на стенде *А* и 6 минут испытаний на стенде *Б*; для проверки одного изделия второго типа требуется 24 минуты испытаний на стенде *А* и 20 минут испытаний на стенде *Б*. По техническим причинам стенд *А* может работать не более 240 часов в месяц, а стенд *Б* — не более 120 часов в месяц. Проверка одного изделия первого типа приносит предприятию 50 д. е. прибыли,

а проверка одного изделия второго типа — 90 д. е. прибыли. Найдите наибольшую возможную ежемесячную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует ежемесячно проверять для получения этой прибыли.

б) Предприятие непрерывного цикла занимается испытанием готовых изделий двух типов. Ежемесячно предприятие получает для испытаний не более 300 изделий первого типа и не более 600 изделий второго типа. Качество каждого изделия проверяется на двух стендах *А* и *Б* (стенды могут использоваться для испытания каждого изделия в любой последовательности). Для проверки одного изделия первого типа требуется 36 минут испытаний на стенде *А* и 30 минут испытаний на стенде *Б*; для проверки одного изделия второго типа требуется 30 минут испытаний на стенде *А* и 9 минут испытаний на стенде *Б*. По техническим причинам стенд *А* может работать не более 360 часов в месяц, а стенд *Б* — не более 180 часов в месяц. Проверка одного изделия первого типа приносит предприятию 135 д. е. прибыли, а проверка одного изделия второго типа — 75 д. е. прибыли. Найдите наибольшую возможную ежемесячную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует ежемесячно проверять для получения этой прибыли.

12. а) Предприятие непрерывного цикла выпускает изделия двух типов. Для изготовления изделия первого типа требуется 15 часов работы цеха *А* и 10 часов работы цеха *Б*, а для изготовления изделия второго типа требуется 5 часов работы цеха *А* и 20 часов работы цеха *Б* (цеха могут работать над изделием в любой последовательности). По техническим причинам цех *А* может работать не более 150 часов в неделю, а цех *Б* — не более 100 часов в неделю. Каждое изделие первого типа приносит предприятию 5000 д. е. прибыли, а каждое изделие второго типа — 4000 д. е. прибыли. Найдите наибольшую возможную еженедельную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует еженедельно выпускать для получения этой прибыли.

б) Предприятие непрерывного цикла выпускает изделия двух типов. Для изготовления изделия первого типа требуется 30 часов работы цеха *А* и 20 часов работы цеха *Б*, а для изготовления изделия второго типа требуется 10 часов работы цеха *А* и 40 часов работы цеха *Б* (цеха могут работать над изделием в любой последовательности). По техническим причинам цех *А* может работать не более 600 часов в месяц, а цех *Б* — не более 400 часов в месяц. Каждое изделие первого типа приносит предприятию 15 000 д. е. прибыли, а каждое изделие второго типа — 12 000 д. е. прибыли. Найдите наибольшую возмож-

ную ежемесячную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует ежемесячно выпускать для получения этой прибыли.

§ 5.3. Тригонометрические подстановки

Ряд задач, считающихся нестандартными, может быть достаточно просто решён с использованием некоторых специальных замен переменных, в частности тригонометрических подстановок. Их использование целесообразно в основном в двух следующих случаях: 1) если искомые решения принадлежат множеству $[-1; 1]$ или некоторому его подмножеству; 2) если данные уравнения и неравенства содержат алгебраические выражения, «похожие» на известные тригонометрические формулы. Сказанное относится преимущественно к рациональным и иррациональным уравнениям (системам уравнений), решение которых обычными приёмами затруднительно и которые после введения тригонометрических подстановок сводятся к несложным тригонометрическим уравнениям (системам уравнений). Рассмотрим несколько характерных примеров.

Пример 1. Решите уравнение $\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$.

Решение. Очевидно, все x должны удовлетворять неравенству $1 - x^2 \geqslant 0$, т. е. $|x| \leqslant 1$. То, что $|x| \leqslant 1$, наводит на мысль о применении тригонометрической подстановки $x = \cos t$ либо $x = \sin t$. Пусть, например, $x = \cos t$, $t \in [0; \pi]$ (предпочтительность именно этой подстановки станет понятна из дальнейшего). То, что t принадлежит промежутку $[0; \pi]$, объясняется тем, что при этом $\cos t$, а значит и x, принимает все значения из промежутка $[-1; 1]$, и притом один раз. Таким образом, каждому t соответствует единственное значение x, и наоборот, т. е. указанная замена устанавливает взаимно однозначное соответствие между переменными x и t, а значит, и между множеством корней данного уравнения и уравнения, которое будет получено из данного с помощью указанной замены переменнй.

Итак, пусть $x = \cos t$, $t \in [0; \pi]$. Тогда данное уравнение примет вид $\sqrt{1-\cos t} = 2\cos^2 t - 1 + 2\cos t\sqrt{1-\cos^2 t}$. После упрощений с применением формул удвоенного аргумента и основного тригонометрического тождества получим уравнение $\sqrt{2}\left|\sin\frac{t}{2}\right| = \cos 2t + 2\cos t|\sin t|$. На этом шаге целесообразность подстановки $x = \cos t$, $t \in [0; \pi]$, становится очевидной: ведь при $t \in [0; \pi]$ числа $\sin t$ и $\sin\frac{t}{2}$ неотрицательны, в силу чего знаки модуля в последнем уравнении можно опустить.

В результате получим уравнение $\sqrt{2}\sin\frac{t}{2} = \cos 2t + 2\cos t \sin t$, откуда $\sin\frac{t}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2t$, или $\sin\frac{t}{2} = \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$. Из последнего уравнения находим, что

$$\left[\begin{array}{l} 2t + \frac{\pi}{4} = \frac{t}{2} + 2\pi n, \\ 2t + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{t}{2} + 2\pi k, \end{array}\right.$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$. Теперь уже совсем просто получить, что

$$\left[\begin{array}{l} t = -\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi n}{3}, \\ 2t = \frac{3\pi}{10} + \frac{4\pi k}{5}, \end{array}\right.$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$. Остаётся из найденных значений t отобрать те, которые принадлежат промежутку $[0; \pi]$. Таким значением, как легко установить, является лишь $t = \frac{3\pi}{10}$. Но тогда $x = \cos\frac{3\pi}{10}$.

Ответ: $\cos\frac{3\pi}{10}$.

Замечание. Конечно, можно было выразить $x = \cos\frac{3\pi}{10}$ через радикалы, но условие задачи этого вовсе не требует. Поэтому нас ни в коей мере не должен смущать тот факт, что при решении иррационального уравнения мы получили ответ, являющийся значением тригонометрической функции в некоторой точке. Иногда такие ответы бывают ещё более «страшными».

Пример 2. Решите уравнение

$$4(3x\sqrt{1-x^2} + 4x^2 - 2) = 5(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}).$$

Решение. Оставляя в стороне все рассуждения, которые аналогичны рассуждениям в предыдущем примере, положим сразу $x = \cos t$, $t \in [0; \pi]$. Тогда уравнение после упрощений с применением формул удвоенного аргумента и основного тригонометрического тождества примет вид $6\sin 2t + 8\cos 2t = 5\sqrt{2}\left(\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2}\right)$. В полученном уравнении опущены знаки модуля, поскольку числа $\sin t$, $\sin\frac{t}{2}$, $\cos\frac{t}{2}$ неотрицательны при $t \in [0; \pi]$. Последнее уравнение решается стандартным образом: введением вспомогательного угла. Для этого приведём его к виду $\sin 2t \cdot \frac{3}{5} + \cos 2t \cdot \frac{4}{5} = \sin\frac{t}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos\frac{t}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $\sin(2t + \beta) = \sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, где $\sin\beta = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$ (т. е., например,

$\beta = \arccos\frac{3}{5}$). Из последнего уравнения находим

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}\arccos\frac{3}{5} + \frac{4\pi n}{3}, \\ t = \frac{3\pi}{10} - \frac{2}{5}\arccos\frac{3}{5} + \frac{4\pi k}{5}, \end{array}\right.$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$. Отберём из найденных значений t те, которые принадлежат промежутку $[0; \pi]$. Очевидно, что никакие целые n, меньшие нуля, не дают решений. Так как $\frac{3}{5} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ (в чём легко убедиться), имеем $\arccos\frac{3}{5} > \frac{\pi}{4}$, а значит, $\frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}\arccos\frac{3}{5} < 0$. Таким образом, значение $n = 0$ также не даёт решений. Так как $\frac{3}{5} > \frac{1}{2}$, имеем $\arccos\frac{3}{5} < \frac{\pi}{3}$, но тогда $\frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}\arccos\frac{3}{5} + \frac{4\pi}{3} > \pi$. Значит, $n = 1$ также не даёт решений. Ясно, что при целых n, больших 1, значение выражения $\frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}\arccos\frac{3}{5} + \frac{4\pi n}{3}$ будет и подавно больше π.

Следовательно, первая серия не даёт решений данного уравнения ни при каких целых n. Путём рассуждений, аналогичных только что проведённым, можно убедиться (сделайте это самостоятельно!), что вторая серия даёт решения, принадлежащие промежутку $[0; \pi]$, лишь при $k = 0$ и $k = 1$. Таким образом, решениями данного уравнения являются числа $x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{2}{5}\arccos\frac{3}{5}\right)$ и $x = \cos\left(\frac{11\pi}{10} - \frac{2}{5}\arccos\frac{3}{5}\right)$.

Ответ: $\cos\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{2}{5}\arccos\frac{3}{5}\right)$; $\cos\left(\frac{11\pi}{10} - \frac{2}{5}\arccos\frac{3}{5}\right)$.

В обоих рассмотренных примерах на применение тригонометрической подстановки указывало естественное ограничение на переменную x. Иногда подобное ограничение оговаривается в условии задачи, хотя само уравнение такого ограничения не даёт.

Пример 3. Найдите число корней уравнения

$$8x(1 - 2x^2)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1,$$

принадлежащих отрезку $[0; 1]$.

Решение. То, что необходимо найти число корней данного уравнения именно на отрезке $[0; 1]$, опять наводит на мысль о тригонометрической подстановке $x = \cos t$. Заметим, что $x = 0$ и $x = 1$ не являются корнями уравнения (это легко проверить непосредственно), поэтому можно рассматривать только значения $x \in (0; 1)$. Но тогда $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Подобное «отсечение» граничных значений часто оказывается полезным, в чём мы убедимся ниже. Итак, положив $x = \cos t$, $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, можно привести данное уравнение к

виду $8\cos t\cdot\cos 2t\cdot\cos 4t=-1$ (сделайте это самостоятельно). Так как $t\neq 0$, обе части этого уравнения можно умножить на $\sin t$. Получим $8\sin t\cos t\cdot\cos 2t\cdot\cos 4t=-\sin t$, или $8\sin t\cos t\cdot\cos 2t\cdot\cos 4t=\sin(-t)$ (вот где пригодилось «отсечение» значения $t=0$ — иначе пришлось бы дополнительно рассматривать случай $\sin t=0$). Последнее уравнение с помощью трёхкратного применения формулы синуса удвоенного аргумента к левой части приводится к виду $\sin 8t=\sin(-t)$, откуда

$$\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{2\pi n}{9},\\ t=\dfrac{\pi}{7}+\dfrac{2\pi k}{7},\end{array}\right.$$

где $n\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$. Найденные значения t принадлежат интервалу $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ лишь при $n=1$, $n=2$, $k=0$, $k=1$. Таким образом, данное уравнение на отрезке $[0;1]$ имеет ровно 4 корня.

Ответ: 4.

В заключение рассмотрим две задачи, в которых применение тригонометрической подстановки не вполне очевидно. Помочь в решении таких задач может хорошее знание формул тригонометрии и навыки, полученные при самостоятельном решении упражнений параграфа.

Пример 4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x=1-yz,\\ y=\dfrac{2z}{z^2+1},\\ z=\dfrac{4xy(2x^2-1)}{8x^4-8x^2+1}.\end{cases}$$

Решение. Заметим, что из системы не следует никаких естественных ограничений на переменную z и если положить $z=\operatorname{tg}t$, где $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ (объясните почему), то из второго уравнения получим $y=\sin 2t$, но тогда из первого уравнения найдём, что $x=\cos 2t$. Таким образом, данную систему можно свести к следующей:

$$\begin{cases} z=\operatorname{tg}t,\\ x=\cos 2t,\\ y=\sin 2t,\\ z=\dfrac{4\sin 2t\cdot\cos 2t(2\cos^2 2t-1)}{8\cos^4 2t-8\cos^2 2t+1},\end{cases}$$

откуда после упрощений получим

$$\begin{cases} z = \operatorname{tg} t, \\ x = \cos 2t, \\ y = \sin 2t, \\ \operatorname{tg} t = \operatorname{tg} 8t. \end{cases}$$

Далее, из уравнения $\operatorname{tg} 8t = \operatorname{tg} t$ находим $t = \frac{\pi n}{7}$, где $n \in \mathbb{Z}$. С учётом того, что $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, получаем $n = \pm 3; \pm 2; \pm 1; 0$. Таким образом, решения данной системы даются формулами $x = \cos \frac{2\pi n}{7}$, $y = \sin \frac{2\pi n}{7}$, $z = \operatorname{tg} \frac{\pi n}{7}$, где $n = \pm 3; \pm 2; \pm 1; 0$ (всего семь троек решений).

Ответ: $\left(\cos \frac{2\pi n}{7}; \sin \frac{2\pi n}{7}; \operatorname{tg} \frac{\pi n}{7}\right)$, где $n = \pm 3; \pm 2; \pm 1; 0$.

Пример 5. Найдите наибольшее возможное значение выражения $x + 3y + 3z + 2t$, где $(x; y; z; t)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z^2 + t^2 = 9, \end{cases}$$

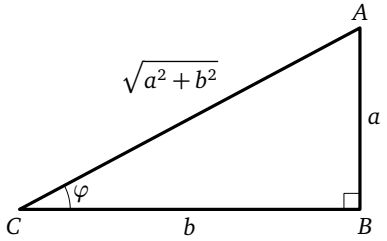
удовлетворяющее условию $xt + yz \geqslant 6$.

Решение. Из первого уравнения данной системы следует, что $|x| \leqslant 2$, и если положить $x = 2\cos u$, $u \in [0; \pi]$, то $y^2 = 4\sin^2 u$, откуда с учётом условия $u \in [0; \pi]$ получим, что $y = 2\sin u$. Аналогично, положив во втором уравнении $z = 3\cos v$, $v \in [0; \pi]$, найдём, что $t = 3\sin v$. Тогда данное неравенство $xt + yz \geqslant 6$ примет вид

$$6\sin v \cos u + 6\cos v \sin u \geqslant 6,$$

откуда $\sin(u + v) \geqslant 1$, что возможно в том и только том случае, если $\sin(u + v) = 1$. Таким образом, $u + v = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Но $u \in [0; \pi]$, $v \in [0; \pi]$, поэтому $0 \leqslant u + v \leqslant 2\pi$, и, следовательно, $n = 0$. Итак, $u + v = \frac{\pi}{2}$, откуда $v = \frac{\pi}{2} - u$. Значит, $z = 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = 3\sin u$, $t = 3\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = 3\cos u$. Данное выражение $s = x + 3y + 3z + 2t$ с учётом полученных формул примет вид $s = 8\cos u + 15\sin u$. Напомним, что наибольшее и наименьшее значения выражения $a\cos u + b\sin u$ можно найти, например, преобразовав это выражение с помощью формулы вспомогательного угла: $a\cos u + b\sin u = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(u + \varphi)$. Эту формулу при $a > 0$, $b > 0$ легко получить, используя геометрическую интерпретацию. Для вывода формулы достаточно рассмотреть

прямоугольный треугольник ABC с катетами $BC=a$, $AC=b$ и гипотенузой $AB=\sqrt{a^2+b^2}$ (см. рис.). Если обозначить через φ угол BAC



$$\sin\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\cos\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

этого треугольника, то $\sin\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Поэтому выражение $a\cos u+b\sin u$ можно преобразовать следующим образом:

$$a\cos u+b\sin u=\sqrt{a^2+b^2}\Big(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos u+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin u\Big)=$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\varphi\cos u+\cos\varphi\sin u)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(u+\varphi).$$

В силу того что $\sin(u+\varphi)\leqslant 1$, отсюда и следует неравенство

$$a\cos u+b\sin u\leqslant\sqrt{a^2+b^2}.$$

В нашем случае $a=8$, $b=15$, $\sqrt{8^2+15^2}=17$. Поэтому $\max s=\sqrt{8^2+15^2}=$ $=17$. Значение $s=17$ достигается, если $\sin(u+\varphi)=1$, откуда $u+\varphi=$ $=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Таким образом, $u=\dfrac{\pi}{2}-\varphi+2\pi k$, где $\sin\varphi=\dfrac{8}{17}$, $\cos\varphi=\dfrac{15}{17}$. Остаётся показать, что решение системы, для которого выражение $x+3y+3z+2t$ достигает наибольшего значения, равного 17, существует. Это решение легко найти:

$$x=2\cos\Big(\frac{\pi}{2}-\varphi\Big)=2\sin\varphi=\frac{16}{17};\quad y=2\sin\Big(\frac{\pi}{2}-\varphi\Big)=2\cos\varphi=\frac{30}{17};$$
$$z=3\sin\Big(\frac{\pi}{2}-\varphi\Big)=3\cos\varphi=\frac{45}{17};\quad t=3\cos\Big(\frac{\pi}{2}-\varphi\Big)=3\sin\varphi=\frac{24}{17}.$$

Ответ: 17.

