ГОСУДАРСТВЕННАЯ ИТОГОВАЯ АТТЕСТАЦИЯ

МАТЕМАТИКА

КРАТКИЙ СПРАВОЧНИК в ТАБЛИЦАХ и СХЕМАХ

для подготовки

к ЕГЭ и ОГЭ

МАТЕМАТИКА

КРАТКИЙ СПРАВОЧНИК В ТАБЛИЦАХ И СХЕМАХ

ДЛЯ ПОДГОТОВКИ

К ЕГЭ И ОГЭ

Москва
Издательство АСТ
2020

УДК 373:51
ББК 22.1я721
М34

12+

М34 **Математика** : краткий справочник в таблицах и схемах : для подготовки к ЕГЭ и ОГЭ / Л.И. Слонимский, И.С. Слонимская. — Москва : Издательство АСТ, 2020. — 379, [5] с.: ил. — (Краткий справочник в таблицах для подготовки к ЕГЭ и ОГЭ).

ISBN 978-5-17-121354-1

Справочник содержит материал курса «Математика» в объёме, проверяемом на ОГЭ и ЕГЭ.

Наглядность и доступность подачи материала в табличной форме позволяет легко и быстро обощить, систематизировать и повторить материал школьного курса за 5–11 классы и успешно подготовиться к сдаче итоговых экзаменов.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-17-121354-1

© Слонимский Л.И., Слонимская И.С., 2020
© ООО «Издательство АСТ», 2020

Содержание

ПОДГОТОВКА К ОГЭ

АЛГЕБРА

1. Числа и вычисления

1.1. Натуральные числа **25**

1.1.1. Десятичная система счисления. Римская нумерация. Цифры. Знаки для записи чисел. . . 25

1.1.2. Арифметические действия над натуральными числами 26

1.1.3. Степень с натуральным показателем 30

1.1.4. Делимость натуральных чисел. Простые и составные числа, разложение натурального числа на простые множители. . . . 31

1.1.5. Признаки делимости 33

1.1.6. Наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК) 34

1.1.7. Деление с остатком 36

1.2. Дроби **37**

1.2.1. Обыкновенная дробь. Основное свойство дроби. Сравнение дробей. Сокращение дроби . . 37

1.2.2. Арифметические действия с обыкновенными дробями 41

1.2.3. Нахождение части от целого и целого по его части 47

1.2.4. Десятичная дробь, сравнение десятичных дробей 49

1.2.5. Арифметические действия с десятичными дробями 50

1.2.6. Представление десятичной дроби в виде обыкновенной дроби 52

1.3. Рациональные числа 53

1.3.1. Целые числа 53

1.3.2. Модуль (абсолютная величина) числа 53

1.3.3. Сравнение рациональных чисел 54

1.3.4. Арифметические действия с рациональными числами 55

1.3.5. Степень с целым показателем 56

1.3.6. Числовые выражения, порядок действий в них, использование скобок 57

1.4. Действительные числа 58

1.4.1. Квадратный корень из числа 58

1.4.2. Корень третьей степени 59

1.4.3. Нахождение приближённого значения корня 59

1.4.4. Запись корней с помощью степени с дробным показателем 60

1.4.5. Понятие об иррациональном числе. Десятичные приближения иррациональных чисел. Действительные числа как бесконечные десятичные дроби 60

1.4.6. Сравнение действительных чисел. 60

1.5. Измерения, приближения, оценки. 61

1.5.1. Единицы измерения 61

1.5.2. Стандартный вид числа 63

1.5.3. Представление зависимости между величинами в виде формул 64

1.5.4. Проценты. Нахождение процента от величины и величины по её проценту 65

1.5.5. Отношение, выражение отношения в процентах. 66

1.5.6. Пропорция. Прямая и обратно пропорциональная зависимости 67

1.5.7. Округление чисел. 68

2. Алгебраические выражения

2.1. Буквенные выражения (выражения с переменными) 70

2.1.1. Буквенные выражения. Числовое значение буквенного выражения 70

2.1.2. Допустимые значения переменных, входящих в алгебраические выражения. 71

2.1.3. Подстановка выражений
вместо переменных 71

2.1.4. Равенство буквенных выражений,
тождество. Преобразования выражений 72

2.2. Свойства степени с целым показателем . . . 72

2.3. Многочлены 73

2.3.1. Многочлен. Сложение, вычитание,
умножение многочленов 73

2.3.2. Формулы сокращённого умножения:
квадрат суммы и квадрат разности,
формула разности квадратов 74

2.3.3. Разложение многочлена
на множители 75

2.3.4. Квадратный трёхчлен. Теорема Виета.
Разложение квадратного трёхчлена
на линейные множители 76

2.3.5. Степень и корень многочлена
с одной переменной 76

2.4. Алгебраическая дробь 77

2.4.1. Алгебраическая дробь.
Сокращение дробей 77

2.4.2. Рациональные выражения
и их преобразования 77

**2.5. Свойства квадратных корней
и их применение в вычислениях 78**

3. Уравнения и неравенства

3.1. Уравнения **79**

3.1.1. Уравнение с одной переменной, корень уравнения 79

3.1.2. Линейное уравнение 79

3.1.3. Квадратное уравнение, формула корней квадратного уравнения 81

3.1.4. Решение рациональных уравнений 83

3.1.5. Примеры решения уравнений высших степеней. Решение уравнений методом замены переменной. Решение уравнений методом разложения на множители 85

3.1.6. Уравнение с двумя переменными; решение уравнения с двумя переменными 86

3.1.7. Система уравнений; решение системы . . . 87

3.1.8. Система двух линейных уравнений с двумя переменными; решение подстановкой и алгебраическим способом 88

3.2. Неравенства **92**

3.2.1. Числовые неравенства и их свойства 92

3.2.2. Неравенства с одной переменной. Решение неравенства 94

3.2.3. Линейное неравенство с одной переменной 95

3.2.4. Системы линейных неравенств 96

3.2.5. Квадратные неравенства 98

3.3. Текстовые задачи 102

3.3.1. Решение текстовых задач арифметическим способом 102

3.3.2. Решение текстовых задач алгебраическим способом 104

4. Числовые последовательности

4.1 Понятие последовательности 109

4.1.1. Понятие последовательности 109

4.2. Арифметическая и геометрическая прогрессии 110

4.2.1. Арифметическая прогрессия 110

4.2.2. Геометрическая прогрессия 111

4.2.3. Сложные проценты 112

5. Функции

5.1. Числовые функции 113

5.1.1. Понятие функции. Область определения функции. Способы задания функции 113

5.1.2. График функции, возрастание и убывание, наибольшее и наименьшее значения функции, нули функции, промежутки знакопостоянства. . 114

5.1.3. Пример графических зависимостей, отражающих реальные процессы 115

5.1.4. Линейная функция, её график, геометрический смысл коэффициентов 116

5.1.5. Функция, описывающая обратно пропорциональную зависимость, её график. Гипербола 117

5.1.6. Квадратичная функция, её график. Парабола. Координаты вершины параболы, ось симметрии 118

5.1.7. График функции $y = \sqrt{x}$ 119

5.1.8. График функции $y = \sqrt[3]{x}$ 119

5.1.9. График $y = |x|$ 120

5.1.10. Использование графиков функций для решения уравнений и систем 120

6. Координаты на прямой и в плоскости

6.1. Координатная прямая 122

6.1.1. Изображение чисел точками координатной прямой 122

6.1.2. Геометрический смысл модуля 122

6.1.3. Числовые промежутки: интервал, отрезок, луч 123

6.2. Декартовы координаты на плоскости 124

6.2.1. Декартовы координаты на плоскости; координаты точки 124

6.2.2. Координаты середины отрезка 124

6.2.3. Формула расстояния между двумя точками плоскости 125

6.2.4. Уравнение прямой, угловой коэффициент прямой, условие параллельности прямых 125

6.2.5. Уравнение окружности 126

6.2.6. Графическая интерпретация уравнений с двумя переменными и их систем 126

7. Статистика и теория вероятности 128

ГЕОМЕТРИЯ

8.1. Геометрические фигуры и их свойства. Измерение геометрических величин 133

8.1.1. Начальные понятия геометрии. 133

8.1.2. Угол. Прямой угол. Острые и тупые углы. Вертикальные и смежные углы. Биссектриса угла и её свойства 135

8.1.3. Прямая. Параллельность и перпендикулярность прямых. 137

8.1.4. Отрезок. Свойство серединного перпендикуляра к отрезку. Перпендикуляр и наклонная к прямой 140

8.1.5. Понятие о геометрическом месте точек . . 142

8.1.6. Преобразования плоскости. Движение. Симметрия 143

8.2. Треугольник 145

8.2.1. Высота, медиана, биссектриса, средняя линия треугольника; точки пересечения серединных перпендикуляров, биссектрис, медиан, высот или их продолжений 145

8.2.2. Равнобедренный и равносторонний треугольники. Свойства и признаки равнобедренного треугольника 146

8.2.3. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора 149

8.2.4. Признаки равенства треугольников 151

8.2.5. Неравенство треугольника 152

8.2.6. Сумма углов треугольника. Внешние углы треугольника 152

8.2.7. Теорема Фалеса 153

8.2.8. Подобие треугольников, коэффициент подобия. Признаки подобия треугольников . . . 153

8.2.9. Синус, косинус, тангенс острого угла прямоугольного треугольника и углов от 0° до 180° 156

8.2.10. Решение прямоугольных треугольников. Основное тригонометрическое тождество. Теорема косинусов и теорема синусов. 157

8.3. Многоугольники 159

8.3.1. Параллелограмм,
его свойства и признаки. 159

8.3.2. Прямоугольник, квадрат, ромб,
их свойства и признаки 161

8.3.3. Трапеция, средняя линия трапеции;
равнобедренная трапеция 163

8.3.4. Сумма углов выпуклого
многоугольника 164

8.3.5. Правильные многоугольники 165

8.4. Окружность и круг 166

8.4.1. Центральный, вписанный угол;
величина вписанного угла 166

8.4.2. Взаимное расположение прямой
и окружности 168

8.4.3. Касательная и секущая к окружности;
равенство отрезков касательных,
проведённых из одной точки 169

8.4.4. Окружность,
вписанная в треугольник. 170

8.4.5. Окружность,
описанная около треугольника 170

8.4.6. Вписанные и описанные окружности
правильного многоугольника 172

8.4.7. Вписанные и описанные
четырёхугольники 173

8.5. Измерение геометрических величин. 174

8.5.1. Длина отрезка, длина ломаной, периметр многоугольника. Расстояние от точки до прямой 174

8.5.2. Длина окружности 175

8.5.3. Градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности 175

8.5.4. Площадь и её свойства. Площадь прямоугольника 176

8.5.5. Площадь параллелограмма 177

8.5.6. Площадь трапеции 177

8.5.7. Площадь треугольника 178

8.5.8. Площадь круга, площадь сектора 179

8.5.9. Формулы объёма прямоугольного параллелепипеда, куба, шара 180

8.6. Векторы на плоскости 181

8.6.1 Вектор, длина (модуль) вектора 181

8.6.2. Равенство векторов 182

8.6.3. Операции над векторами (сумма векторов, умножение вектора на число) 183

8.6.4. Угол между векторами 185

8.6.5. Коллинеарные векторы, разложение вектора по двум неколлинеарным векторам 186

8.6.6. Координаты вектора 187

8.6.7. Скалярное произведение векторов 189

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ

1. АЛГЕБРА

1.1. Числа и вычисления 193

1.1.1. Числа 193

1.1.2. Арифметические действия и их свойства . . 194

1.1.3. Дроби, действия над ними. Округление чисел 198

1.1.4. Отношения, пропорции и проценты 204

1.1.5. Модуль и его свойства 209

1.1.6. Положительные и отрицательные числа, действия над ними 210

1.1.7. Степени, корни и их свойства 211

1.1.8. Логарифмы и их свойства 214

1.2. Преобразование выражений с переменными 216

1.2.1. Раскрытие скобок 216

1.2.2. Приведение подобных слагаемых 217

1.2.3. Формулы сокращенного умножения 217

1.2.4. Различные способы разложения на множители 217

1.3. Основы тригонометрии 218

1.3.1. Радианная и градусная меры произвольного угла 218

1.3.2. Синус, косинус, тангенс
и котангенс произвольного угла 220

1.3.3. Основные тригонометрические тождества 222

1.3.4. Формулы приведения 222

1.3.5. Синус, косинус и тангенс суммы
и разности двух углов. 223

1.3.6. Синус и косинус двойного угла 224

1.4. Уравнения и системы уравнений 224

1.4.1. Уравнение с одной переменной,
корень уравнения. 224

1.4.2. Линейные уравнения 225

1.4.3. Квадратные уравнения 225

1.4.4. Дробно-рациональные уравнения 228

1.4.5. Иррациональные уравнения. 231

1.4.6. Показательные уравнения 232

1.4.7. Логарифмические уравнения 234

1.4.8. Тригонометрические уравнения. 235

1.4.9. Основные приёмы решения систем
уравнений: подстановка, алгебраическое
сложение, введение новых переменных 238

1.5. Неравенства и системы неравенств. 242

1.5.1. Линейные неравенства 242

1.5.2. Квадратные неравенства. 243

1.5.3. Рациональные неравенства
и метод интервалов 248

1.5.4. Показательные неравенства 250
1.5.5. Логарифмические неравенства 252
1.5.6. Метод рационализации 253
1.5.7. Системы неравенств с одной переменной . . 255

1.6. Текстовые задачи и методы их решения . . . 257
1.6.1. Решение текстовых задач арифметическим методом 257
1.6.2. Решение текстовых задач алгебраическим методом 259
1.6.3. Решение текстовых задач графическим методом 266

1.7. Прогрессии 267
1.7.1. Арифметическая прогрессия 267
1.7.2. Геометрическая прогрессия 268

2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

2.1. Функции 269
2.1.1. Функция, область определения функции, множество значений функции. 269
2.1.2. График функции 270
2.1.3. Преобразование графиков: параллельный перенос, симметрия относительно осей координат 270

2.2. Элементарное исследование функций. 271
2.2.1. Чётность и нечётность функции 271

2.2.2. Периодичность функции 272
2.2.3. Нули функции,
промежутки знакопостоянства 272
2.2.4. Монотонность функции.
Промежутки возрастания и убывания 273
2.2.5. Точки экстремума (локального
максимума и минимума) функции 273
2.2.6. Ограниченность функции 274

2.3. Основные элементарные функции 275

2.3.1. Линейная функция, её график 275
2.3.2. Функция, описывающая обратно
пропорциональную зависимость, её график . . . 276
2.3.3. Квадратичная функция, её график 277
2.3.4. Показательная функция, её график 278
2.3.5. Логарифмическая функция, её график . . 279
2.3.6. Тригонометрические функции, их графики. . 280

2.4. Производная 284

2.4.1. Понятие о производной функции,
геометрический смысл производной 284
2.4.2. Физический смысл производной 285
2.4.3. Уравнение касательной
к графику функции 286
2.4.4. Производные суммы, разности,
произведения, частного 286
2.4.5. Производные основных
элементарных функций 286

2.5. Исследование функций с помощью производной 287

2.5.1. Применение производной к исследованию функций и построению графиков 287

2.6. Первообразная 295

2.6.1. Первообразные элементарных функций . . 295

2.6.2. Площадь криволинейной трапеции 297

3. ГЕОМЕТРИЯ (ПЛАНИМЕТРИЯ)

3.1. Начальные сведения 298

3.1.1. Точки, прямые, лучи, отрезки 298

3.1.2. Углы. Вертикальные и смежные углы . . . 299

3.1.3. Прямая. Параллельность и перпендикулярность прямых 302

3.2. Треугольник 305

3.2.1. Треугольник. Медиана, биссектриса, высота, средняя линия треугольника 305

3.2.2. Признаки равенства треугольников 307

3.2.3. Равнобедренный треугольник. Свойства и признаки равнобедренного треугольника 308

3.2.4. Прямоугольный треугольник. Свойства и признаки прямоугольного треугольника. Теорема Пифагора 310

3.2.5. Синус, косинус, тангенс острого угла прямоугольного треугольника 313

3.2.6. Признаки подобия треугольников 314
3.2.7. Сумма углов треугольника.
Внешние углы треугольника 317
3.2.8. Теорема Фалеса 317
3.2.9. Теорема синусов. Теорема косинусов . . . 318

3.3. Многоугольники 319
3.3.1. Параллелограмм 319
3.3.2. Прямоугольник и ромб 321
3.3.3. Квадрат 322
3.3.4. Трапеция 323
3.3.5. Сумма углов выпуклого многоугольника . . 324
3.3.6. Правильные многоугольники 325
3.3.7. Подобие произвольных фигур. 326

3.4. Окружность и круг 328
3.4.1. Основные понятия 328
3.4.2. Вписанный и центральный углы 328
3.4.3. Касательная и секущая к окружности . . . 330
3.4.4. Окружность, вписанная в треугольник,
и окружность, описанная около треугольника . . 331
3.4.5. Вписанные и описанные
четырёхугольники 333

3.5. Измерение геометрических величин 334
3.5.1. Расстояние от точки до прямой.
Расстояние между параллельными прямыми . . 334

3.5.2. Периметр многоугольника 334
3.5.3. Длина окружности 334
3.5.4. Площадь квадрата, прямоугольника 335
3.5.5. Площадь параллелограмма и ромба, выпуклого четырёхугольника 335
3.5.6. Площадь треугольника 336
3.5.7. Площадь трапеции 337
3.5.8. Площадь круга. Площадь сектора 337
3.5.9. Формула Пика для нахождения площади многоугольников на клетчатой бумаге 338

3.6. Векторы на плоскости 338
3.6.1. Вектор, длина вектора, равенство векторов. 338
3.6.2. Операции над векторами 339
3.6.3. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов 342
3.6.4. Простейшие задачи в координатах 344
3.6.5. Уравнение окружности 344

3.7. Дополнительные материалы к главе 3 345
3.7.1. Использование подобия треугольников при решении задач 345

4. ГЕОМЕТРИЯ (СТЕРЕОМЕТРИЯ)

4.1. Прямые и плоскости в пространстве 348
4.1.1. Основные аксиомы стереометрии и следствия к ним 348

4.1.2. Взаимное расположение прямых в пространстве 349

4.1.3. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве 350

4.1.4. Взаимное расположение плоскостей в пространстве 353

4.2. Многогранники 354

4.2.1. Призма, параллелепипед, куб. 354

4.2.2. Пирамида 356

4.2.3. Сечение многогранника. 357

4.3. Тела вращения 358

4.3.1. Цилиндр 358

4.3.2. Конус 359

4.3.3. Шар и сфера 361

4.4. Измерение геометрических величин в пространстве 362

4.4.1. Угол между прямыми в пространстве, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями 362

4.4.2. Расстояние от точки до плоскости. Расстояние между параллельными и скрещивающимися прямыми. Расстояние между параллельными плоскостями 363

4.4.3. Площадь поверхности многогранника . . . 364

4.4.4. Площадь поверхности фигур вращения . . 365

4.4.5. Объёмы 366

4.5. Координаты и векторы в пространстве. 367

4.5.1. Декартовы координаты в пространстве. Координаты вектора 367

4.5.2. Скалярное произведение векторов в пространстве. Угол между векторами в пространстве 368

4.5.3. Уравнение плоскости. 369

4.5.4. Простейшие задачи в координатах в пространстве 372

5. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

5.1. Элементы статистки 373

5.2. Элементы комбинаторики 374

5.2.1. Основные формулы комбинаторики 374

5.3. Элементы теории вероятностей 375

5.3.1. Вероятности событий. Классическое определение вероятности 375

5.3.2. Теоремы о вероятности событий 376

6. ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

6.1. Банковские задачи 378

Подготовка к ОГЭ

1. ЧИСЛА И ВЫЧИСЛЕНИЯ

1.1. Натуральные числа

1.1.1. Десятичная система счисления. Римская нумерация. Цифры. Знаки для записи чисел

Цифры — знаки для записи чисел.

Система счисления — способ записи чисел в виде, удобном для чтения и выполнения арифметических операций.

В десятичной системе счисления используют цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Всего 10 цифр.

Римские цифры	I	V	X	L	C	D	M
Арабские цифры	1	5	10	50	100	500	1000

Примеры

1) XXVII = 10 + 10 + 5 + 1 + 1 = 27.

2) MDCCLXIV = 1000 + 500 + 100 + 100 + 50 + 10 + + (5 – 1) = 1764.

1.1.2. Арифметические действия над натуральными числами

Натуральные числа — числа, которые используют при счёте предметов.	
Действия над натуральными числами	
Сложение	$a + b = c$, $a = c - b$, $b = c - a$, где a — слагаемое, b — слагаемое, c — сумма
Вычитание	$a - b = c$, $a = b + c$, $b = a - c$, где a — уменьшаемое, b — вычитаемое, c — разность
Умножение	$ab = c$, $a = \frac{c}{b}$, $b = \frac{c}{a}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, где a — множитель, b — множитель, c — произведение
Деление	$\frac{a}{b} = c$ или $a : b = c$, $a = bc$, $b = \frac{a}{c}$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, где a — делимое, b — делитель, c — частное

Свойства сложения и умножения	
Переместительное свойство сложения	$a + b = b + a$
Сочетательное свойство сложения	$(a + b) + c = a + (b + c)$
Переместительное свойство умножения	$ab = ba$
Сочетательное свойство умножения	$(ab)c = a(bc)$

Распределительное свойство умножения относительно сложения	$a(b + c) = ab + ac$

Общие правила при действиях с 0 и 1	
$a + 0 = a$	$a : 1 = a$
$a - 0 = a$	$a : a = 1$
$a - a = 0$	$a \cdot 0 = 0$
$a \cdot 1 = a$	$0 : a = 0$
$a : 0$ — нет числового решения	

Проверка результатов арифметических действий с помощью остатков от деления на 9

Действия

• Остаток любого числа от деления на 9 можно получить, складывая цифры числа, при этом в полученной сумме нужно продолжить сложение цифр до получения однозначного остатка. При сложении цифр суммы и отдельные числа, кратные 9, а также нуль можно игнорировать, они не влияют на конечный результат.

• Умножаем или складываем остатки. В результате вычислений тем же способом находим остаток и сравниваем его с остатком суммы или произведения. При верном решении они должны совпадать.

• При делении и вычитании проверку этим способом можно производить, умножая остаток частного на остаток делителя, соответственно складывая остаток разности с остатком вычитаемого.

Примеры

1) $44 \cdot 46 = 2024$
$4 + 4 = 8$; $4 + 6 = 10 \to 1 + 0 = 1$;
$2 + 0 + 2 + 4 = 8$;
$8 \cdot 1 = 8$ (верно)

2) $327 + 48 = 375$
$3 + 2 + 7 = 12 \to 1 + 2 = 3$;
$4 + 8 = 12 \to 1 + 2 = 3$;
$3 + 7 + 5 = 15 \to 1 + 5 = 6$;
$3 + 3 = 6$ (верно)

3) $156 : 12 = 13 \to 13 \cdot 12 = 156$
$1 + 3 = 4$; $1 + 2 = 3$;
$1 + 5 + 6 = 12 \to 1 + 2 = 3$;
$4 \cdot 3 = 12 \to 1 + 2 = 3$ (верно)

4) $58 - 22 = 36 \to 36 + 22 = 58$
$3 + 6 = 9$; $2 + 2 = 4$; $5 + 8 = 13 \to 1 + 3 = 4$;
$9 + 4 = 13 \to 1 + 3 = 4$ (верно)

Приёмы быстрого устного счёта

Умножение чисел от 101 до 109 между собой
$(100 + a)(100 + b) = 10\,000 + 100(a + b) + ab$

Порядок действий	*Примеры*
1) Записываем число 1. 2) Справа записываем сумму чисел из разряда единиц у множителей. 3) Ещё правее записываем произведение этих же чисел.	1) $102 \cdot 104 = 10\,000 + 100(2 + 4) + 2 \cdot 4 = 10\,000 + 600 + 8 = 10\,608$. 2) $109 \cdot 108 = 10\,000 + 100(9 + 8) + 9 \cdot 8 = 10\,000 + 1700 + 72 = 11\,772$.

Умножение чисел, бóльших 10
$(10 + a)(10 + b) = 10(10 + a + b) + ab$

Порядок действий	*Примеры*
1. К одному из множителей прибавляем единицы второго множителя, получаем десятки. 2. Перемножаем единицы. 3. Складываем десятки с произведением единиц.	1) $12 \cdot 19 = 10(10 + 2 + 9) + 2 \cdot 9 = 210 + 18 = 228$ 2) $16 \cdot 13 = 10(10 + 6 + 3) + 6 \cdot 3 = 190 + 18 = 208$

Умножение двузначных чисел на 11

Чтобы умножить двузначное число на 11, надо сложить цифры этого числа и результат записать между ними, если это однозначное число. Если полученная сумма — двузначное число, то левую цифру прибавляем к числу десятков первоначального числа.

Примеры

1) $22 \cdot 11 = 2 \cdot 100 + (2 + 2) \cdot 10 + 2 = 242$

2) $45 \cdot 11 = 4 \cdot 100 + (4 + 5) \cdot 10 + 5 = 495$

3) $57 \cdot 11 = 5 \cdot 100 + (5 + 7) \cdot 10 + 7 = 627$

Умножение чисел с одинаковыми десятками и числом единиц, дающих в сумме 10
$(1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5 = 10)$

• *Десятки* умножаем на следующее натуральное число: $2 \cdot 3$; $3 \cdot 4$; $5 \cdot 6$; $9 \cdot 10$; $11 \cdot 12$.

• *Единицы* просто перемножаем (если в произведении получилось однозначное число, то слева приписываем 0):
$1 \cdot 9 = 09$, $2 \cdot 8 = 16$, $3 \cdot 7 = 21$, $4 \cdot 6 = 24$, $5 \cdot 5 = 25$.
• *В результате*: слева — произведение десятков, справа — произведение единиц.

Примеры

1) $42 \cdot 48 = (4 \cdot 5) \cdot 100 + (2 \cdot 8) = 2000 + 16 = \underline{20}\mathbf{16}$
2) $51 \cdot 59 = (5 \cdot 6) \cdot 100 + (1 \cdot 9) = 3000 + 9 = \underline{30}\mathbf{09}$
3) $83 \cdot 87 = (8 \cdot 9) \cdot 100 + (3 \cdot 7) = 7200 + 21 = \underline{72}\mathbf{21}$
4) $115^2 = 115 \cdot 115 = (11 \cdot 12) \cdot 100 + (5 \cdot 5) =$
$= 13200 + 25 = \underline{132}\mathbf{25}$

1.1.3. Степень с натуральным показателем

Степень — пятое математическое действие, считая сложение и вычитание, умножение и деление.	
Определение степени числа a с натуральным показателем n; a — основание степени	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$; где $n = 2, 3, 4\ldots$; $a^1 = a$
Определение степени числа с нулевым показателем	$a^0 = 1$, где $a \neq 0$
Умножение степеней с одинаковыми основаниями	$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$
Деление степеней с одинаковыми основаниями	$a^n : a^k = a^{n-k}$, где $n \geqslant k$
Возведение степени в степень	$(a^n)^k = a^{nk}$

Умножение степеней с одинаковыми показателями	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
Деление степеней с одинаковыми показателями	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, где $b \neq 0$
Возведение в степень 0 и 1	$1^n = 1$; $0^n = 0$;
Возведение в степень положительных и отрицательных чисел с чётным или нечётным показателем	Если $a > 0$, то $a^{2n} > 0$, $a^{2n-1} > 0$. Если $a < 0$, то $a^{2n} > 0$, $a^{2n-1} < 0$.