Разумеется, рассмотренные подстановки не исчерпывают всего множества возможных тригонометрических подстановок. При решении некоторых иррациональных уравнений (неравенств и т. п.) могут оказаться полезными и такие подстановки, как $x=\dfrac{1}{\sin t}$, $x=a\cos t$,

$x = a\,\mathrm{tg}\,t$ (где a — некоторое данное число) и др. Несколько примеров на применение подобных подстановок содержатся среди упражнений для самостоятельного решения.

Упражнения к § 5.3

1. а) Решите уравнение $\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$.

б) Решите уравнение $\sqrt{8x^3 - 6x} = 1$.

2. а) Решите уравнение $|2x - \sqrt{1-4x^2}| = \sqrt{2}(8x^2 - 1)$.

б) Решите уравнение $|x + \sqrt{1-x^2}| = \sqrt{2}(2x^2 - 1)$.

3. а) Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} + 2x^2 = 1$.

б) Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{1-|x|}{2}} = 2x^2 - 1$.

4. а) Решите уравнение $x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{35}{12}$.

б) Решите уравнение $x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{221}{60}$.

5. а) Решите уравнение $x + \dfrac{5}{2\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1}$.

б) Решите уравнение $x + \sqrt{x^2+1} = \dfrac{5}{\sqrt{x^2+1}}$.

6. а) Решите уравнение $x(2x^2-1)\sqrt{1-x^2} = 0{,}125\sqrt{2}$.

б) Решите уравнение $x(1-2x^2)\sqrt{1-x^2} = 0{,}125\sqrt{3}$.

7. а) Найдите число корней уравнения

$$8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1) = 1,$$

принадлежащих отрезку $[0; 1]$.

б) Найдите число корней уравнения

$$x(x^2-2)(x^4-4x^2+2) = -1,$$

принадлежащих отрезку $[0; 2]$.

8. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $3x + \dfrac{5}{\sqrt{x^2+25}} = 0{,}2a\sqrt{x^2+25}$ имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $5x + \dfrac{2}{\sqrt{x^2+4}} = 0{,}5a\sqrt{x^2+4}$ имеет хотя бы один корень.

9. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x = \dfrac{y}{y^2+1}, \\ 2y = \dfrac{x}{x^2+1}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ 4xy(2x^2-1)=1. \end{cases}$

10. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2y = y+2x, \\ 2y+y^2z = z, \\ 2z+x = z^2x. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+x^2y = y, \\ y^2z = z+2y, \\ 2z+x = z^2x. \end{cases}$

11. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x = \dfrac{2yz}{2y^2-1}, \\ y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}, \\ z = \dfrac{2x}{1+x^2}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \dfrac{2y}{y^2+1}, \\ y = \dfrac{2z}{z^2-1}, \\ z^2 = \dfrac{x^2}{1-x^2}. \end{cases}$

12. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x+yz=1, \\ x^2+y^2=1, \\ \dfrac{z}{1-z^2} = \dfrac{xy}{1-2x^2}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ \dfrac{y}{x} = \dfrac{2z}{z^2-1}, \\ z = \dfrac{2xy}{2x^2-1}. \end{cases}$

13. а) Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$x+2y+3z+4t,$$

где $(x; y; z; t)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z^2+t^2=4, \end{cases}$$

удовлетворяющее условию $xt+yz \geqslant 2$.

б) Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$4x+3y+2z+t,$$

где $(x; y; z; t)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z^2+t^2=9, \end{cases}$$

удовлетворяющее условию $xt+yz \geqslant 3$.

14. а) Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$2x+3y+3z+2t,$$

где $(x; y; z; t)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ z^2+t^2=49, \end{cases}$$

удовлетворяющее условию $xt+yz \geqslant 21$.

б) Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$3x+2y+2z+3t,$$

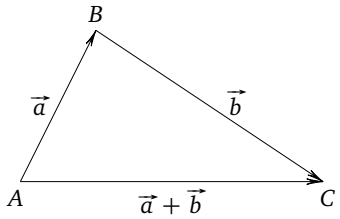
где $(x; y; z; t)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ z^2+t^2=25, \end{cases}$$

удовлетворяющее условию $xt+yz \geqslant 20$.

§ 5.4. Векторные интерпретации в алгебре

Некоторые алгебраические задачи (уравнения, неравенства, вычисление наибольших и наименьших значений выражений), кажущиеся на первый взгляд довольно сложными, могут быть с успехом решены с помощью средств векторной алгебры, прежде всего неравенств $|\vec{a}|+|\vec{b}| \geqslant |\vec{a}+\vec{b}|$ и $\vec{a}\cdot\vec{b} \leqslant |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ и условий обращения этих неравенств в равенства. Вначале рассмотрим, как можно применить неравенство $|\vec{a}|+|\vec{b}| \geqslant |\vec{a}+\vec{b}|$ к решению ряда алгебрраических задач. Неравенство $|\vec{a}|+|\vec{b}| \geqslant |\vec{a}+\vec{b}|$ представляет собой по существу не что иное, как неравенство треугольника (сумма длин двух векторов не меньше длины вектора, равного сумме этих векторов; см. рис.).



$AB = |\vec{a}|,$
$BC = |\vec{b}|,$
$AC = |\vec{a}+\vec{b}|,$
$AC \leqslant AB + BC.$

Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, т. е. когда отношения их соответствующих координат равны между собой и равны отношению их длин (модулей).

Пример 1. Найдите наименьшее значение параметра a, при котором уравнение $\sqrt{x^2-6x+10}+\sqrt{x^2-4x+8}=a$ имеет хотя бы один корень.

Решение. Решить задачу — значит найти наименьшее значение функции

$$a = \sqrt{x^2-6x+10}+\sqrt{x^2-4x+8},$$

или

$$a = \sqrt{(x-3)^2+1}+\sqrt{(x-2)^2+4}.$$

Введём векторы $\vec{p}\{3-x;\,1\}$ и $\vec{q}\{x-2;\,2\}$. Тогда $|\vec{p}|=\sqrt{(x-3)^2+1}$, $|\vec{q}|=\sqrt{(x-2)^2+4}$, вектор $\vec{p}+\vec{q}$ имеет координаты $\{1;\,3\}$ и $|\vec{p}+\vec{q}|=$ $=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$. Поэтому в силу неравенства $|\vec{p}|+|\vec{q}|\geqslant|\vec{p}+\vec{q}|$ и того, что $a=|\vec{p}|+|\vec{q}|$, получаем $a\geqslant\sqrt{10}$. Последнее неравенство обращается в равенство, только если векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ сонаправлены. Но $\vec{p}\parallel\vec{q}$ в том и только том случае, если отношения их соответствующих координат равны между собой и равны отношению их длин, откуда $\frac{3-x}{x-2}=\frac{1}{2}$ (заметим, что при $x=2$ векторы не являются сонаправленными, следовательно, $x\neq 2$ и деление на $x-2$ возможно). Корнем последнего уравнения является $x=\frac{8}{3}$. Значит, наименьшее значение функции $a=\sqrt{x^2-6x+10}+\sqrt{x^2-4x+8}$ достигается при $x=\frac{8}{3}$ и равно $\sqrt{10}$.

Ответ: $\sqrt{10}$.

Заметим, что, вводя векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$, следует выбирать их координаты таким образом, чтобы координаты вектора $\vec{p}+\vec{q}$ не зависели от переменной x. Кроме того, если квадраты каких-то соответствующих координат векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ являются числами, то для того, чтобы было выполнено условие сонаправленности векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$, знаки этих координат должны выбираться одинаковыми. В более сложных случаях, когда любая из координат векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ зависит от переменной, следует наложить ограничения на отношения соответствующих координат: эти отношения должны быть положительными.

Пример 2. Найдите наименьшее значение параметра a, при котором следующее уравнение имеет хотя бы один корень:

$$\sqrt{(x-1)^2+(x-6)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(x-2)^2}=a.$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$a=\sqrt{(x-1)^2+(x-6)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(x-2)^2}$$

и найдём её наименьшее значение. Введём векторы $\vec{p}\{x-1;\,6-x\}$ и $\vec{q}\{4-x;\,x-2\}$. Тогда $a=|\vec{p}|+|\vec{q}|$, вектор $\vec{p}+\vec{q}$ имеет координаты $\{3;\,4\}$ и $|\vec{p}+\vec{q}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$. Поэтому в силу неравенства

$|\vec{p}|+|\vec{q}|\geqslant|\vec{p}+\vec{q}|$ получаем, что $a\geqslant 5$, причём знак равенства достигается, только если $\vec{p}\uparrow\uparrow\vec{q}$, откуда

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{4-x}=\dfrac{6-x}{x-2},\\ \dfrac{x-1}{4-x}>0.\end{cases}$$

Решением уравнения и всей системы является $x=\dfrac{22}{7}$ (заметим, что ни при $x=4$, ни при $x=2$ векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не являются сонаправленными, следовательно, $x\neq 2$, $x\neq 4$ и деление на $x-2$ и $x-4$ возможно). Значит, наименьшее значение функции

$$a=\sqrt{(x-1)^2+(x-6)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(x-2)^2}$$

достигается при $x=\dfrac{22}{7}$ и равно 5.

Ответ: 5.

Обе рассмотренные задачи могли быть решены и с помощью геометрических интерпретаций (см. § 4.3). Какой метод выбрать для решения той или иной задачи (а некоторые из них могут быть решены несколькими способами), зависит от разных факторов: того, какой метод усвоен лучше, кажется более простым или первым приходит в голову на экзамене и т. п.

Рассмотрим теперь несколько примеров на применение неравенства $\vec{a}\cdot\vec{b}\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$. Это неравенство (его называют неравенством Коши—Буняковского) легко следует из определения скалярного произведения векторов: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$. Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=1$, т. е. когда угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен нулю и, следовательно, $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$.

Пример 3. Найдите наибольшее значение параметра a, при котором уравнение $x(\sqrt{1-9x^2}+3\sqrt{4-x^2})=a$ имеет хотя бы один корень.

Решение. Рассмотрим функцию $a=x(\sqrt{1-9x^2}+3\sqrt{4-x^2})$ с областью определения $D(a)=\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$ и найдём её наибольшее значение. Введём векторы $\vec{p}\{x;\sqrt{4-x^2}\}$ и $\vec{q}\{\sqrt{1-9x^2};3x\}$. Тогда $a=\vec{p}\cdot\vec{q}$, $|\vec{p}|=\sqrt{x^2+4-x^2}=2$, $|\vec{q}|=\sqrt{1-9x^2+9x^2}=1$. В силу неравенства $\vec{p}\cdot\vec{q}\leqslant|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|$ получаем, что $a\leqslant 2$, причём знак равенства достигается, только если $\vec{p}\uparrow\uparrow\vec{q}$. Заметим, что при $x=0$ векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не являются сонаправленными, поэтому с учётом области

определения условие сонаправленности имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-9x^2}}{x} = \dfrac{3x}{\sqrt{4-x^2}}, \\ 0 < x \leqslant \dfrac{1}{3}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} (1-9x^2)(4-x^2) = 9x^4, \\ 0 < x \leqslant \dfrac{1}{3}, \end{cases}$$

и после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получаем

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{4}{37}, \\ 0 < x \leqslant \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Положительным корнем уравнения системы является $x = \dfrac{2}{\sqrt{37}}$, а $\dfrac{2}{\sqrt{37}} < \dfrac{2}{\sqrt{36}} = \dfrac{1}{3}$. Поэтому $x = \dfrac{2}{\sqrt{37}}$. Следовательно, наибольшее значение функции $a = x(\sqrt{1-9x^2} + 3\sqrt{4-x^2})$ достигается при $x = \dfrac{2}{\sqrt{37}}$ и равно 2.

Ответ: 2.

Обратим внимание на то, что при использовании неравенства $\vec{p} \cdot \vec{q} \leqslant |\vec{p}| \cdot |\vec{q}|$ векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ следует вводить таким образом, чтобы либо их длины не зависели от переменной, либо отношение длин этих векторов было величиной постоянной. В противном случае извлечь из условия сонаправленности какое-то содержательное уравнение будет затруднительно или невозможно. Кроме того, следует отметить, что если в условии (или в условиях) сонаправленности приходится выполнять деление на выражение, содержащее неизвестную, нужно проверить, не являются ли векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ сонаправленными и в том случае, когда это выражение обращается в нуль. Если этого не сделать, то в некоторых задачах можно просто потерять решение.

Пример 4. Найдите наибольшее значение параметра a, при котором уравнение

$$ax^2 = |2x-1|\sqrt{2x-1} + |x-1|\sqrt{4x-1},$$

имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для этого значения a.

Решение. Правая часть уравнения определена при $x \geqslant \dfrac{1}{2}$, поэтому его можно переписать в виде $a = \dfrac{|2x-1|\sqrt{2x-1} + |x-1|\sqrt{4x-1}}{x^2}$. Рас-

смотрим функцию $a=\dfrac{|2x-1|\sqrt{2x-1}+|x-1|\sqrt{4x-1}}{x^2}$ с областью определения $D(a)=\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ и найдём её наибольшее значение. Введём векторы $\vec{p}\{|2x-1|;\sqrt{4x-1}\}$ и $\vec{q}\{\sqrt{2x-1};|x-1|\}$. Тогда

$$|\vec{p}|=\sqrt{|2x-1|^2+(\sqrt{4x-1})^2}=\sqrt{4x^2}=2|x|=2x,$$

$$|\vec{q}|=\sqrt{(\sqrt{2x-1})^2+|x-1|^2}=\sqrt{x^2}=|x|=x.$$

Поскольку $a=\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{x^2}$, в силу неравенства $\vec{p}\cdot\vec{q}\leqslant|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|$ получаем, что $a\leqslant\dfrac{2x^2}{x^2}$, т. е. $a\leqslant 2$, причём знак равенства достигается, только если $\vec{p}\uparrow\uparrow\vec{q}$. Заметим, что при $x=\dfrac{1}{2}$ векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ являются сонаправленными, а при $x=1$ не являются. Если $x\neq\dfrac{1}{2}$, $x\neq 2$, то условие сонаправленности (с учётом области определения) имеет вид

$$\begin{cases}\dfrac{|2x-1|}{\sqrt{2x-1}}=\dfrac{2x}{x},\\[2mm] \dfrac{\sqrt{4x-1}}{|x-1|}=\dfrac{2x}{x},\\[2mm] x>\dfrac{1}{2},\end{cases}\quad\text{откуда}\quad\begin{cases}\dfrac{(2x-1)^2}{2x-1}=4,\\[2mm] \dfrac{4x-1}{(x-1)^2}=4,\\[2mm] x>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Единственным корнем первого уравнения и решением всей системы является $x=\dfrac{5}{2}$. Следовательно, наибольшее значение функции $a=\dfrac{|2x-1|\sqrt{2x-1}+|x-1|\sqrt{4x-1}}{x^2}$, равное 2, достигается при $x=\dfrac{1}{2}$ и $x=\dfrac{5}{2}$.

Ответ: $a=2$, $x=\dfrac{1}{2}$, $x=\dfrac{5}{2}$.

Понятно, что все рассмотренные задачи являются по существу задачами на вычисление наименьших и наибольших значений функций или алгебраических выражений. В некоторых задачах параметр не вводится и с самого начала речь идёт о поиске таких значений.

Пример 5. Найдите наименьшее значение выражения

$$z=|x+2y|+\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}.$$

Решение. Введём векторы $\vec{p}\{x+2y;0\}$ и $\vec{q}\{3-x;y-4\}$. Тогда $|\vec{p}|=|x+2y|$, $|\vec{q}|=\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$, $z=|\vec{p}|+|\vec{q}|$. Вектор $\vec{p}+\vec{q}$ имеет координаты $\{2y+3;y-4\}$, и

$$|\vec{p}+\vec{q}|=\sqrt{(2y+3)^2+(y-4)^2}=\sqrt{5y^2+4y+25}.$$

В силу неравенства $|\vec{p}|+|\vec{q}|\geqslant|\vec{p}+\vec{q}|$ получаем, что $z\geqslant\sqrt{5y^2+4y+25}$, причём знак равенства достигается, только если $\vec{p}\uparrow\uparrow\vec{q}$. Квадратный трёхчлен $5y^2+4y+25$ положителен при любом y в силу отрицательности дискриминанта и положительности коэффициента при y^2. Наименьшего значения он достигает при $y=-\frac{2}{5}$. Это наименьшее значение, как легко подсчитать, равно $\frac{121}{5}$. Поэтому $z\geqslant\frac{11}{\sqrt{5}}$, причём знак равенства достигается, лишь если $y=-\frac{2}{5}$ и $\vec{p}\uparrow\uparrow\vec{q}$, откуда $x+2y=0$, и, следовательно, $x=\frac{4}{5}$.

Ответ: $\min z=z\left(\frac{4}{5};-\frac{2}{5}\right)=\frac{11}{\sqrt{5}}$.

Пример 6. Найдите наибольшее значение выражения

$$z=y\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{3+2y-2y^2}.$$

Решение. Введём векторы $\vec{p}\{y;\sqrt{3+2y-2y^2}\}$ и $\vec{q}\{\sqrt{1-x^2};x\}$. Тогда $z=\vec{p}\cdot\vec{q}$,

$$|\vec{p}|=\sqrt{y^2+3+2y-2y^2}=\sqrt{4-(1-y)^2},\quad |\vec{q}|=\sqrt{1-x^2+x^2}=1.$$

В силу неравенства $\vec{p}\cdot\vec{q}\leqslant|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|$ получаем, что $z\leqslant\sqrt{4-(1-y)^2}\leqslant\sqrt{4}=2$, причём знак равенства достигается, только если $y=1$ (при этом $|\vec{p}|=2$) и $\vec{p}\uparrow\uparrow\vec{q}$, откуда $\frac{\sqrt{1-x^2}}{1}=\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$ и $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\max z=z\left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)=2$.

В заключение отметим, что в некоторых задачах вместо неравенства треугольника может использоваться аналогичное ему неравенство многоугольника. Кроме того, неравенства $|\vec{a}|+|\vec{b}|\geqslant|\vec{a}+\vec{b}|$ и $\vec{a}\cdot\vec{b}\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ справедливы, разумеется, и в трёхмерном пространстве. Несколько задач, требующих применения неравенства многоугольника или рассмотрения векторов в трёхмерном пространстве, содержатся среди упражнений для самостоятельного решения.

Упражнения к § 5.4

1. а) Найдите наименьшее значение параметра a, при котором следующее уравнение имеет хотя бы один корень:

$$\sqrt{4x^2+20x+29}+\sqrt{4x^2-28x+58}=a.$$

б) Найдите наименьшее значение параметра a, при котором следующее уравнение имеет хотя бы один корень:

$$\sqrt{9x^2-6x+17}+\sqrt{9x^2-54x+85}=a.$$

2. а) Найдите наименьшее значение параметра a, при котором следующее уравнение имеет хотя бы один корень:

$$\sqrt{(5x+1)^2+(5x+2)^2}+\sqrt{(5x+7)^2+(5x-6)^2}=a.$$

б) Найдите наименьшее значение параметра a, при котором следующее уравнение имеет хотя бы один корень:

$$\sqrt{(11x+3)^2+(11x+7)^2}+\sqrt{(11x+15)^2+(11x+2)^2}=a.$$

3. а) Найдите наибольшее значение параметра a, при котором следующее уравнение имеет хотя бы один корень:

$$x(6\sqrt{64-49x^2}+7\sqrt{25-36x^2})=a.$$

б) Найдите наибольшее значение параметра a, при котором следующее уравнение имеет хотя бы один корень:

$$x(4\sqrt{81-25x^2}+5\sqrt{49-16x^2})=a.$$

4. а) Найдите наибольшее значение параметра a, при котором следующее уравнение имеет хотя бы один корень:

$$ax^2=|5x-1|\sqrt{6x-1}+|3x-1|\sqrt{10x-1}.$$

б) Найдите наибольшее значение параметра a, при котором следующее уравнение имеет хотя бы один корень:

$$ax^2=|7x-1|\sqrt{8x-1}+|4x-1|\sqrt{14x-1}.$$

5. а) Найдите наименьшее значение выражения

$$z=|5x-6y|+\sqrt{(5x-3)^2+(3y+4)^2}.$$

б) Найдите наименьшее значение выражения

$$z=|7x+10y|+\sqrt{(7x+3)^2+(5y+4)^2}.$$

6. а) Найдите наибольшее значение выражения

$$z=y\sqrt{36-x^2}+x\sqrt{77+4y-2y^2}.$$

б) Найдите наибольшее значение выражения

$$z = y\sqrt{144-x^2} + x\sqrt{55+6y-2y^2}.$$

7. а) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z = \sqrt{13}, \\ \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{z^2+9} = 7. \end{cases}$$

б) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z = \sqrt{19}, \\ \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+9}+\sqrt{z^2+25} = 10. \end{cases}$$

8. а) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z = 1, \\ \sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1} = \sqrt{21}. \end{cases}$$

б) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z = 2, \\ \sqrt{3x+2}+\sqrt{3y+2}+\sqrt{3z+2} = 6. \end{cases}$$

9. а) Решите неравенство $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{50-3x} \leqslant 12$.
б) Решите неравенство $\sqrt{x-1}+\sqrt{3x+2}+\sqrt{17-4x} \leqslant 3\sqrt{6}$.
10. а) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+4y^2+9z^2 = 9, \\ \sqrt{x^2+1}+\sqrt{4y^2+1}+\sqrt{9z^2+1} = 6. \end{cases}$$

б) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+2y^2+3z^2 = 4, \\ \sqrt{x^2+1}+\sqrt{2y^2+3}+\sqrt{3z^2+4} = 6. \end{cases}$$

Диагностическая работа 1

Вариант 1

1. При каждом значении параметра a решите неравенство

$$xa^2-(5x+2)a+4x+2\geqslant 0.$$

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2x^3-(a+3)x^2+2(a-1)x=0$ имеет ровно два различных корня.

3. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых больший корень уравнения $x^2-(2a+1)x+a^2+a=0$ в пять раз больше, чем его меньший корень.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое решение неравенства $(a-4)x^2-2(a+3)x+a+2>0$ принадлежит отрезку $[-1;\,1]$.

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $36^x-(a-2)\cdot 6^x-a+5\leqslant 0$ имеет хотя бы одно решение.

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение $8x^6+(a+x+1)^3+2x^2+a+x+1=0$ имеет хотя бы один корень.

Вариант 2

1. При каждом значении параметра a решите неравенство

$$2xa^2-(5x+4)a+2x+2\geqslant 0.$$

2. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2x^3-(a+9)x^2+4(a+1)x=0$ имеет ровно два различных корня.

3. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых меньший корень уравнения $x^2-(2a+3)x+a^2+3a+2=0$ в пять раз меньше, чем его больший корень.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое решение неравенства $(a-8)x^2-2(a+6)x+a+4>0$ принадлежит отрезку $[-1;\,1]$.

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $81^x-(a+4)\cdot 9^x-a-1\leqslant 0$ имеет хотя бы одно решение.

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение $x^6+(2a-x-2)^3+4x^2+8a=4x+8$ имеет хотя бы один корень.

Диагностическая работа 2

Вариант 1

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2-9a+8+7|x-1|+49\log_7(2x^2-4x+9)=3|2x-7a+5|$ имеет хотя бы один корень.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{(x-7)^4+(a-8)^4}=|x-a+1|+|x+a-15|$ имеет единственный корень.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} a+12x\leqslant 48,\\ a+16x\geqslant 4x^2,\\ a\leqslant 4x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого значения a.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax+\sqrt{4-x^2}=x+5a-3$ имеет единственный корень.

5. Найдите все значения параметра, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-3)^2=16,\\ \sqrt{(x-1)^2+(y-11)^2}+\sqrt{(x-2a-1)^2+(y+1)^2}=2\sqrt{a^2+36}. \end{cases}$$

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых при любом значении параметра b имеет хотя бы одно решение система уравнений

$$\begin{cases} 2(1+2|y|)^{0,5a}+(9b^2-6b+2)^z=3,\\ 4zy(z+3b-1)=a^2-3a+2. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2-5a+7|x+1|+49\log_5(2x^2+4x+7)=6+3|2x-7a-5|$ имеет хотя бы один корень.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{(x+8)^4+(a+5)^4}=|x-a+3|+|x+a+13|$ имеет единственный корень.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} a+x \leqslant 4, \\ 3a+4x \geqslant x^2, \\ 3a \leqslant x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого значения a.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax+x+\sqrt{-4x-x^2}=3a+5$ имеет единственный корень.

5. Найдите все значения параметра, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (x+1)^2+(y-5)^2=16, \\ \sqrt{(x+1)^2+(y-13)^2}+\sqrt{(x-4a+1)^2+(y-1)^2}=4\sqrt{a^2+9}. \end{cases}$$

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых при любом значении параметра b имеет хотя бы одно решение система уравнений

$$\begin{cases} 2(1+3|y|)^{0,25a}+(4b^2-4b+2)^z=3, \\ 24zy(z+2b-1)=a^2-6a+8. \end{cases}$$

Диагностическая работа 3

Вариант 1

1. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет не менее семи решений система уравнений

$$\begin{cases} (a^2-13a)x+24y=a^2-16a-24, \\ 5x+4y=2. \end{cases}$$

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos 2x-(3a^2-8a+2)\sin x=1$ имеет на отрезке $[0;2\pi]$ ровно 4 корня.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $25^x+(3a^2-7a+8)\cdot 5^x-5a+3=0$ имеет единственный корень.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $162x^3-9(a+18)x^2-9ax+a^2=0$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} (a+14x+9)(a-2x+9)\leqslant 0, \\ a+8x\geqslant x^2, \end{cases}$$

имеет единственное решение.

6. Найдите наименьшее значение параметра a, при котором уравнение $\sqrt{(x+8)^2+(x+2)^2}+\sqrt{(x+14)^2+(x+3)^2}=13a$ имеет хотя бы один корень.

Вариант 2

1. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет не менее семи решений система уравнений

$$\begin{cases} 4x+(6a^2+13a)y=6a^2+16a-4, \\ 4x+5y=2. \end{cases}$$

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4\cos 2x-(3a^2-16a+8)\sin x=4$ имеет на отрезке $[0;2\pi]$ ровно 4 корня.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $49^x + (3a^2 + 5a + 6) \cdot 7^x - 5a - 7 = 0$ имеет единственный корень.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $32x^3 - 4(a+8)x^2 - 4ax + a^2 = 0$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} (a + 8x + 4)(a - x + 4) \leqslant 0, \\ a + 4x \geqslant x^2, \end{cases}$$

имеет единственное решение.

6. Найдите наименьшее значение параметра a, при котором уравнение $\sqrt{(x-7)^2 + (x-3)^2} + \sqrt{(x-11)^2 + (x-1)^2} = 10a$ имеет хотя бы один корень.

Диагностическая работа 4

Вариант 1

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a-10)x^2-2(a-4)x-a+4=0$ имеет хотя бы один корень, меньший 1.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого действительного значения x выполнено неравенство

$$a(\cos^2 x-3)^2+2a+2\sin^2 x<8.$$

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого действительного значения x выполнено неравенство

$$|\sin x+a^2+3a+1|+|2\sin x+a^2-2a+2|\leqslant 5\sin x+|2a^2+a|+5.$$

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |y|+2a=6\sin x,\\ y^4+4z^2=12a,\\ (2a-3)^2=4|z^2+3z|+\sin^2 2x+9 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого из найденных значений a.

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=3a$ имеет хотя бы один корень, если

$$2f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+3f(x)=\sin^2 x+8\cos x+12\sin x+2$$

для любого действительного значения x.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых хотя бы одно решение неравенства $x^2+x+a+|x-a+2|\leqslant 2$ принадлежит отрезку $[-2;-1]$.

Вариант 2

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(a+2)x^2-2(a+8)x-a-8=0$ имеет хотя бы один корень, меньший 1.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого действительного значения x выполнено неравенство

$$3a(\cos^2 x+2)^2+6a<3+\sin^2 x.$$

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого действительного значения x выполнено неравенство

$$|\cos x+a^2-3a+1|+|2\cos x+a^2-8a+17| \leqslant 7\cos x+|2a^2-11a+15|+7.$$

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |y|+a = 2\sin x, \\ 81y^4+z^2 = 18a, \\ 9(a-1)^2 = |z^2-6z|+\sin^2 2x+9 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого из найденных значений a.

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $f(\pi-x)=0{,}5a$ имеет хотя бы один корень, если

$$2f(\pi-x)+3f\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 x+8\sin x-12\cos x+2$$

для любого действительного значения x.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых хотя бы одно решение неравенства $x^2+a+|x-a-3|+6 \leqslant 5x$ принадлежит отрезку $[1; 2]$.

Диагностическая работа 5

Вариант 1

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2|x^2+2x-3|-2a=|2x-a|+6$ имеет ровно три различных корня.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет ровно три различных решения система уравнений

$$\begin{cases} (x-5)^2+(y-7)^2=9, \\ y=|x-a-3|+4. \end{cases}$$

3. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых при любом значении параметра b уравнение

$$2x^2-8|x|-7|b-2a-4|+3|b-6|-2b+10a=10$$

имеет ровно два корня.

4. Для каждого неотрицательного значения параметра a найдите множество решений неравенства $a^3x^4+18a^2x^2-27x+81a+81\geqslant 0$.

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $40x+\dfrac{32}{\sqrt{x^2+16}}=a\sqrt{x^2+16}$ имеет хотя бы один корень.

6. Найдите наибольшее значение параметра a, при котором уравнение $ax^2=2|x-1|\sqrt{x-1}+|x-2|\sqrt{2x-1}$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для этого значения a.

Вариант 2

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $3|x^2+2x-3|-2a=|3x-a|+9$ имеет ровно три различных корня.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет ровно три различных решения система уравнений

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-6)^2=9, \\ y=|x-a+2|+3. \end{cases}$$

3. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых при любом значении параметра b уравнение

$$3x^2-12|x|-7|b-3a+6|+3|b-9|-2b+15a=75$$

имеет ровно два корня.

4. Для каждого неотрицательного значения параметра a найдите множество решений неравенства $a^3x^4+12a^2x^2-4x+18a+12\geqslant 0$.

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $5x+\dfrac{18}{\sqrt{x^2+36}}=a\sqrt{x^2+36}$ имеет хотя бы один корень.

6. Найдите наибольшее значение параметра a, при котором уравнение $ax^2=2|x-2|\sqrt{0{,}5x-1}+|x-4|\sqrt{x-1}$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для этого значения a.