1.1.4. Делимость натуральных чисел. Простые и составные числа, разложение натурального числа на простые множители

Делитель числа a	**Кратное числа a**
↓	↓
Число, на которое a делится без остатка	Число, которое делится на a без остатка

Простые числа	**Составные числа**
↓	↓
Имеют только два делителя: 1 и само число. *Например*, делители числа 17: 1 и 17	Имеют более двух делителей. *Например*, число 6 имеет делители: 1, 2, 3, 6
Число 1 имеет только один делитель — само это число. Поэтому его не относят ни к простым, ни к составным числам.	

• **Разложение составного числа на простые множители** — представление этого числа в виде произведения простых чисел.

• Всякое составное число можно разложить на простые множители. При любом способе получается одно и тоже разложение, если не учитывать порядок записи множителей.

Правило разложения на простые множители

1. Записать данное число, а справа от него провести вертикальную черту.
2. Разделить данное число нацело на наименьшее простое число — делитель данного.
3. Результат деления написать под данным числом, а делитель — справа за чертой.
4. Полученное частное так же нацело разделить на наименьшее возможное простое число, далее делать как в пункте 3.
5. Деление продолжать до получения в частном единицы.
6. Числа, записанные за вертикальной чертой в столбик, и есть простые множители, на которые раскладывается данное число.

Пример

1850	2
925	5
185	5
37	37
1	

$1850 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 37 = 2 \cdot 5^2 \cdot 37.$

1.1.5. Признаки делимости

на 2	Число оканчивается на чётную цифру (0, 2, 4, 6, 8).
на 3	Сумма цифр делится на 3.
на 4	Две последние цифры числа — или нули, или число, делящееся на 4.
на 5	Последняя цифра числа — 0 или 5.
на 6	Одновременное выполнение признаков делимости на 2 и на 3.
на 7	Отбросить последнюю цифру, умножить её на 2. Если получилось число, большее числа из оставшихся цифр, то следует вычесть из удвоенной последней цифры это число. Если число из оставшихся цифр больше, то надо из него вычесть удвоенную последнюю цифру.
на 8	Три последние цифры числа — нули или образуют число, делящееся на 8.
на 9	Сумма цифр числа делится на 9.
на 10	Последняя цифра числа — 0.
на 11	Разность между суммой цифр, стоящих на нечётных местах, и суммой цифр, стоящих на чётных местах, делится на 11.
на 13	Отбросить последнюю цифру, умножить её на 4 и прибавить к числу из оставшихся цифр.
на 25	Две последние цифры — нули или число, делящееся на 25.

1.1.6. Наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК)

Наибольший общий делитель (НОД) нескольких натуральных чисел — наибольшее натуральное число, на которое делятся без остатка данные числа.

Например, 8 — наибольший общий делитель чисел 24 и 40, так как делители числа 24 — числа 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, а делители числа 40 — числа 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40.

Правило для нахождения НОД

1. Разложить на простые множители каждое из данных чисел.

2. Выписать все общие делители чисел и перемножить их.

Пример

Найдём НОД чисел 12, 18, 30.

Р е ш е н и е.

12	2	18	2	30	2
6	2	9	3	15	3
3	3	3	3	5	5
1		1		1	

НОД (12, 18, 30) = 2 · 3 = 6.

• Если все данные числа делятся на одно из них, то это число и является НОД этих чисел.

Например, НОД чисел 45, 60, 15 является число 15, так как 45 : 15 = 3, 60 : 15 = 4, 15 : 15 = 1.

• **Взаимно простые числа** — натуральные числа, НОД которых равен 1.
Например, числа 8 и 9 — взаимно простые, так как $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$; $9 = 3 \cdot 3$, НОД (8, 9) = 1.

Наименьшее общее кратное нескольких натуральных чисел (НОК) — наименьшее натуральное число, которое кратно каждому из данных чисел.
Например, наименьшее общее кратное чисел 9 и 12 — число 36, так как кратные 9 — числа 9, 18, 27, 36, 45 и т. д., а 12 — числа 12, 24, 36, 48 и т. д.

Правило для нахождения НОК

1. Разложить на простые множители каждое из данных чисел.

2. Выписать множители, которые есть в разложении одного из данных чисел.

3. Добавить к ним недостающие множители из разложений остальных чисел.

4. Найти произведение получившихся множителей.

Пример

Найти НОК чисел 10, 12, 15.
Р е ш е н и е.

10	2
5	5
1	

12	2
6	2
3	3
1	

15	3
5	5
1	0

НОК (10, 12, 15) = $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

• Если одно из данных чисел делится на все остальные числа, то это число и является наименьшим общим кратным данных чисел.
Например, для чисел 18, 40, 360 наименьшее обще кратное — число 360, так как 360 : 18 = 20; 360 : 40 = 9; 360 : 360 = 1.
• Для взаимно простых чисел НОК равен произведению этих чисел.
Например, для чисел 8 и 9 НОК равен 8 · 9 = 72.
• Связь между НОК и НОД:

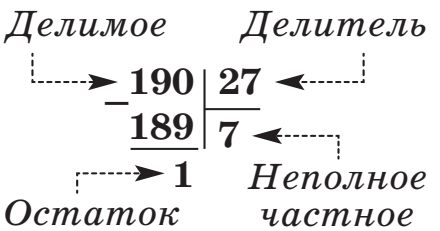
$$\text{НОК}(a; b) = \frac{a \cdot b}{\text{НОД}(a; b)}.$$

1.1.7. Деление с остатком

Правила деления с остатком

1. Если делимое не делится без остатка, то нужно подобрать ближайшее к делимому число, которое делится на делитель без остатка. При делении с остатком результат записывают двумя числами. Первое число называют **неполным частным**, второе — **остатком**.
Например, 190 : 27 = 7 (остаток 1).

2. При делении с остатком остаток всегда должен быть меньше делителя.
Например, 190 : 27 = 7 (остаток 1), 1 < 27.



Форма записи деления с остатком	
$190 : 27 = 7$ (остаток 1) Запись показывает результат деления	$190 = 27 \cdot 7 + 1$ Запись позволяет сделать проверку

1.2. Дроби

1.2.1. Обыкновенная дробь. Основное свойство дроби. Сравнение дробей. Сокращение дроби

Обыкновенная дробь — запись вида $\frac{a}{b}$, где a — числитель, b — знаменатель.

Числитель дроби — число, которое пишут над чертой. Числитель показывает, сколько равных долей единицы взято.

Знаменатель дроби — число, которое пишут под чертой. Знаменатель показывает, на сколько долей разделили единицу.

Правильная дробь — обыкновенная дробь, числитель которой меньше знаменателя. *Например*, $\frac{1}{3}; \frac{3}{7}; \frac{23}{45}$.	**Неправильная дробь** — обыкновенная дробь, числитель которой больше знаменателя или равен ему. *Например*, $\frac{4}{3}; \frac{25}{5}; \frac{6}{6}$.

Неправильная дробь	$>$	Правильная дробь
Неправильная дробь	$\geqslant$	1
Правильная дробь	$<$	1

Основное свойство дроби

Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится равная ей дробь. Две равные дроби являются различными записями одного и того же числа.

Например,

1) $\frac{2}{7} = \frac{4}{14} = \frac{6}{21} = \frac{10}{35}$.

2) $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 8}{6 \cdot 8} = \frac{40}{48}$.

3) $\frac{50}{8} = \frac{50 : 2}{8 : 2} = \frac{25}{4}$.

Сравнение дробей

Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та, у которой числитель больше.

Например, $\frac{4}{7} > \frac{3}{7}$; $\frac{14}{29} < \frac{19}{29}$.

Из двух дробей с одинаковыми числителями больше та, у которой знаменатель меньше.

Например, $\frac{7}{11} < \frac{7}{9}$; $\frac{15}{37} > \frac{15}{43}$.

Сокращение дроби

Сокращение дроби — деление числителя и знаменателя дроби на их общий делитель, не равный единице.

Наибольшее число, на которое можно сократить дробь, — **НОД числителя и знаменателя дроби.**

Задание «сократить дробь» подразумевает ответ в виде *несократимой дроби*.

Несократимая дробь

Несократимая дробь — дробь, числитель и знаменатель которой — взаимно простые числа.

Примеры

1) $\frac{5}{8}$ — несократимая дробь, так как НОД (5, 8) = 1.

2) $\frac{20}{27}$ — несократимая дробь, так как НОД (20, 27) = 1.

Способы сокращения дробей

• Дробь можно сократить на НОД числителя и знаменателя, предварительно найдя НОД.

• Дробь можно постепенно сокращать на общие делители числителя и знаменателя, применяя для их нахождения признаки делимости.

• Числитель и знаменатель дроби можно разложить на множители, а затем сокращать.

Примеры

1) Сократите дробь $\frac{875}{1000}$.

Р е ш е н и е. Найдём НОД (875, 1000).

875	5
175	5
35	5
7	7
1	

1000	2
500	2
250	2
125	5
25	5
5	5
1	

НОД (875, 1000) = 5 · 5 · 5 = 125.

$$\frac{875}{1000} = \frac{875 : 125}{1000 : 125} = \frac{7}{8}.$$

2) Представьте в виде обыкновенной несократимой дроби десятичные дроби 0,5; 0,25.

Р е ш е н и е.

$0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

Приведение дроби к новому знаменателю — умножение числителя дроби на дополнительный множитель.

Дополнительный множитель — число, равное частному от деления нового знаменателя на старый.

Пример

Приведите дробь $\frac{2}{7}$ к знаменателю 21.

Р е ш е н и е. 21 : 7 = 3 — дополнительный множитель.

$\frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 3}{21} = \frac{6}{21}$.

Наименьший общий знаменатель нескольких дробей (НОЗ) — наименьшее общее кратное знаменателей данных дробей.

Правило нахождения наименьшего общего знаменателя (НОЗ)

• Если один из знаменателей делится на другие, то он и будет НОЗ.

• Если все знаменатели данных дробей взаимно простые числа, то НОЗ находят перемножением знаменателей.

• Во всех остальных случаях находят НОЗ разложением на множители.

Способ приведения дробей к наименьшему общему знаменателю
1. Найти наименьший общий знаменатель. 2. Найти дополнительные множители для каждой дроби. 3. Умножить числитель каждой дроби на соответствующий дополнительный множитель. Знаменателем каждой дроби будет НОЗ всех дробей. *Пример* Приведите к наименьшему общему знаменателю дроби $\frac{6}{7}, \frac{3}{5}, \frac{1}{6}$. Р е ш е н и е. НОЗ $(7, 5, 6) = 7 \cdot 5 \cdot 6 = 210$. $\frac{6}{7} = \frac{6 \cdot 30}{210} = \frac{180}{210}, \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 42}{210} = \frac{126}{210},$ $\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 35}{210} = \frac{35}{210}.$

1.2.2. Арифметические действия с обыкновенными дробями

Сложение и вычитание дробей	
Одинаковые знаменатели	Различные знаменатели
$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$

Правило сравнения, сложения и вычитания дробей с разными знаменателями

1. Привести дроби к наименьшему общему знаменателю.

2. Соответственно сравнить, сложить или вычесть полученные дроби с одинаковыми знаменателями.

Примеры

1) Сравните дроби $\frac{2}{7}$ и $\frac{3}{8}$.

Р е ш е н и е. НОЗ (7, 8) = $7 \cdot 8 = 56$, так как 7 и 8 являются взаимно простыми числами.

$$\frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 8}{56} = \frac{16}{56},\ \frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 7}{56} = \frac{21}{56},\ \frac{16}{56} < \frac{21}{56},$$

значит, $\frac{2}{7} < \frac{3}{8}$.

2) Выполните сложение дробей с разными знаменателями: $\frac{3}{16} + \frac{5}{14} + \frac{1}{30}$.

Р е ш е н и е.

16	2
8	2
4	2
2	2
1	

14	2
7	7
1	

30	2
15	3
5	5
1	

НОЗ (14, 16, 30) = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 1680$;

$$\frac{3}{16} + \frac{5}{14} + \frac{1}{30} = \frac{3 \cdot 105}{1680} + \frac{5 \cdot 120}{1680} + \frac{1 \cdot 56}{1680} =$$

$$= \frac{315 + 600 + 56}{1680} = \frac{971}{1680}.$$

3) Выполните вычитание дробей с разными знаменателями: $\frac{20}{27} - \frac{4}{81}$.

Р е ш е н и е.

$$\frac{20}{27} - \frac{4}{81} = \frac{20 \cdot 3}{81} - \frac{4}{81} = \frac{60 - 4}{81} = \frac{56}{81}.$$

Правило сложения смешанных чисел

1. Дробные части смешанных чисел приводят к наименьшему общему знаменателю.
2. Складывают отдельно целые части и отдельно дробные части смешанных чисел.
3. Если при сложении дробных частей получают неправильную дробь, то необходимо выделить из неё целую часть и сложить с целой частью результата.

Пример

1) Сложите числа $6\frac{2}{7}$ и $5\frac{3}{8}$.

Р е ш е н и е.

$$6\frac{2}{7} + 5\frac{3}{8} = 6\frac{16}{56} + 5\frac{21}{56} = (6 + 5) + \left(\frac{16}{56} + \frac{21}{56}\right) =$$

$$= 11\frac{37}{56}.$$

2) Сложите числа $1\frac{2}{3}$ и $2\frac{3}{5}$.

Р е ш е н и е.

$$1\frac{2}{3}\,{}^{\backslash 5} + 2\frac{3}{5}\,{}^{\backslash 3} = 1\frac{10}{15} + 2\frac{9}{15} = 3\frac{19}{15} = 4\frac{4}{15}.$$

Правило вычитания смешанных чисел

1. Дробные части смешанных чисел приводят к наименьшему общему знаменателю.

2. Если дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, то её превращают в неправильную дробь, предварительно уменьшив целую часть на единицу.

3. Отдельно выполняют вычитание целых частей и отдельно — дробных частей.

Примеры

1) Выполните вычитание: $7 - 3\frac{5}{7}$.

Р е ш е н и е.

$$7 - 3\frac{5}{7} = 6\frac{7}{7} - 3\frac{5}{7} = 3\frac{2}{7}.$$

2) Выполните вычитание: $16\frac{5}{6} - 9\frac{7}{8}$.

Р е ш е н и е.

$$16\frac{5}{6}^{\backslash 4} - 9\frac{7}{8}^{\backslash 3} = 16\frac{20}{24} - 9\frac{21}{24} =$$

$$= 15\frac{44}{24} - 9\frac{21}{24} = 6\frac{23}{24};$$

Умножение и деление дробей

Умножение дробей	Деление дробей
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

Правило умножения дроби на натуральное число

1. Числитель дроби умножают на натуральное число и это выражение записывают в числитель произведения.

2. Знаменатель дроби оставляют без изменения.

3. Если возможно, то дробь сокращают.

4. Перемножают оставшиеся множители в числителе.

5. Если дробь неправильная, то выделяют целую часть.

Пример

Выполните умножение: $4 \cdot \frac{5}{8}$.

Р е ш е н и е.

$$4 \cdot \frac{5}{8} = \frac{4 \cdot 5}{8} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}.$$

Умножение дроби на дробь — действие, которое состоит в умножении числителя одной дроби на числитель другой дроби и знаменателя первой дроби на знаменатель второй.

Например,

1) $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{11} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 11} = \frac{6}{77}$.

2) $\frac{3}{8} \cdot \frac{16}{27} = \frac{3 \cdot 16}{8 \cdot 27} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 8}{8 \cdot 3 \cdot 9} = \frac{2}{9}$.

Правило умножения обыкновенных дробей

1. Перемножают числители данных дробей, записывая это выражение в числитель произведения.

2. Перемножают знаменатели данных дробей, записывая это выражение в знаменатель произведения.

3. Если возможно, то производят сокращение.

4. Выполняют умножение оставшихся множителей в числителе и знаменателе.

5. Если в результате получают неправильную дробь, то из неё выделяют целую часть.

Взаимно обратные числа

Два числа, произведение которых равно 1.

Например, взаимно обратные числа:

$\frac{2}{7}$ и $\frac{7}{2}$, 5 и $\frac{1}{5}$, $2\frac{3}{8}$ и $\frac{8}{19}$.

Правило деления дроби на дробь

1. Знак деления заменить знаком умножения.
2. Делитель заменить на обратное число.
3. Выполнить умножение дробей.

Примеры

1) Вычислите $\frac{6}{7} : \frac{5}{21}$.

Р е ш е н и е.

$$\frac{6}{7} : \frac{5}{21} = \frac{6}{7} \cdot \frac{21}{5} = \frac{6 \cdot 21}{7 \cdot 5} = \frac{6 \cdot 3}{5} = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}.$$

2) Вычислите $2\frac{5}{8} : 1\frac{5}{9}$.

Р е ш е н и е.

$$2\frac{5}{8} : 1\frac{5}{9} = \frac{21}{8} : \frac{14}{9} = \frac{21}{8} \cdot \frac{9}{14} = \frac{21 \cdot 9}{8 \cdot 14} = \frac{3 \cdot 9}{8 \cdot 2} =$$

$$= \frac{27}{16} = 1\frac{11}{16}.$$

3) Вычислите $\frac{5}{7} : 20$.

Р е ш е н и е.

$$\frac{5}{7} : 20 = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{20} = \frac{5}{7 \cdot 20} = \frac{1}{28}.$$

1.2.3. Нахождение части от целого и целого по его части

Нахождение части от целого и целого по его части	
Нахождение части от целого	Чтобы найти часть от числа, выраженную дробью, нужно это число умножить на данную дробь. *Пример* В школе из 200 учеников $\frac{3}{4}$ занимаются спортом. Сколько учеников школы занимаются спортом? Р е ш е н и е. $200 \cdot \frac{3}{4} = \frac{200 \cdot 3}{4} = 150$ учеников.

Нахождение целого по части	Чтобы найти число по его части, выраженной дробью, нужно разделить на эту дробь число, ей соответствующее. *Пример* 150 учеников занимаются спортом, это $\frac{3}{4}$ всех учащихся. Сколько всего учеников в данной школе? Р е ш е н и е. $150 : \frac{3}{4} = \frac{150 \cdot 4}{3} = 200$ учеников.
Нахождение части в долях целого	Чтобы выразить часть в долях целого, надо разделить часть на целое. *Примеры* 1) 150 школьников из 200 учеников данной школы занимаются спортом. Какая часть школьников занимается спортом? Р е ш е н и е. $\frac{150}{200} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ всех школьников. 2) Какую часть составляет 20 от 100? Р е ш е н и е. $\frac{20}{100} = \frac{2}{10} = 0{,}2 = \frac{1}{5}$.

1.2.4. Десятичная дробь, сравнение десятичных дробей

Десятичная дробь — это запись чисел, у которых знаменатели дробной части являются числами, кратными 10, в виде целой части и числителя дробной части, разделённых запятой. При этом числитель дробной части должен иметь столько цифр, сколько нулей в знаменателе.
Недостающие цифры записываются нулями перед числителем.
Если дробь правильная, то перед запятой пишут цифру 0.

Например,

$5\frac{14}{1000} = 5\frac{014}{1000} = 5{,}014;\ \ \frac{3}{100} = \frac{03}{100} = 0{,}03.$

Сравнение десятичных дробей

1 способ

1. Уравнять число знаков после запятой, приписав справа нули.

2. Отбросить запятую, получив натуральное число.

3. Сравнить полученные натуральные числа.

Пример

Сравните 4,032 и 4,07.

Р е ш е н и е.

4,07 = 4,070; 4032 < 4070; значит, 4,032 < 4,07.

2 способ

1. Уравнять число знаков после запятой, приписав справа нули.
2. Сравнить десятичные дроби, начиная со старшего разряда.

Пример
Сравните числа 4,032 и 4,07.

Р е ш е н и е.
$4{,}07 = 4{,}070$; $4{,}032 < 4{,}070$, так как $3 < 7$ в разряде сотен, значит, $4{,}032 < 4{,}07$.

1.2.5. Арифметические действия с десятичными дробями

Сложение и вычитание

1. В числах, участвующих в данном действии, уравнять количество знаков справа от запятой.
2. Записать запятую под запятой, разряд под разрядом.
3. В ответе поставить запятую под запятыми.
4. Выполнить действие, как с натуральными числами.

Примеры
1) $2{,}31 + 53{,}407 = 55{,}717$.

$$\begin{array}{r} 2,31 \\ +\ 53,407 \\ \hline 55,717 \end{array}$$

2) $26{,}04 - 8{,}987 = 26{,}040 - 8{,}987 = 17{,}053$.

$$\begin{array}{r} 26,040 \\ -\ 8,987 \\ \hline 17,053 \end{array}$$

Умножение

1. Записать множители один под другим.
2. Выполнить умножение, как с натуральными числами.
3. Отделить запятой справа от неё столько цифр, сколько было в обоих множителях.

Примеры

1) $4{,}8 \cdot 6{,}3 = 30{,}24$.

$$\begin{array}{r} 4,\ 8 \\ \times\ 6,\ 3 \\ \hline 1\ 4\ 4 \\ +\ 2\ 8\ 8 \\ \hline 3\ 0,\ 2\ 4 \end{array}$$

2) $6{,}005 \cdot 13{,}1 = 78{,}6655$.

$$\begin{array}{r} 6,\ 0\ 0\ 5 \\ \times\ \ 1\ 3,\ 1 \\ \hline 6\ 0\ 0\ 5 \\ +\ 1\ 8\ 0\ 1\ 5 \\ \hline 6\ 0\ 0\ 5 \\ \hline 7\ 8,\ 6\ 6\ 5\ 5 \end{array}$$

Деление

1. Сдвинуть запятую в делителе до конца вправо, чтобы делитель стал натуральным числом.
2. На столько же знаков сдвинуть запятую в делимом.
3. Выполнить деление на натуральное число.

Пример

$6{,}36 : 0{,}006 = 6360 : 6 = 1060$.

$$\begin{array}{r|l} 6\ 3\ 6\ 0 & 6 \\ \hline -\ 6 & 1\ 0\ 6\ 0 \\ \hline \ \ 3 & \\ -\ \ 0 & \\ \hline \ \ 3\ 6 & \\ -\ \ 3\ 6 & \\ \hline \ \ \ \ 0 & \end{array}$$

1.2.6. Представление десятичной дроби в виде обыкновенной дроби

Правило записи десятичной дроби в обыкновенную дробь или смешанное число

1. Целую часть десятичной дроби (слева от запятой) записывают как целую часть смешанного числа.

2. Если целая часть десятичной дроби равна нулю, то обыкновенная дробь будет правильной.

3. Дробную часть десятичной дроби (справа от запятой) записывают в числитель дробной части смешанного числа или в числитель правильной дроби.

4. В знаменатель дробной части смешанного числа или в знаменатель правильной дроби записывают единицу с таким количеством нулей, сколько цифр было в дробной части (справа от запятой) десятичной дроби.

Примеры

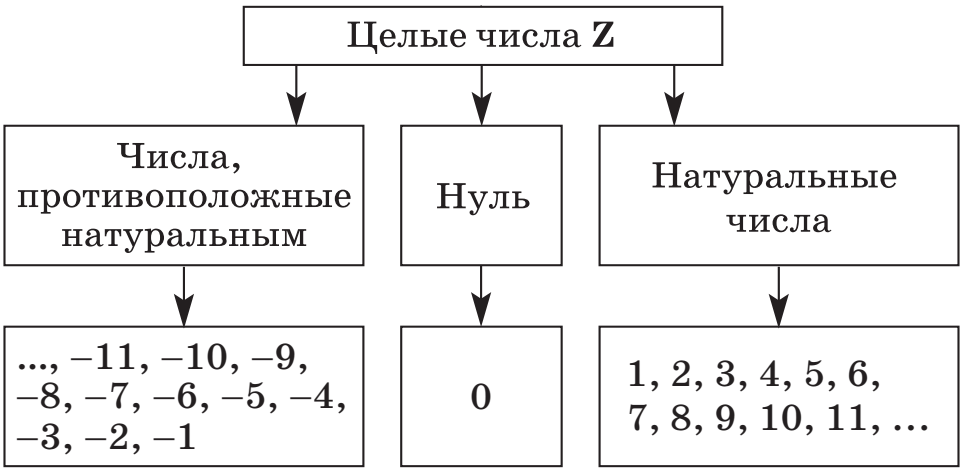
1) $5{,}008 = 5\frac{8}{1000}$;

2) $17{,}03 = 17\frac{3}{100}$;

3) $0{,}3 = \frac{3}{10}$.

1.3. Рациональные числа

1.3.1. Целые числа



Сумма, разность и произведение целых чисел есть число целое.

1.3.2. Модуль (абсолютная величина) числа

Определение модуля числа
$\lvert x \rvert = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$
Геометрический смысл модуля
Модуль числа — это расстояние на координатной прямой от начала отсчёта до точки, обозначающей соответствующее число. Данное расстояние измеряется в единичных отрезках.

Свойства модуля
$\lvert a \rvert \geqslant 0;$
$\lvert -a \rvert = \lvert a \rvert;$
$\lvert a^2 \rvert = \lvert a \rvert^2 = a^2;$
$\lvert ab \rvert = \lvert a \rvert \cdot \lvert b \rvert;$
$\lvert a : b \rvert = \lvert a \rvert : \lvert b \rvert, b \neq 0;$
$\lvert a + b \rvert \leqslant \lvert a \rvert + \lvert b \rvert;$
$\lvert a - b \rvert \geqslant \lvert a \rvert - \lvert b \rvert;$
$a^2 + b^2 \geqslant 2\lvert ab \rvert;$
$\lvert x \rvert = c, c \geqslant 0; x_1 = c, x_2 = -c;$
$\lvert x \rvert < c, c > 0; -c < x < c;$
$\lvert x \rvert > c, c > 0; x < -c, x > c.$

1.3.3. Сравнение рациональных чисел

• Из двух чисел больше то, которое на координатной прямой расположено правее.

• Любое положительное число больше нуля и больше отрицательного числа.
Например, $5 > 0; 7 > -5.$

• Любое отрицательное число меньше нуля.
Например, $-8 < 0.$

• Из двух отрицательных чисел больше то, модуль которого меньше.
Например, $-12 > -15$, так как $\lvert -12 \rvert < \lvert -15 \rvert.$

1.3.4. Арифметические действия с рациональными числами

Сложение

• Чтобы сложить рациональные числа с одинаковыми знаками, надо сложить их модули и перед суммой поставить их общий знак.
Например, $(-4) + (-8) = -12$.

• Чтобы сложить два рациональных числа с разными знаками, надо из большего модуля вычесть меньший и поставить знак числа большего модуля.
Например, $-4 + 8 = 4$, $-8 + 4 = -(8 - 4) = -4$.

• Сумма двух противоположных чисел равна 0.
Например, $-2\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3} = 0$.

Вычитание

Чтобы вычесть одно число из другого, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.
Например, $-6 - (-4{,}2) = -6 + 4{,}2 = -1{,}8$.

Упрощённое правило сложения чисел с разными и одинаковыми знаками

• Знак суммы берётся всегда от числа с бóльшим модулем.

• Если знаки одинаковые, то модули складываем.