Ответы

Глава 1. Логический перебор в задачах с параметром

§ 1.1

1. а) При $a=\frac{1}{9}$ уравнение имеет бесконечно много корней;
при $a=\frac{6}{5}$ уравнение не имеет корней;
при $a\in\left(-\infty;\frac{1}{9}\right)\cup\left(\frac{1}{9};\frac{6}{5}\right)\cup\left(\frac{6}{5};+\infty\right)$ уравнение имеет один корень;
б) при $a=\frac{1}{7}$ уравнение имеет бесконечно много корней;
при $a=\frac{3}{2}$ уравнение не имеет корней;
при $a\in\left(-\infty;\frac{1}{7}\right)\cup\left(\frac{1}{7};\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$ уравнение имеет один корень.
2. а) $\left[\frac{1}{a-4};+\infty\right)$ при $a\in(-\infty;0{,}25)\cup(4;+\infty)$; $(-\infty;+\infty)$ при $a=0{,}25$;
$\left(-\infty;\frac{1}{a-4}\right]$ при $a\in(0{,}25;4)$; решений нет при $a=4$;
б) $\left(-\infty;\frac{1}{5a-1}\right]$ при $a\in(-\infty;0{,}2)\cup(5;+\infty)$; решений нет при $a=0{,}2$;
$\left[\frac{1}{5a-1};+\infty\right)$ при $a\in(0{,}2;5)$; $(-\infty;+\infty)$ при $a=5$.
3. а) $\frac{563}{51}$; б) $-\frac{305}{7}$. **4.** а) 0,9; б) $\frac{7}{8}$. **5.** а) $-2{,}5$; б) $\frac{4}{9}$.
6. а) (0,25; 0,25) при $a=1$; (−1,36; 0,48) при $a=-3{,}6$;
нет решений при прочих a;
б) (1; 1) при $a=1$; $\left(\frac{2}{9};\frac{16}{9}\right)$ при $a=-\frac{4}{3}$; нет решений при прочих a.
7. а) $\left(-\infty;\frac{3}{8}\right)\cup\left(\frac{3}{8};\frac{3}{4}\right)\cup\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$; б) $\left(-\infty;\frac{3}{16}\right)\cup\left(\frac{3}{16};\frac{3}{13}\right)\cup\left(\frac{3}{13};+\infty\right)$.
8. а) 5; б) $\frac{8}{3}$. **9.** а) $\left[\frac{17}{22};\frac{9}{11}\right]$; б) [10,5; 11]. **10.** а) $-1{,}6$; б) -2.
11. а) $(-\infty;-6)\cup[-4;-1]$; б) $(-\infty;2)\cup[3;4]$.
12. а) $\left(-\infty;-2\right]\cup\{1\}\cup[4;+\infty)$; б) $(-\infty;-1{,}5]\cup\{2\}\cup[4{,}5;+\infty)$.

§ 1.2

1. а) $a=-5$, $a=0$; б) $a=0$, $a=3$. **2.** а) $a=\frac{37}{16}$, $a=4$; б) $a=\frac{14}{9}$, $a=4$.
3. а) $\left(0;\frac{7}{6}\right)$; б) $\left(0;\frac{8}{9}\right)$. **4.** а) $-0{,}5$; б) 2. **5.** а) 1; б) -1.
6. а) $(-\infty;-4)$; б) $(-\infty;-1)$. **7.** а) $(-5;-3)$; б) $(-4;6)$.
8. а) $\left(-\infty;a+\frac{3}{a}\right)\cup(a;+\infty)$ при $a<0$; $(0;+\infty)$ при $a=0$; $\left(a;a+\frac{3}{a}\right)$ при $a>0$;
б) $\left(-\infty;2a+\frac{1}{2a}\right)\cup(2a;+\infty)$ при $a<0$; $(0;+\infty)$ при $a=0$; $\left(2a;2a+\frac{1}{2a}\right)$ при $a>0$.
9. а) $\left(-2+\frac{15}{a};-2\right)$ при $a<0$; решений нет при $a=0$; $\left(-2;-2+\frac{15}{a}\right)$ при $a>0$;
б) $\left(-3+\frac{9}{2a};-3\right)$ при $a<0$; решений нет при $a=0$; $\left(-3;-3+\frac{9}{2a}\right)$ при $a>0$.

10. а) (2,5; 4,5); б) (−0,8; 1,6). **11.** а) a — любое число; б) a — любое число.
12. а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{2}{3}$. **13.** а) $[4; +\infty)$; б) $[-1; +\infty)$.
14. а) $(-\infty; -3]\cup\left[-\frac{8}{3}; 0\right]\cup\{-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\}$; б) $(-\infty; -5]\cup\left[-\frac{6}{5}; 0\right]\cup\{-\sqrt{6}; \sqrt{6}\}$.
15. а) $[-1; +\infty)$; б) $[-0{,}5; +\infty)$. **16.** а) −13; −8; −5; 0; б) −2; 0; 2; 4.
17. а) $(-4; -1)\cup\{2\}$; б) $(-14; -5)\cup\{4\}$.
18. а) $(-5; -4]\cup[-3; -2)$; б) $(-1; 0]\cup[7; 8)$. **19.** а) $[-1; 1]$; б) $[-1; 2]$.
20. а) $[-1; 1]$; б) $[-1; 1]$. **21.** а) (5; 9); б) (−4; 13).
22. а) $a=\frac{2}{3}$; {2; 3}; б) $a=\frac{1}{3}$; {1; 3}. **23.** а) 7; б) 2. **24.** а) [3; 13]; б) [8; 9].
25. а) $(-\infty; -2]\cup[2; +\infty)$; б) $(-\infty; -\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3}; +\infty)$.
26. а) $[0; 1)\cup\{3; 4\}\cup(5; +\infty)$; б) $\{4\}\cup(5; +\infty)$.
27. а) $a=-4$, b — любое число; $a=4$, $b=2$;
б) a — любое число, $b=2$; $a=1$, $b=-2$; $a=-1$, $b=-2$.
28. а) $(-2{,}5; -0{,}75)\cup(-0{,}75; 1)$; б) $(-2; 0{,}5)\cup(0{,}5; 3)$.
29. а) $(-\infty; -2)\cup(-2; -0{,}5)\cup(1; +\infty)$; б) $(-\infty; -3)\cup(1{,}5; 6)\cup(6; +\infty)$.
30. а) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)\cup(1; +\infty)$; б) $(-\infty; 0{,}5)\cup(0{,}75; +\infty)$.
31. а) $(-\infty; -0{,}5)\cup\{0; 1\}\cup(2{,}5; +\infty)$; б) $\{-2; 0\}\cup(1; +\infty)$.

§ 1.3

3. а) (−3; −1); (−1; −3); (1; 3); (3; 1); б) (1; −2); (2; −1); (−1; 2); (−2; 1).
4. а) (−1; 1); (1; 3); б) (−1; 4); (1; 6).
5. а) (1; 1); (2; 2); (−1; 5); (−2; 4); б) (1; −1); (3; 1); (−1; 5); (−3; 3).
6. а) $(7n-2; 5n)$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $(11n-3; 7n)$, $n\in\mathbb{Z}$.
7. а) $(11n-2; 2-5n)$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $(6+13n; 1+7n)$, $n\in\mathbb{Z}$.
8. а) (0; 0); б) (−1; −1). **9.** а) (1; −2); (−1; −2); б) (−3; −1); (−3; 1).
10. а) (3; −1); (1; 1); (−3; 1); (−1; −1); б) (1; −1); (1; 0); (−1; 1); (−1; 0).
11. а) (11; 1); (3; −1); б) (8; 1); (2; −1).
12. а) (1; 1); (1; 2); (−1; −1); (−1; −2); б) (1; 1); (1; 3); (−1; −1); (−1; −3).
13. а) (−1; 5); (1; 1); б) (1; 1); (−1; −5).
14. а) (0; −1); (0; 1); (2; 1); б) (2; 1).
15. а) (1; 1); (−1; −3); б) (1; 1); (−1; −2).
16. а) −5; −3; −2; 0; 1; 3; б) −7; −2; −1; 4.
17. а) −1; б) −11; −1. **18.** а) дробь несократима; б) 2. **19.** а) 7; б) 23.
20. а) 210; б) 330. **21.** а) 2) 1; 1; 5; б) 2) 1; 1; 2; 3.
22. а) 1) 4131; 2) 1; б) 1) 1045; 2) 1. **23.** а) 1) 3; 2) 72; б) 1) 3; 2) 96.
24. а) 1) да, например, $b_1=216$, $q_1=\frac{7}{6}$; 2) нет;
б) 1) да, например, $b_1=512$, $q_1=\frac{9}{8}$; 2) нет.
25. а) 1) нет; 2) нет; 3) да, например, 1, 2, 4, 6, 8, …, 2046;
б) 1) нет; 2) нет; 3) да, например, 1, 2, 4, 6, 8, …, 2076.
26. а) 1) нет; 2) да; 3) 549; б) 1) нет; 2) да; 3) 477.
27. а) 1) 44; 2) отрицательных; 3) 17; б) 1) 36; 2) отрицательных; 3) 16.
28. а) 1) −8, −5, 7; 2) 7; 3) нет; б) 1) −6, −3, 5; 2) 5; 3) нет.

29. а) 1) нет; 2) нет; 3) да; б) 1) нет; 2) нет; 3) да.
30. а) 1) например, $(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1)$;
2) например, $(1+4+1)\cdot(4+1+4)\cdot(1+4+1)\cdot(4+1+4)\cdot1\cdot4$;
б) 1) например, $(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)$;
2) например, $(1+7+1)\cdot(7+1+7)\cdot(1+7+1)\cdot(7+1)\cdot(7+1)$.
31. а) 1) 160; 2) да; 3) 20; б) 1) 120; 2) да; 3) 20.
32. а) 1) нет; 2) да; 3) $\frac{6}{7}$; б) 1) нет; 2) да; 3) $\frac{4}{7}$.
33. а) 1) нет; 2) да; 3) $\frac{132}{7}$; б) 1) нет; 2) да; 3) $\frac{138}{7}$.
34. а) 1) да; 2) 13; 3) $\frac{33}{70}$; б) 1) да; 2) 11; 3) $\frac{6}{13}$.
35. а) в числе 16,9 гидролог пропустил запятую, а в числе 15,9 вместо запятой поставил нуль;
б) в числе 25,9 метеоролог пропустил запятую, а в числе 23,9 вместо запятой поставил нуль.
36. а) 1) да, например, если первоначально на доске было 24 числа, равных 1, и 6 чисел, равных 31; 2) нет; 3) 18,5;
б) 1) да, например, если первоначально на доске было 19 чисел, равных 10, и одно число, равное 1; 2) нет; 3) $38\frac{1}{7}$.

Глава 2. Квадратный трёхчлен в задачах с параметром и нестандартных задачах

§ 2.1

1. а) $\frac{3}{8}$; б) $\frac{5}{6}$. **2.** а) $(-\infty;3{,}2)$; б) $(-\infty;-0{,}5)$. **3.** а) 1; б) -1.
4. а) -4; б) -2. **5.** а) 5; б) -8. **6.** а) $(-1;0)\cup(0;4)$; б) $(-1;0)\cup(0;9)$.
7. а) $(-\infty;-5]\cup[-3{,}2;0]\cup\{-4;4\}$; б) $(-\infty;-4]\cup[-2{,}25;0]\cup\{-3;3\}$.
8. а) $[1;+\infty)$; б) $[-2;0)$. **9.** а) 2; б) 3.
10. а) $(-6;-1)$; б) $(-\infty;-1)\cup(7;+\infty)$. **11.** а) $(-\infty;-0{,}5)\cup(0;3)$;
б) $(-2;-1)\cup(1;2)$. **12.** а) $[2{,}5;3{,}5]$; б) $[-1{,}5;-0{,}5]$.
13. а) $\pm\arccos\sqrt{a+3}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, при $a\in[-3;-2]$; при прочих a корней нет;
б) $\pm\arcsin\sqrt{2-a}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, при $a\in[1;2]$; при прочих a корней нет.
14. а) $[0{,}2;0{,}6]$; б) $[3;4]$.
15. а) $\pm\arccos(a+3)+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, при $a\in[-4;-2]$; при прочих a корней нет;
б) $(-1)^n\arcsin(a+2)+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, при $a\in[-3;-1]$; при прочих a корней нет.
16. а) $\left\{\frac{1}{a-1};1\right\}$ при $a\in(-\infty;0]\cup(2;+\infty)$; $\{1\}$ при $a\in(0;2]$;
б) $\left\{\frac{2}{a};1\right\}$ при $a\in(-\infty;-2]\cup(2;+\infty)$; $\{1\}$ при $a\in(-2;2]$.
17. а) $\left[-\frac{13}{7};1\right)$; б) $[-3;1)$. **18.** а) $\left(-\infty;\frac{4}{7}\right]\cup\left[\frac{16}{19};+\infty\right)$; б) $\left[\frac{10}{11};2\right]$.
19. а) $(-\infty;-2]\cup\left[\frac{22}{9};+\infty\right)$; б) $(-\infty;-2]\cup\left[\frac{7}{4};+\infty\right)$.
20. а) $(1{,}5;+\infty)$; б) $(-2;+\infty)$. **21.** а) $(-0{,}25;0{,}5]$; б) $(-1{,}75;0{,}5]$.
22. а) 5; б) 3. **23.** а) -7; $-0{,}6$; б) 0, 75; 3. **24.** а) $-\frac{1}{9}$; б) $-\frac{9}{8}$.

25. а) -2; б) 3. **26.** а) $-0{,}3$; б) $-\frac{2}{3}$. **27.** а) $\left[-\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right]$; б) $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right]$.
28. а) $\sqrt{7}$; б) $-\sqrt{3}$. **29.** а) $2n+0{,}5$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $n+0{,}25$, $n\in\mathbb{Z}$.
30. а) $(2;2)$; б) $(-25;-1)$. **31.** а) $(8;3;0)$; б) $(0;81;4)$.
32. а) $-0{,}5$; б) $-\frac{17}{48}$. **33.** а) $(4;-3;0)$; $(2;-1;2)$; б) $(0;1;0)$; $(-1;2;2)$.

§ 2.2

1. а) $(1;2)$; б) $(-2;3)$. **2.** а) $(-\infty;-3)\cup(-3;3)$; б) $(-5;5)\cup(5;+\infty)$.
3. а) $(-\infty;-0{,}5)\cup(0;3)$; б) $(-2;-1)\cup(1;2)$.
4. а) $(-1;0)\cup(1;4)$; б) $(-3;-2)\cup(2{,}5;3)$. **5.** а) $\left(\frac{13}{7};\frac{17}{5}\right)$; б) $(2;2{,}8)$.
6. а) $(-0{,}25;0{,}5)$; б) $(-1;-0{,}7)$.
7. а) $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(0;\frac{1}{6}\right)\cup(1;+\infty)$; б) $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\cup\left(0;\frac{1}{3}\right)\cup(2;+\infty)$.
8. а) $(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{6};0\right)\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$; б) $(-\infty;-2)\cup\left(-\frac{7}{6};-1\right)\cup\left(-\frac{2}{3};+\infty\right)$.
9. а) $(-4;-1)\cup(0;0{,}5)$; б) $(-2;1)\cup(2;2{,}5)$.
10. а) $(-1;0)\cup(2;27)$; б) $(0;1)\cup(3;28)$. **11.** а) $[-1;3]$; б) $[-2;2]$.
12. а) $[-4;0]$; б) $[-5;-1]$. **13.** а) $\left(-\frac{1}{16};\frac{44}{25}\right]$; б) $\left(-\frac{33}{16};0{,}34\right]$.
14. а) $\left(\frac{15}{16};\frac{24}{25}\right]$; б) $\left(\frac{31}{16};\frac{49}{25}\right]$.
15. а) $(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$; б) $(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$.
16. а) $(-\infty;-2]\cup[1;+\infty)$; б) $(-\infty;-4]\cup[-1;+\infty)$.