• Если знаки разные, то из бóльшего модуля вычитаем меньший.

Например, $-5 + 7 = 7 - 5 = 2$;
7 — бóльший модуль, имеет знак «+».
$-9 - 10 = -(9 + 10) = -19$;
$|-10| = 10$ — бóльший модуль имеет знак «−».

Упрощённое правило умножения и деления чисел с одинаковыми и разными знаками

• Если у чисел одинаковые знаки, то в результате получаем число со знаком «плюс».

• Если знаки разные — «минус».

• Модули перемножаем или делим соответственно.

Примеры

1) $-5{,}2 \cdot 3 = -(5{,}2 \cdot 3) = -15{,}6$.

2) $-6 \cdot (-4) = 6 \cdot 4 = 24$.

3) $24 : (-1{,}2) = -(24 : 1{,}2) = -20$.

4) $-6 : (-4) = 6 : 4 = 1{,}5$.

1.3.5. Степень с целым показателем

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m},\ a \neq 0$$

$$\frac{1}{a^{-m}} = a^m,\ a \neq 0$$

$$a^0 = 1$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m,\ a \neq 0,\ b \neq 0$$

1.3.6. Числовые выражения, порядок действий в них, использование скобок

Числовое выражение — запись, состоящая из чисел и различных действий.
Например, $5 \cdot (7{,}3 - 3)$; $18 + 6 \cdot 8$; $60 : 8$.

Значение числового выражения — число, получаемое в результате выполнения всех действий в числовом выражении.
Например, 9 — значение выражения $18 : 2$; 7 — значение выражения $(2 + 6 \cdot 4 + 2) : 2$.

• Действия первой ступени — сложение и вычитание.
• Действия второй ступени — умножение и деление.
• Действие третьей ступени — степень, частным случаем которой являются квадрат и куб числа.

Правила выполнения действий при нахождении значений выражений

• Если в выражении нет скобок и оно содержит действия только одной ступени, то их выполняют по порядку слева направо.

• Если выражение содержит действия первой, второй, третьей ступени и в нём нет скобок, то сначала выполняют действия третьей ступени, затем второй ступени и, наконец, действия первой ступени.

• Если в выражении есть скобки, то сначала выполняют действия в скобках (учитывая два предыдущих правила).

1.4. Действительные числа

Понятия числа от натурального до действительного

Натуральные числа (**N**)

↓

Целые числа (**Z**) ←
нуль и числа, противоположные натуральным

↓

Рациональные числа (**Q**) ←
дробные числа

↓

Действительные числа (**R**) ←
иррациональные числа

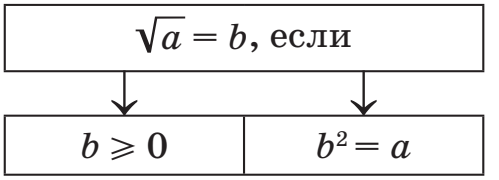
1.4.1. Квадратный корень из числа

Квадратный корень из числа a — число, квадрат которого равен a.
Например, квадратный корень из числа 25 равен -5 и 5, так как $(-5)^2 = 25$ и $5^2 = 25$.

Арифметический квадратный корень из числа a — неотрицательное число, квадрат которого равен a. Знак «$\sqrt{\ }$» — знак арифметического квадратного корня (радикал).

Подкоренное выражение — выражение, стоящее под знаком корня.
Арифметический квадратный корень из числа a обозначается так: $\sqrt{a}$.

Извлечение квадратного корня — нахождение арифметического квадратного корня из числа.
Например, $\sqrt{16} = 4$; $\sqrt{49} = 7$; $\sqrt{1{,}96} = 1{,}4$; $\sqrt{0} = 0$.



• Если $a < 0$, то выражение не имеет смысла, так как квадрат любого числа неотрицателен.

• При $a \geqslant 0$ верно равенство $(\sqrt{a})^2 = a$.

• Выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл при любом $a \geqslant 0$.

1.4.2. Корень третьей степени

Корень третьей степени из числа a — такое число, третья степень которого равна a.
Обозначается: $\sqrt[3]{a}$.

$$(\sqrt[3]{a})^3 = a.$$

1.4.3. Нахождение приближённого значения корня

Находить приближённые значения арифметического квадратного корня можно с помощью постепенного уточнения левой и правой границ.
Например, найдём приближённое значение $\sqrt{2}$ с тремя знаками после запятой.
Р е ш е н и е. $1 < \sqrt{2} < 2$, так как $1 < 2 < 4$. Определим цифру десятых, для этого возведём в квадрат числа 1,1; 1,2; 1,3 и т. д., пока не получим число, большее двух. $1{,}1^2 = 1{,}21$; $1{,}2^2 = 1{,}44$; $1{,}3^2 = 1{,}69$; $1{,}4^2 = 1{,}96$; $1{,}5^2 = 2{,}25$, следовательно,
$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$. Постепенно продолжая этот процесс, получим $\sqrt{2} \approx 1{,}414$.

1.4.4. Запись корней с помощью степени с дробным показателем

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Например, $\sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[5]{39^2} = 39^{\frac{2}{5}}$.

1.4.5. Понятие об иррациональном числе. Десятичные приближения иррациональных чисел. Действительные числа как бесконечные десятичные дроби

Иррациональные числа — числа, которые в десятичной записи представляют собой бесконечные непериодические десятичные дроби.

Иррациональные числа могут быть положительными и отрицательными.

Например, 3,010011000111...; $\sqrt{2} \approx 1{,}4142...$; $\pi \approx 3{,}1415926...$.

1.4.6. Сравнение действительных чисел

Действительные числа, записанные с помощью бесконечных десятичных дробей, сравнивают по тем же правилам, что и конечные десятичные дроби.

Примеры

1) Сравним числа 2,36366... и 2,37011... . В этих положительных бесконечных десятичных дробях совпадают целые части и цифры десятых, а в разряде сотых у первой дроби число единиц меньше, чем у второй. Поэтому $2{,}36366... < 2{,}37011....$

2) Сравним числа 0,253 и –0,149... . Первое из этих чисел положительное, а второе отрицательное. Поэтому $0{,}253 > -0{,}149...$.

1.5. Измерения, приближения, оценки

1.5.1. Единицы измерения

Единицы длины	
Миллиметр	1 мм = 0,1 см = 0,01 дм = 0,001 м
Сантиметр	1 см = 10 мм = 0,1 дм = 0,01 м
Дециметр	1 дм = 100 мм = 10 см = 0,1 м
Метр	1 м = 1000 мм = 100 см = 10 дм = = 0,001 км
Километр	1 км = 1000 м
Единицы площади	
Квадратный миллиметр	1мм^2 = 0,01 см^2 = 0,0001 дм^2
Квадратный сантиметр	1 см^2 = 100 мм^2 = 0,01 дм^2 = = 0,0001 м^2
Квадратный дециметр	1 дм^2 = 10 000 мм^2 = 100 см^2 = = 0,01 м^2
Квадратный метр	1 м^2 = 10 000 см^2 = 100 дм^2 = = 0,01 а = 0,0001 га
Ар	1 а = 100 м^2 = 0,01 га = 0,0001 км^2
Гектар	1 га = 10 000 м^2 = 100 а = = 0,01 км^2
Квадратный километр	1 км^2 = 100 га = 10 000 а

Единицы объёма	
Кубический миллиметр	1 мм^3 = 0,001 см^3 = 0,000001 дм^3
Кубический сантиметр	1 см^3 = 1000 мм^3 = 0,001 дм^3
Кубический дециметр	1 дм^3 = 1000 см^3 = 1 000 000 мм^3 = = 0,001 м^3
Кубический метр	1 м^3 = 1 000 000 см^3 = 1000 дм^3 = = 0,000000001 км^3
Кубический километр	1 км^3 = 1 000 000 000 м^3
Единицы массы	
Грамм	1 г = 1000 мг
Килограмм	1кг = 1000 г
Центнер	1 ц = 100 кг = 0,1 т
Тонна	1 т = 1000 кг = 10 ц

Единицы времени	
Секунда	$1\text{ с} = \frac{1}{60}\text{ мин} = \frac{1}{3600}\text{ ч}$
Минута	$1\text{ мин} = 60\text{ с} = \frac{1}{60}\text{ ч}$
Час	$1\text{ ч} = 60\text{ мин} = 3600\text{ с}$
Сутки	$1\text{ сутки} = 24\text{ ч} = 1440\text{ мин}$
Неделя	$1\text{ нед} = 7\text{ суток}$

1.5.2. Стандартный вид числа

Стандартный вид числа a — запись числа в виде $b \cdot 10^n$, где $1 \leqslant b < 10$ и n — порядок числа a.

Порядок числа показывает, насколько оно велико или мало.

Так, если порядок числа a равен 3, то это означает, что $1000 \leqslant a < 10\,000$; если порядок числа a равен -2, то $0{,}01 \leqslant a < 0{,}1$.

1.5.3. Представление зависимости между величинами в виде формул

Формула — запись какого-либо правила с помощью букв.		
Примеры формул		
Формула пути	$s = vt$	s — путь, v — скорость, t — время
Формула площади прямоугольника	$S = ab$	S — площадь прямоугольника, a — длина, b — ширина прямоугольника
Формула площади квадрата	$S = a^2$	S — площадь квадрата, a — сторона квадрата
Формула объёма прямоугольного параллелепипеда	$V = abc$	V — объём, a — длина, b — ширина, c — высота
Формула объёма куба	$V = a^3$	V — объём, a — длина ребра куба

1.5.4. Проценты. Нахождение процента от величины и величины по её проценту

Процент (%) — сотая часть числа.

$$\frac{1}{100} = 0{,}01 = 1\ \%$$

Нахождение процента от величины	**Нахождение величины по её проценту**
Например, требуется найти 13% от 80. Р е ш е н и е. $0{,}13 \cdot 80 = 10{,}4$.	*Например*, имеем 10,4 — это 13%. Необходимо найти 100 %. Р е ш е н и е. $10{,}4 : 0{,}13 = 80$.

• Если в условии задачи сказано, что число увеличилось (уменьшилось) на r %, то надо прибавить (вычесть) r % к(из) 100 %, то есть получится 100 % + r % (100 % – r %), затем записать результат в виде дроби и умножить на первоначальное число.

Примеры

1) Цена товара 200 руб. Через месяц эта цена выросла на 30 %. Какова новая цена товара?

Р е ш е н и е. 100 % + 30 % = 130 % = 1,3.
$200 \cdot 1{,}3 = 260$ (руб.)
О т в е т: 260 рублей.

2) Первоначальная цена товара 300 руб. Скидка составила 40 %. Найти новую цену.

Р е ш е н и е. 100 % – 40 % = 60 % = 0,6.
$300 \cdot 0{,}6 = 180$ (руб.)
О т в е т: 180 рублей.

1.5.5. Отношение, выражение отношения в процентах

Отношение двух чисел — частное двух чисел.

• Отношение двух чисел показывает, во сколько первое число больше второго или какую часть первое число составляет от второго.

Пример

Отношение числа 12 к числу 4 есть частное $12 : 4 = 3$, значит, 12 больше 4 в 3 раза. Отношение числа $5\frac{1}{4}$ к числу $6\frac{1}{8}$ есть частное $5\frac{1}{4} : 6\frac{1}{8} = \frac{6}{7}$, следовательно, число $5\frac{1}{4}$ составляет $\frac{6}{7}$ от числа $6\frac{1}{8}$.

Отношение величин (отношение длин, отношение масс, отношение площадей и т. д.) — отношение значений этих величин, измеренных одной и той же единицей измерения.

Пример

Известно, что масса ребёнка — 20 кг, а масса взрослого человека 70 кг, тогда отношение масс равно $20 \text{ кг} : 70 \text{ кг} = \frac{20 \text{ кг}}{70 \text{ кг}} = \frac{2}{7}$, т. е. масса ребёнка составляет $\frac{2}{7}$ от массы взрослого человека.

• Отношения часто выражают в процентах.

Пример

В классе 5 отличников из 25 учеников.

$\frac{5}{25} = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\ \%$.

Значит, в этом классе 20 % отличников.

1.5.6. Пропорция. Прямая и обратно пропорциональная зависимости

Пропорция — равенство двух отношений:
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ или $a : b = c : d$, где
a, d — крайние члены пропорции;
b, c — средние члены пропорции.

Основное свойство пропорции

Если $ad = bc$, то $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ верно.

Прямо пропорциональная зависимость

Если при увеличении (или уменьшении) величины m величина n во столько же раз увеличивается (или уменьшается), то m и n прямо пропорциональны.

Примеры прямо пропорциональных величин

- Количество товара и его стоимость при постоянной цене.
- Скорость и длина пути при постоянном времени.
- Длина пути, проходимого равномерно движущимся телом, и время его движения.
- Длина прямоугольника и его площадь при постоянной ширине.
- Объём параллелепипеда и площадь его основания при постоянной высоте.
- Величина дроби и её числитель при постоянном знаменателе.
- Объём выполненной работы и затраченное на неё время при постоянной производительности труда.
- Производительность труда и объём выполненной работы при постоянном времени.

Обратно пропорциональная зависимость

Если при увеличении (при уменьшении) величины m величина n во столько же раз соответственно уменьшается (увеличивается), то эти величины обратно пропорциональны.

Примеры обратно пропорциональных величин

• Количество товара и его цена при одинаковой стоимости покупки.

• Скорость и время движения равномерно движущегося объекта при одинаковой длине пути.

• Производительность труда и время работы при одинаковом объёме работы.

• Число рабочих и время выполнения ими заданной работы при одинаковой производительности труда всех рабочих.

• Величина дроби и её знаменатель при постоянном числителе.

1.5.7. Округление чисел

Округление числа до целых — замена числа ближайшим к нему натуральным числом или нулём.

Округление числа до какого-либо десятичного разряда — замена данного числа ближайшим к нему числом, в котором следующие за этим разрядом цифры заменяют нулями, а если они стоят после запятой, то их отбрасывают.

Правило округления чисел до какого-либо десятичного разряда

1. Заменяют нулями цифры, стоящие правее данного разряда, а если они стоят после запятой, то их отбрасывают.

2. Если цифра в следующем разряде после данного разряда равна 0, 1, 2, 3, 4, то в данном разряде оставляют ту же цифру, которая была.

3. Если цифра в следующем разряде после данного разряда равна 5, 6, 7, 8, 9, то к цифре данного разряда прибавляют единицу.

Примеры

1) Округлим число 3,76 до десятых.

Р е ш е н и е.
В разряде сотых цифра 6, поэтому десятые увеличиваем на 1, остальные разряды обнуляем, а так как нули оказываются после запятой, то отбрасываем их, $3{,}76 \approx 3{,}8$.

2) Округлим число 6324,5 до тысяч.

Р е ш е н и е.
В разряде сотен цифра 3, значит, тысячи оставляем без изменения, остальные разряды обнуляем, а стоящие после запятой отбрасываем, $6324{,}5 \approx 6000$.

3) Округлим 7835 до сотен; до тысяч.

Р е ш е н и е.
$7835 \approx 7800$ — округление до сотен; $7835 \approx 8000$ — округление до тысяч.

2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

2.1. Буквенные выражения (выражения с переменными)

2.1.1. Буквенные выражения. Числовое значение буквенного выражения

Числовые выражения — выражения, составленные из чисел, знаков математических действий и скобок.
Значение выражения с переменными — число, которое получается в результате выполнения действий.
Например, $7 - (6{,}5 + 9)$; $(8 - 6{,}3)^2$ — числовые выражения.

Буквенные выражения (выражения с переменными) — выражения, составленные из чисел, букв, знаков математических действий и скобок.
Например, $(a + b)^2$; $x - 2y + 5z$; $\frac{a - 7c}{5}$ — буквенные выражения.

Значения выражения с переменными — значение числового выражения, полученного, если в выражении с переменными подставить вместо каждой переменной какое-либо её значение.
Примеры
1) Если $a = 4$, $b = 0{,}6$, то $2a + 3b = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 0{,}6 = 8 + 1{,}8 = 9{,}8$.
2) Если $a = -2$, $b = 6$, то $2a + 3b = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 6 = -4 + 18 = 14$.

2.1.2. Допустимые значения переменных, входящих в алгебраические выражения

Допустимые значения переменных — значения, при которых выражение с переменными имеют смысл, т. е. при которых не образуется числовое выражение, содержащее деление на нуль.

Например, выражение $\frac{a}{x-4}$ имеет смысл при любом значении a и при любом x, кроме $x = 4$; выражение $a(a - 4)$ имеет смысл при любом значении a, выражение $\frac{a}{2x+4}$ имеет смысл при $x \neq -2$.

2.1.3. Подстановка выражений вместо переменных

Вместо переменных можно подставлять не только числа, но и выражения. Это применяется при:

↓ ↓

• подстановке выражений в формулы.

Пример

Задана формула $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Если $a = x + 3$, $b = x - 4$, то $(x + 3)^2 - (x - 4)^2 = (x + 3 - x + 4)(x + 3 + x - 4) = 7(2x - 1)$.

• подстановке выражений при решении систем методом подстановки.

Примеры

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ 5(x - y) = 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 8 - x, \\ 5(x - 8 + x) = 6. \end{cases}$$

2.1.4. Равенство буквенных выражений, тождество. Преобразования выражений

Тождество — равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных.

Тождественно равные выражения — два выражения, принимающие равные значения при всех допустимых для них значениях переменных, причём области допустимых значений у них должны совпадать.

Тождественное преобразование выражения — замена одного выражения другим, тождественно равным ему.

2.2. Свойства степени с целым показателем

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m},\ a \neq 0$$

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$$

$$a^n : a^k = a^{n-k}$$

$$(a^n)^k = a^{nk}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\left(\frac{a^n}{b^n}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \text{ где } b \neq 0$$

2.3. Многочлены

2.3.1. Многочлен. Сложение, вычитание, умножение многочленов

Одночлен — выражение, которое может состоять из одного числа, одной переменной, степени переменной, а также любых произведений чисел, переменных и их степеней.

Стандартный вид одночлена — такой вид одночлена, в котором он представлен как произведение числового множителя (который обычно записывают перед остальными множителями слева и называют **коэффициентом одночлена**) и натуральных степеней различных переменных.

Многочлен — выражение, которое представляет собой сумму одночленов, в том числе многочленом считают и один одночлен.

Например, $-ax^2 + bx + 7$; $4x - 8$; $3x$; $a^2 - 2ab + b^2$.

Члены многочлена — одночлены, из которых составлен многочлен.

Например, в многочлене $13x + 0{,}5x^2 - ab$ членами являются $13x$; $0{,}5x^2$; $-ab$.

Многочлен стандартного вида — многочлен, в котором каждый член — одночлен стандартного вида, и многочлен не содержит подобных членов.

Сложение и вычитание многочленов

1. Раскрыть скобки.

2. Привести каждый одночлен к стандартному виду.

3. Привести подобные слагаемые.

Умножение одночлена на многочлен и многочлена на многочлен

• Чтобы умножить одночлен на многочлен, нужно умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

• Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.

2.3.2. Формулы сокращённого умножения: квадрат суммы и квадрат разности, формула разности квадратов

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Примеры

1) $(3 + a)^2 = 9 + 6a + a^2$.

2) $(7 - 5x)^2 = 49 - 70x + 25x^2$.

3) $(4 - 2m)(4 + 2m) = 16 - 4m^2$.

2.3.3. Разложение многочлена на множители

Вынесение общего множителя за скобки

$$mk + mp = m(k + p)$$

Формулы сокращённого умножения

$$m^2 - k^2 = (m - k)(m + k)$$

$$m^2 + 2mk + k^2 = (m + k)^2$$

$$m^2 - 2mk + k^2 = (m - k)^2$$

$$m^3 + k^3 = (m + k)(m^2 - mk + k^2)$$

$$m^3 - k^3 = (m - k)(m^2 + mk + k^2)$$

$$m^3 + 3m^2k + 3mk^2 + k^3 = (m + k)^3$$

$$m^3 - 3m^2k + 3mk^2 - k^3 = (m - k)^3$$

$$m^4 - k^4 = (m^2 - k^2)(m^2 + k^2) = (m - k)(m + k)(m^2 + k^2)$$

Примеры

1) $3xm^3 - 6x^2m^2 = 3xm^2(m - 2x)$.

2) $25x^2 - 36y^2m^4 = (5x - 6ym^2)(5x + 6ym^2)$.

3) $4 + 12x + 9x^2 = (2 + 3x)^2$.

4) $9a^2m^2 - 24am + 16 = (3am - 4)^2$.

5) $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$.

6) $27m^3 - 64 = (3m - 4)(3m^2 + 12m + 16)$.

Метод группировки

$$mk + mp + tk + tp = m(k + p) + t(k + p) = (k + p)(m + t)$$

Пример

$3x - 21 + mx - 7m = 3(x - 7) + m(x - 7) = (x - 7)(3 + m)$.

2.3.4. Квадратный трёхчлен. Теорема Виета. Разложение квадратного трёхчлена на линейные множители

Квадратный трёхчлен
$ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

$ax_1^2 + bx_1 + c = 0,$ $ax_2^2 + bx_2 + c = 0,$ где x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена	**Теорема Виета** $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}, \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}. \end{cases}$
Разложение на множители $ax^2 + bx + c =$ $= a(x - x_1)(x - x_2)$, если x_1 и x_2 существуют	Если $a = 1$, то $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = c, \\ x_1 + x_2 = -b. \end{cases}$

2.3.5. Степень и корень многочлена с одной переменной

Многочлен с одной переменной
$p(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$

n — степень многочлена с одной переменной, записанного в стандартном виде.	$p(x_n) = 0$, где x_n — корень многочлена с одной переменной.

2.4. Алгебраическая дробь

2.4.1. Алгебраическая дробь. Сокращение дробей

Алгебраическая дробь — выражение $\frac{P}{Q}$, где P и Q — многочлены. P — числитель алгебраической дроби; Q — знаменатель алгебраической дроби.

Над алгебраическими дробями можно осуществлять преобразования, аналогичные тем, которые выполняются для обыкновенных дробей (см. п. 1.2.2).

Примеры алгебраических дробей:
$\frac{x+3}{x^2-7}$; $\frac{2x^2-x^3}{x}$; $\frac{7}{-x+1}$.

Сокращение алгебраической дроби на ненулевое рациональное алгебраическое выражение — это деление числителя и знаменателя алгебраической дроби на это выражение.

Пример
$$\frac{x^2+6x}{3x} = \frac{x(x+6)}{3x} = \frac{x+6}{3}.$$

2.4.2. Рациональные выражения и их преобразования

Рациональные выражения

Целые выражения	**Дробные выражения**
Например, $8a^2b$; a^5+b^5; $\frac{3x-y}{2}$.	*Например*, $\frac{2x+y}{4x^2}$; $\frac{ax+by}{2+y}$; $a+\frac{a+3}{b-4}$.

Преобразования рациональных выражений

Преобразование любого рационального выражения сводится к сложению, вычитанию, умножению и делению рациональных дробей с учётом порядка выполнения действий.

Из правил действия с дробями следует, что сумму, разность, произведение и частное рациональных дробей всегда можно представить в виде рациональной дроби. Значит, и всякое рациональное выражение можно представить в виде рациональной дроби.

2.5. Свойства квадратных корней и их применение в вычислениях

Квадратный корень из числа a — число, квадрат которого равен a.

Свойства квадратных корней

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, b > 0$	$(\sqrt{a})^2 = a$ $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$

Примеры

1) $\sqrt{36} = 6$;
2) $\sqrt{0{,}64} = 0{,}8$;
3) $\sqrt{49} \cdot \sqrt{16} = 7 \cdot 8 = 28$;
4) $\sqrt{36} \cdot \sqrt{0{,}36} = 6 \cdot 0{,}6 = 3{,}6$;
5) $\sqrt{75 \cdot 48} = \sqrt{25 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 16} = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$;
6) $\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}} = \frac{5}{8}$;
7) $\sqrt{(-21)^2} = \lvert -21 \rvert = 21$.

3. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

3.1. Уравнения

3.1.1. Уравнение с одной переменной, корень уравнения

Уравнение с одной переменной (уравнение с одной неизвестной) — равенство, содержащее переменную.

Корень уравнения — значение переменной, при котором уравнение обращается в верное равенство.

Решить уравнение — найти все его корни или доказать, что корней нет.

Правила решения уравнений

• Если любое слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом знак слагаемого, то корни уравнения не изменятся.

• Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, то корни уравнения не изменятся.

3.1.2. Линейное уравнение

Линейные уравнения — целые уравнения вида $ax + b = 0$, где x — переменная, a и b — некоторые числа.

Решение линейных уравнений

- Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $x = -\frac{b}{a}$;
- если $a \neq 0$, $b = 0$, то $x = 0$;
- если $a = 0$, $b \neq 0$, то корней нет;
- если $a = 0$, $b = 0$, то x — любое число.

Алгоритм решения уравнений

Слагаемые, содержащие переменную, перенести в левую часть уравнения, при этом меняя знаки на противоположные.

↓

Числа перенести в правую часть уравнения, при этом меняя знаки на противоположные.

↓

Привести подобные слагаемые в левой части.

↓

Привести подобные слагаемые в правой части.

↓

Разделить число правой части на коэффициент при переменной.

↓

Записать ответ.

3.1.3. Квадратное уравнение, формула корней квадратного уравнения

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

Неполные квадратные уравнения

• при $c = 0$, $b \neq 0$	• при $c = 0$, $b = 0$	• при $c \neq 0$, $b = 0$
$ax^2 + bx = 0$ $x(ax + b) = 0$ $x = 0$ или $x = -\frac{b}{a}$	$ax^2 = 0$ $x^2 = 0$ $x = 0$	$ax^2 + c = 0$ $x^2 = -\frac{c}{a}$ $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ если $-\frac{c}{a} < 0$, то корней нет

Вычисление дискриминанта и корней квадратного уравнения

- $D = b^2 - 4ac$, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
- Если b — чётное, то $D_1 = k^2 - ac$, $k = \frac{b}{2}$,

  $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$

Теорема Виета

$ax^2 + bx + c = 0$ $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$	$x^2 + bx + c = 0$ ($a = 1$) — **приведённое квадратное уравнение** $x_1 \cdot x_2 = c$ $x_1 + x_2 = -b$

Решение неприведённого квадратного уравнения по теореме Виета

$ax^2 + bx + c = 0 \to m^2 + bm + ac = 0$

$D = b^2 - 4ac$, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, $m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2}$, $x_{1,2} = \frac{m_{1,2}}{a}$,

находим $m_{1,2}$ по теореме Виета.

Пример

Решите уравнение: $3x^2 - 14x + 16 = 0$.

1) Р е ш е н и е.

$D = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16 = 196 - 192 = 4 > 0 \to$

$\to$ 2 корня.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{14 + \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{14 + 2}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{6} = 2\frac{2}{3}.$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{14 - \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{14 - 2}{6} = \frac{12}{6} = 2.$$

О т в е т: $x_1 = 2\frac{2}{3}$, $x_2 = 2$.

2) $b = 14$ — чётное, $k = \frac{b}{2}$.

Р е ш е н и е.

$D = k^2 - ac = 7^2 - 3 \cdot 16 = 49 - 48 = 1$.

$$x_1 = \frac{-k + \sqrt{D_1}}{a} = \frac{7 + 1}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

$$x_2 = \frac{-k - \sqrt{D_1}}{a} = \frac{7 - 1}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

О т в е т: $x_1 = 2\frac{2}{3}$, $x_2 = 2$.

3) Р е ш е н и е. Применяя теорему Виета, перепишем данное уравнение в виде $m^2 + bm + ac = 0$, $a = 1 \rightarrow$ $\rightarrow m^2 - 14m + 3 \cdot 16 = 0$, $m^2 - 14m + 48 = 0$.

$x_1 = \frac{m_1}{3}$, $x_2 = \frac{m_2}{3}$, m_1 и m_2 находим подбором:

$m_1 \cdot m_2 = c$, $m_1 + m_2 = -b \rightarrow 8 \cdot 6 = 48$, $8 + 6 = 14$.

$x_1 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{6}{3} = 2$. Теперь проверяем корни:

$\frac{8}{3} \cdot 2 = \frac{16}{3} = \frac{c}{a}$, $\frac{8}{3} + \frac{6}{3} = \frac{14}{3} = -\frac{b}{a}$.

3.1.4. Решение рациональных уравнений

Рациональные уравнения — уравнения, левая и правая части которых являются рациональными выражениями.

Алгоритм решения рациональных уравнений

Разделить левую и правую части уравнения на общий делитель, если таковой имеется.

↓

Разложить на множители многочлены в знаменателях, если они раскладываются.

↓

Домножить на наименьший общий знаменатель левую и правую части уравнения.

↓

Решить полученное целое уравнение.

↓

Проверить корни уравнения, не превращают ли они знаменатель первоначального уравнения в нуль. Если да, то исключить такие корни.

↓

Записать ответ.

Примеры

1) $\dfrac{x-3}{x-5} = 2^{\backslash x-5} \mid (x-5) \neq 0,\ x \neq 5.$

$x - 3 = 2x - 10,\ x = 7.$

О т в е т: 7.

2) $\dfrac{4^{\backslash x-4}}{x-9} + \dfrac{9^{\backslash x-9}}{x-4} = 2^{\backslash x^2-13x+36} \mid \begin{array}{l}(x-9)(x-4) \neq 0,\\ x \neq 9,\ x \neq 4.\end{array}$

$\underline{4x} - 16 + \underline{9x} - 81 = 2x^2 - \underline{26x} + 72,$
$2x^2 - 39x + 72 + 97 = 0,$
$2x^2 - 39x + 169 = 0.$

$x_1 = \dfrac{13}{2},\ x_1 = 6{,}5;\ x_2 = \dfrac{26}{2},\ x_2 = 13.$

О т в е т: 6,5; 13.

3) $\dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{2^{\backslash x-1}}{x-1} - 3^{\backslash x^2-2x+1} = 0 \mid (x-1)^2 \neq 0,\ x \neq 1.$

$1 + \underline{2x} - 2 - 3x^2 + \underline{6x} - 3 = 0,$
$3x^2 - 8x + 4 = 0.$
$x_1 = \dfrac{2}{3};\ x_2 = \dfrac{6}{3},\ x_2 = 2.$

4) $\dfrac{60}{x+10} + 3 = \dfrac{60}{x} \mid :3$

$\dfrac{20^{\backslash x}}{x+10} + 1^{\backslash x^2+10x} = \dfrac{20^{\backslash x+10}}{x} \mid \begin{array}{l}x(x+10) \neq 0,\ x \neq 0,\\ x \neq -10.\end{array}$

$20x + x^2 + 10x = 20x + 200,$
$x^2 + 10x - 200 = 0,$
$x_1 = -20,\ x_2 = 10.$

О т в е т: −20; 10.

3.1.5. Примеры решения уравнений высших степеней. Решение уравнений методом замены переменной. Решение уравнений методом разложения на множители

Решение уравнений высших степеней методом замены переменной

Примеры

Биквадратное уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$

1) Решите уравнение: $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$.

Р е ш е н и е.

Сделаем замену переменной.

Пусть $x^2 = t$, тогда $t^2 + 2t - 8 = 0$.

Отсюда $t_1 = -4$, $t_2 = 2$.

Возвращаемся к замене, получаем:

$x^2 = -4$ (не подходит) или $x^2 = 2 \to x = \pm\sqrt{2}$.

О т в е т: $x = \pm\sqrt{2}$.

2) Решите уравнение: $(x + 1)^4 + 5(x + 1)^2 - 6 = 0$.

Р е ш е н и е.

Сделаем замену переменной.

Пусть $(x + 1)^2 = t$, тогда $t^2 + 5t - 6 = 0$.

Отсюда $t_1 = 1$, $t_2 = -6$.

Возвращаемся к замене, получаем:

$(x + 1)^2 = 1$ или $(x + 1)^2 = -6$ (не подходит).

$x + 1 = -1 \to x = -2$ или $x + 1 = 1 \to x = 0$.

О т в е т: -2; 0.

Решение уравнений высших степеней методом разложения на множители

Примеры

1) Решите уравнение: $x^3 + 4x^2 - 9x - 36 = 0$.

Р е ш е н и е.

$x^2(x + 4) - 9(x + 4) = 0$, $(x + 4)(x^2 - 9) = 0$,
$(x + 4)(x - 3)(x + 3) = 0$, $x + 4 = 0 \to x = -4$ или
$x - 3 = 0 \to x = 3$ или $x + 3 = 0 \to x = -3$.

О т в е т: -4; 3; -3.

2) Решите уравнение:
$(2x - 6)^2(x - 6) = (2x - 6)(x - 6)^2$.

Р е ш е н и е.

$(2x - 6)^2(x - 6) - (2x - 6)(x - 6)^2 = 0$,
$(2x - 6)(x - 6)(2x - 6 - x + 6) = 0$,
$(2x - 6)(x - 6)x = 0$,
$2x - 6 = 0 \to x = 3$ или $x - 6 = 0 \to x = 6$ или $x = 0$.

О т в е т: 0; 3; 6.

3.1.6. Уравнение с двумя переменными; решение уравнения с двумя переменными

Уравнение с двумя переменными — равенство, содержащее две переменные.

Например, $xy = 7$; $y + x = -0{,}4$; $y^2 - x^2 = 4 + 6x$.

Линейное уравнение с двумя переменными — уравнение вида $ax + by = c$, где x и y — переменные, а a, b и c — некоторые числа.

Например, $5x + 4y = 1{,}8$; $\frac{1}{6}x - 8y = 2\frac{5}{9}$; $x + y = 0$.

Решение уравнения с двумя переменными — пара значений переменных, которая обращает данное уравнение в верное равенство.

Пример
Для уравнения $2x + y = 6$ некоторыми решениями являются пары чисел: $x = 3$, $y = 0$; $x = 10$, $y = -14$; $x = 0$, $y = 6$; а пары чисел $x = 3$, $y = 2$; $x = 5$, $y = 7$ не будут решениями этого уравнения.

График уравнения с двумя переменными — множество всех точек координатной плоскости, абсциссы и ординаты которых являются решениями этого уравнения.

3.1.7. Система уравнений; решение системы

Система уравнений — некоторое количество уравнений, объединённых фигурной скобкой. Фигурная скобка означает, что все уравнения должны выполняться одновременно относительно нескольких переменных.

Пример

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3, \\ 3x + y + 2z = 8, \\ 2x + 3y + z = 6. \end{cases}$$

Решение системы уравнений — значения переменных, обращающие каждое уравнение системы в верное равенство.
Решить систему уравнений — значит найти все её решения или установить, что их нет.

3.1.8. Система двух линейных уравнений с двумя переменными; решение подстановкой и алгебраическим способом

Система линейных уравнений с двумя переменными — система вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2; \end{cases}$$

где a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 — некоторые числа, x и y — переменные.

Например,

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ 15x - 6y = 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 8. \end{cases}$$

Решение системы уравнений с двумя переменными — пара значений переменных, которая обращает каждое уравнение системы в верное равенство.

Способы решения систем линейных уравнений

I. Графический способ	II. Способ подстановки	III. Способ сложения

I. Графический способ решения системы уравнений

Графический способ состоит в том, что в одной координатной плоскости строят два графика, каждый из которых соответствует одному из уравнений. Координаты точки пересечения этих графиков удовлетворяют и первому, и второму уравнению, т. е. являются решением системы.

Решения системы линейных уравнений с двумя переменными (в каждом уравнении хотя бы один из коэффициентов не равен нулю) графическим способом

• Если графики уравнений (прямые) пересекаются, то система имеет единственное решение, равное координатам точки пересечения;

• если графики уравнений (прямые) параллельны, то система не имеет решений;

• если графики уравнений (прямые) совпадают, то система имеет бесконечно много решений.

II. Способ подстановки для решения систем линейных уравнений с двумя переменными

1. Выражают одну переменную через другую в одном из уравнений системы.

2. Полученное выражение подставляют в другое уравнение системы вместо выраженной переменной.

3. Решают уравнение, получившееся в результате подстановки.

4. Полученное значение переменной подставляют в первое уравнение и находят значение оставшейся переменной.

Примеры

1) Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 3. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Выразим переменную x через y из второго уравнения $x = y + 3$. Подставим в первое уравнение вместо переменной x выражение $y + 3$.

Решим полученное уравнение с переменной y:
$(y + 3) + y = 7;$
$y + 3 + y = 7;$
$2y = 7 - 3;\ 2y = 4;$
$y = \frac{4}{2};\ y = 2.$

Подставим в уравнение $x = y + 3$ вместо y число 2.
$x = 2 + 3;\ x = 5.$

О т в е т: (5; 2).

2) Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9, \\ 3x - 6y = 10. \end{cases}$$

Р е ш е н и е.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9, \\ 3x - 6y = 10; \end{cases}$$

$2x + 3y = 9;\ 3y = 9 - 2x;$

$y = \frac{9 - 2x}{3};\ 3x - 6 \cdot \frac{9 - 2x}{3} = 10;$

$3x - 2 \cdot (9 - 2x) = 10;$

$3x - 18 + 4x = 10;$

$7x = 28;$

$x = \frac{28}{7};\ x = 4;\ y = \frac{9 - 2 \cdot 4}{3};\ y = \frac{1}{3}.$

О т в е т: $\left(4;\ \frac{1}{3}\right)$.

III. Способ сложения для решения систем линейных уравнений с двумя переменными

1. Уравнения системы почленно умножают на некоторые множители, которые подбирают таким образом, чтобы коэффициенты при одной из переменных в обоих уравнениях стали противоположными числами.

2. Левые и правые части уравнений почленно складывают.

3. Находят значение одной из переменных, решая получившееся уравнение с одной переменной.

4. Находят значение второй переменной, подставляя в оставшееся уравнение значение первой переменной.

Примеры

1) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 6. \end{cases}$

Р е ш е н и е.

Коэффициенты при переменной y в первом и втором уравнениях — противоположные числа -1 и 1. Поэтому складываем почленно уравнения и получаем уравнение с одной переменной:

$2x = 11;\ x = \frac{11}{2};\ x = 5{,}5.$

Найдём вторую переменную:

$x + y = 5;$

$5{,}5 + y = 5;\ y = 5 - 5{,}5;\ y = -0{,}5.$

О т в е т: $(5{,}5;\ -0{,}5)$.

2) $\begin{cases} 12x - 5y = 1, \\ 6x + y = 4. \end{cases}$

Р е ш е н и е.
Домножим второе уравнение на -2, чтобы коэффициенты при переменной x были противоположными числами 12 и -12.

$\begin{cases} 12x - 5y = 1, \\ -2 \cdot 6x - 2 \cdot y = -2 \cdot 4; \end{cases}$

$\begin{cases} 12x - 5y = 1, \\ -12x - 2y = -8. \end{cases}$

Складываем почленно оба уравнения. Получаем:
$-7y = -7$; $y = 1$; $6x + 1 = 4$; $6x = 4 - 1$; $6x = 3$;
$x = \frac{3}{6}$; $x = \frac{1}{2}$.

О т в е т: $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

3.2. Неравенства

3.2.1. Числовые неравенства и их свойства

Числовые неравенства — соотношения вида $a > b$ и $a < b$.

Число a **больше** числа b, если разность $(a - b)$ — положительное число.

Число a **меньше** числа b, если разность $(a - b)$ — отрицательное число.

Свойства числовых неравенств		
1.	$a > b$	$b < a$
2.	$a > b$ и $b > c$	$a > c$
3.	$a > b$, c — любое число	$a + c > b + c$
4.	$a > b$ и $c > 0$	$ac > bc$
5.	$a > b$ и $c < 0$	$ac < bc$
6.	$a > b$ и $c > d$	$a + c > b + d$
7.	$a > b$ и $c > d$ $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$	$ac > bd$
8.	$a > b > 0$, n — натуральное число	$a^n > b^n$
9.	$a > b$, $a > 0$, $b > 0$	$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

Использование свойств числовых неравенств

Примеры

1) Оцените периметр и площадь прямоугольника со сторонами a и b, где $1{,}7 < a < 1{,}8$ и $2{,}3 < b < 2{,}4$.

Р е ш е н и е. Периметр $P = 2(a + b)$.

$$+\begin{array}{l} 1{,}7 < a < 1{,}8 \\ 2{,}3 < b < 2{,}4 \end{array}$$

$$1{,}7 + 2{,}3 < a + b < 1{,}8 + 2{,}4$$
$$4 < a + b < 4{,}2$$
$$2 \cdot 4 < 2(a + b) < 2 \cdot 4{,}2$$
$$8 < P < 8{,}4$$

Площадь $S = ab$.

$$\times \begin{matrix} 1{,}7 < a < 1{,}8 \\ 2{,}3 < b < 2{,}4 \end{matrix}$$

$$1{,}7 \cdot 2{,}3 < ab < 1{,}8 \cdot 2{,}4$$
$$3{,}91 < S < 4{,}32$$

2) Оцените $-\frac{1}{a}$, где $2 < a < 4$.

Р е ш е н и е. $\frac{1}{4} < \frac{1}{a} < \frac{1}{2} \to -\frac{1}{4} > -\frac{1}{a} > -\frac{1}{2} \to$

$\to -\frac{1}{2} < -\frac{1}{a} < -\frac{1}{4}$.

3.2.2. Неравенство с одной переменной. Решение неравенства

Решение неравенства с одной переменной — значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.

Решить неравенство — значит найти все его решения или доказать, что решений нет.

Равносильные неравенства — неравенства, имеющие одни и те же решения и не имеющие других решений.

Свойства неравенств

• Если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится равносильное ему неравенство.

• Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится равносильное ему неравенство.

• Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получится равносильное ему неравенство.

3.2.3. Линейное неравенство с одной переменной

Линейные неравенства с одной переменной — неравенства вида $ax > b$ (или $ax < b$, $ax \geqslant b$, $ax \leqslant b$), а также равносильные им неравенства, где a и b — некоторые числа.

Решение неравенства $ax > b$

• Если $a > 0$, то $x > \frac{b}{a}$;

• если $a < 0$, то $x < \frac{b}{a}$;

• если $a = 0$ и $b > 0$, то нет решений;

• если $a = 0$ и $b < 0$, то x — любое число.

3.2.4. Системы линейных неравенств

Решение системы неравенств с одной переменной — значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы.
Решить систему — значит найти все её решения или доказать, что решений нет.

Примеры

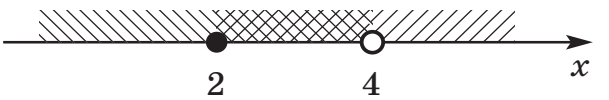
1) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 7x - 5 \geqslant 9, \\ 2x < 8. \end{cases}$$

Р е ш е н и е.

$$\begin{cases} 7x - 5 \geqslant 9, \\ 2x < 8; \end{cases} \quad \begin{cases} 7x \geqslant 14, \\ 2x < 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x < 4. \end{cases}$$

Отметим на координатной прямой числовые промежутки. Ответом служит их пересечение.



О т в е т: $[2; 4)$.

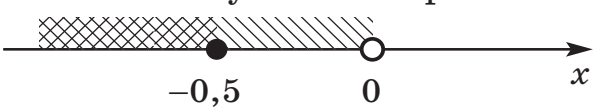
2) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 2 - 10x \geqslant 7, \\ 3x + 4 \leqslant 4. \end{cases}$$

Р е ш е н и е.

$$\begin{cases} 2 - 10x \geqslant 7, \\ 3x + 4 \leqslant 4; \end{cases} \quad \begin{cases} -10x \geqslant 5, \\ 3x \leqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leqslant -0{,}5, \\ x \leqslant 0. \end{cases}$$

Отметим на координатной прямой числовые промежутки. Ответом служит их пересечение.



О т в е т: $(-\infty; -0{,}5]$.

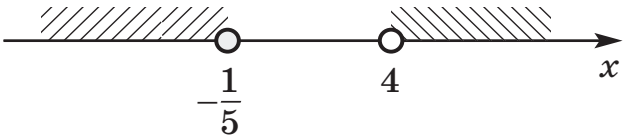
3) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 3x + 7 > 19, \\ 2 - 5x > 3. \end{cases}$$

Р е ш е н и е.

$$\begin{cases} 3x + 7 > 19, \\ 2 - 5x > 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x > 12, \\ -5x > 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 4, \\ x < -\frac{1}{5}. \end{cases}$$

Отметим на координатной прямой числовые промежутки. Пересечений нет, значит, система не имеет решений.



О т в е т: нет решений.

4) Решить неравенство: $-6 < 3x - 5 < 8$.

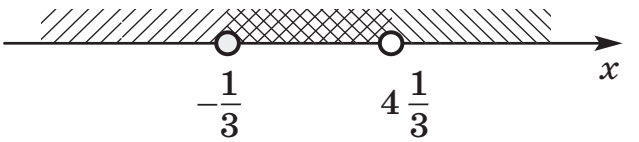
Р е ш е н и е.

1 способ.

Данное двойное неравенство $-6 < 3x - 5 < 8$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 3x - 5 > -6, \\ 3x - 5 < 8; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x > 5 - 6, \\ 3x < 8 + 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x > -1, \\ 3x < 13; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -\frac{1}{3}, \\ x < 4\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Отметим на координатной прямой числовые промежутки. Ответом служит их пересечение.



О т в е т: $x \in \left(-\frac{1}{3}; 4\frac{1}{3}\right)$.

2 способ.
Данное двойное неравенство можно решить, не преобразуя его в систему неравенств.

$-6 < 3x - 5 < 8; -6 + 5 < 3x < 8 + 5; -1 < 3x < 13;$

$-\frac{1}{3} < x < \frac{13}{3}; -\frac{1}{3} < x < 4\frac{1}{3}.$

Ответ: $\left(-\frac{1}{3}; 4\frac{1}{3}\right)$.

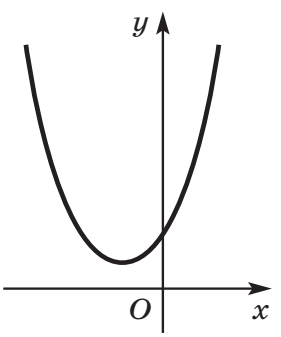
3.2.5. Квадратные неравенства

Неравенство второй степени с одной переменной — неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$ (или $ax^2 + bx + c \geqslant 0$), $ax^2 + bx + c < 0$ (или $ax^2 + bx + c \leqslant 0$), где $a \neq 0$.

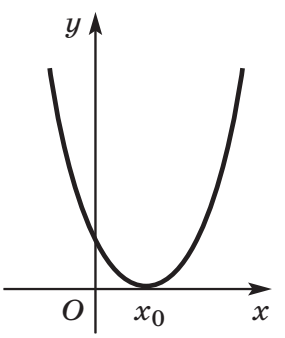
Схема решения квадратных неравенств

1. Находят дискриминант квадратного трёхчлена $D = b^2 - 4ac$ и выясняют, имеет ли этот трёхчлен корни.
2. Если корней нет, то схематически изображают параболу (при $a > 0$ она лежит в верхней полуплоскости, а её ветви направлены вверх; при $a < 0$ — в нижней полуплоскости, а её ветви направлены вниз). Если же корни есть, то их отмечают на оси абсцисс и через отмеченные точки схематически проводят параболу, у которой ветви направлены вверх при $a > 0$ или вниз при $a < 0$.
3. Находят промежутки оси абсцисс, на которых точки параболы расположены выше этой оси (при решении неравенства $ax^2 + bx + c > 0$) или ниже этой оси (при решении неравенства $ax^2 + bx + c < 0$).

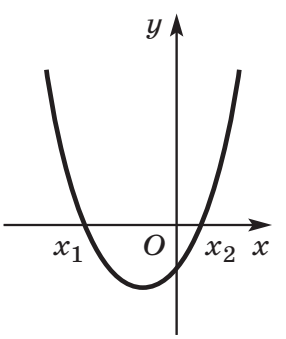
Решение квадратного неравенства при $a > 0$			
$ax^2 + bx + c > 0$	$D < 0$	$x \in (-\infty; +\infty)$	Рис. *а*)
	$D = 0$	$x \in (-\infty; x_0) \cup \cup (x_0; +\infty)$	Рис. *б*)
	$D > 0$	$x \in (-\infty; x_1) \cup \cup (x_2; +\infty)$	Рис. *в*)
$ax^2 + bx + c \geqslant 0$	$D < 0$	$x \in (-\infty; +\infty)$	Рис. *а*)
	$D = 0$	$x \in (-\infty; +\infty)$	Рис. *б*)
	$D > 0$	$x \in (-\infty; x_1] \cup \cup [x_2; +\infty)$	Рис. *в*)
$ax^2 + bx + c < 0$	$D < 0$	Нет решений	Рис. *а*)
	$D = 0$	Нет решений	Рис. *б*)
	$D > 0$	$x \in (x_1; x_2)$	Рис. *в*)
$ax^2 + bx + c \leqslant 0$	$D < 0$	Нет решений	Рис. *а*)
	$D = 0$	$x = x_0$	Рис. *б*)
	$D > 0$	$x \in [x_1; x_2]$	Рис. *в*)



а)

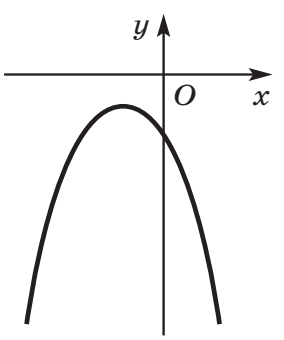


б)

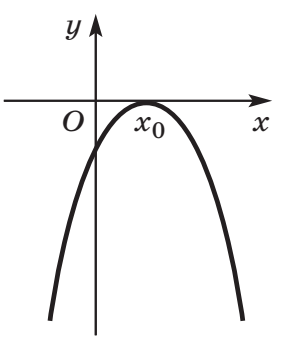


в)

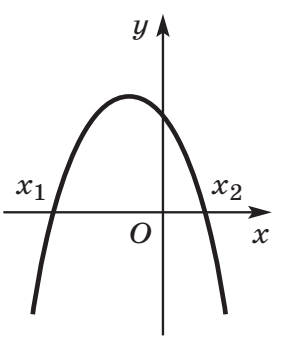
Решение квадратного неравенства при $a < 0$			
$ax^2 + bx + c > 0$	$D < 0$	Нет решений	Рис. *а*)
	$D = 0$	Нет решений	Рис. *б*)
	$D > 0$	$x \in (x_1; x_2)$	Рис. *в*)
$ax^2 + bx + c \geqslant 0$	$D < 0$	Нет решений	Рис. *а*)
	$D = 0$	$x = x_0$	Рис. *б*)
	$D > 0$	$x \in [x_1; x_2]$	Рис. *в*)
$ax^2 + bx + c < 0$	$D < 0$	$x \in (-\infty; +\infty)$	Рис. *а*)
	$D = 0$	$x \in (-\infty; x_0) \cup \cup (x_0; +\infty)$	Рис. *б*)
	$D > 0$	$x \in (-\infty; x_1) \cup \cup (x_2; +\infty)$	Рис. *в*)
$ax^2 + bx + c \leqslant 0$	$D < 0$	$x \in (-\infty; +\infty)$	Рис. *а*)
	$D = 0$	$x \in (-\infty; +\infty)$	Рис. *б*)
	$D > 0$	$x \in (-\infty; x_1] \cup \cup [x_2; +\infty)$	Рис. *в*)



а)



б)



в)

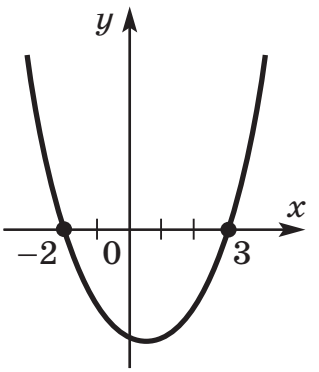
Примеры

1) Решить неравенство $x^2 - x - 6 > 0$.

Р е ш е н и е. $x^2 - x - 6 = 0$; $D = 1 + 24 = 25$; $D > 0$;

$x_1 = \frac{1+5}{2}$; $x_1 = 3$; $x_2 = \frac{1-5}{2}$; $x_2 = -2$.

На рисунке изображена парабола $y = x^2 - x - 6$, пересекающая ось абсцисс при $x_1 = 3$; $x_2 = -2$. Эта парабола лежит выше оси абсцисс в промежутках $x \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

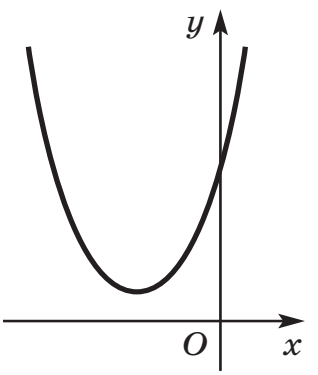


О т в е т: $x \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

2) Решить неравенство $x^2 + 5x + 7 > 0$.

Р е ш е н и е. $x^2 + 5x + 7 = 0$; $D = 25 - 28 = -3$.

Так как $D < 0$, то парабола $y = x^2 + 5x + 7$ лежит выше оси абсцисс при любых значениях x.



О т в е т: $x \in (-\infty; +\infty)$.

3.3. Текстовые задачи

3.3.1. Решение текстовых задач арифметическим способом

Решение текстовых задач по действиям

↓

Решение задачи по действиям

↓

Краткое условие

↓

Действие и его результат

↓

Единицы измерения и пояснения

↓

Ответ

Примеры

1) Между городами A и B расстояние 600 км. Из города A в город B выехал мотоциклист со скоростью 50 км/ч, на два часа позже из города B в город A выехал автомобилист со скоростью 75 км/ч. На каком расстоянии от города B встретятся мотоциклист и автомобилист?

Р е ш е н и е.

Скорость v мот. — 50 км/ч;

скорость v авт. — 75 км/ч.

1. $50 \cdot 2 = 100$ (км) — мотоциклист проехал за 2 часа;

2. $600 - 100 = 500$ (км) — расстояние между мотоциклистом и автомобилистом в момент начала движения;

3. $50 + 75 = 125$ (км/ч) — скорость сближения автомобилиста и мотоциклиста;
4. $500 : 125 = 4$ (ч) — время до встречи;
5. $75 \times 4 = 300$ (км) — расстояние от пункта B до места встречи.

О т в е т: 300 км.

2) Две трубы заполняют бассейн за 1 ч 12 мин. Одна вторая труба заполняет бассейн за 3 ч. За сколько часов заполнит бассейн одна первая труба?