§ 2.3

1. а) $\left(-\infty;\frac{-2-\sqrt{6}}{2}\right)\cup(2{,}5;+\infty)$; б) $(-\infty;-9-\sqrt{89})\cup(20;+\infty)$.
2. а) $(5;+\infty)$; б) $(0{,}2;+\infty)$. **3.** а) $[-2;+\infty)$; б) $[0{,}75;+\infty)$.
4. а) $(-\infty;-2]\cup\{0\}\cup[2;+\infty)$; б) $(-\infty;-3]\cup\{0\}\cup[3;+\infty)$.
5. а) $(-2;1{,}5)$; б) $(-4;1{,}5)$. **6.** а) $(-4;2]$; б) $(-6;2]$.
7. а) $(-\infty;3)$; б) $(-6;+\infty)$. **8.** а) $[3;+\infty)$; б) $[1;+\infty)$.
9. а) $[4;+\infty)$; б) $[-3;+\infty)$.
10. а) $\frac{3-\sqrt{2a^2-1}}{2}$ при $a\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$;
$\frac{3\pm\sqrt{2a^2-1}}{2}$ при $a\in\left[-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]$; при прочих a корней нет;
б) $\frac{5-\sqrt{2a^2-1}}{2}$ при $a\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$;
$\frac{5\pm\sqrt{2a^2-1}}{2}$ при $a\in\left[-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]$; при прочих a корней нет.
11. а) $(-\infty;+\infty)$ при $a\in[2;+\infty)$;
$(-\infty;-\log_5(1+\sqrt{2-a})]\cup[\log_5(1+\sqrt{2-a});+\infty)$ при $a\in(-\infty;2)$;
б) $(-\infty;+\infty)$ при $a\in[3;+\infty)$;
$(-\infty;-\log_6(1+\sqrt{3-a})]\cup[\log_6(1+\sqrt{3-a});+\infty)$ при $a\in(-\infty;3)$.

12. а) $2a-3+\sqrt{3a-2}$ при $a\in(1;+\infty)$; $2a-3\pm\sqrt{3a-2}$ при $a\in\left[\frac{2}{3};1\right]$;
при прочих a корней нет;
б) $2a+3+\sqrt{3a+1}$ при $a\in(0;+\infty)$; $2a+3\pm\sqrt{3a+1}$ при $a\in\left[-\frac{1}{3};0\right]$;
при прочих a корней нет.
13. а) $(-1;5]$; б) $(1;7]$.
14. а) $(-\infty;-2-\sqrt{6})\cup(\sqrt{2};+\infty)$; б) $(-\infty;-2-2\sqrt{2})\cup(2;+\infty)$.
15. а) $(2;3]$; б) $(10;15]$. **16.** а) $[2;+\infty)$; б) $(-\infty;1]$.
17. а) $\left(0;\frac{1}{36}\right)$; б) $(-0{,}25;0)$.
18. а) $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{18}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{13\pi}{18}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$;
б) $\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{12}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.
19. а) $\left(-1;\frac{9}{16}\right)$; б) $\left(-\frac{9}{16};1\right)$. **20.** а) $\left(-\frac{13}{4};3\right)$; б) $\left(-\frac{9}{4};2\right)$.
21. а) 0; 1; б) -1; 1. **22.** а) $-3{,}5\pm2\sqrt{2}$; $-0{,}5$; 1; б) $\frac{11}{12}$; 1; 3.
23. а) 0; 2; б) $\frac{4}{3}$. **24.** а) -2; б) $-\frac{2}{3}$. **25.** а) $-\frac{17}{48}$; б) $-0{,}5$.
26. а) $\left[\frac{2-3\sqrt{2}}{3};\frac{2+3\sqrt{2}}{3}\right]$; б) $\left[\frac{5-6\sqrt{7}}{6};\frac{5+6\sqrt{7}}{6}\right]$.
27. а) $\left\{\frac{3}{2}\right\}\cup[2;4)$; б) $\{2\}\cup[4;9)$.
28. а) $\{0\}\cup(2+\sqrt{3};2+\sqrt{5})$; б) $\{0\}\cup\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3};\frac{3+\sqrt{15}}{3}\right)$.
29. а) $(-6;7)$; б) $(-8;7)$.
30. а) $x=0$ при $a=0$; оба корня положительны при $a\geqslant4$;
корней нет при прочих значениях a;
б) $x=0$ при $a=0$; оба корня положительны при $a\geqslant5$;
корней нет при прочих значениях a.
31. а) $[-\sqrt{2};1)\cup[\sqrt{2};+\infty)$; б) $[-\sqrt{3};1)\cup[\sqrt{3};+\infty)$.
32. а) $[1;+\infty)$; б) $[0;+\infty)$. **33.** а) $(-\infty;-1]$; б) $(0;+\infty)$.
34. а) $(-\infty;-2-\sqrt{5})\cup(\sqrt{5};+\infty)$; б) $(-\infty;-3-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3}-1;+\infty)$.
35. а) $a<0$; б) $a<0$. **36.** а) $1-\sqrt{2}$; $5+\sqrt{10}$; б) 0,5; $2+\sqrt{2}$.
37. а) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\operatorname{arctg}(0{,}5)+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$;
б) $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\pi-\operatorname{arctg}2+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.
38. а) $\left[\frac{1}{3};\frac{3}{4}\right)\cup\left(\frac{3}{4};\frac{33}{32}\right]$; б) $[-2;0)\cup\left(0;\frac{4}{3}\right]$. **39.** а) $(2;8)$; б) $(0{,}5;1)$.
40. а) $\left(0;\frac{1}{3}\right)$; б) $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup(3;+\infty)$. **41.** а) $\{0{,}25;1\}$; б) $\{1;1{,}75\}$.
42. а) $\pi+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.
43. а) $4-\sqrt{a+12}$ при $a\in(-8;-3)\cup(-3;+\infty)$; при прочих a корней нет;
б) $3-\sqrt{a+5}$ при $a\in(-4;-1)\cup(-1;+\infty)$; при прочих a корней нет.
44. а) $(0;+\infty)$ при $a=0$; $\left[-\frac{a}{3};0\right)\cup(8a;+\infty)$ при $a\in(0;+\infty)$;
решений нет при $a\in(-\infty;0)$;
б) $(0;+\infty)$ при $a=0$; $\left[-\frac{4a}{3};-a\right)\cup(0;+\infty)$ при $a\in(0;+\infty)$;
решений нет при $a\in(-\infty;0)$.

45. а) $\{1-\sqrt{a^2-2a+5};\ 1+\sqrt{a^2+4a+8}\}$ при $a\in(-\infty;\ -2)$;
$\{1-\sqrt{a^2-2a+5};\ 1-\sqrt{a^2+4a+8}\}$ при $a\in[-2;\ 1]$;
$\{1+\sqrt{a^2-2a+5};\ 1-\sqrt{a^2+4a+8}\}$ при $a\in(1;\ +\infty)$;
б) $\{-3+\sqrt{a^2+4a+5};\ -3-\sqrt{a^2-6a+10}\}$ при $a\in(-\infty;\ -2)$;
$\{-3-\sqrt{a^2+4a+5};\ -3-\sqrt{a^2-6a+10}\}$ при $a\in[-2;\ 3]$;
$\{-3-\sqrt{a^2+4a+5};\ -3+\sqrt{a^2-6a+10}\}$ при $a\in(3;\ +\infty)$.
46. а) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ 2\pi m,\ n\in\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{Z}$, при $a=-1$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi l,\ l\in\mathbb{Z}$, при $a=0$;
$\pm\arccos\frac{1-\sqrt{7}}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, при $a=1$; при прочих целых a корней нет;
б) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \pi m,\ n\in\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{Z}$, при $a=0$; $(-1)^{l+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi l,\ l\in\mathbb{Z}$, при $a=1$;
$(-1)^{k+1}\arcsin\frac{\sqrt{7}-1}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, при $a=2$; при прочих целых a корней нет.
47. а) $(-\infty;\ -2+\log_3 a)$ при $a\in(0;\ +\infty)$; $(-\infty;\ \log_3(-a))$ при $a\in(-\infty;\ 0)$;
при $a=0$ решений нет;
б) $(-\infty;\ -2+\log_2 a)$ при $a\in(0;\ +\infty)$; $(-\infty;\ -1+\log_3(-a))$ при $a\in(-\infty;\ 0)$;
при $a=0$ решений нет.
48. а) $\left(\frac{-1-\sqrt{2a^2-1}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{2a^2-1}}{2}\right)$ при $a\in\left[-1;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right]$;
$\left(-|a|;\ \frac{-1+\sqrt{2a^2-1}}{2}\right)$ при $a\in(-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$; при прочих a решений нет;
б) $\left(\frac{-a+\sqrt{2-a^2}}{2};\ 1\right]$ при $a\in(-1;\ 1]$; $\left[-1;\ \frac{-a-\sqrt{2-a^2}}{2}\right)\cup\left(\frac{-a+\sqrt{2-a^2}}{2};\ 1\right]$
при $a\in(1;\ \sqrt{2}]$; $[-1;\ 1]$ при $a\in(\sqrt{2};\ +\infty)$; при прочих a решений нет.

Глава 3. Применение свойств функций к решению уравнений и неравенств

§ 3.1

1. а) -2; б) -1. **2.** а) 2; б) 2. **3.** а) $(-2;\ 5)$; б) $(-6;\ -1)$.
4. а) $[3;\ 6)$; б) $[1;\ 4)$. **5.** а) $[4;\ 8]$; б) $[2;\ 6)$. **6.** а) $[3;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 2]$;
7. а) 1; б) 3. **8.** а) -3; б) -3.
9. а) $(-0{,}6;\ -0{,}6)$; $(0{,}6;\ 0{,}6)$; б) $(-0{,}4;\ -0{,}4)$; $(0{,}4;\ 0{,}4)$.
10. а) $(-0{,}2;\ 0{,}2)$; $(0{,}2;\ -0{,}2)$; б) $(-0{,}1;\ 0{,}1)$; $(0{,}1;\ -0{,}1)$. **11.** а) $-\frac{1}{3}$; б) $-\frac{1}{5}$.
12. а) $[-2;\ 6]$; б) $(-\infty;\ -4]\cup[3;\ +\infty)$. **13.** а) $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$; 1; б) $\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$; 1.
14. а) $\left(\frac{22}{9};\ \frac{23}{9}\right)$; б) $\left(\frac{59}{15};\ \frac{61}{15}\right)$.
15. а) (1; 1; 1); (2; 2; 2); $(-3;\ -3;\ -3)$; б) (1; 1; 1); $(-2;\ -2;\ -2)$.
16. а) $(-\infty;\ \frac{4}{9}]$; б) $(-\infty;\ 1]$. **17.** а) $[-4;\ 2]$; б) $[-4;\ 6]$.
18. а) $[-2{,}5;\ 3{,}5]$; б) $[-2{,}5;\ 1{,}5]$. **19.** а) $[-8{,}5;\ -3{,}5]$; б) $[-2{,}8;\ -1{,}4]$.

20. а) $(\pi n;\ \pi k;\ c)$, $k\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}$, $c\in\mathbb{R}$, при $a=0$;
$\left((-1)^m \arcsin a+\pi m;\ (-1)^l \arcsin a+\pi l;\ \frac{\pi}{2}+2\pi r\right)$, $m\in\mathbb{Z}$, $l\in\mathbb{Z}$, $r\in\mathbb{Z}$,
при $a\in[-1;\ 0)\cup(0;\ 1]$; при прочих a решений нет;
б) $(0;\ 0;\ c)$, $c\in\mathbb{R}$, при $a=1$; $(\log_2 a;\ \log_2 a;\ \log_a 2)$ при $a\in(0;\ 1)\cup(1;\ +\infty]$;
при прочих a решений нет.
21. а) $[-3;\ 4]$; б) $[-4;\ 3]$. **22.** а) $\{-2\}\cup[2;\ +\infty)$; б) $\{-5\}\cup[5;\ +\infty)$.
23. а) 1; б) $\left[-\frac{7}{3};\ \frac{31}{3}\right]$. **24.** а) 0,8; 1,25; б) -4; $-0{,}25$.

§ 3.2

1. а) 0; б) 0. **2.** а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{2}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$.
3. а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$; б) πl, $l\in\mathbb{Z}$.
4. а) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **5.** а) 0; б) 0.
6. а) $\left(2;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $(\pi+2\pi k;\ -3)$, $k\in\mathbb{Z}$.
7. а) 4; б) 2. **8.** а) $-1{,}2$; б) 0,75.
9. а) 1,2 при $a=-6$; при прочих a корней нет;
б) 0,3 при $a=-1{,}25$; при прочих a корней нет.
10. а) $\{-1;\ 2\}$ при $a=4$; $\{0;\ 1\}$ при $a=0{,}25$; при прочих a корней нет;
б) $\{-1;\ 2\}$ при $a=5$; $\{0;\ 1\}$ при $a=0{,}2$; при прочих a корней нет.
11. а) 3; б) 10.
12. а) 10; 100 при $a=2$; при прочих a корней нет;
б) 0,1; 100 при $a=-2$; при прочих a корней нет.
13. а) 0,5 при $a=2{,}5$; при прочих a корней нет;
б) $-1{,}5$ при $a=1{,}5$; при прочих a корней нет.
14. а) $(1;\ 2;\ 3)$ при $a=2$; при прочих a решений нет;
б) $(-3;\ -2;\ -1)$ при $a=-3$; при прочих a решений нет.
15. а) $(10;\ 20;\ 30)$ при $a\leqslant -6$; при прочих a решений нет;
б) $(-40;\ -50;\ -60)$ при $a\leqslant 7$; при прочих a решений нет.
16. а) $(-\infty;\ -6]\cup[6;\ +\infty)$; б) $[-7;\ 5]$. **17.** а) -5; 7; б) -8; 4.
18. а) $(-2;\ 2)$; б) $(-1;\ 1)$.
19. а) $(-\infty;\ -5]\cup\{3\}\cup[4;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ -3]\cup\{2\}\cup[6;\ +\infty)$.
20. а) $(3;\ 0)$ б) $(1;\ 0)$. **21.** а) $[-5;\ 1]$; б) $[-5;\ 1]$.
22. а) $(\pi k;\ 0;\ 2)$ при $a=4$, $k\in\mathbb{Z}$;
$\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\ 0;\ 0\right)$, $n\in\mathbb{Z}$, при $a=0$; при прочих a решений нет;
б) $\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3};\ 0;\ -2\right)$, $k\in\mathbb{Z}$, при $a=2$; $\left(\frac{\pi n}{3};\ 0;\ 0\right)$, $n\in\mathbb{Z}$, при $a=0$;
при прочих a решений нет.
23. а) $[-0{,}1;\ 0{,}1]$; б) $[-1;\ 1]$. **24.** а) -2; б) 2. **25.** а) $[-8;\ -2]$; б) $[-9;\ 1]$.
26. а) -1; б) 2. **27.** а) 0; б) 2. **28.** а) 2; б) 0,5.
29. а) $\left(1;\ \frac{2n-3}{4}\right)$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\left(\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right)$; $\left(-\frac{\pi}{3};\ \frac{5\pi}{6}+2\pi m\right)$, $n\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{Z}$.

30. а) $\left(\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi k}{5}; -\frac{\pi}{12}+\frac{\pi m}{3}\right)$, $n\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{Z}$;
б) $\left((-1)^n\cdot\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4}; \frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}; \frac{\pi}{2}+\pi m\right)$, $n\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{Z}$.
31. а) $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi m\right)$, $n\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{Z}$;
$\left(-\frac{\pi}{3}+\pi r; -\frac{\pi}{2}+2\pi t; 2\pi l\right)$, $r\in\mathbb{Z}$, $t\in\mathbb{Z}$, $l\in\mathbb{Z}$; б) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n; 2\pi k; \pi m\right)$, $n\in\mathbb{Z}$,
$k\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{Z}$; $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi r; \pi+2\pi t; (-1)^l\cdot\frac{\pi}{6}+\pi l\right)$, $r\in\mathbb{Z}$, $t\in\mathbb{Z}$, $l\in\mathbb{Z}$.
32. а) $(1; 0)$; $(-1; 0)$; б) $(1; 0)$; $(-1; 0)$.
33. а) $(0; 0{,}5)$; $(-1; -1{,}5)$; б) $(-2; 1{,}5)$; $(0; -0{,}5)$.
34. а) $[-2{,}4; 0]$; б) $[-4{,}8; 0]$. **35.** а) $(-1; 2)$; $(-1; -2)$; б) $(-2; -1)$; $(2; -1)$.
36. а) $(0{,}5; 1)$; б) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1\right)$. **37.** а) $x_k=\frac{1}{k}$, $k\in\mathbb{N}$; б) $x_k=-\frac{1}{k}$, $k\in\mathbb{N}$.
38. а) $(2; -2)$, $(-2; 2)$, $(\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$;
б) $(3; 3)$, $(-3; -3)$, $(2\sqrt{3}; \sqrt{3})$, $(-2\sqrt{3}; -\sqrt{3})$.
39. а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{1}{16}$. **40.** а) $[-2; 0{,}5]$; б) $\left[-1; \frac{1}{3}\right]$.
41. а) $x=1$ при $a=-\frac{1}{3}$; при прочих a корней нет;
б) $x=-1$ при $a=2$; при прочих a корней нет.
42. а) $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, при $a=\arcsin\frac{2}{\sqrt{7}}+\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$;
$x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, при $a=-\arcsin\frac{2}{\sqrt{7}}-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$;
при прочих a корней нет;
б) $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, при $a=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$;
$x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, при $a=-\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$;
при прочих a корней нет.
43. а) $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; 7; -9\right)$; $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; 1; 1\right)$; б) $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}; 2; 0\right)$; $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}; -1; 5\right)$.
44. а) π; $\pi+1$; $\pi+3$; б) $2\pi-8$; 2π; $2\pi-1$.
45. а) $6n-1$; $6n$; $6n+2$; $6n+3$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $12n-2$; $12n+2$, $n\in\mathbb{Z}$.
46. а) $\{-7; 7\}$; б) $\{-5; 5\}$. **47.** а) $\{-3; 3\}$; б) $\{-2; 2\}$.
48. а) $\{-2; 2\}$; б) $\{-4; 4\}$. **49.** а) $\{-6; 6\}$; б) $\{-3; 3\}$.
50. а) $\{-7; 7\}$; б) $\{-3; 3\}$.
51. а) $\{-5\}\cup[10-5\sqrt{3}; 10+5\sqrt{3}]$; б) $\{-3\}\cup[6-3\sqrt{3}; 6+3\sqrt{3}]$.
52. а) $\{-2\}\cup[4-2\sqrt{3}; 4+2\sqrt{3}]$; б) $\{-5\}\cup[10-5\sqrt{3}; 10+5\sqrt{3}]$.
53. а) $\{-3\}\cup[6-3\sqrt{3}; 6+3\sqrt{3}]$; б) $\{-6\}\cup[12-6\sqrt{3}; 12+6\sqrt{3}]$.
54. а) $\{-4\}\cup[8-4\sqrt{3}; 8+4\sqrt{3}]$; б) $\{-4\}\cup[8-4\sqrt{3}; 8+4\sqrt{3}]$.
55. а) $\{-4\}\cup[8-4\sqrt{3}; 8+4\sqrt{3}]$; б) $\{-5\}\cup[10-5\sqrt{3}; 10+5\sqrt{3}]$.
56. а) $\{-5\}\cup[10-5\sqrt{3}; 10+5\sqrt{3}]$; б) $\{-2\}\cup[14-8\sqrt{3}; 14+8\sqrt{3}]$.

§ 3.3

1. а) 1; 5; б) 1; 2. **2.** а) -4; 0; 4; б) -6; 0; 6. **3.** а) 1; 5; б) 2; 6.

4. а) 0; $4\sin 1$; б) 0; $\operatorname{tg} 1$. **5.** а) $-\sqrt{3}$; б) $-\sqrt{2}$. **6.** а) 0; 1; 2; б) 0; 1; 4.
7. а) a — произвольное иррациональное число;
б) a — произвольное иррациональное число.
8. а) a — произвольное иррациональное число, b — произвольное целое число;
б) $a=\pm 2$, b — произвольное иррациональное число.
9. а) $a=5$, b — произвольное иррациональное число;
б) $a=4$, b — произвольное иррациональное число.
10. а) 4; б) 6. **11.** а) 2; б) 4. **12.** а) 4; б) 2. **13.** а) 0,4; б) $\frac{1}{3}$.
14. а) -4; б) -2. **15.** а) -1; 2; б) -3; -2. **16.** а) 2; б) 5.
17. а) -2; б) -3. **18.** а) -2; б) -1. **19.** а) $-0{,}5$; б) 0,5.
20. а) $(-2;-2)$; б) $(1;1)$. **21.** а) $-1{,}5$; 2; б) $-3{,}5$; 2.
22. а) 3; б) -4. **23.** а) 1; б) 1. **24.** а) $[-4;10]$; б) $[-9;9]$.
25. а) $[1;17]$; б) $(-\infty;2]\cup[10;+\infty)$.

Глава 4. Графические интерпретации

§ 4.1

1. а) решений нет при $a\in(-\infty;-2)$; $x=5$ при $a=2$;
$x\in\left[\frac{12-a}{2};3a-1\right]$ при $a\in(2;6]$; $x\in[a-3;3a-1]$ при $a\in(6;+\infty)$;
б) решений нет при $a\in(-\infty;-3)\cup(9;+\infty)$;
$x=-7$ при $a=-3$; $x=-3$ при $a=9$; $x\in\left[\frac{a-18}{3};\frac{3a-5}{2}\right]$ при $a\in(-3;5]$;
$x\in\left[\frac{a-18}{3};15-2a\right]$ при $a\in(5;9)$.
2. а) решений нет при $a\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$; $\{2\}$ при $a=-2$;
$\left[\frac{2-a}{2};2\right]$ при $a\in(-2;0]$; $\left[\frac{2-a}{2};1\right]$ при $a\in(0;2]$;
б) решений нет при $a\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$; $\{0\}$ при $a=-2$;
$\left[-\frac{a+2}{2};0\right]$ при $a\in(-2;0]$; $\left[-\frac{a+2}{2};-1\right]$ при $a\in(0;2]$.
3. а) решений нет при $a\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$;
$\{-1\}$ при $a=-2$; $\left[-\frac{a+4}{2};-1\right]$ при $a\in(-2;0]$; $\left[-\frac{a+4}{2};-2\right]$ при $a\in(0;2]$;
б) решений нет при $a\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$; $\{3\}$ при $a=-2$;
$\left[\frac{4-a}{2};3\right]$ при $a\in(-2;0]$; $\left[\frac{4-a}{2};2\right]$ при $a\in(0;2]$.
4. а) решений нет при $a\in(-\infty;-8)\cup(3;+\infty)$; $x=4$ при $a=-8$;
$x=6$ при $a=3$; $x\in[4-\sqrt{2a+16};4+\sqrt{2a+16}]$ при $a\in(-8;0]$;
$x\in\left[2a;\frac{24-2a}{3}\right]$ при $a\in(0;3)$;
б) решений нет при $a\in(-\infty;-4)\cup(3;+\infty)$; $x=6$ при $a=-4$; $x=9$ при $a=3$;
$x\in[6-3\sqrt{a+4};6+3\sqrt{a+4}]$ при $a\in(-4;0]$; $x\in\left[3a;12-a\right]$ при $a\in(0;3)$.
5. а) $a\in[0;+\infty)$; б) $a\in(-\infty;-2]$. **6.** а) $a\in(1{,}5;+\infty)$; б) $a\in(4;+\infty)$.
7. а) решений нет при $a\in\left(-\infty;-\frac{9}{7}\right)\cup(2;+\infty)$; $x=3$ при $a=-\frac{9}{7}$;

$x=4$ при $a=2$; $x\in[3-\sqrt{7a+9};\,3+\sqrt{7a+9}]$ при $a\in\left(-\frac{9}{7};\,0\right]$;
$x\in[a^2;\,3+\sqrt{7a+9}]$ при $a\in(0;\,1]$; $x\in[a^2;\,10-3a]$ при $a\in(1;\,2)$;
б) решений нет при $a\in\left(-\infty;\,-\frac{1}{3}\right)\cup(2;\,+\infty)$; $x=1$ при $a=-\frac{1}{3}$ и $a=2$;
$x\in[1-\sqrt{3a+1};\,1+\sqrt{3a+1}]$ при $a\in\left(-\frac{1}{3};\,0\right]$;
$x\in\left[\frac{a^2}{4};\,1+\sqrt{3a+1}\right]$ при $a\in(0;\,1]$; $x\in\left[\frac{a^2}{4};\,5-2a\right]$ при $a\in(1;\,2)$.

8. а) решений нет при $a\in(-\infty;\,-4)\cup(12;\,+\infty)$; $x=0$ при $a=-4$;
$x=4$ при $a=12$; $x\in\left[-\sqrt{a+4};\,\frac{a+4}{2}\right]$ при $a\in(-4;\,0]$;
$x\in\left[\frac{a-4}{2};\,\sqrt{a+4}\right]$ при $a\in(0;\,12)$;
б) решений нет при $a\in(-\infty;\,-27)\cup(9;\,+\infty)$; $x=6$ при $a=-27$;
$x=0$ при $a=9$; $x\in\left[-\frac{a+9}{3};\,\sqrt{9-a}\right]$ при $a\in(-27;\,0]$;
$x\in\left[-\sqrt{9-a};\,\frac{9-a}{3}\right]$ при $a\in(0;\,9)$.

9. а) $x\in(-\infty;\,a]$ при $a\in(-\infty;\,-4)$; $x\in(-\infty;\,-4]\cup\{2\}$ при $a=-4$;
$x\in(-\infty;\,a]\cup[2-\sqrt{a+4};\,2+\sqrt{a+4}]$ при $a\in(-4;\,0)$;
$x\in(-\infty;\,4]$ при $a=0$; $x\in(-\infty;\,2-\sqrt{a+4}]\cup[a;\,2+\sqrt{a+4}]$ при $a\in(0;\,5)$;
$x\in(-\infty;\,-1]\cup\{5\}$ при $a=5$;
$x\in(-\infty;\,2-\sqrt{a+4}]\cup[2+\sqrt{a+4};\,a]$ при $a\in(5;\,+\infty)$;
б) $x\in(-\infty;\,-3-\sqrt{9-a}]\cup[-3+\sqrt{9-a};\,-a]$ при $a\in(-\infty;\,0)$;
$x\in(-\infty;\,-6]\cup\{0\}$ при $a=0$;
$x\in(-\infty;\,-3-\sqrt{9-a}]\cup[-a;\,-3+\sqrt{9-a}]$ при $a\in(0;\,5)$;
$x\in(-\infty;\,-1]$ при $a=5$;
$x\in(-\infty;\,-a]\cup[-3-\sqrt{9-a};\,-3+\sqrt{9-a}]$ при $a\in(5;\,9)$;
$x\in(-\infty;\,-9]\cup\{-3\}$ при $a=9$; $x\in(-\infty;\,-a]$ при $a\in(9;\,+\infty)$.

10. а) $x\in[-5;\,5]$ при $a\in\left(-\infty;\,-\frac{20}{3}\right]$; $x\in\left[-5;\,-\frac{3a}{4}\right]$ при $a\in\left(-\frac{20}{3};\,-\frac{15}{4}\right]$;
$x\in\left[\frac{4a}{3};\,-\frac{3a}{4}\right]$ при $a\in\left(-\frac{15}{4};\,0\right)$; $x=0$ при $a=0$;
$x\in\left[-\frac{3a}{4};\,\frac{4a}{3}\right]$ при $a\in(0;\,3]$; $x\in\left[-\frac{3a}{4};\,\sqrt{25-a^2}\right]$ при $a\in(3;\,4]$;
$x\in[-\sqrt{25-a^2};\,\sqrt{25-a^2}]$ при $a\in(4;\,5)$; $x=0$ при $a=5$;
решений нет при $a\in(5;\,+\infty)$;
б) решений нет при $a\in(-\infty;\,-12)\cup\left(\frac{156}{5};\,+\infty\right)$; $x=-5$ при $a=-12$;
$x\in\left[-\sqrt{169-a^2};\,\frac{5a}{12}\right]$ при $a\in(-12;\,-5)$; $x\in\left[-12;\,-\frac{25}{12}\right]\cup\{12\}$ при $a=-5$;
$x\in\left[-\sqrt{169-a^2};\,\frac{5a}{12}\right]\cup\left[-\frac{12a}{5};\,\sqrt{169-a^2}\right]$ при $a\in(-5;\,0)$;
$x\in[-13;\,13]$ при $a=0$; $x\in\left[-13;\,-\frac{12a}{5}\right]\cup\left[\frac{5a}{12};\,13\right]$ при $a\in\left(0;\,\frac{65}{12}\right)$;
$x\in\{-13\}\cup\left[\frac{325}{144};\,13\right]$ при $a=\frac{65}{12}$;
$x\in\left[\frac{5a}{12};\,13\right]$ при $a\in\left(\frac{65}{12};\,\frac{156}{5}\right)$; $x=13$ при $a=\frac{156}{5}$.

11. а) $\frac{\sqrt{7}+1}{3}$; $\frac{\sqrt{73}-5}{4}$; б) $\sqrt{7}-2$; $\frac{5}{3}$.

12. а) решений нет при $a\in\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\cup(2;+\infty)$;

$x=\frac{16}{3}$ при $a=-\frac{2}{3}$; $x=4$ при $a=2$;

$x\in[4-2a;5-0{,}5a]$ при $a\in\left(-\frac{2}{3};1\right]$; $x\in[2^a;5-0{,}5a]$ при $a\in(1;2)$;

б) решений нет при $a\in\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right)\cup(1;+\infty)$; $x=\frac{8}{3}$ при $a=-\frac{5}{3}$;

$x=2$ при $a=1$; $x\in[1-a;2{,}25-0{,}25a]$ при $a\in\left(-\frac{5}{3};0\right]$;

$x\in[2^a;2{,}25-0{,}25a]$ при $a\in(0;1)$.

13. а) $0{,}75;\ 3\log_3 12$; б) $\frac{1}{6}$; $\log_3 18$.

14. а) решений нет при $a\in(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$; $x\in\{2;8\}$ при $a=1$;

$x\in[2;2^a]\cup\left[\frac{8}{a};8\right]$ при $a\in(1;2)$; $x\in[2;8]$ при $a=2$;

$x\in\left[2;\frac{8}{a}\right]\cup[2^a;8]$ при $a\in(2;3)$; $x\in\left[2;\frac{8}{3}\right]\cup\{8\}$ при $a=3$;

$x\in\left[2;\frac{8}{a}\right]$ при $a\in(3;4)$; $x=2$ при $a=4$;

б) решений нет при $a\in(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$; $x\in\{1;4\}$ при $a=1$;

$x\in[1;2^{a-1}]\cup\left[\frac{4}{a};4\right]$ при $a\in(1;2)$; $x\in[1;4]$ при $a=2$;

$x\in\left[1;\frac{4}{a}\right]\cup[2^{a-1};4]$ при $a\in(2;3)$; $x\in\left[1;\frac{4}{3}\right]\cup\{4\}$ при $a=3$;

$x\in\left[1;\frac{4}{a}\right]$ при $a\in(3;4)$; $x=1$ при $a=4$.

15. а) решений нет при $a\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$; $x=1$ при $a=0$;

$x\in[1-a^2;1+a^2]$ при $a\in(0;1]$; $x\in[1-a^2;4-2a]$ при $a\in(1;\sqrt{6}-1]$;

$x\in[2a-4;4-2a]$ при $a\in(\sqrt{6}-1;2)$; $x=0$ при $a=2$;

б) решений нет при $a\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$; $x=0{,}5$ при $a=0$;

$x\in\left[\frac{1-a^2}{2};\frac{1+a^2}{2}\right]$ при $a\in(0;1]$; $x\in\left[\frac{1-a^2}{2};2-a\right]$ при $a\in(1;\sqrt{6}-1]$;

$x\in[a-2;2-a]$ при $a\in(\sqrt{6}-1;2)$; $x=0$ при $a=2$.