Р е ш е н и е.
Первая труба — ? ч,
вторая труба — за 3 ч,
две трубы — за 1 ч 12 мин. } 1 бассейн

$1 \text{ ч } 12 \text{ мин} = 1 \text{ ч} + \frac{12}{60} \text{ ч} = 1\frac{1}{5} \text{ ч} = \frac{6}{5} \text{ ч}.$

1) $1 : 3 = \frac{1}{3}$ (басс/ч) — вторая труба заполняет за час;

2) $1 : \frac{6}{5} = \frac{5}{6}$ (басс/ч) — первая и вторая труба вместе за час;

3) $\frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{5-2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (басс/ч) первая труба за час;

4) $1 : \frac{1}{2} = 2$ (ч) — время работы первой трубы.

О т в е т: 2 ч.

3) Мимо пешехода, идущего вдоль железнодорожных путей со скоростью 4 км/ч, в том же направлении проезжает поезд со скоростью 64 км/ч. Длина поезда — 500 м. За сколько секунд поезд проедет мимо пешехода?

Р е ш е н и е:
v пешехода — 4 км/ч;
v поезда — 64 км/ч.
1) 64 – 4 = 60 (км/ч) — скорость поезда относительно пешехода;
2) 60 км/ч = 1 км/мин = 1000 м/мин;
3) $500 : 1000 = \frac{500}{1000} = \frac{1}{2}$ (мин) = 30 (с) — время движения поезда мимо пешехода.
О т в е т: 30 с.

3.3.2. Решение текстовых задач алгебраическим способом

Решение текстовых задач алгебраическим способом — это решение задач с помощью уравнений и систем уравнений.

Алгоритм решения

1. Составить таблицу:
а) в одной из колонок таблицы обозначить одну величину переменной, например, x;
б) в другую колоноку таблицы вписать известную величину из условия;
в) с помощью уже заполненных двух колонок таблицы получить выражение с переменной и записать его в свободную колонку.
2. С помощью выражений из таблицы составить уравнение.
3. Решить уравнение.
4. Записать в ответ числа, соответствующие вопросу задачи.

Примеры

1) Теплоход прошёл 30 км против течения реки, затем 40 км по течению. Общее время движения составило 5 часов. Скорость течения реки равна 5 км/ч.

Найдите скорость теплохода в неподвижной воде.

Р е ш е н и е. Пусть x км/ч — скорость теплохода в неподвижной воде.

	Скорость	**Время**	**Расстояние**
I (против течения)	$(x-5)$ км/ч	$\frac{30}{x-5}$ ч	30 км
II (по течению)	$(x+5)$ км/ч	$\frac{40}{x+5}$ ч	40 км

$$\frac{30}{x-5}+\frac{40}{x+5}=5 \quad |:5$$

$$\frac{6^{\backslash x+5}}{x-5}+\frac{8^{\backslash x-5}}{x+5}=1^{\backslash x^2-25} \quad |\cdot (x-5)(x+5)\neq 0,\ x\neq -5,\ x\neq 5.$$

$$\underline{6x}+30+\underline{8x}-40=x^2-25;$$

$$x^2-14x-15=0;$$

$$x_1=-1,\ x_2=15.$$

О т в е т: 15 км/ч.

2) Одна первая труба заполняет бассейн за 2 ч, а одна вторая труба — за 3 ч.

Найдите, за сколько часов заполняют бассейн обе трубы одновременно.

Р е ш е н и е.

	Производительность	**Время**	**Работа**
I (одна первая труба)	$\frac{1}{2}$ б/ч	2 ч	1 б
II (одна вторая труба)	$\frac{1}{3}$ б/ч	3 ч	1 б
I + II (обе трубы)	$\frac{1}{x}$ б/ч	x ч	1 б

$$\frac{1}{2}^{\backslash 3x} + \frac{1}{3}^{\backslash 2x} = \frac{1}{x}^{\backslash 6} \quad | \cdot 6x$$

$3x + 2x = 6$; $5x = 6$; $x = \frac{6}{5}$; $x = 1{,}2$.

О т в е т: 1,2 часа.

Текстовые задачи на среднее значение

1. Средняя скорость.
2. Средняя стоимость.
3. Концентрация раствора.
4. Процентное содержание сплава.
5. Средняя оценка и т. п.

Сходство этих задач состоит в том, что суммируются величины во второй и третьей колонках.

Важно, что значения во второй и третьей колонках не принципиальны для среднего значения первой колонки, их можно заменять на пропорциональные числа.

Примеры

Возьмём задачи с разными условиями, но с одинаковой таблицей, уравнением и ответом.

1. Велосипедист ехал 2 мин со скоростью 0,3 км/мин и 3 мин со скоростью 0,5 км/мин.
Найдите среднюю скорость велосипедиста.

2. Купили 2 шт. товара по цене 0,3 руб. и 3 шт. другого товара по цене 0,5 руб.
Найдите среднюю цену этих товаров.

3*. В одном сосуде — 2 кг раствора кислоты 30 % концентрации, а в другом — 3 кг кислоты 50 % концентрации. Растворы смешали и получили новый раствор.
Найдите его концентрацию.

4*. Имеются два сплава с разным содержанием меди: в первом содержится 2 кг (30 %) сплава, а во втором — 3 кг (50 %) сплава меди. Из этих двух сплавов получили третий сплав.
Найдите процентное содержание меди в третьем сплаве.

5. Ученик получил две оценки по 0,3 балла и 3 оценки по 0,5 баллов.
Найдите среднюю оценку ученика.

---

* Проценты для таблицы переводим в десятичные дроби, а в ответе, наоборот, переводим десятичные дроби в проценты.

Например, 30 % = 0,30 = 0,3, а 0,42 = 42 %.

Р е ш е н и е.

	A	**B**	**C**
I	0,3	2	0,6
II	0,5	3	1,5
IIIср	x	5	$5x$
	Скорость Цена Концентрация Процентное содержание Оценки	Время Количество Масса раствора Масса сплава Количество оценок	Путь Стоимость Масса вещества Масса вещества Сумма оценок

Составим уравнение: $5x = 1{,}5 + 0{,}6$; $5x = 2{,}1$;
$x = \frac{2{,}1}{5} = \frac{4{,}2}{10} = 0{,}42$.

О т в е т: 0,42.

• Если в колонке **B** одинаковые числа, то IIIср находят как среднее арифметическое I и II, например, I $= m$, II $= n$, тогда IIIср $= \frac{m+n}{2}$.

• Если в колонке **C** одинаковые числа, то IIIср находят как среднее гармоническое, например, I $= m$, II $= n$, тогда IIIср $= \frac{2mn}{m+n}$. Такой результат получают из уравнения $\frac{2}{x} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$.

4. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

4.1 Понятие последовательности

4.1.1. Понятие последовательности

Числовая последовательность — зависимость, ставящая в соответствие каждому натуральному числу некоторое действительное число.
Обозначение: a_1, a_2, a_3, ..., a_n и т. д.
Члены последовательности — числа, образующие последовательность.
Формула n-го члена — один из способов задания последовательности.
Рекуррентная формула — формула, с помощью которой любой член последовательности, начиная с некоторого, выражается через предыдущие члены.

Виды последовательностей

Бесконечная		Конечная	
Содержит бесконечно много членов	*Пример* 1; 3; 5; 7; 9 и т. д. Нечётные числа	Конечное число членов	*Пример* последовательность трёхзначных чисел: 100; 101; 102; ...; 998; 999

4.2. Арифметическая и геометрическая прогрессии

4.2.1. Арифметическая прогрессия

Определение	Каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d (разность прогрессии): $a_{n+1} = a_n + d$ $d = a_{n-1} - a_n$
Формула n-го члена через a_1	$a_n = a_1 + d(n-1)$
Формула n-го члена через a_m	$a_n = a_m + d(n-m)$, $n > m$
Формула суммы n первых членов (через первый член и n-й)	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$
Формула суммы n первых членов (через первый член и разность)	$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$
Характеристическое свойство	$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

4.2.2. Геометрическая прогрессия

Определение	Каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q (знаменатель прогрессии): $b_{n+1} = b_n \cdot q$ $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$
Формула n-го члена через b_1	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Формула n-го члена через b_m	$b_n = b_m \cdot q^{n-m}$, $n > m$
Формула суммы n первых членов (через первый член и n-й)	$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$
Формула суммы n первых членов (через первый член и знаменатель)	$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$
Характеристическое свойство	$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$
Сумма бесконечной геометрической прогрессии	$S = \frac{b_1}{1 - q}$, $\lvert q \rvert < 1$

4.2.3. Сложные проценты

Сложный процент — это процент, начисленный на процент.

↓

Формула сложных процентов:

$$A = A_0(1 + 0{,}01r)^n$$

где A_0 — начальная сумма, A — конечная сумма, r % — процентная ставка, n — число периодов.

↓

Для удобства вычислений сложных процентов выражение $1 + 0{,}01r$ часто заменяют на переменную k, т. е. $k = 1 + 0{,}01r$.

Пример

Известно, что сумма вклада равна 5000 руб.; процентная ставка — 10 %; вклад оформлен на 3 года.

Какая сумма будет на счету в конце срока?

Р е ш е н и е.

Из условия следует, что $A_0 = 5000$, $r = 10\ \% = 0{,}1$.

Отсюда, $k = 1{,}1$; $n = 3$.

$A = A_0k^n$;

$A = 5000 \cdot 1{,}1^3 = 5000 \cdot 1{,}331 = 6655$.

О т в е т: 6655.

5. ФУНКЦИИ

5.1. Числовые функции

5.1.1. Понятие функции. Область определения функции. Способы задания функции

Функция (функциональная зависимость) — зависимость одной переменной (зависимой) от другой (независимой), при которой каждому значению независимой переменной соответствует единственное значение зависимой переменной.		
Аргумент	→	Независимая переменная.
Функция от аргумента	→	Зависимая переменная.
Значения аргумента	→	Значения независимой переменной.
Значения функции	→	Значения зависимой переменной.
Область определения функции	→	Все значения, которые принимает аргумент (независимая переменная).
Область значений функции	→	Все значения, которые принимает функция (зависимая переменная).

Способы задания функции			
↓	↓	↓	↓
графиком	формулой	таблицей	описанием

• Если функция задана формулой и не указана её область определения, то считается, что область определения функции состоит из всех значений аргумента, при которых данная формула имеет смысл.

• Если же функция описывает реальный процесс, то её область определения зависит от конкретных условий.

Например, зависимость площади квадрата от длины его стороны, выраженная формулой $S = a^2$, справедлива только для положительных значений длины стороны, хотя сама эта формула верна для любых значений аргумента.

5.1.2. График функции, возрастание и убывание, наибольшее и наименьшее значения функции, нули функции, промежутки знакопостоянства

График функции	→	Множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.
Возрастающая в некотором промежутке функция	→	Функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.

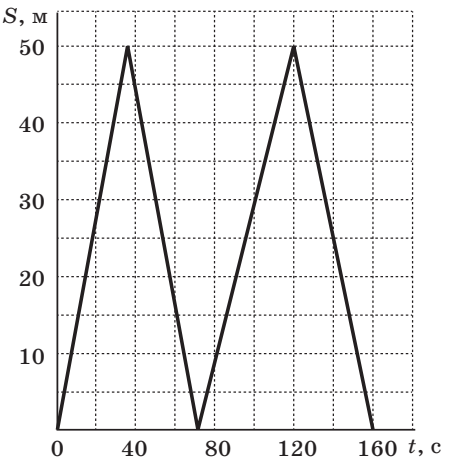
Убывающая в некотором промежутке функция	→	Функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.
Нули функции	→	Значение аргумента, при котором значение функции равно нулю.
Промежутки знакопостоянства функции	→	Такие множества значений аргумента, на которых значения функции только положительны или только отрицательны.

5.1.3. Пример графических зависимостей, отражающих реальные процессы

Графический способ — один из самых удобных и наглядных способов представления и анализа информации.

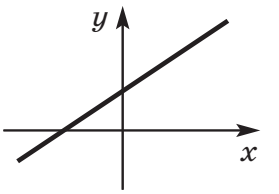
Пример

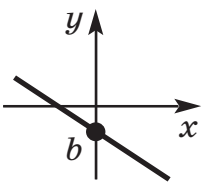
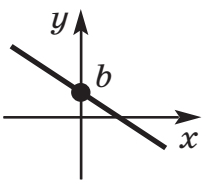
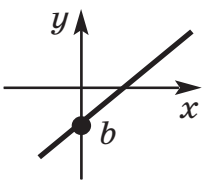
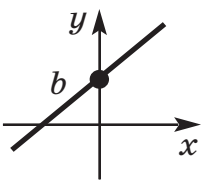
На рисунке изображён график зависимости расстояния S (в метрах) между пловцом и точкой старта от времени t (в секундах) движения пловца в 50-метровом бассейне на 200 метровой дистанции.



5.1.4. Линейная функция, её график, геометрический смысл коэффициентов

Линейная функция $y = kx + b$

Область значения $k \neq 0 \rightarrow$ $\rightarrow y \in (-\infty; +\infty)$; $k = 0 \rightarrow y = b$	График — прямая 	Область определения $x \in (-\infty; +\infty)$

$k < 0, b < 0$	$k < 0, b > 0$	$k > 0, b < 0$	$k > 0, b > 0$
			
Убывает $k < 0$	Убывает $k < 0$	Возрастает $k > 0$	Возрастает $k > 0$

Частные случаи линейной функции

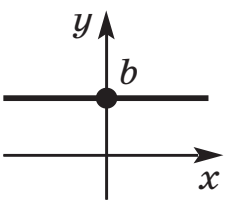
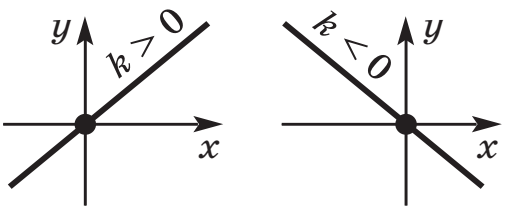
$k = 0$ Постоянная функция $y = b$ 	$k \neq 0, b = 0$ Прямая пропорциональность $y = kx$ 

График — прямая, симметричная относительно начала координат

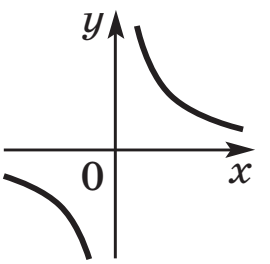
5.1.5. Функция, описывающая обратно пропорциональную зависимость, её график. Гипербола

Функция — обратная пропорциональность

$$y = \frac{k}{x},\ k \neq 0.$$

Область значений $y \neq 0$

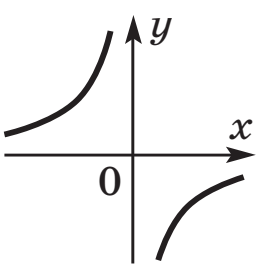
График — **гипербола.**



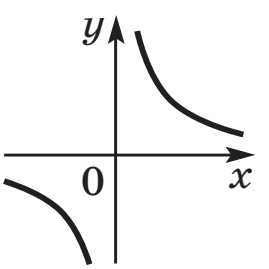
Кривая, ветви которой симметричны относительно начала координат $y(-x) = -y(x)$

Область определения $x \neq 0$

$k < 0$



$k > 0$



5.1.6. Квадратичная функция, её график. Парабола. Координаты вершины параболы, ось симметрии

Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

Область значений

$a > 0 \rightarrow$

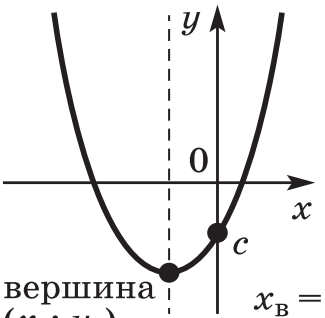
$\rightarrow [y_в; +\infty)$;

$a < 0 \rightarrow$

$\rightarrow (-\infty; y_в]$

$y_в$ — значение функции в вершине параболы

График — **парабола** — кривая, симметричная относительно вертикальной прямой, проходящей через её вершину.

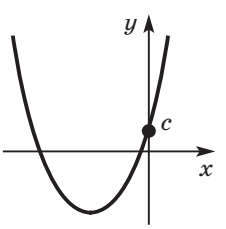
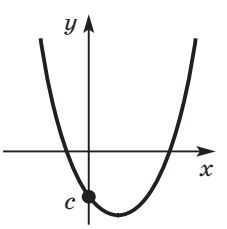
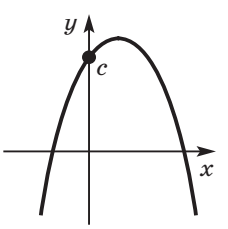
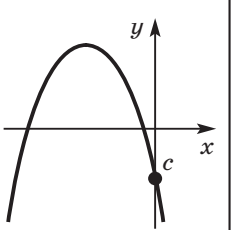


вершина $(x_в; y_в)$

$x_в = -\frac{b}{2a}$

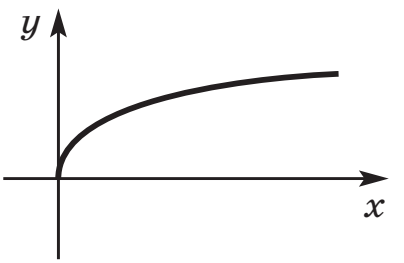
Область определения

$x \in (-\infty; +\infty)$

$a > 0, c > 0$	$a > 0, c < 0$	$a < 0, c > 0$	$a < 0, c < 0$
ветви параболы направлены вверх	ветви параболы направлены вверх	ветви параболы направлены вниз	ветви параболы направлены вниз
			

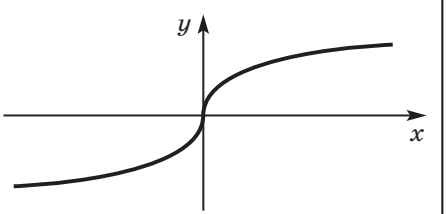
5.1.7. График функции $y = \sqrt{x}$

Функция $y = \sqrt{x}$

Область значений $y \geqslant 0$	График — ветвь параболы 	Область определения $x \geqslant 0$

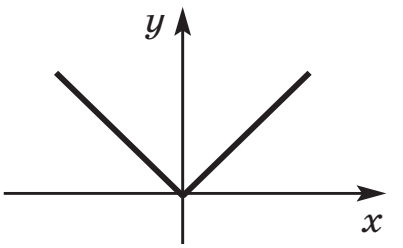
5.1.8. График функции $y = \sqrt[3]{x}$

Функция $y = \sqrt[3]{x}$

Область значений $y \in (-\infty; +\infty)$	График 	Область определения $x \in (-\infty; +\infty)$

5.1.9. График $y = |x|$

Функция $y = |x|$

Область значений $y \geqslant 0$	График 	Область определения $x \in (-\infty; +\infty)$

5.1.10. Использование графиков функций для решения уравнений и систем

Чтобы решить графически уравнение вида $f(x) = g(x)$, нужно построить графики функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ и найти абсциссы точек пересечения этих графиков.

Алгоритм решения уравнения с помощью графиков

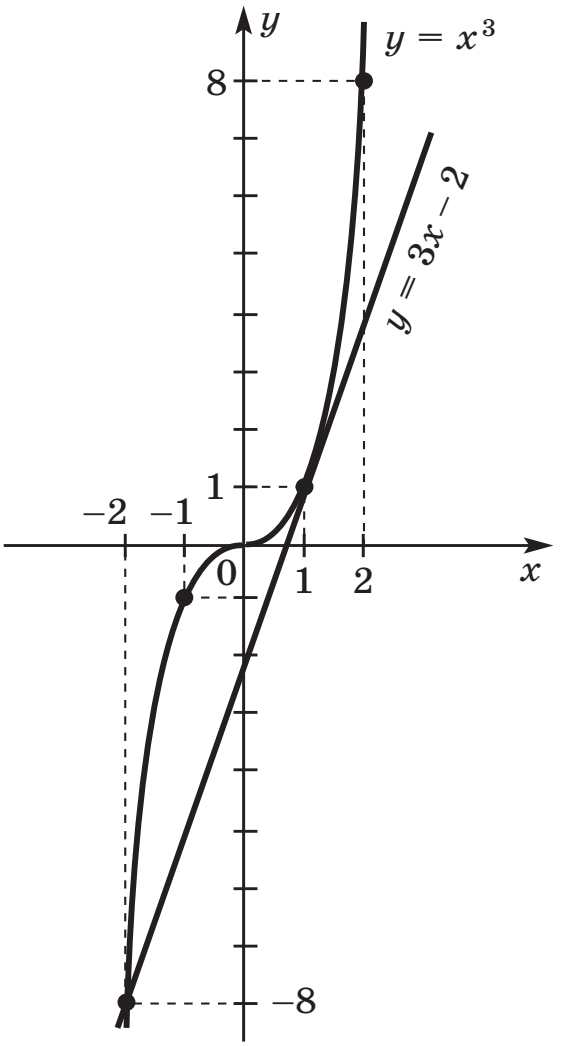
1. Записывают уравнение в удобном для построения графиков виде $f(x) = g(x)$.
2. Строят графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ в одной системе координат.
3. Если существуют точки пересечения графиков, то абсциссы этих точек и будут корнями данного уравнения.
4. Если точек пересечения нет, то уравнение не имеет корней.

Пример

Решите графически уравнение $x^3 - 3x + 2 = 0$.

Р е ш е н и е.

Запишем уравнение в виде $x^3 = 3x - 2$ и построим в одной системе координат графики функций $y = x^3$ (кубическую параболу) и $y = 3x - 2$ (прямую). Видно, что абсциссами точек пересечения являются $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$.

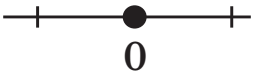
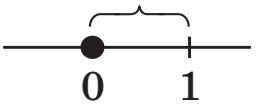


6. КООРДИНАТЫ НА ПРЯМОЙ И В ПЛОСКОСТИ

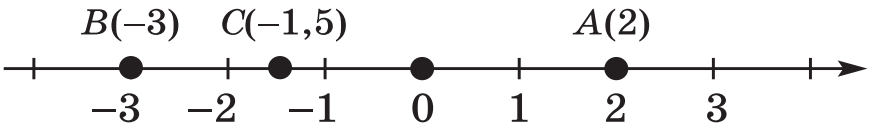
6.1. Координатная прямая

6.1.1. Изображение чисел точками координатной прямой

Координатная прямая

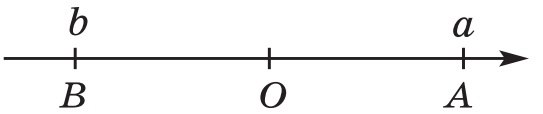
Начало отсчёта	Единичный отрезок	Положительное направление
		

Пример



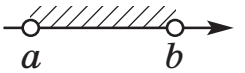
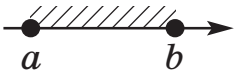
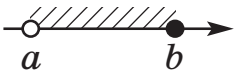
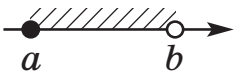
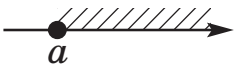
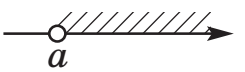
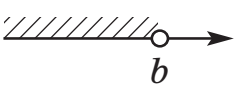
$A(2)$ — точка A с координатой 2; $B(-3)$ — точка B с координатой -3; $C(-1{,}5)$ — точка C с координатой $-1{,}5$.

6.1.2. Геометрический смысл модуля



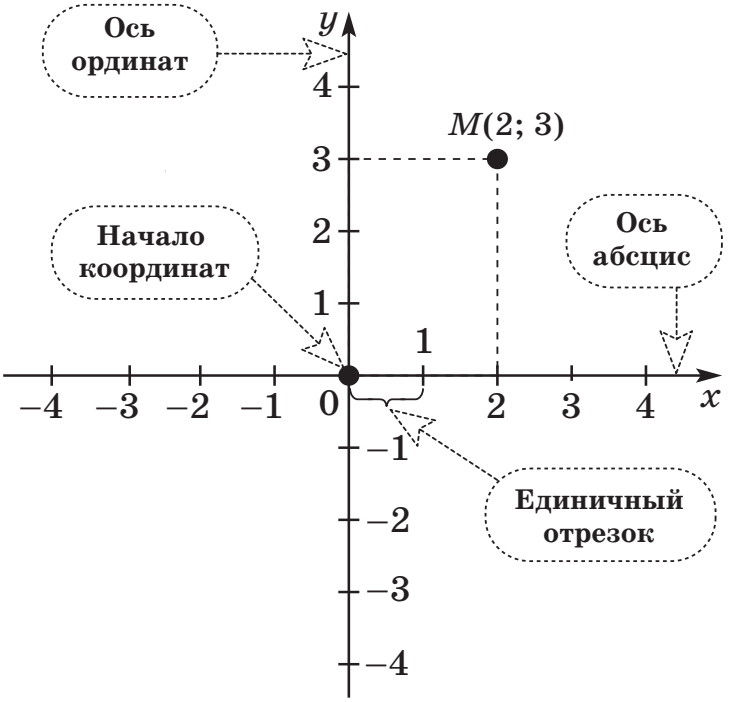
$|a| = OA; |b| = OB; |a - b| = AB$

6.1.3. Числовые промежутки: интервал, отрезок, луч

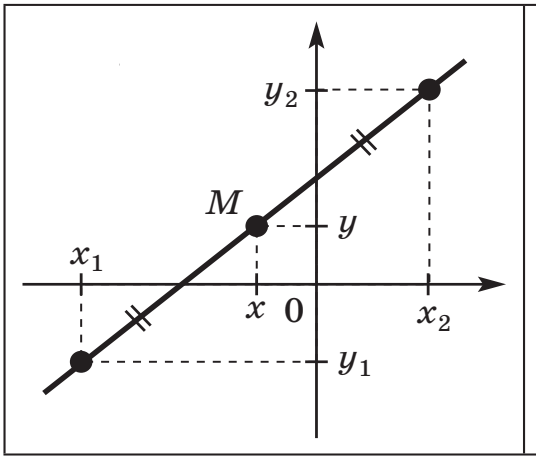
Вид промежутка	Геометрическое изображение	Обозначение	Запись с помощью неравенств
Интервал		$(a; b)$	$a < x < b$
Отрезок		$[a; b]$	$a \leqslant x \leqslant b$
Полуинтервал		$(a; b]$	$a < x \leqslant b$
Полуинтервал		$[a; b)$	$a \leqslant x < b$
Луч		$[a; +\infty)$	$x \geqslant a$
Луч		$(-\infty; b]$	$x \leqslant b$
Открытый луч		$(a; +\infty)$	$x > a$
Открытый луч		$(-\infty; b)$	$x < b$

6.2. Декартовы координаты на плоскости

6.2.1. Декартовы координаты на плоскости; координаты точки



6.2.2. Координаты середины отрезка



$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

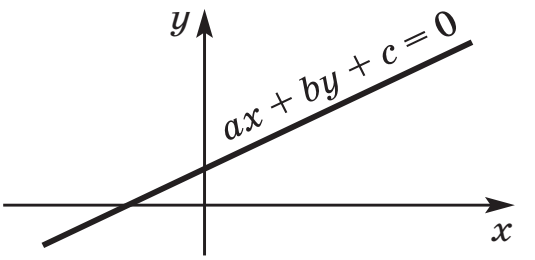
$M(x;\ y)$ — середина отрезка AB.