16. а) $x\in(-\infty;a-1]\cup[3-a;+\infty)$ при $a\in(-\infty;0)$;

$x\in(-\infty;-1]\cup\{1{,}5\}\cup[3;+\infty)$ при $a=0$;

$x\in(-\infty;a-1]\cup\left[\frac{3-a^2}{2};\frac{3+a^2}{2}\right]\cup[3-a;+\infty)$ при $a\in(0;1)$;

$x\in(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$ при $a=1$;

$x\in(-\infty;a-1]\cup\left[\frac{3-a^2}{2};3-a\right]\cup\left[\frac{3+a^2}{2};+\infty\right)$ при $a\in(1;\sqrt{6}-1)$;

$x\in(-\infty;4-\sqrt{6}]\cup[5-\sqrt{6};+\infty)$ при $a=\sqrt{6}-1$;

$x\in\left(-\infty;\frac{3-a^2}{2}\right]\cup[a-1;3-a]\cup\left[\frac{3+a^2}{2};+\infty\right)$ при $a\in(\sqrt{6}-1;2)$;

$x\in(-\infty;-0{,}5]\cup\{1\}\cup[3{,}5;+\infty)$ при $a=2$;

$x\in\left(-\infty;\frac{3-a^2}{2}\right]\cup\left[\frac{3+a^2}{2};+\infty\right)$ при $a\in(2;+\infty)$;

б) $x\in(-\infty;a-3]\cup[1-a;+\infty)$ при $a\in(-\infty;0)$;

$x \in (-\infty; -3] \cup \{-0{,}5\} \cup [1; +\infty)$ при $a = 0$;
$x \in (-\infty; a-3] \cup \left[-\frac{a^2+1}{2}; \frac{a^2-1}{2}\right] \cup [1-a; +\infty)$ при $a \in (0; 1)$;
$x \in (-\infty; -2] \cup [-1; +\infty)$ при $a = 1$;
$x \in (-\infty; a-3] \cup \left[-\frac{a^2+1}{2}; 1-a\right] \cup \left[\frac{a^2-1}{2}; +\infty\right)$ при $a \in (1; \sqrt{6}-1)$;
$x \in (-\infty; 2-\sqrt{6}\,] \cup [3-\sqrt{6}; +\infty)$ при $a = \sqrt{6}-1$;
$x \in \left(-\infty; -\frac{a^2+1}{2}\right] \cup [a-3; 1-a] \cup \left[\frac{a^2-1}{2}; +\infty\right)$ при $a \in (\sqrt{6}-1; 2)$;
$x \in (-\infty; -2{,}5] \cup \{-1\} \cup [1{,}5; +\infty)$ при $a = 2$;
$x \in \left(-\infty; -\frac{a^2+1}{2}\right] \cup \left[\frac{a^2-1}{2}; +\infty\right)$ при $a \in (2; +\infty)$.
17. а) решений нет при $a \in (-\infty; -3) \cup (2{,}25; +\infty)$; $x = 0$ при $a = -3$;
$x \in [-0{,}4a - 1{,}2; 0{,}4a + 1{,}2]$ при $a \in (-3; -1{,}75]$;
$x \in \left[\frac{3-\sqrt{9-4a}}{2}; 0{,}4a + 1{,}2\right]$ при $a \in (-1{,}75; 2]$;
$x \in \left[\frac{3-\sqrt{9-4a}}{2}; \frac{3+\sqrt{9-4a}}{2}\right]$ при $a \in (2; 2{,}25)$; $x = 1{,}5$ при $a = 2{,}25$;
б) решений нет при $a \in (-\infty; -3) \cup (2{,}25; +\infty)$; $x = 0$ при $a = -3$;
$x \in [-0{,}2a - 0{,}6; 0{,}2a + 0{,}6]$ при $a \in (-3; -1{,}75]$;
$x \in \left[\frac{3-\sqrt{9-4a}}{4}; 0{,}2a + 0{,}6\right]$ при $a \in (-1{,}75; 2]$;
$x \in \left[\frac{3-\sqrt{9-4a}}{4}; \frac{3+\sqrt{9-4a}}{4}\right]$ при $a \in (2; 2{,}25)$; $x = 0{,}75$ при $a = 2{,}25$.
18. а) -3; 1,5; б) -6; 3. **19.** а) 0; 7; б) 0; 5.
20. а) $\{3\}$ при $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; $[-1; 3]$ при $a = -1$;
$\left\{\frac{3a+5}{a-1}; 3\right\}$ при $a \in (-1; 1)$; $[3; +\infty)$ при $a = 1$.
б) $[1; 2]$ при $a = 2$; $[2; +\infty)$ при $a = -2$; $\{2\}$ при $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$;
$\left\{2; \frac{2a}{a+2}\right\}$ при $a \in (-2; 2)$.
21. а) $(-\infty; -9) \cup \{-5; 3\} \cup (4; +\infty)$; б) $(-\infty; -12) \cup \{-7; 8\} \cup (9; +\infty)$.
22. а) $8 - 8\sqrt{2}$; 2; б) $12 - 8\sqrt{3}$; 2. **23.** а) -9; -5; б) -4; 0. **24.** а) -4; б) -1.
25. а) $-2{,}25$; 4; 10; б) $-12{,}25$; 18; 30. **26.** а) -16; 9; 33; б) -4; 0; 12.
27. а) -3; -1; 0; 2; б) -5; -3; 0; 2. **28.** а) -4; -2; 0; 2; б) -3; -2; 0; 1.
29. а) $(-\infty; -4) \cup \{-3; 0\} \cup (1; +\infty)$; б) $(-\infty; -9) \cup \{-6{,}75; 0\} \cup (2{,}25; +\infty)$.
30. а) $(-2{,}25; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 0{,}25)$; б) $(-4; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; 1)$.
31. а) 0; 5; б) 0; 7. **32.** а) -6; 0; б) 0; 15. **33.** а) 5; 8; б) 9; 21.
34. а) $(-4; -3{,}84) \cup (-3{,}84; 0) \cup (0; +\infty)$; б) $(-0{,}5; 0) \cup (0; 6{,}72) \cup (6{,}72; +\infty)$.
35. а) решений нет при $a \in (-\infty; -1)$; $x = 1$ при $a = -1$;
$x \in [1 - \sqrt{a+1}; 1 + \sqrt{a+1}]$ при $a \in (-1; 0]$;
$x \in [-\sqrt{0{,}5a}; 1 - \sqrt{a+1}] \cup [\sqrt{0{,}5a}; 1 + \sqrt{a+1}]$ при $a \in (0; 8)$;
$x \in \{-2\} \cup [2; 4]$ при $a = 8$;
$x \in [1 - \sqrt{a+1}; -\sqrt{0{,}5a}] \cup [\sqrt{0{,}5a}; 1 + \sqrt{a+1}]$ при $a \in (8; +\infty)$;
б) решений нет при $a \in (-\infty; -2)$; $x = 1$ при $a = -2$;
$x \in \left[1 - \sqrt{1 + \frac{a}{2}}; 1 + \sqrt{1 + \frac{a}{2}}\right]$ при $a \in (-2; 0]$;

$x \in \left[-\sqrt{a}; 1-\sqrt{1+\frac{a}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{a}; 1+\sqrt{1+\frac{a}{2}}\right]$ при $a \in (0; 16)$;
$x \in [-4; -2] \cup \{4\}$ при $a = 16$;
$x \in \left[-\sqrt{a}; 1-\sqrt{1+\frac{a}{2}}\right] \cup \left[1+\sqrt{1+\frac{a}{2}}; \sqrt{a}\right]$ при $a \in (16; +\infty)$.

§ 4.2

1. а) 4; б) $-0{,}25$. **2.** а) $[-7; 1] \cup [2; +\infty)$; б) $(-\infty; 3) \cup (4; 7]$.
3. а) $\{0\} \cup \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{4}\right]$; б) $\left[-\frac{1}{3}; -\frac{1}{5}\right) \cup \{0\}$.
4. а) $\left[-1; -\frac{1}{3}\right) \cup \{0\}$; б) $\{0\} \cup \left(\frac{1}{12}; \frac{1}{10}\right]$. **5.** а) -24; 1; б) -12; 0,5.
6. а) один корень, если $a \in (-\infty; 0] \cup (0{,}5; 2)$; два корня, если $a \in \{0{,}5; 2\}$;
три корня, если $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$;
б) один корень, если $a \in (-\infty; 0] \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right)$; два корня, если $a \in \left\{\frac{1}{3}; 3\right\}$;
три корня, если $a \in \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup (3; +\infty)$.
7. а) $a \in (-\infty; 0] \cup (0{,}5; 4{,}5)$; б) $a \in (0; 0{,}5) \cup \left(\frac{25}{18}; +\infty\right)$.
8. а) $(-2; 0)$; б) $(-4; 0)$. **9.** а) $(1{,}2; 1{,}25)$; б) $(2{,}4; 2{,}5)$.
10. а) $\left(\frac{4}{5}; \frac{5}{6}\right]$; б) $\left(\frac{2}{5}; \frac{5}{12}\right]$. **11.** а) $[-1; 2) \cup (2; 5]$; б) $[-2{,}5; -1) \cup (-1; 0{,}5]$.
12. а) $[1; +\infty)$ при $a = 1$; $[-3; 1]$ при $a = -1$;
$\left\{\frac{a+7}{a-1}; 1\right\}$ при $a \in (-1; 1)$; $\{1\}$ при $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$;
б) $[-4; -3]$ при $a = 2$; $[-3; +\infty)$ при $a = -2$; $\{-3\}$ при $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$;
$\left\{-3; -\frac{3a+10}{a+2}\right\}$ при $a \in (-2; 2)$.
13. а) $-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{4\sqrt{3}}; 0$; б) $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{4\sqrt{3}}\right) \cup \left(-\frac{1}{4\sqrt{3}}; 0\right)$.
14. а) $-5; 0; \sqrt{5}-2; \sqrt{5}+2$; б) $-20; 0; 2(\sqrt{17}-4); 2(\sqrt{17}+4)$.
15. а) $(-30; 0) \cup (0; 3(\sqrt{26}-5)) \cup (3(\sqrt{26}-5); 3(\sqrt{26}+5))$;
б) $-30; 0; 5(\sqrt{10}-3); 5(\sqrt{10}+3)$.
16. а) $(-6; 1] \cup \{8\} \cup [9; 10)$; б) $(-\infty; -6] \cup \{2\} \cup [8; +\infty)$.
17. а) $(0; 0{,}25] \cup \{1\}$; б) $\left(0; \frac{1}{3}\right] \cup \{3\}$.

§ 4.3

1. а) 10; б) 13. **2.** а) $\sqrt{41}$; б) $4\sqrt{10}$. **3.** а) 10; б) 13. **4.** а) 13; б) 10.
5. а) $-\frac{11}{15}$; б) $-2{,}5$. **6.** а) 7,75; б) $-\frac{1}{12}$. **7.** а) $4\frac{1}{22}$; б) $2\frac{3}{13}$.
8. а) 64; 16; б) 169; 9. **9.** а) 169; 81; б) 196; 16.
10. а) $\left(2\frac{2}{3}; 10\right)$; б) (3,75; 3). **11.** а) $-8; -2; 2; 8$; б) $-7; -3; 3; 7$.
12. а) $-10; -5; 2; 7$; б) $-5; 1; 3; 9$. **13.** а) $\frac{2 \pm \sqrt{46}}{7}; 4 \pm \sqrt{6}$; б) $\frac{9 \pm \sqrt{46}}{7}; 5 \pm \sqrt{6}$.
14. а) $\pm 6\sqrt{3}$; б) $\pm 5\sqrt{3}$. **15.** а) 4; б) 5.

16. а) $[-2;1)\cup(1;4]$; б) $[-4;-1)\cup(-1;2]$.
17. а) $-\sqrt{65}-3;\ -2;\ 2;\ \sqrt{65}+3$; б) $-17;\ 4-\sqrt{89};\ \sqrt{89}-4;\ 17$.
18. а) $8-5\sqrt{2};\ 3;\ 5\sqrt{2}-2$; б) $5-3\sqrt{2};\ 2;\ 3\sqrt{2}-1$. **19.** а) 4; б) 4.
20. а) -2; б) 1.
21. а) одно решение, если $a=-5$; два решения, если $a\in(-5;7)\cup\{13\}$;
три решения, если $a=7$; четыре решения, если $a\in(7;13)$;
нет решений при $a\in(-\infty;-5)\cup(13;+\infty)$;
б) одно решение, если $a=-8$; два решения, если $a\in(-8;6)\cup\{13\}$;
три решения, если $a=6$; четыре решения, если $a\in(6;13)$;
нет решений при $a\in(-\infty;-8)\cup(13;+\infty)$.
22. а) $[1;5\sqrt{2}]$; б) $[2;8\sqrt{2}]$. **23.** а) $[5-3\sqrt{2};8\sqrt{2}]$; б) $[4-2\sqrt{2};6\sqrt{2}]$.
24. а) $\frac{1}{11};1$; б) $\frac{1}{3};2$. **25.** а) 0; 10; б) 0; 17.
26. а) $(-5\sqrt{2};-5]\cup[5;5\sqrt{2})$; б) $(-5\sqrt{5};-5]\cup[5;5\sqrt{5})$.
27. а) $-\frac{4}{3};2$; б) $-2;3$. **28.** а) $-0{,}2;0{,}2$; б) $-0{,}2;0{,}2$.
29. а) $\left[2-2\sqrt{6};-1\right]\cup\left[5;2+2\sqrt{6}\right]$; б) $\left[3-4\sqrt{6};-5\right]\cup\left[11;3+4\sqrt{6}\right]$.
30. а) $(1;2)$; б) $(1;2)$. **31.** а) $[-1{,}75;8]$; б) $[-1{,}75;8]$.
32. а) $(0;1]$; б) $(0;1]$. **33.** а) $(1-\sqrt{10};-2)\cup\{0\}$; б) $(1-\sqrt{10};-2)\cup\{0\}$.
34. а) $[-5;5\sqrt{2}-10)$; б) $[-5;5\sqrt{2}-10)$.

Глава 5. Другие методы

§ 5.1

1. а) 1; б) 2. **2.** а) -3; 1; б) 0,5; 3. **3.** а) 1; б) -1.
4. а) $[-3{,}5;+\infty)$; б) $(-\infty;3]$. **5.** а) $(-3;+\infty)$; б) $(-\infty;2{,}5)$.
6. а) $\left(\frac{3}{82};+\infty\right)$; б) $\left(-\infty;\frac{3}{11}\right)$. **7.** а) $(-\infty;-2{,}5)$; б) $(-\infty;-2)$.
8. а) $(6;+\infty)$; б) $\left(-\infty;\frac{1}{15}\right)$.

§ 5.2

1. а) если $a\in\left(-\frac{1}{4};0\right)\cup(0;6)\cup(6;+\infty)$, то $x=a$, $x=1\pm\sqrt{4a+1}$;
если $a=0$, то $x=0$ и $x=2$; если $a=6$, то $x=-4$ и $x=6$;
если $a=-\frac{1}{4}$, то $x=-\frac{1}{4}$ и $x=1$; если $a\in\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right)$, то $x=a$;
б) если $a\in\left(-\frac{1}{8};0\right)\cup(0;3)\cup(3;+\infty)$, то $x=\frac{a}{2}$, $x=\frac{1\pm\sqrt{8a+1}}{4}$;
если $a=0$, то $x=0$ и $x=0{,}5$; если $a=3$, то $x=-1$ и $x=1{,}5$;
если $a=-\frac{1}{8}$, то $x=-\frac{1}{16}$ и $x=\frac{1}{4}$; если $a\in\left(-\infty;-\frac{1}{8}\right)$, то $x=\frac{a}{2}$.
2. а) если $a\in(4;+\infty)$, то $x=\pm3\sqrt{a}$; если $a=4$, то $x\in\{-6;2;6\}$;
если $a\in(0;1{,}44)\cup(1{,}44;4)$, то $x=\pm3\sqrt{a}$, $x=2\pm\sqrt{4-a}$;
если $a=1{,}44$, то $x\in\{-3{,}6;0{,}4;3{,}6\}$; если $a=0$, то $x\in\{0;4\}$;
если $a\in(-\infty;0)$, то $x=2\pm\sqrt{4-a}$;
б) если $a\in\left(0;\frac{64}{225}\right)\cup\left(\frac{64}{225};+\infty\right)$, то $x=\pm4\sqrt{a}$, $x=1\pm\sqrt{a+1}$;

если $a=\frac{64}{225}$, то $x\in\left\{-\frac{32}{15};-\frac{2}{15};\frac{32}{15}\right\}$; если $a=0$, то $x\in\{0;2\}$;
если $a\in(-1;0)$, то $x=1\pm\sqrt{a+1}$; если $a=-1$, то $x=1$;
если $a\in(-\infty;-1)$, то корней нет.
3. а) 16; б) 9. **4.** а) -1; 17; 29; 107; б) 5; 9; 77. **5.** а) -14; б) 7.
6. а) если $a=0$, то $x\in[-0{,}25;+\infty)$;
если $a\in(0;2)$, то $x\in\left(-\infty;-\frac{2+\sqrt{4-2a}}{2a}\right]\cup\left[\frac{-2+\sqrt{4-2a}}{2a};+\infty\right)$;
если $a\in[2;+\infty)$, то $x\in(-\infty;+\infty)$;
б) если $a=0$, то $x\in(-\infty;0{,}5]$;
если $a\in(0;1)$, то $x\in\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{1-a}}{a}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{1-a}}{a};+\infty\right)$;
если $a\in[1;+\infty)$, то $x\in(-\infty;+\infty)$.
7. а) $(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$; б) $(-\infty;0]\cup[12;+\infty)$.
8. а) $x\in(-\infty;2a]$ при $a\in(-\infty;-4)$; $x\in(-\infty;-8]\cup\{4\}$ при $a=-4$;
$x\in(-\infty;2a]\cup[4-2\sqrt{a+4};4+2\sqrt{a+4}]$ при $a\in(-4;0)$;
$x\in(-\infty;8]$ при $a=0$; $x\in(-\infty;4-2\sqrt{a+4}]\cup[2a;4+2\sqrt{a+4}]$ при $a\in(0;5)$;
$x\in(-\infty;-2]\cup\{10\}$ при $a=5$;
$x\in(-\infty;4-2\sqrt{a+4}]\cup[4+2\sqrt{a+4};2a]$ при $a\in(5;+\infty)$;
б) $x\in(-\infty;-6-2\sqrt{9-a}]\cup[-6+2\sqrt{9-a};-2a]$ при $a\in(-\infty;0)$;
$x\in(-\infty;-12]\cup\{0\}$ при $a=0$;
$x\in(-\infty;-6-2\sqrt{9-a}]\cup[-2a;-6+2\sqrt{9-a}]$ при $a\in(0;5)$;
$x\in(-\infty;-2]$ при $a=5$;
$x\in(-\infty;-2a]\cup[-6-2\sqrt{9-a};-6+2\sqrt{9-a}]$ при $a\in(5;9)$;
$x\in(-\infty;-18]\cup\{-6\}$ при $a=9$; $x\in(-\infty;-2a]$ при $a\in(9;+\infty)$.
9. а) $-\sqrt{\frac{32}{3}}$; б) $\sqrt{\frac{33}{2}}$. **10.** а) $-2\sqrt{2}$; б) $\sqrt{10}$.
11. а) 450 изделий первого типа; 225 изделий второго типа;
максимальная прибыль равна 42 750 д. е.;
б) 225 изделий первого типа; 450 изделий второго типа;
максимальная прибыль равна 64 125 д. е.
12. а) 10 изделий первого типа; 0 изделий второго типа; максимальная прибыль равна 50 000 д. е.;
б) 20 изделий первого типа; 0 изделий второго типа;
максимальная прибыль равна 30 0000 д. е.

§ 5.3

1. а) $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};\cos\frac{5\pi}{8};\cos\frac{\pi}{8}\right\}$; б) $\left\{\cos\frac{7\pi}{9};\cos\frac{5\pi}{9};\cos\frac{\pi}{9}\right\}$.
2. а) $\left\{\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{1}{2}\cos\frac{11\pi}{12}\right\}$; б) $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};\cos\frac{\pi}{12}\right\}$.
3. а) $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};\cos\frac{5\pi}{12}\right\}$; б) $\left\{\cos\frac{4\pi}{5};\cos\frac{\pi}{5}\right\}$. **4.** а) $\left\{\frac{5}{4};\frac{5}{3}\right\}$; б) $\left\{\frac{13}{12};\frac{13}{5}\right\}$.
5. а) $\left\{-\frac{3}{4}\right\}$; б) $\left\{\frac{4}{3}\right\}$.

6. а) $\left\{\cos\frac{11\pi}{16};\cos\frac{9\pi}{16};\cos\frac{3\pi}{16};\cos\frac{\pi}{16}\right\}$; б) $\left\{\cos\frac{11\pi}{12};-\frac{\sqrt{3}}{2};\cos\frac{5\pi}{12};\frac{1}{2}\right\}$.
7. а) 3; б) 4. **8.** а) $(-15;15)$; б) $(-10;10)$.
9. а) $(0;0)$;
б) $\left(\cos\frac{\pi}{8};\sin\frac{\pi}{8}\right)$; $\left(-\cos\frac{\pi}{8};-\sin\frac{\pi}{8}\right)$; $\left(\cos\frac{5\pi}{8};\sin\frac{5\pi}{8}\right)$; $\left(-\cos\frac{5\pi}{8};-\sin\frac{5\pi}{8}\right)$.
10. а) $\left(-\operatorname{tg}\frac{\pi n}{7};\operatorname{tg}\frac{2\pi n}{7};\operatorname{tg}\frac{4\pi n}{7}\right)$, где $n=\pm3;\pm2;\pm1;0$;
б) $\left(-\operatorname{tg}\frac{\pi n}{7};-\operatorname{tg}\frac{2\pi n}{7};\operatorname{tg}\frac{4\pi n}{7}\right)$, где $n=\pm3;\pm2;\pm1;0$.
11. а) $(0;1;0)$; $\left(\sqrt{3};-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(-\sqrt{3};-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
б) $(0;0;0)$; $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)$; $\left(-\sin\frac{\pi}{5};-\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5};\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\right)$;
$\left(\sin\frac{2\pi}{5};\operatorname{tg}\frac{\pi}{5};\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}\right)$.
12. а) $(1;0;0)$; $\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};\sqrt{3}\right)$;
$\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};-\sqrt{3}\right)$;
б) $(1;0;0)$; $(-1;0;0)$; $\left(\cos\frac{\pi}{5};\sin\frac{\pi}{5};\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}\right)$; $\left(\cos\frac{\pi}{5};-\sin\frac{\pi}{5};-\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}\right)$;
$\left(-\cos\frac{\pi}{5};-\sin\frac{\pi}{5};\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}\right)$; $\left(-\cos\frac{\pi}{5};\sin\frac{\pi}{5};-\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}\right)$; $\left(\cos\frac{2\pi}{5};\sin\frac{2\pi}{5};-\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\right)$;
$\left(-\cos\frac{2\pi}{5};\sin\frac{2\pi}{5};\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\right)$; $\left(\cos\frac{2\pi}{5};-\sin\frac{2\pi}{5};\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\right)$; $\left(-\cos\frac{2\pi}{5};-\sin\frac{2\pi}{5};-\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\right)$.
13. а) $\sqrt{145}$; б) $\sqrt{130}$. **14.** а) $10\sqrt{13}$; б) $9\sqrt{13}$.

§ 5.4

1. а) 13; б) 10. **2.** а) 10; б) 13. **3.** а) 40; б) 63. **4.** а) 15; б) 28.
5. а) $\min z=z\left(\frac{4}{25};\frac{2}{15}\right)=\frac{11}{\sqrt{5}}$; б) $\min z=z\left(-\frac{4}{35};\frac{2}{25}\right)=\frac{11}{\sqrt{5}}$.
6. а) $\max z=z\left(\frac{2\sqrt{77}}{3};2\right)=54$; б) $\max z=z(1{,}5\sqrt{55};3)=96$.
7. а) $\left(\frac{\sqrt{13}}{6};\frac{\sqrt{13}}{3};\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$; б) $\left(\frac{\sqrt{19}}{9};\frac{\sqrt{19}}{3};\frac{5\sqrt{19}}{9}\right)$.
8. а) $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$; б) $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$. **9.** а) $\left[\frac{3}{2};\frac{50}{3}\right]$; б) $\left[1;\frac{17}{4}\right]$.
10. а) $\left(\pm\sqrt{3};\pm\frac{\sqrt{3}}{2};\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (со всеми возможными комбинациями знаков — всего 8 решений);
б) $\left(\pm\sqrt{3};\pm\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$ (со всеми возможными комбинациями знаков — всего 4 решения).

Диагностическая работа 1

Вариант 1. **1.** $\left[\frac{2}{a-4};+\infty\right]$ при $a\in(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$; $(-\infty;+\infty)$ при $a=1$; $\left(-\infty;\frac{2}{a-4}\right]$ при $a\in(1;4)$; нет решений при $a=4$.

2. 1; 5. **3.** $a=0{,}25$. **4.** $\left(-\frac{17}{8};-1\right]$. **5.** $[4;+\infty)$. **6.** $\left(-\infty;-\frac{7}{8}\right]$.

Вариант 2. **1.** $\left[\frac{2}{a-2};+\infty\right)$ при $a\in(-\infty;0{,}5)\cup(2;+\infty)$; $(-\infty;+\infty)$ при $a=0{,}5$; $\left(-\infty;\frac{2}{a-2}\right)$ при $a\in(0{,}5;2)$; нет решений при $a=2$.
2. -1; 7. **3.** $a=-0{,}75$. **4.** $\left(-\frac{17}{4};-2\right]$. **5.** $[-2;+\infty)$. **6.** $\left(-\infty;\frac{9}{8}\right]$.

Диагностическая работа 2

Вариант 1. **1.** $\{-6\}\cup\left[15-7\sqrt{3};15+7\sqrt{3}\right]$. **2.** $\{6;10\}$.
3. решений нет при $a\in(-\infty;-16)\cup(12;+\infty)$; $x=2$ при $a=-16$;
$x=3$ при $a=12$; $x\in\left[\frac{4-\sqrt{a+16}}{2};\frac{4+\sqrt{a+16}}{2}\right]$ при $a\in(-16;0]$;
$x\in\left[\frac{a}{4};\frac{48-a}{12}\right]$ при $a\in(0;12]$. **4.** 1; $\left[\frac{1}{3};\frac{5}{7}\right)$. **5.** $a=\pm2\sqrt{3}$. **6.** 1; 2.

Вариант 2. **1.** $\{-8\}\cup\left[13-7\sqrt{3};13+7\sqrt{3}\right]$. **2.** $\{-7;-3\}$.
3. решений нет при $a\in\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)\cup(1;+\infty)$; $x=2$ при $a=-\frac{4}{3}$;
$x=3$ при $a=1$; $x\in\left[2-\sqrt{3a+4};2+\sqrt{3a+4}\right]$ при $a\in\left(-\frac{4}{3};0\right]$;
$x\in[3a;4-a]$ при $a\in(0;1]$. **4.** -1; $\left[-\frac{5}{3};-\frac{9}{7}\right)$. **5.** $a=\pm\sqrt{3}$. **6.** 2; 4.

Диагностическая работа 3

Вариант 1. **1.** $a=-2$. **2.** 0; $\frac{2}{3}$; 2; $\frac{8}{3}$. **3.** $(0{,}6;+\infty)$.
4. если $a\in\left(-\frac{9}{4};0\right)\cup(0;54)\cup(54;+\infty)$, то $x=\frac{a}{18}$, $x=\frac{3\pm\sqrt{4a+9}}{6}$;
если $a=0$, то $x=0$ и $x=1$; если $a=54$, то $x=-2$ и $x=3$;
если $a=-\frac{9}{4}$, то $x=-\frac{1}{8}$, $x=\frac{1}{2}$; если $a\in\left(-\infty;-\frac{9}{4}\right)$, то $x=\frac{a}{18}$.
5. -16; 9; 33. **6.** 1.

Вариант 2. **1.** $a=\frac{1}{3}$. **2.** 0; $\frac{4}{3}$; 4; $\frac{16}{3}$. **3.** $(-1{,}4;+\infty)$.
4. если $a\in(-1;0)\cup(0;24)\cup(24;+\infty)$, то $x=\frac{a}{8}$, $x=\frac{1\pm\sqrt{a+1}}{2}$;
если $a=0$, то $x=0$ и $x=1$; если $a=24$, то $x=-2$ и $x=3$;
если $a=-1$, то $x=-\frac{1}{8}$, $x=\frac{1}{2}$; если $a\in(-\infty;-1)$, то $x=\frac{a}{8}$.
5. -4; 0; 12. **6.** 1.

Диагностическая работа 4

Вариант 1. **1.** $(-\infty;4]\cup[7;+\infty)$. **2.** $\left(-\infty;\frac{6}{11}\right)$. **3.** $(-\infty;-3]\cup\{0\}\cup[2;+\infty)$.
4. $(\pi n;0;0)$, $n\in\mathbb{Z}$ при $a=0$; $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;0;-3\right)$, $k\in\mathbb{Z}$ при $a=3$;
при прочих a решений нет. **5.** $\left[-1;\frac{5}{3}\right]$. **6.** $a\in(-\infty;1{,}5]$.

Вариант 2. **1.** $(-\infty; -8]\cup[-5; +\infty)$. **2.** $\left(-\infty; \frac{1}{11}\right)$. **3.** $(-\infty; 0]\cup\{3\}\cup[5; +\infty)$.
4. $(\pi n; 0; 0)$, $n\in$Z при $a=0$; $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k; 0; 6\right)$, $k\in\mathbb{Z}$ при $a=2$;
при прочих a решений нет. **5.** $[-6; 10]$. **6.** $a\in(-\infty; -0{,}5]$.

Диагностическая работа 5

Вариант 1. **1.** $-4; \frac{1}{6}$. **2.** $5-3\sqrt{2}; 2; 3\sqrt{2}-1$. **3.** $(-\infty; 2)$.
4. если $a=0$, то $x\in(-\infty; 3]$;
если $a\in\left(0; \frac{1}{4}\right)$, то $x\in\left(-\infty; \frac{3-3\sqrt{1-4a}}{2a}\right]\cup\left[\frac{3+3\sqrt{1-4a}}{2a}; +\infty\right)$;
если $a\in\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$, то $x\in(-\infty; +\infty)$. **5.** а) $(-40; 40)$. **6.** $a=1$, $x=1$, $x=5$.

Вариант 2. **1.** $-6; \frac{1}{4}$. **2.** $8-3\sqrt{2}; 5; 2+3\sqrt{2}$. **3.** $(-\infty; 6)$.
4. если $a=0$, то $x\in(-\infty; 3]$;
если $a\in\left(0; \frac{1}{6}\right)$, то $x\in\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{1-6a}}{a}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{1-6a}}{a}; +\infty\right)$;
если $a\in\left[\frac{1}{6}; +\infty\right)$, то $x\in(-\infty; +\infty)$. **5.** $(-5; 5)$. **6.** $a=\frac{1}{2}$, $x=2$, $x=10$.

Содержание

Предисловие 3
Глава 1. Логический перебор в задачах с параметром и нестандартных задачах 5
§ 1.1. Линейные уравнения и неравенства с параметром 5
§ 1.2. Нелинейные уравнения и неравенства с параметром . . . 14
§ 1.3. Задачи с целочисленными неизвестными 26
Глава 2. Квадратный трёхчлен в задачах с параметром и нестандартных задачах 53
§ 2.1. Исследование дискриминанта и формулы Виета 53
§ 2.2. Расположение корней квадратного трёхчлена 71
§ 2.3. Задачи, сводимые к исследованию квадратного трёхчлена 87
Глава 3. Применение свойств функций к решению уравнений и неравенств 108
§ 3.1. Монотонность 108
§ 3.2. Ограниченность 123
§ 3.3. Инвариантность 146
Глава 4. Графические интерпретации 165
§ 4.1. Метод областей 165
§ 4.2. Преобразования графиков 186
§ 4.3. Геометрические идеи 203
Глава 5. Другие методы 224
§ 5.1. Метод упрощающего значения 224
§ 5.2. Параметр как переменная 232
§ 5.3. Тригонометрические подстановки 243
§ 5.4. Векторные интерпретации в алгебре 251
Диагностическая работа 1 259
Диагностическая работа 2 260
Диагностическая работа 3 262
Диагностическая работа 4 264
Диагностическая работа 5 266
Ответы 268

Учебно-методическое пособие
Шестаков Сергей Алексеевич

ЕГЭ 2017. Математика. Задачи с параметром.
Задача 18 (профильный уровень)

Под редакцией И. В. Ященко

Подписано в печать 02.08.2016 г. Формат $60 \times 90\ 1/16$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 18. Тираж 5000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–08–04

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель Пресс“».
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89.
E-mail: mittelpress@mail.ru

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине
«Математическая книга», Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел. (495) 745–80–31. E-mail: biblio@mccme.ru