6.2.3. Формула расстояния между двумя точками плоскости

$$d = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

6.2.4. Уравнение прямой, угловой коэффициент прямой, условие параллельности прямых

Уравнение прямой в декартовых координатах



$ax + by + c = 0$, где x и y — переменные; a, b, c — некоторые числа; a и b одновременно не равны нулю

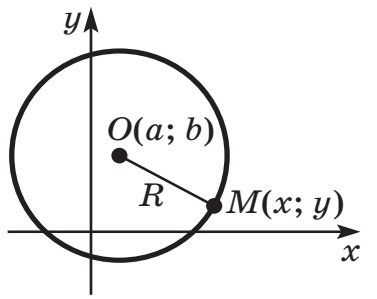
Угловой коэффициент прямой $k = -\frac{a}{b}$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом $y = kx + m$; $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$.

Параллельные прямые имеют одинаковые коэффициенты k или пропорциональные коэффициенты a и b.

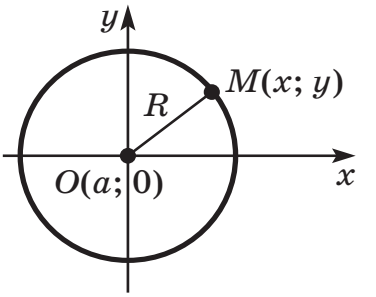
6.2.5. Уравнение окружности

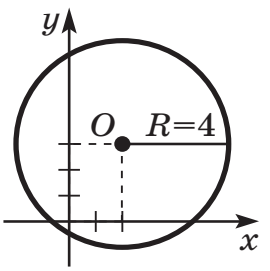
Уравнение окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$



$O(a; b)$ — центр окружности; $M(x; y)$ — точка на окружности; R — радиус окружности

$x^2+y^2=R^2$ — окружность с центром в начале координат





Пример

На рисунке представлена окружность с центром $O(2; 3)$ и радиусом $R=4$.

6.2.6. Графическая интерпретация уравнений с двумя переменными и их систем

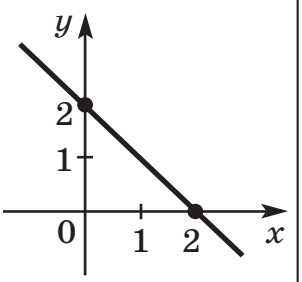
Уравнение с двумя переменными — уравнение, которое можно привести к виду $f(x; y)=0$.

Например, $3x-5y=16$; $xy=2$; $x^2+y^2=25$.

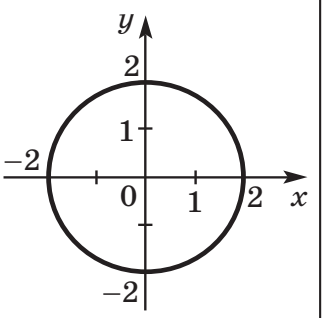
График уравнения с двумя переменными — множество всех точек координатной плоскости, абсциссы и ординаты которых являются решениями этого уравнения.

Примеры

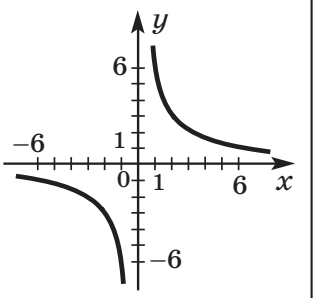
$x + y = 2$



$x^2 + y^2 = 4$



$xy = 6$



Система двух уравнений с двумя переменными — система, которую можно записать в виде:

$$\begin{cases} f(x; y) = 0, \\ g(x; y) = 0. \end{cases}$$

Решение системы двух уравнений с двумя переменными — пара значений x_0 и y_0, подстановка которых соответственно вместо x и y обращает оба уравнения системы в верное равенство.

Алгоритм графического решения систем уравнений

1. Построить графики уравнений в одной системе координат.

2. Найти координаты точек пересечения графиков или убедиться в том, что они не пересекаются.

3. Записать ответ.

7. СТАТИСТИКА И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

Элементы статистики

Среднее арифметическое нескольких чисел — частное от деления суммы этих чисел на число слагаемых.

Например, найдём среднее арифметическое чисел: 21, 46, 50.
(21 + 46 + 50) : 3 = 39.

Медиана нескольких чисел — число, стоящее посередине данных чисел, выписанных в порядке возрастания.
Если количество чисел чётное, то медианой будет среднее арифметическое двух чисел, стоящих посередине.

Например:

1) Найдём медиану чисел: 5, 3, 2, 5, 4. Р е ш е н и е: Запишем эти числа по возрастанию: 2, 3, 4, 5, 5. Медиана равна 4. О т в е т: 4.

2) Найдём медиану чисел: 3, 4, 4, 5, 5, 5.
Р е ш е н и е: (4 + 5) : 2 = 4,5. О т в е т: 4,5.

Размах нескольких чисел — разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел.

Мода нескольких чисел — число, которое встречается чаще других.

Теория вероятности — математическая наука, изучающая закономерности случайных событий и случайных величин при массовом их появлении.

Опыт (испытание) — действие, которое можно повторять большое число раз в одинаковых условиях и результат которого нельзя предугадать заранее.

Основные формулы комбинаторики	
Факториал	$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$
Число перестановок из n элементов	$P_n = A_n^n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$
Число перестановок с повторениями из n элементов, из которых k — одинаковые	$\overline{P}_n(k) = \frac{n!}{k!}$
Число перестановок с повторениями из n элементов, из которых k_1, k_2, ..., k_m — одинаковые	$\overline{P}_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!, k_2!, \ldots, k_m!}$
Число размещений из n элементов по k элементов	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \times \times (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$
Число размещений с повторениями из n элементов по k элементов	$\overline{A_n^k} = n^k$
Число сочетаний из n элементов по k элементов	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$

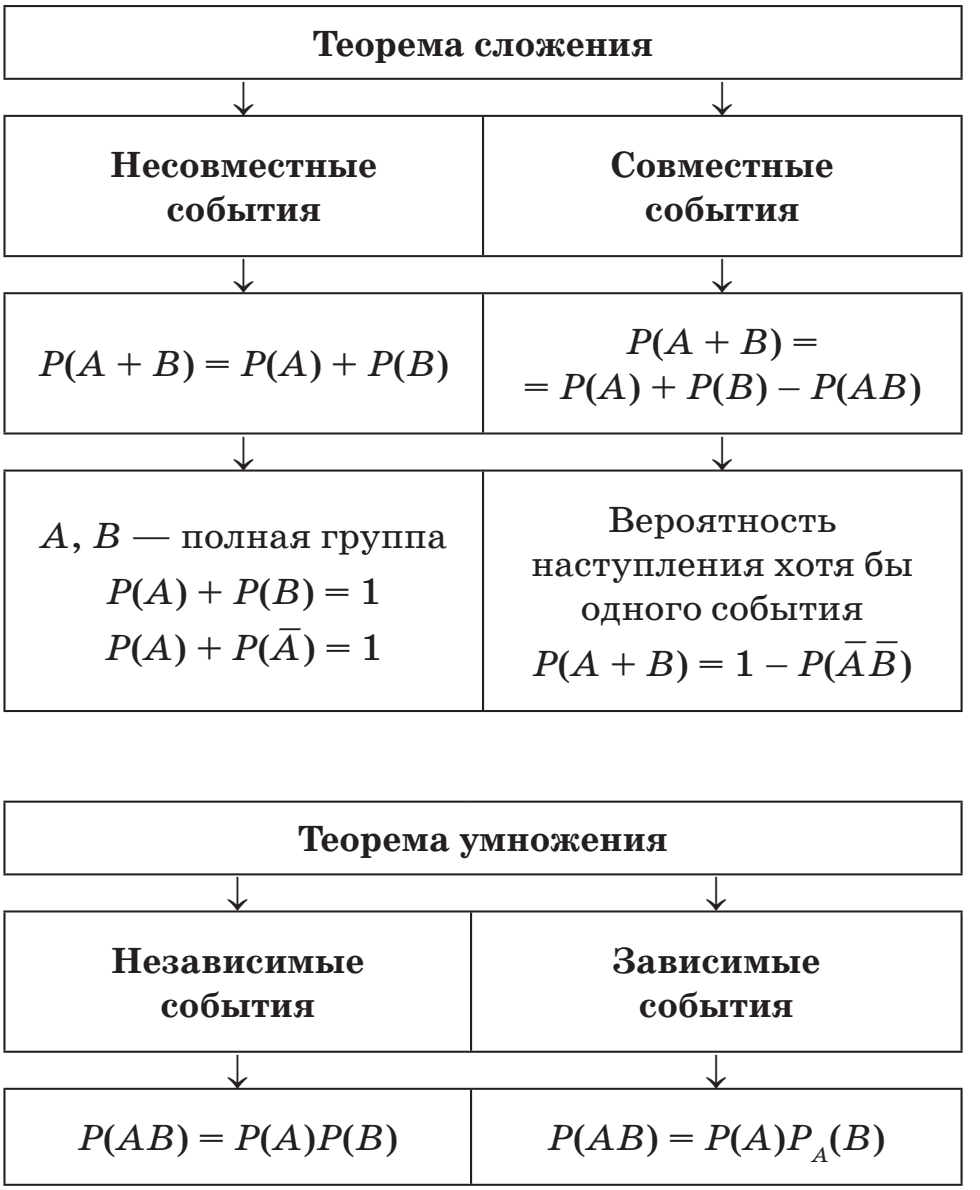
Число сочетаний с повторениями из n элементов по k элементов	$\overline{C_n^k} = C_{(k+n-1)}^k$
Формула, связывающая размещения, сочетания и перестановки	$A_n^k = C_n^k \cdot P_k$

События

Случайные	**Достоверные**	**Невозможные**
Может произойти, а может и не произойти в данном опыте	Обязательно произойдёт в данном опыте	Не может произойти в данном опыте
$0 < P(A) < 1$	$P(A) = 1$	$P(A) = 0$

Относительная частота случайного события в серии испытаний — отношение числа испытаний, в которых наступило это событие, к числу всех испытаний.

Классическая вероятность — вероятность события в испытании с равновозможными исходами, которая равна отношению благоприятного количества исходов для данного события к числу всех равновозможных исходов.



$P_A(B)$ — условная вероятность, т. е. вероятность события B, вычисленная при условии, что событие A уже произошло.

Повторные независимые испытания

Формула Бернулли

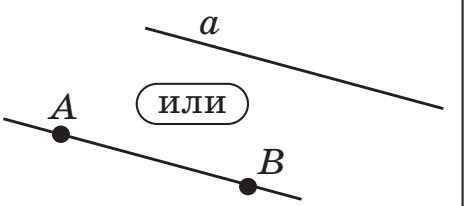
$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где C_n^k — число сочетаний,
p — вероятность успеха,
q — вероятность неудачи,
n — число независимых испытаний,
k — количество выпавших событий,
$q = 1 - p$,
n, k — достаточно малы.

8. ГЕОМЕТРИЯ

8.1. Геометрические фигуры и их свойства. Измерение геометрических величин

8.1.1. Начальные понятия геометрии

Основные геометрические фигуры на плоскости	
Точка	Прямая
	

Взаимное расположение точки и прямой
$A \in a$  прямая a проходит через точку A $A \notin a$  прямая a не проходит через точку A

Аксиомы — исходные положения какой-либо теории, принимаемые в рамках данной теории истинными без доказательства.

Теоремы — положения теории, требующие доказательства.

Аксиомы взаимного расположения точек и прямых

• Каждой прямой принадлежат по крайней мере две точки.

• Имеются по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

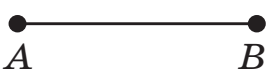
• Через любые две точки проходит прямая, и при том только одна.

Луч — одна из двух частей прямой, на которые прямую делят лежащие на ней точки.



На рисунке — луч AB и луч AC; точка A — начало лучей AB и AC.

Отрезок — часть прямой, лежащая между двумя точками этой прямой. Эти точки называются концами отрезка.



На рисунке — отрезок AB; точки A и B — концы отрезка AB.

8.1.2. Угол. Прямой угол. Острые и тупые углы. Вертикальные и смежные углы. Биссектриса угла и её свойства

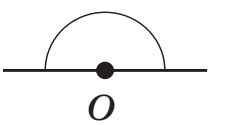
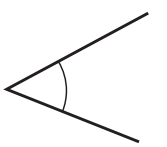
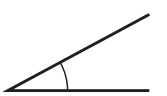
Угол — геометрическая фигура, которая состоит из точки и двух лучей, исходящих из этой точки. Лучи называют сторонами угла, а их общее начало — вершиной угла.

Угол обозначают либо через вершину и две точки на сторонах угла, либо только через вершину, либо через лучи. *Например*, $\angle B$, $\angle ABC$ или $\angle hn$.

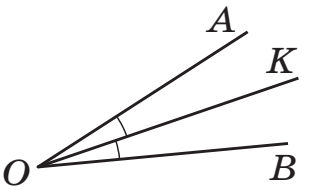
Развёрнутый угол — угол, стороны которого лежат на одной прямой.

Градус — угол, равный $\frac{1}{180}$ части развёрнутого угла.

Градусная мера угла — положительное число, которое показывает, сколько раз градус и его части укладываются в данном угле.

Развёрнутый угол	равен 180°	
Неразвёрнутый угол	меньше 180°	
Прямой угол	равен 90°	
Острый угол	меньше 90°	
Тупой угол	больше 90°, но меньше 180°	

Биссектриса угла — луч, исходящий из вершины угла и делящий его на две равные части.



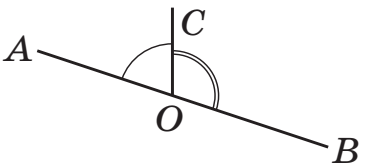
Свойства биссектрисы угла

• Любая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон (или продолжения сторон).

• Любая точка биссектрисы угла, за исключением вершины угла, является центром окружности, касающейся сторон (или продолжений сторон) этого угла.

• Биссектриса угла является осью симметрии самого угла, а также угла, образованного продолжением его сторон.

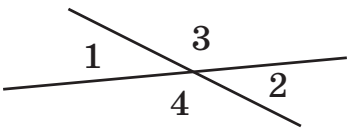
Смежные углы — два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой.



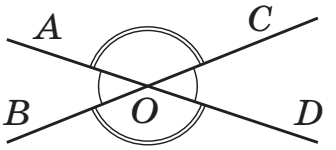
Свойство смежных углов

• Сумма смежных углов равна 180°.

Например, пары смежных углов: $\angle 1 + \angle 3 = \angle 3 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 4 = \angle 4 + \angle 1 = 180°$.

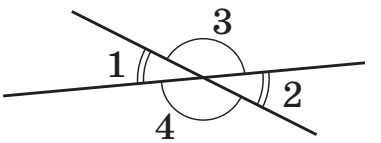


Вертикальные углы — два угла, у которых стороны одного являются продолжениями сторон другого.



Свойство вертикальных углов

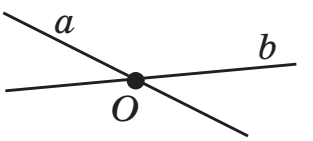
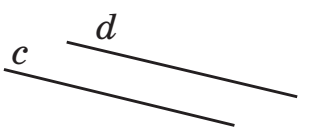
• Вертикальные углы равны.
Например, пары вертикальных углов: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.



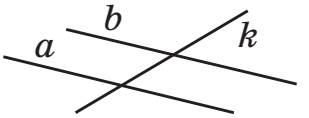
8.1.3. Прямая. Параллельность и перпендикулярность прямых

Параллельные прямые — прямые на плоскости, не имеющие общей точки.
Параллельность прямых обозначают знаком «$\parallel$».
Например, $a \parallel b$.

Взаимное расположение двух прямых на плоскости

• Две прямые имеют общую точку (пересекаются). $a \cap b = O$	
• Две прямые не имеют общих точек (параллельны). $d \parallel c$	

Секущая прямая по отношению к двум другим прямым — прямая, пересекающая их в двух точках. *Например*, прямая k — секущая прямая к прямым a и b.



Свойства параллельных прямых

1. Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной (аксиома параллельных прямых).

2. Все точки одной из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.

3. Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую прямую.

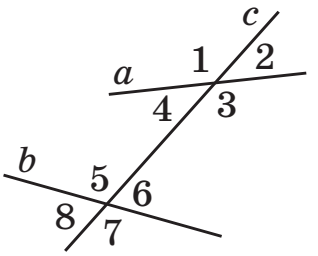
4. Если две различные прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

5. Если две различные прямые перпендикулярны третьей прямой, то они параллельны.

6. Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

7. Отрезки параллельных прямых, заключённых между параллельными прямыми, равны.

При пересечении двух прямых и секущей образуются 8 углов



$a \cap c$
$b \cap c$

Накрест лежащие углы:
$\angle 3$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 6$.

Односторонние углы:
$\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$.

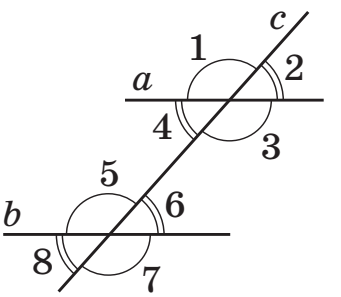
Соответствующие углы:
$\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 7$.

Свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей

1. Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то соответственные углы равны.

2. Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то накрест лежащие углы равны.

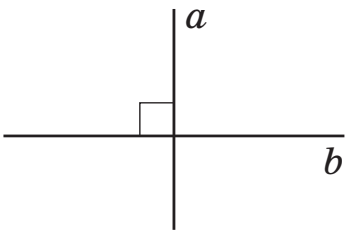
3. Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то сумма односторонних углов равна 180°.



Признаки параллельности прямых

1. Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.
2. Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.
3. Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

Перпендикулярные прямые — две пересекающиеся прямые, которые образуют четыре прямых угла.

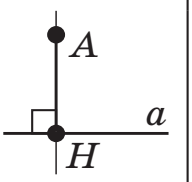


Например, прямые a и b — перпендикулярные: $a \perp b$.

8.1.4. Отрезок. Свойство серединного перпендикуляра к отрезку. Перпендикуляр и наклонная к прямой

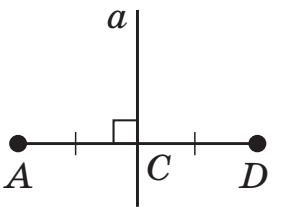
Отрезок — часть прямой между двумя данными точками, включая эти точки, которые называются концами отрезка.

Перпендикуляр из точки A к прямой a — отрезок AH, если прямые AH и a взаимно перпендикулярны, точка A не лежит на прямой a, точка H лежит на прямой a. Точку H называют **основанием перпендикуляра**.



Серединный перпендикуляр к отрезку — прямая, проходящая через середину отрезка и перпендикулярная к нему.

Например,
если $a \perp AD$, $a \cap AD = C$, $AC = CD$, то a — серединный перпендикуляр к отрезку AD.



Свойства серединного перпендикуляра

• Каждая точка, равноудалённая от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.

• Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

Наклонная — отрезок, который соединяет точку вне прямой с любой точкой на прямой, кроме основания перпендикуляра.

Свойства наклонных

• Длина наклонной, проведённой из данной точки к прямой, больше длины перпендикуляра, опущенного из той же точки на эту прямую.

• Равные наклонные имеют равные проекции.

• Из двух наклонных, выходящих из одной точки, больше та, у которой проекция больше.

8.1.5. Понятие о геометрическом месте точек

Геометрическое место точек — фигура, которая состоит из всех точек плоскости, обладающих определёнными свойствами.

Свойства геометрического места точек

- Если точка принадлежит фигуре, она обладает эти свойством.
- Каждая точка, обладающая этим свойством, принадлежит фигуре.

Примеры фигур, обладающих геометрическим местом точек		
Окружность	→	Геометрическое место точек, равноудалённых от данной точки.
Серединный перпендикуляр к отрезку	→	Геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных точек.
Биссектриса угла	→	Геометрическое место точек, равноудалённых от сторон угла.

8.1.6. Преобразования плоскости. Движение. Симметрия

Отображение плоскости на себя — отображение, при котором каждой точке плоскости ставится в соответствие какая-либо точка этой же плоскости, при этом любая точка плоскости ставится в соответствие какой-то точке.

Движение плоскости — отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния.

Свойства движения

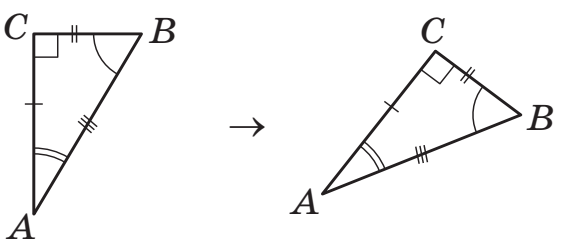
• При движении прямая отображается на прямую;

• при движении луч отображается на луч;

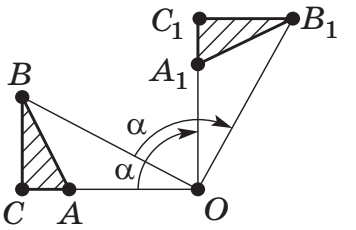
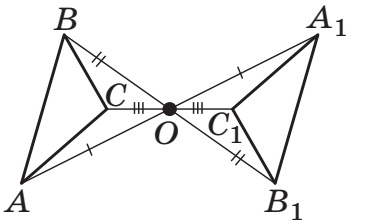
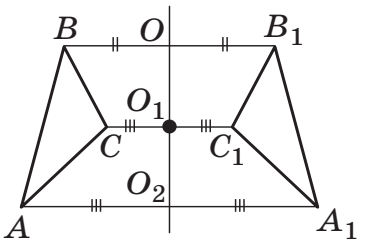
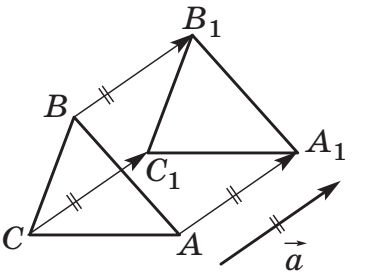
• при движении отрезок отображается на отрезок;

• при движении угол отображается на равный ему угол;

• при движении треугольник отображается на равный ему треугольник.



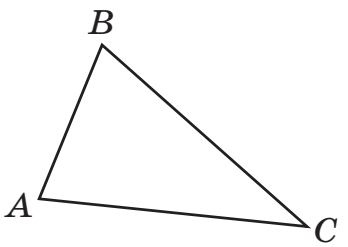
Движение

Виды движения	
• **Поворот**, при котором все точки фигуры поворачиваются на один и тот же угол вокруг одной и той же точки — центра поворота.	
• **Центральная симметрия**, при которой каждая точка фигуры переходит в точку, симметричную ей относительно точки — центра симметрии.	
• **Осевая симметрия**, при которой каждая точка фигуры переходит в точку, симметричную ей относительно прямой — оси симметрии.	
• **Параллельный перенос**, при котором каждая точка M отображается в такую точку M_1 так, что вектор $\overrightarrow{MM_1}$ равен данному вектору $\vec{a}$.	

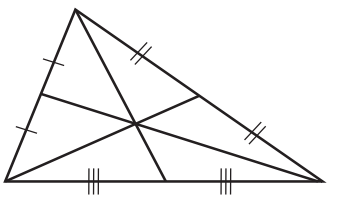
8.2. Треугольник

8.2.1. Высота, медиана, биссектриса, средняя линия треугольника; точки пересечения серединных перпендикуляров, биссектрис, медиан, высот или их продолжений

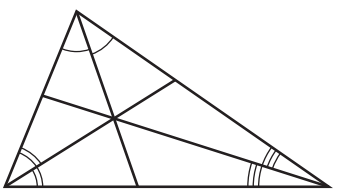
Треугольник — геометрическая фигура, которая состоит из 3-х точек, не лежащих на одной прямой, и 3-х отрезков, соединяющих эти точки попарно.



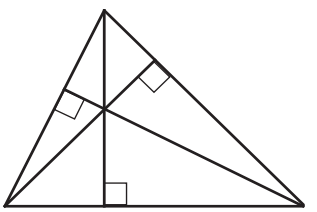
Точки A, B, C — вершины треугольника;
отрезки AB, BC, AC — стороны треугольника;
углы A, B, C — углы треугольника.



Медиана треугольника — отрезок, который соединяет вершину треугольника с серединой противоположной стороны.



Биссектриса треугольника — отрезок биссектрисы угла треугольника, который соединяет вершину треугольника с точкой противоположной стороны.

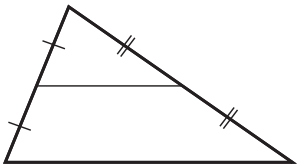


Высота треугольника — перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону.

Свойства медианы, биссектрисы, высоты

• В любом треугольнике медианы пересекаются в одной точке;
• в любом треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке;
• в любом треугольнике высоты или их продолжения также пересекаются в одной точке.

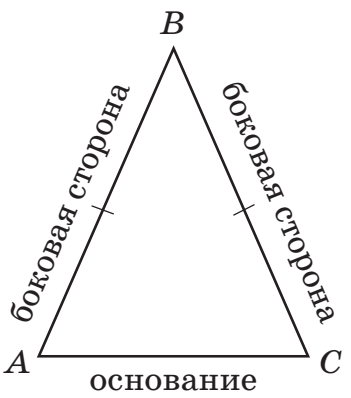
Средняя линия треугольника — отрезок, который соединяет середины двух сторон треугольника.



Свойство средней линии треугольника

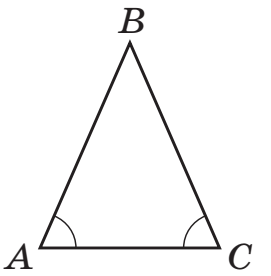
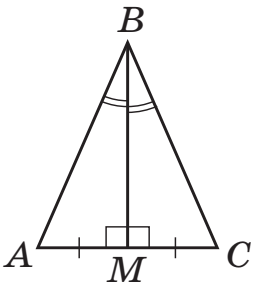
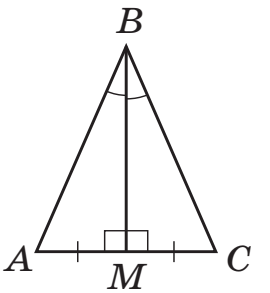
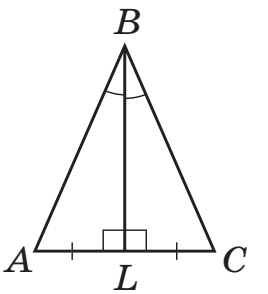
• Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

8.2.2. Равнобедренный и равносторонний треугольники. Свойства и признаки равнобедренного треугольника



Равнобедренный треугольник — треугольник, у которого две стороны равны.

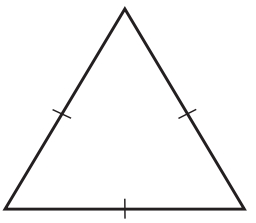
Равные стороны — **боковые стороны**, третья сторона — **основание треугольника**.

Свойства равнобедренного треугольника	
1. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.	
2. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, является медианой и высотой.	
3. В равнобедренном треугольнике высота, проведённая к основанию, является медианой и биссектрисой.	
4. В равнобедренном треугольнике медиана, проведённая к основанию, является высотой и биссектрисой.	
5. В равнобедренном треугольнике медианы (а также высоты или биссектрисы), проведённые к боковым сторонам, равны.	

Признак равнобедренного треугольника

Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

Равносторонний треугольник — треугольник, у которого все стороны равны.



Свойства равностороннего треугольника

1. У равностороннего треугольника все углы равны по 60°.

2. В равностороннем треугольнике любая биссектриса является одновременно медианой и высотой.

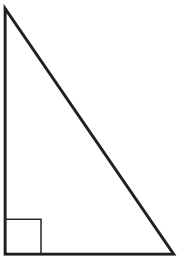
3. В равностороннем треугольнике все медианы (а также высоты или биссектрисы) равны между собой.

4. Точка пересечения медиан (высот, биссектрис) равностороннего треугольника является центром вписанной и описанной окружностей.

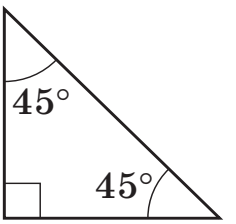
5. Все равносторонние треугольники подобны между собой.

8.2.3. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора

Прямоугольный треугольник — треугольник, у которого один из углов прямой, два других — острые.

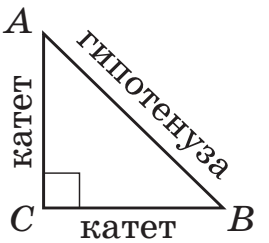


Равнобедренный прямоугольный треугольник — треугольник, у которого два острых угла равны по 45°.



Катеты — две стороны прямоугольного треугольника, лежащие на сторонах прямого угла.

Гипотенуза — сторона прямоугольного треугольника, лежащая напротив прямого угла.



AC и BC — катеты, AB — гипотенуза

Теорема Пифагора

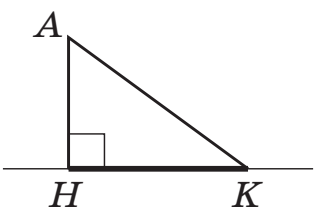
В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Например, если a и b — катеты, c — гипотенуза, то $a^2 + b^2 = c^2$.

Теорема, обратная теореме Пифагора: если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то этот треугольник является прямоугольным.

Если к прямой из одной точки проведены перпендикуляр и наклонные, то любая наклонная больше перпендикуляра, равные наклонные имеют равные проекции, а из двух наклонных больше та, у которой проекция больше.

Проекция наклонной — отрезок прямой, соединяющий основание перпендикуляра и основание наклонной.

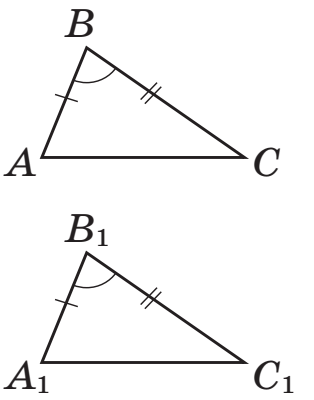
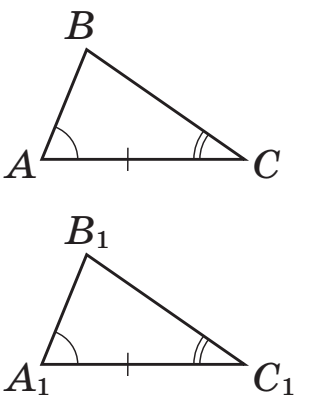
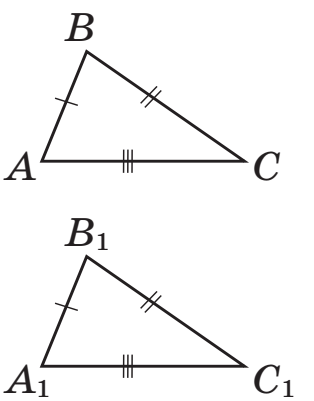


AK — наклонная,
AH — перпендикуляр,
HK — проекция

Пифагоровы треугольники — прямоугольные треугольники, длины сторон которых выражаются целыми числами.
Некоторые пифагоровы «тройки»: 3, 4, 5; 5, 12, 13; 7, 24, 25; 8, 15, 17; 9, 40, 41.

Египетский треугольник — прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4, 5.

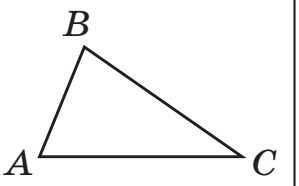
8.2.4. Признаки равенства треугольников

Признаки равенства треугольников	
1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.	
2. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.	
3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.	

8.2.5. Неравенство треугольника

Неравенство треугольника

Любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон и больше разности двух других сторон.

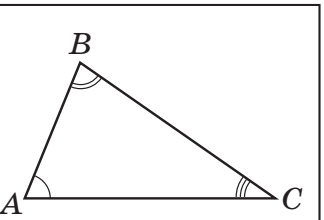


$$AB < AC + BC$$
$$BC < AB + AC$$
$$AC < AB + BC$$
$$BC > AC - AB$$
$$AC > BC - AB$$
$$AB > AC - BC$$

8.2.6. Сумма углов треугольника. Внешние углы треугольника

Сумма углов треугольника равна 180°.

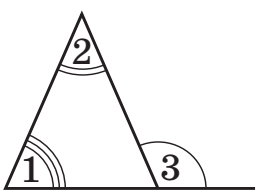
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$



Внешний угол треугольника — угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника.

Свойство внешнего угла треугольника

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

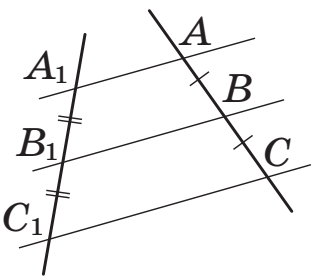


$$\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$$

8.2.7. Теорема Фалеса

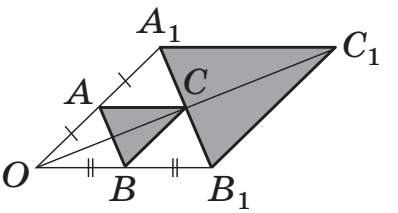
Теорема Фалеса

Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.



8.2.8. Подобие треугольников, коэффициент подобия. Признаки подобия треугольников

Подобные фигуры — фигуры F_1 и F_2, если каждой точке фигуры F_1 соответствует точка фигуры F_2 таким образом, что расстояния между двумя точками фигуры F_1 и соответствующими точками фигуры F_2 отличаются в одно и тоже число раз, если делить бóльшее на меньшее.



$OC_1 = 2OC$, $OB_1 = 2OB$, $OA_1 = 2OA$,
$\Delta A_1B_1C_1$ и ΔABC — подобны.

Свойства подобных фигур

• Отношения любых длин соответствующих отрезков, прямых и кривых в подобных фигурах сохраняются.

• Соответствующие углы в подобных фигурах равны.

• Отношение любых соответствующих длин отрезков, прямых и кривых одной фигуры к другой — постоянное число k, коэффициент подобия.

• Отношение соответствующих площадей в подобных фигурах равно квадрату коэффициента подобия.

• Отношение соответствующих объёмов в подобных фигурах равно кубу коэффициента подобия.

Все правильные n-угольники подобны.

Например, подобны все квадраты, все равносторонние треугольники. Также подобны все окружности, все сферы, все кубы.

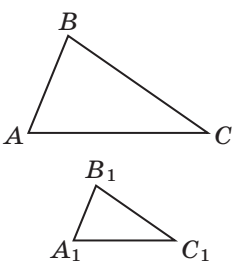
Подобные треугольники — треугольники, у которых соответствующие углы равны, а стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника.

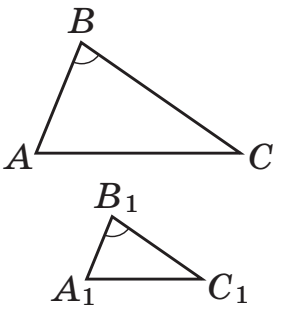
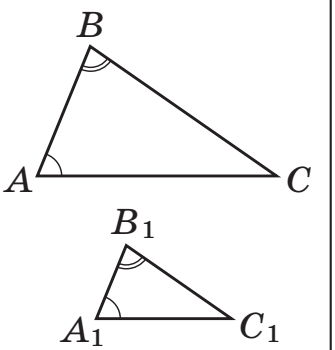
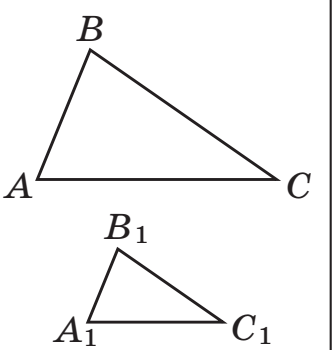
Например,

ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ подобны.

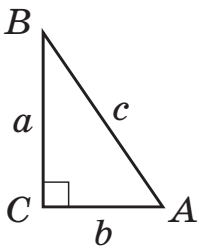
$\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$; $\angle C = \angle C_1$;

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$



Признаки подобия треугольников	
• по двум пропорциональным сторонам и углу между ними. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}; \angle B = \angle B_1$	
• по двум углам. $\angle A = \angle A_1; \angle B = \angle B_1$	
• по трём пропорциональным сторонам. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$	

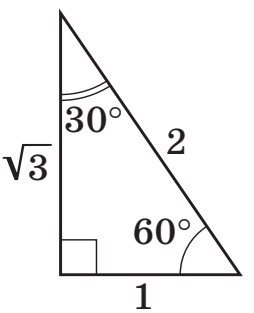
8.2.9. Синус, косинус, тангенс острого угла прямоугольного треугольника и углов от 0° до 180°

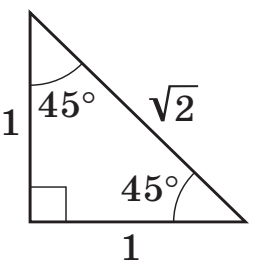


ΔABC; a и b — катеты; c — гипотенуза.

- $\sin A = \frac{a}{c} = \cos B$
- $\cos A = \frac{b}{c} = \sin B$
- $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \operatorname{ctg} B$
- $\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} B$

Синус, косинус, тангенс и котангенс углов 30°, 45°, 60° в прямоугольном треугольнике





$$\sin 30° = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1}}{2} = \cos 60°$$

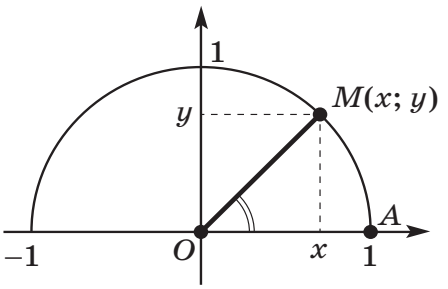
$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45°$$

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$$

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{ctg} 60°$$

$$\operatorname{tg} 45° = 1 = \operatorname{ctg} 45°$$

$$\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3} = \operatorname{ctg} 30°$$



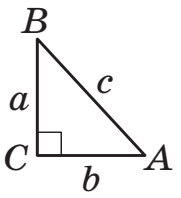
Полуокружность $R = 1$.

$\cos \angle MOA = x$; $\sin \angle MOA = y$; $\operatorname{tg} \angle MOA = \dfrac{y}{x}$

$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$	$\cos (90° - \alpha) = \sin \alpha$
$\sin (90° - \alpha) = \cos \alpha$	$\sin (180° - \alpha) = \sin \alpha$
	$\cos (180° - \alpha) = -\cos \alpha$

8.2.10. Решение прямоугольных треугольников. Основное тригонометрическое тождество. Теорема косинусов и теорема синусов

Решение прямоугольных треугольников — это задача нахождения неизвестных сторон и углов по двум известным элементам, среди которых должна быть хоть одна сторона.



1. Даны катеты a и b. Найти: c, $\angle A$, $\angle B$.

$c^2 = a^2 + b^2$, $\operatorname{tg} A = \dfrac{a}{b}$, $\angle B = 90° - \angle A$.

2. Даны катет a и гипотенуза c. Найти: b, $\angle A$, $\angle B$.

$b^2 = c^2 - a^2$, $\sin A = \dfrac{a}{c}$, $\angle B = 90° - \angle A$.

3. Даны катет a и острый угол $\angle B$. Найти: b, c, $\angle A$. $\angle A = 90° - \angle B$, $c = \dfrac{a}{\cos A}$, $b = a \operatorname{tg} B$.

4. Даны гипотенуза c и острый угол $\angle A$. Найти: a, b, $\angle B$. $\angle B = 90° - \angle A$, $a = c \sin A$, $b = c \cos B$.

Основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

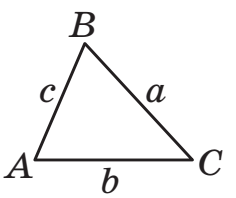
Например,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где a, b и c — длины сторон треугольника;
$\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$ — величины соответствующих углов треугольника;
R — радиус описанной окружности.

Теорема косинусов

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.



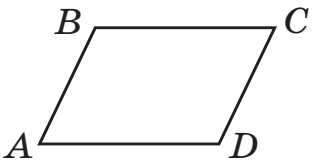
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

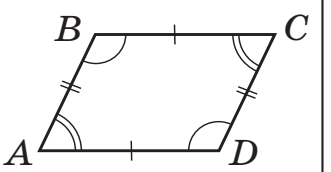
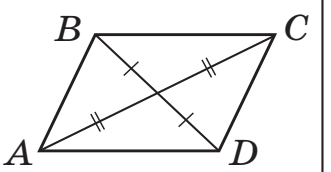
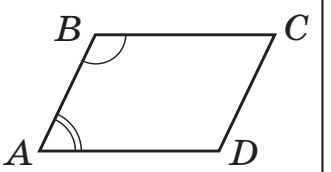
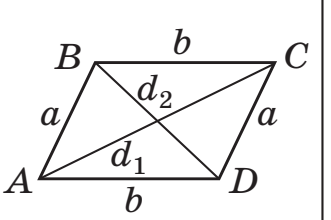
8.3. Многоугольники

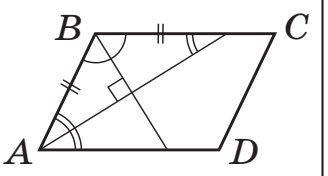
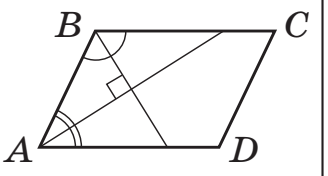
8.3.1. Параллелограмм, его свойства и признаки

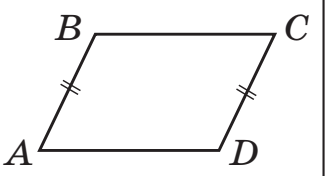
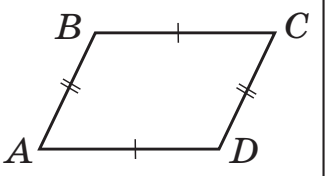
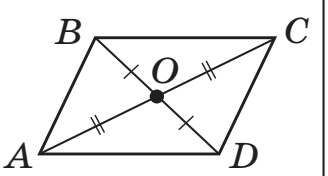
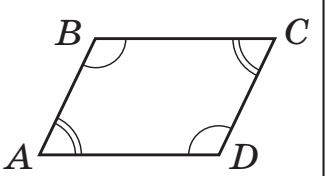
Параллелограмм — четырёхугольник, у которого противоположные стороны параллельны (т. е. лежат на параллельных прямых).

Например, $ABCD$ — параллелограмм, так как $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.



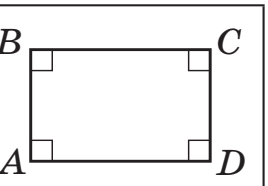
Свойства параллелограмма	
• В параллелограмме противоположные стороны равны, и противоположные углы равны.	
• Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.	
• Сумма двух углов параллелограмма, прилежащих к одной его стороне, равна 180°.	
• Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна удвоенной сумме квадратов его сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.	

• Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.	
• Биссектрисы углов параллелограмма, прилегающих к одной его стороне, взаимно перпендикулярны.	

Признаки параллелограмма	
• Если две стороны четырёхугольника равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм. $AB \parallel CD$	
• Если противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.	
• Если в четырёхугольнике диагонали пересекаются и в точке пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.	
• Если в четырёхугольнике противоположные углы равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.	

8.3.2. Прямоугольник, квадрат, ромб, их свойства и признаки

Прямоугольник — параллелограмм, у которого все углы прямые.
Например, $ABCD$ — прямоугольник, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$.



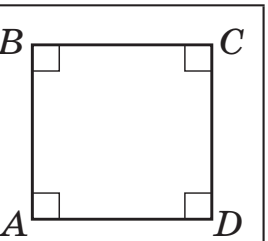
Свойства прямоугольника

- Диагонали прямоугольника равны.
- Перпендикуляры, проходящие через середины сторон прямоугольника, являются его осями симметрии.

Признаки прямоугольника

- Если диагонали в параллелограмме равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.
- Если в параллелограмме один угол прямой, то это — прямоугольник.

Квадрат — прямоугольник, у которого все стороны равны.
Например, $ABCD$ — квадрат, $AB = BC = CD = AD$, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$.



Свойства квадрата

- Все углы квадрата прямые.
- Диагонали квадрата равны.
- Диагонали квадрата взаимно перпендикулярны.
- Диагонали квадрата точкой пересечения делятся пополам.
- Диагонали квадрата делят углы квадрата пополам.
- Квадрат имеет четыре оси симметрии: две диагонали и два перпендикуляра к его сторонам, проходящих через их середины.

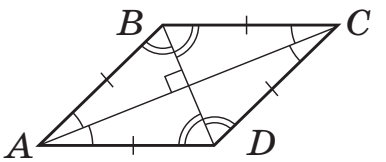
Признаки квадрата

• Если в параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны и равны, то этот параллелограмм — квадрат.

• Если стороны четырёхугольника равны и диагонали также равны, то этот четырёхугольник — квадрат.

Ромб — параллелограмм, у которого все стороны равны.

Например, $ABCD$ — ромб, $AB = BC = CD = AD$.



Свойства ромба

• Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

• Диагонали ромба являются биссектрисами углов ромба.

• Прямые, на которых лежат диагонали ромба, являются его осями симметрии.

Признаки ромба

• Если в параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны, то это — ромб.

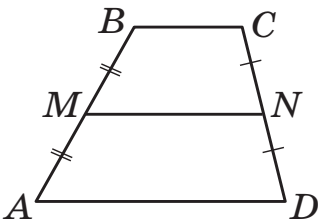
• Если диагональ параллелограмма лежит на биссектрисе его угла, то это — ромб.

• Если стороны четырехугольника равны, то это — ромб.

8.3.3. Трапеция, средняя линия трапеции; равнобедренная трапеция

Трапеция — четырёхугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны.

Например, $ABCD$ — трапеция, $BC \parallel AD$, $AB \nparallel CD$.



Основания трапеции — её параллельные стороны ($BC \parallel AD$).

Боковые стороны трапеции — её непараллельные стороны ($AB \nparallel CD$).

Средняя линия трапеции — отрезок, соединяющий середины её боковых сторон (MN).

Свойства трапеции

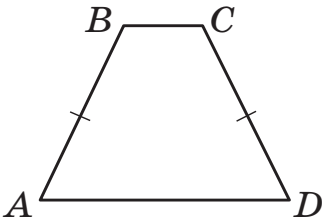
• Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

• Сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов боковых сторон и удвоенного произведения её оснований.

• Середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции лежат на одной прямой.

• Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен её основаниям и равен их полуразности.

Равнобедренная трапеция — трапеция, боковые стороны которой равны.



Свойства равнобедренной трапеции

• В равнобедренной трапеции углы при основании равны.

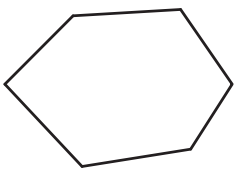
• В равнобедренной трапеции диагонали равны.

• В равнобедренной трапеции высота, опущенная из вершины на большее основание, делит его на два отрезка, один из которых равен полусумме оснований, другой — полуразности оснований.

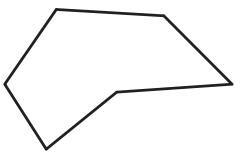
• В равнобедренной трапеции прямая, проходящая через середины оснований, перпендикулярна основаниям и является осью симметрии трапеции.

8.3.4. Сумма углов выпуклого многоугольника

Выпуклый многоугольник — многоугольник, который лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.



Выпуклый многоугольник



Невыпуклый многоугольник

Сумма углов выпуклого n-угольника равна: $(n - 2) \cdot 180°$.

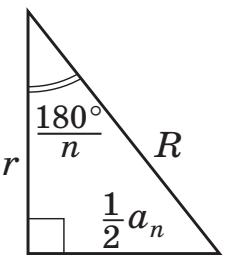
Задача
Сколько сторон имеет выпуклый n-угольник, каждый угол которого равен 120°?
Р е ш е н и е. Выпуклый n-угольник имеет n углов и n сторон. Сумма углов n-угольника равна $(n - 2) \cdot 180°$, или $n \cdot 120°$ по условию. Следовательно, $120n = 180n - 360$; $60n = 360$; $n = 6$.
О т в е т: 6 сторон.

8.3.5. Правильные многоугольники

Правильный многоугольник — выпуклый многоугольник, у которого равны все стороны и равны все углы.



Радиусы вписанной и описанной окружностей правильных n-угольников (r — радиус вписанной окружности, R — радиус описанной окружности, a — сторона, S — площадь)



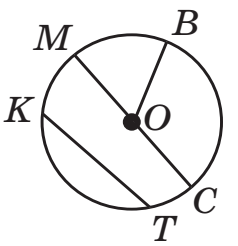
	r	R	S
Треугольник равносторонний	$\frac{a}{2\sqrt{3}}$	$\frac{a}{\sqrt{3}}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
Квадрат	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	a^2
Правильный шестиугольник	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	a	$\frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}$
n-угольник	$\frac{a}{2\mathrm{tg}\frac{180°}{n}}$	$\frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}$	$\frac{a^2 n}{4\mathrm{tg}\frac{180°}{n}}$

8.4. Окружность и круг

Окружность — геометрическая фигура, которая состоит из всех точек, расположенных на заданном расстоянии от данной точки, центра окружности.

Круг — часть плоскости, ограниченная окружностью.

Например, на рисунке представлена окружность с центром в точке O, радиусом $R = OB$, диаметром $D = MC$, хордой KT. $D = 2R$.



8.4.1. Центральный, вписанный угол; величина вписанного угла

Дуга окружности — каждая из двух частей окружности, на которые окружность делится двумя точками.

Центральный угол — угол, вершина которого совпадает с центром окружности.

Полуокружность — дуга, концы которой являются концами диаметра окружности.

Вписанный угол — угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность.

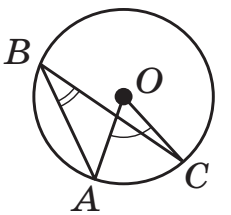
Теорема о вписанном угле

Угол, вписанный в окружность, равен половине дуги, на которую он опирается или половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

Следствие к теореме о вписанном угле

• Вписанный углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны;

• вписанный угол, опирающийся на полуокружность, — прямой.

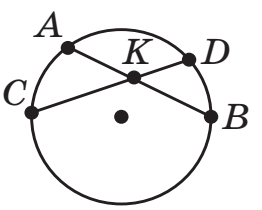


$\angle AOC$ — центральный угол; $\angle ABC$ — вписанный угол; $\cup AC$ — дуга; $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\cup AC$

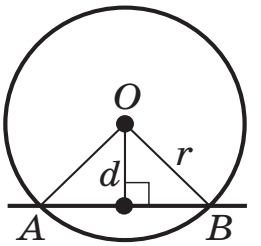
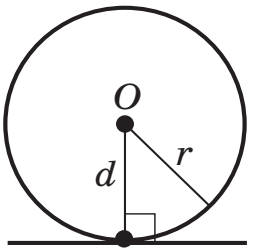
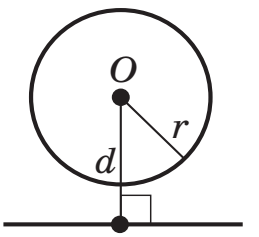
Теорема о произведении отрезков пересекающихся хорд

Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

Например, если AB и CD — хорды окружности, пересекающиеся в точке K, то $AK \cdot BK = CK \cdot DK$.



8.4.2. Взаимное расположение прямой и окружности

• Прямая имеет две общие точки с окружностью, если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности ($d < r$).	
• Прямая имеет только одну общую точку с окружностью, если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности ($d = r$).	
• Прямая не имеет общих точек с окружностью, если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности ($d > r$).	

8.4.3. Касательная и секущая к окружности; равенство отрезков касательных, проведённых из одной точки

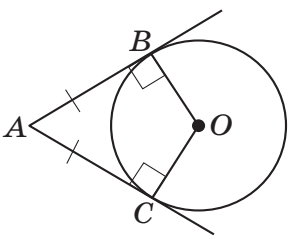
Касательная — прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку.

Секущая прямая — прямая, которая имеет две общие точки с окружностью.

Точка касания — общая точка касательной и окружности.

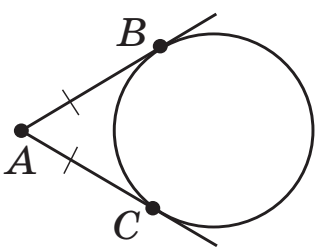
Отрезки касательных — расстояния от точки, из которой проведены две касательные к окружности, до точек касания.

Например, AB и AC — касательные к окружности, тогда отрезки AB и AC — отрезки касательных.



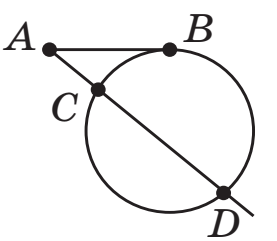
• Отрезки касательных, проведённых из одной точки, равны:

$$AB = AC.$$



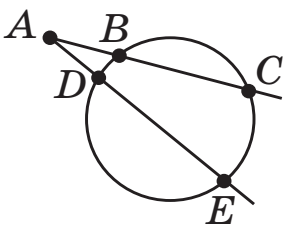
• Квадрат отрезка касательной равен произведению отрезков секущей, проведённой из той же точки:

$$AB^2 = AC \cdot AD.$$



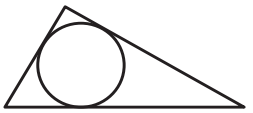
• Произведения отрезков секущих, проведённых из одной точки, равны:

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE.$$



8.4.4. Окружность, вписанная в треугольник

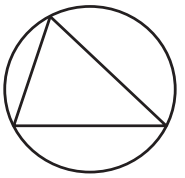
Окружность, вписанная в треугольник, касается всех сторон треугольника.



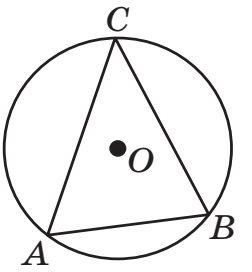
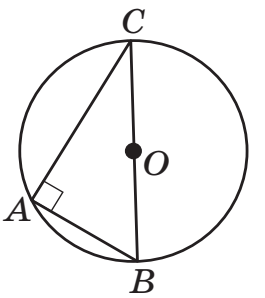
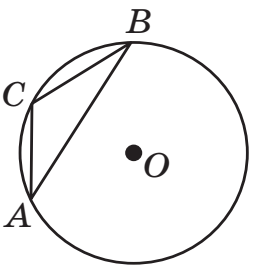
Центр окружности, вписанной в треугольник, — точка пересечения биссектрис углов треугольника. В любой треугольник можно вписать окружность, и только одну.

8.4.5. Окружность, описанная около треугольника

Окружность, описанная около треугольника, проходит через все его вершины.



Центр окружности, описанной около треугольника, — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Около любого треугольника можно описать окружность, и только одну.

Центр описанной окружности		
Остроугольный треугольник	Внутри треугольника	
Прямоугольный треугольник	На середине гипотенузы	
Тупоугольный треугольник	Вне треугольника	

8.4.6. Вписанные и описанные окружности правильного многоугольника

Около правильного многоугольника можно описать окружность. В правильный многоугольник можно вписать окружность. Описанная и вписанная окружности имеют один и тот же центр — **центр правильного многоугольника.**

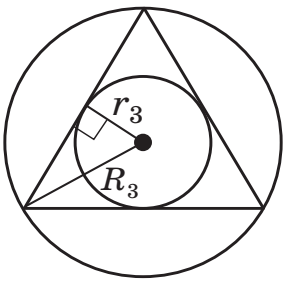
↓

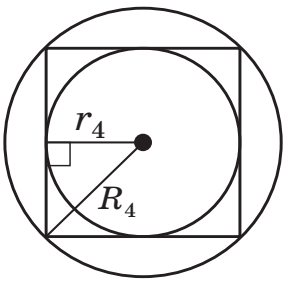
Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.

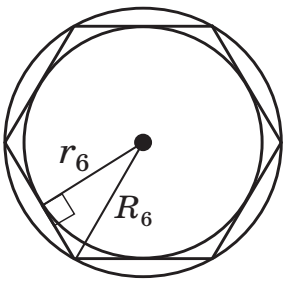
↓

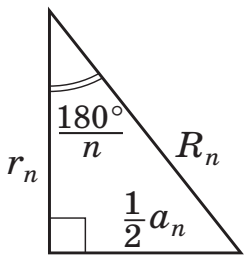
Окружность, описанная вокруг правильного многоугольника, проходит через вершины правильного многоугольника.

Примеры









$$\frac{r_n}{R_n} = \cos\frac{180^\circ}{n};$$

$$\frac{a_n}{2r_n} = \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$$

$$\frac{a_n}{2R_n} = \sin\frac{180^\circ}{n}$$

	$\frac{180^\circ}{n}$	$r_n = R_n \cos\frac{180^\circ}{n}$	$a_n = 2R_n \sin\frac{180^\circ}{n}$	$a_n = 2r_n \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$
$n = 3$	60°	$r_3 = \frac{R_3}{2}$	$a_3 = R_3\sqrt{3}$	$a_3 = 2r_3\sqrt{3}$
$n = 4$	45°	$r_4 = \frac{R_4}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}R_4}{2}$	$a_4 = R_4\sqrt{2}$	$a_4 = 2r_4$
$n = 6$	30°	$r_6 = \frac{\sqrt{3}R_6}{2}$	$a_6 = R_6$	$a_6 = \frac{2r_6}{\sqrt{3}}$

8.4.7. Вписанные и описанные четырёхугольники

Свойство вписанного четырёхугольника
В любом вписанном четырёхугольнике сумма противолежащих углов равна 180°.
Признак вписанного четырёхугольника
Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°, то около него можно описать окружность. *Примеры* вписанного четырёхугольника — прямоугольник, равнобедренная трапеция.

Свойство описанного четырёхугольника
В любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны.
Признак описанного четырёхугольника
Если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность. *Пример* описанного четырёхугольника — ромб.

8.5. Измерение геометрических величин

8.5.1. Длина отрезка, длина ломаной, периметр многоугольника. Расстояние от точки до прямой

Отрезок — часть прямой, состоящая из двух точек, принадлежащих этой прямой, и всех точек прямой, лежащих между двумя данными точками, которые называются концами отрезка.

Длина отрезка — число, которое показывает, сколько раз единица измерения и её части укладываются в измеряемый отрезок.

Измерение длины отрезка — сравнение отрезка с некоторым отрезком, принятым за единицу измерения.

Ломаная линия — геометрическая фигура, состоящая из отрезков, последовательно соединённых своими концами так, что соседние (имеющие общую точку) отрезки не лежат на одной прямой.

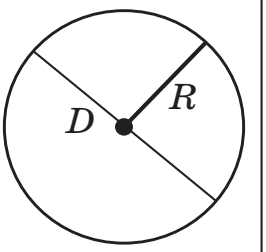
Длина ломаной — сумма длин её частей.

Периметр многоугольника — сумма длин всех сторон многоугольника.

Расстояние от точки до прямой — длина перпендикуляра, проведённого из этой точки до данной прямой.

8.5.2. Длина окружности

Все окружности подобны друг другу, поэтому отношение длины окружности к её диаметру равно постоянному числу π.



$$\pi \approx 3{,}14, \text{ где } \pi = \frac{C}{D}$$

(C — длина окружности, D — диаметр окружности).

$$C = \pi D$$

$$C = 2\pi R$$

8.5.3. Градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности

Градусная мера угла — положительное число, которое показывает, сколько раз градус и его части укладываются в данном угле.

• Дуги окружности тоже измеряются в градусах.

• Стороны центрального угла пересекают окружность в двух точках и делят её на две дуги.

• Полуокружность равна развёрнутому углу, т. е. она равна 180°.

• Если дуга окружности меньше или равна полуокружности, то её градусная мера равна градусной мере соответствующего ей центрального угла.

• Если дуга окружности больше полуокружности, то её градусная мера равна 360° минус центральный угол.

8.5.4. Площадь и её свойства. Площадь прямоугольника

Площадь многоугольника — величина той части плоскости, которую занимает многоугольник.

Измерение площадей проводится с помощью выбранной единицы измерения.

За единицу измерения площади принимается квадрат, сторона которого равна единице измерения отрезков.

Если за единицу измерения отрезков принят сантиметр, то за единицу измерения площадей принимается квадрат со стороной 1 см.

Свойства площадей

• Равные многоугольники имеют равные площади.

• Если многоугольник разделить на несколько многоугольников, то площадь равна сумме площадей этих многоугольников.

• Площадь квадрата равна квадрату его стороны, т. е. $S = a^2$.

Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон, т. е.

$$S = ab,$$

где a и b — смежные стороны прямоугольника.

Например, $ABCD$ — прямоугольник, AB = 3см, $BC = 5$ см, $S = AB \cdot BC = 3 \cdot 5 = 15$ (см^2).

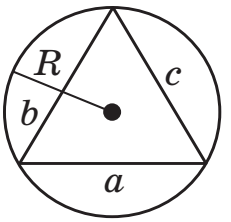
8.5.5. Площадь параллелограмма

Площадь параллелограмма	
• Произведение основания на высоту	$S = a \cdot h_a$
• Произведение его смежных сторон на синус угла между ними	$S = a \cdot b \cdot \sin \alpha$
• Половина произведения его диагоналей на синус угла между ними	$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$
Площадь ромба	
• Произведение основания на высоту	$S = a \cdot h_a$
• Произведение квадрата его стороны на синус угла между сторонами	$S = a^2 \cdot \sin \alpha$
• Половина произведения его диагоналей	$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$

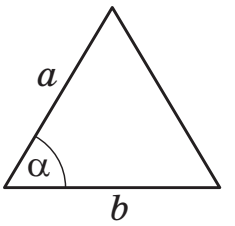
8.5.6. Площадь трапеции

Площадь трапеции	
• Произведение полсуммы её оснований на высоту	$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$
• Произведение средней линии на её высоту	$S = m \cdot h$
• Половина произведения диагоналей на синус угла между ними	$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$

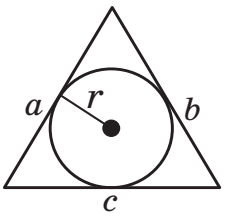
8.5.7. Площадь треугольника



$$S_\Delta = \frac{abc}{4R}$$



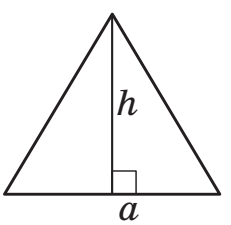
$$S_\Delta = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$$



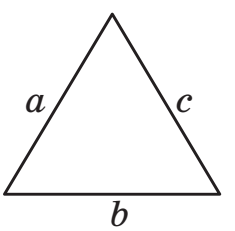
$$S_\Delta = \frac{1}{2}Pr$$

$$P = a + b + c$$

Площадь треугольника



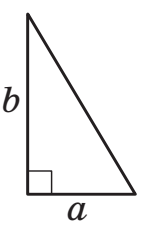
$$S_\Delta = \frac{1}{2}ah$$



Формула Герона

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

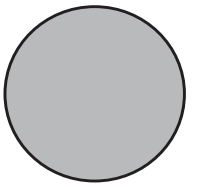


$$S_\Delta = \frac{1}{2}ab$$

В прямоугольном треугольнике a и b — катеты.

8.5.8. Площадь круга, площадь сектора

Круг — часть плоскости, ограниченная окружностью.

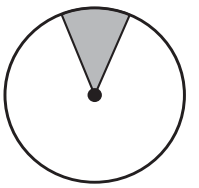


Площадь круга равна произведению числа π на квадрат радиуса круга:

$$S = \pi R^2.$$

Например,
$R = 3$, $\pi \approx 3{,}14$.
$S = \pi R^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi = 9 \cdot 3{,}14 \approx 28{,}26$.

Круговой сектор — часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга.



Площадь кругового сектора:

$$S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha,$$

где α — градусная мера дуги; R — радиус окружности.

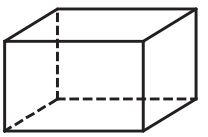
Например, при $\alpha = 60^\circ$, $R = 5$

$$S = \frac{\pi \cdot 5^2}{360^\circ} \cdot 60^\circ = \frac{25\pi}{6}.$$

8.5.9. Формулы объёма прямоугольного параллелепипеда, куба, шара

Объём тела — число, указывающее, во сколько раз данное тело больше другого тела, принятого за единицу измерения, или какую часть составляет данное тело от единичного.

Прямоугольный параллелепипед — геометрическая фигура, у которой все грани — прямоугольники.



Грань прямоугольного параллелепипеда — каждый из шести прямоугольников, из которых состоит поверхность параллелепипеда.

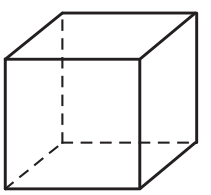
Измерения прямоугольного параллелепипеда

Длина (a)	Ширина (b)	Высота (h)

Объём прямоугольного параллелепипеда — число, равное произведению длины, ширины и высоты прямоугольного параллелепипеда:

$$V = abh$$

Куб — прямоугольный параллелепипед, у которого все рёбра равны, соответственно равны и все измерения.

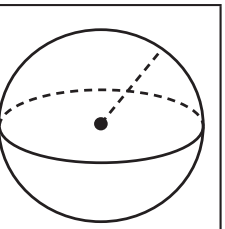


Объём куба равен кубу длины его ребра:

$$V = a^3$$

Например, если длина ребра куба — 3 см, то объём равен $3^3 = 27$ см^3.

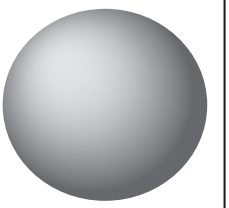
Сфера — поверхность, которая состоит из всех точек пространства, расположенных на одинаковом расстоянии от данной точки.



Шар — тело, ограниченное сферой.

Объём шара радиусом R — число, которое выражается формулой:

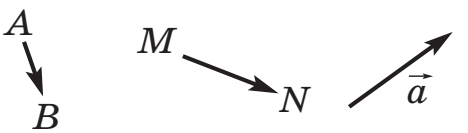
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$



8.6. Векторы на плоскости

8.6.1. Вектор, длина (модуль) вектора

Вектор — направленный отрезок, т. е. отрезок, у которого одна из крайних точек называется началом, а другая — концом.



Обозначение вектора — две заглавные латинские буквы или одна строчная латинская буква со стрелкой над ними.

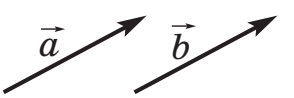
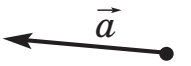
Например, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$, $\vec{a}$.

Нулевой вектор — вектор, у которого начало совпадает с концом.
На чертеже нулевой вектор изображается точкой.
Нулевой вектор обозначается символом $\vec{0}$ или повторением этой точки дважды $\overrightarrow{MM}$.

Длина ненулевого вектора (абсолютная величина или **модуль вектора)** — длина отрезка, которым изображается данный вектор.

Например, длина вектора $\overrightarrow{AB}$ обозначается $|\overrightarrow{AB}|$.
Длину нулевого вектора считают равной нулю: $|\vec{0}| = 0$.

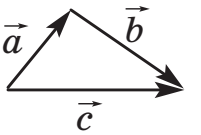
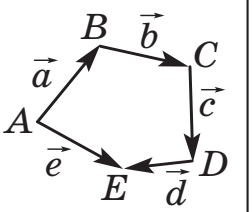
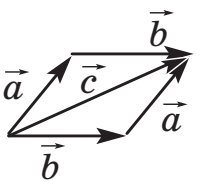
8.6.2. Равенство векторов

Равные векторы — сонаправленные векторы, одинаковой длины.	
Вектор, отложенный от точки, — вектор началом которого является данная точка.	

• От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и только один.

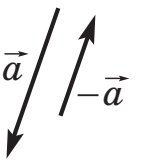
• Равные векторы можно откладывать от разных точек, считать их одним и тем же вектором и обозначать одной буквой.

8.6.3. Операции над векторами (сумма векторов, умножение вектора на число)

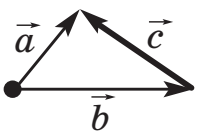
Правила сложения векторов	
• Правило треугольника для сложения двух векторов состоит в том, что второй вектор откладывают от конца первого и считают суммой вектор, начало которого совпадает с началом первого вектора, а конец — с концом второго вектора.	*Например*, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ 
• Правило многоугольника для сложения нескольких векторов состоит в том, что складываемые вектора откладывают таким образом, чтобы каждый следующий вектор начинался от конца предыдущего. Тогда суммой всех данных векторов будет вектор, который начинается от начала первого вектора и соединяет его с концом последнего.	*Например*, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{e}$ 
• Правило параллелограмма для сложения двух неколлинеарных векторов состоит в том, что оба вектора откладывают от одной точки, полученную фигуру достраивают до параллелограмма, используя данные вектора как стороны параллелограмма. Искомой суммой будет вектор, совпадающий с диагональю параллелограмма и имеющий началом ту же точку, что и слагаемые.	*Например*, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ 

Законы сложения векторов	
Переместительный закон	$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
Сочетательный закон	$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
	$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

Противоположные векторы — векторы, имеющие одинаковые длины и противоположно направленные. Записывают так:
$\vec{a}$ и $-\vec{a}$, причём $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.



Разность двух векторов — вектор, который в сумме с вычитаемым вектором даёт уменьшаемый вектор.
Например, $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.



Теорема о разности векторов

Равенство $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ справедливо для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Правила вычитания векторов

• Для того чтобы вычесть из одного вектора другой, надо к первому вектору прибавить вектор, противоположный второму.
• Для того чтобы вычесть из одного вектора другой, надо из произвольной точки плоскости отложить оба вектора, затем построить вектор, который начинается на конце второго вектора (вычитаемого), а заканчивается на конце первого вектора (уменьшаемого).

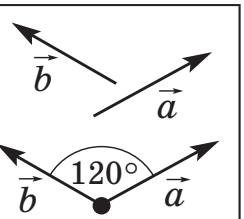
Произведение ненулевого вектора на число — вектор, который сонаправлен с данным, если число положительное, и противоположно направлен к данному вектору, если число отрицательное. Длина искомого вектора равна произведению модуля числа на длину данного вектора.
Произведение нулевого вектора на любое число — нулевой вектор.
Произведение числа нуль на любой вектор — нулевой вектор.

Законы умножения вектора на число	
Сочетательный закон	$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$
Распределительный закон	$(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

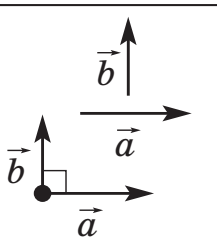
8.6.4. Угол между векторами

Угол между векторами — угол, который образуется, если отложить оба вектора от одной точки. Сторонами искомого угла будут лучи, содержащие данные векторы.
Угол между векторами обозначают:

$$\overset{\wedge}{\vec{a}\ \vec{b}} \text{ или } \angle(\vec{a}\ \vec{b}).$$

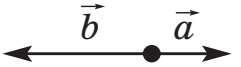


Перпендикулярные векторы — векторы, угол между которыми равен 90°.
Обозначают как: $\vec{a} \perp \vec{b}$.



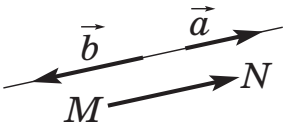
• Если векторы сонаправлены, в том числе оба или только один из них нулевой, то угол между этими векторами считается равным 0°.

• Если векторы противоположно направлены, то угол между ними — 180°.



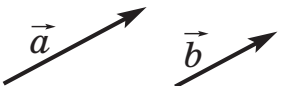
8.6.5. Коллинеарные векторы, разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Коллинеарные векторы — ненулевые векторы, которые расположены или на одной прямой, или на параллельных прямых.



Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Сонаправленные векторы — коллинеарные векторы одинакового направления, обозначаемые знаком ↑↑.



Нулевой вектор сонаправлен с любым вектором.

Противоположно направленные векторы — коллинеарные векторы, имеющие противоположные направления. Обозначаются знаком ↑↓.



Свойства коллинеарных ненулевых векторов

- Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$, $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{c}$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$;
- Если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$, $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$;
- Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$, $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Лемма о коллинеарных векторах

- Если $\vec{m}$ и $\vec{n}$ — два коллинеарных вектора и $\vec{n} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{m} = k\vec{n}$.
- Вектор считается разложенным по векторам $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если его можно представить в виде $\vec{c} = x\vec{m} + y\vec{n}$, где x и y — коэффициенты разложения.

Теорема о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам

По двум неколлинеарным векторам можно разложить любой вектор, при этом коэффициенты разложения определяются единственным образом.

8.6.6. Координаты вектора

Координатный вектор — вектор, длина которого равна единичному отрезку данной координатной прямой, а его направление совпадает с направлением этой прямой.

Обозначение координат вектора: $\vec{a}\{x; y\}$.

Правила действий с векторами по их координатам

• **Сложение векторов по координатам.**

Если сложить несколько векторов, то каждая координата суммы будет равна сумме соответствующих координат этих векторов.

$$\vec{a}\{x_1; y_1\}, \vec{b}\{x_2; y_2\} \rightarrow (\vec{a} + \vec{b})\{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$$

Например, $\vec{a}\{5; -6\}$, $\vec{b}\{3; -4\}$, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$,
$\vec{c}\{5 + 3; -6 - 4\}$, $\vec{c}\{8; -10\}$.

• **Вычитание векторов по координатам.**

Если вычесть из одного вектора другой, то каждая координата разности будет равна разности соответствующих координат этих векторов.

$$\vec{a}\{x_1; y_1\}, \vec{b}\{x_2; y_2\} \rightarrow (\vec{a} - \vec{b})\{x_1 - x_2; y_1 - y_2\}$$

Например, $\vec{a}\{5; -6\}$, $\vec{b}\{3; -4\}$, $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$,
$\vec{c}\{5 - 3; -6 + 4\}$, $\vec{c}\{2; -2\}$.

• **Умножение векторов на число по координатам.**

Если умножить число на вектор, то каждая координата произведения будет равна произведению этого числа на соответствующую координату.

$$k, \vec{a}\{x_1; y_1\} \rightarrow k\vec{a}\{kx_1; ky_1\}$$

Например, $k = 2$, $\vec{a}\{5; 6\}$, $k\vec{a}\{2 \cdot 5; 2 \cdot 6\}$, $k\vec{a}\{10; 12\}$.

• **Координаты вектора через координаты его начала и конца.** Каждая координата вектора может быть получена при вычитании из соответствующей координаты его конца координаты начала вектора.

$$M(x_1; y_1), N(x_2; y_2) \to \overrightarrow{MN}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$$

Например, $A(2; 3), B(-7; 5) \to \overrightarrow{AB}\{-7 - 2; 5 - 3\}$, $\overrightarrow{AB}\{-9; 2\}$.

8.6.7. Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение двух векторов — произведение длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}\ \vec{b}).$$

Свойства скалярного произведения двух векторов

• Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, так как $\cos 90° = 0$;

• если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$;

• если $\angle(\vec{a} \cdot \vec{b}) > 90°$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$;

• если $\angle(\vec{a} \cdot \vec{b}) < 90°$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$;

• если $\angle(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Скалярное произведение в координатах
$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$
Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины $\vec{a}^{\,2} = \lvert \vec{a} \rvert^2$

Свойства скалярного произведения вектора	
Переместительный закон	$\vec{m} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \vec{m}$
Сочетательный закон	$(k\vec{m})\vec{n} = k(\vec{m}\,\vec{n})$
Распределительный закон	$\vec{p}\,(\vec{m} + \vec{n}) = \vec{p}\,\vec{m} + \vec{p}\,\vec{n}$

Подготовка к ЕГЭ

1. АЛГЕБРА

1.1. Числа и вычисления

1.1.1. Числа

Цифры — знаки для записи чисел.

В десятичной системе счисления используют цифры: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Всего 10 цифр.

→ **Натуральные числа N** — числа, которые используют при счёте предметов.

Например, 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11 и т.д.

→ **Целые числа Z** — натуральные числа, противоположные им и нуль.

Например, –100; –5; –1; 0; 2; 17 и т.д.

→ **Рациональные числа Q** — числа, которые можно записать в виде $\frac{m}{n}$, где m — целое, а n — натуральное, или в виде конечной либо бесконечной периодической десятичной дроби.

Например, $-6 = -\frac{6}{1}; -\frac{2}{5} = \frac{-2}{5}; \frac{1}{3} = 0,(3)$.

→ **Иррациональные числа** — числа, которые можно записать приближенно с помощью бесконечной непериодической десятичной дроби.

Например, $\sqrt{2} \approx 1,4142\ldots; \pi \approx 3,14\ldots$.

→ **Действительные числа R** — рациональные и иррациональные числа.

1.1.2. Арифметические действия и их свойства

Действия над натуральными числами	
Сложение	$a + b = c$, $a = c - b$, $b = c - a$, где a — слагаемое, b — слагаемое, c — сумма
Вычитание	$a - b = c$, $a = b + c$, $b = a - c$, где a — уменьшаемое, b — вычитаемое, c — разность
Умножение	$ab = c$, $a = \frac{c}{b}$, $b = \frac{c}{a}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, где a — множитель, b — множитель, c — произведение
Деление	$\frac{a}{b} = c$ или $a : b = c$, $a = bc$, $b = \frac{a}{c}$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, где a — делимое, b — делитель, c — частное

Свойства сложения и умножения	
Переместительное свойство сложения	$a + b = b + a$
Сочетательное свойство сложения	$(a + b) + c = a + (b + c)$
Переместительное свойство умножения	$ab = ba$
Сочетательное свойство умножения	$(ab)c = a(bc)$
Распределительное свойство умножения относительно сложения	$a(b + c) = ab + ac$

Общие правила при действиях с 0 и 1
$a + 0 = a$
$a - 0 = a$
$a - a = 0$
$a \cdot 1 = a$
$a : 1 = a$
$a : a = 1$
$a \cdot 0 = 0$
$0 : a = 0$
$a : 0$ — нет числового решения

Проверка результатов арифметических действий с помощью остатков от деления на 9
Действия
• Остаток любого числа от деления на 9 можно получить, складывая цифры числа, при этом в полученной сумме нужно продолжить сложение цифр до получения однозначного остатка. При сложении цифр суммы и отдельные числа, кратные 9, а также нуль можно игнорировать, они не влияют на конечный результат.
• Умножаем или складываем остатки множителей или слагаемых и сравниваем их с остатком суммы или произведения. При верном решении они должны совпадать.
• При делении и вычитании проверку этим способом можно производить, умножая остаток частного на остаток делителя, соответственно, складывая остаток разности с остатком вычитаемого.

Примеры: 1) $44 \cdot 46 = 2024$. $4 + 4 = 8$; $4 + 6 = 10 \rightarrow$ $\rightarrow 1 + 0 = 1$; $2 + 0 + 2 + 4 = 8$; $8 \cdot 1 = 8$ (верно)	2) $327 + 48 = 375$. $3 + 2 + 7 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3$; $4 + 8 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3$; $3 + 7 + 5 = 15 \rightarrow 1 + 5 = 6$; $3 + 3 = 6$ (верно)
3) $156 : 12 = 13 \rightarrow$ $\rightarrow 13 \cdot 12 = 156$. $1 + 3 = 4$; $1 + 2 = 3$; $1 + 5 + 6 = 12 \rightarrow$ $\rightarrow 1 + 2 = 3$; $4 \cdot 3 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3$ (верно)	4) $58 - 22 = 36 \rightarrow$ $\rightarrow 36 + 22 = 58$. $3 + 6 = 9$; $2 + 2 = 4$; $5 + 8 = 13 \rightarrow 1 + 3 = 4$; $9 + 4 = 13 \rightarrow 1 + 3 = 4$ (верно)

Приёмы быстрого устного счёта	
Умножение чисел от 101 до 109 между собой $(100 + a)(100 + b) = 10\,000 + 100(a + b) + ab$	
Порядок действий	*Примеры*
1) Записываем число 1. 2) Справа записываем сумму чисел из разряда единиц у множителей. 3) Ещё правее записываем произведение этих же чисел.	1) $102 \cdot 104 = 10\,000 + 100(2 + 4) + 2 \cdot 4 = 10\,000 + 600 + 8 = 10\,608$. 2) $109 \cdot 108 = 10\,000 + 100(9 + 8) + 9 \cdot 8 = 10\,000 + 1700 + 72 = 11\,772$.
Умножение чисел, бóльших 10 $(10 + a)(10 + b) = 10(10 + a + b) + ab$	

Порядок действий	*Примеры*
1. К одному из множителей прибавляем единицы второго множителя, получаем десятки. 2. Перемножаем единицы. 3. Складываем десятки с произведением единиц.	1) $12 \cdot 19 = 10(10 + 2 + 9) + 2 \cdot 9 = 210 + 18 = 228$ 2) $16 \cdot 13 = 10(10 + 6 + 3) + 6 \cdot 3 = 190 + 18 = 208$

Умножение чисел с одинаковыми десятками и числом единиц, дающих в сумме 10

$(1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5 = 10)$

• *Десятки* умножаем на следующее натуральное число: $2 \cdot 3$; $3 \cdot 4$; $5 \cdot 6$; $9 \cdot 10$; $11 \cdot 12$.

• *Единицы* просто перемножаем (если в произведении получилось однозначное число, то слева приписываем 0):
$1 \cdot 9 = 09$, $2 \cdot 8 = 16$, $3 \cdot 7 = 21$, $4 \cdot 6 = 24$, $5 \cdot 5 = 25$.

• *В результате*: слева — произведение десятков, справа — произведение единиц.

Примеры:

1) $42 \cdot 48 = (4 \cdot 5) \cdot 100 + (2 \cdot 8) = 2000 + 16 = \underline{20}\mathbf{16}$

2) $51 \cdot 59 = (5 \cdot 6) \cdot 100 + (1 \cdot 9) = 3000 + 9 = \underline{30}\mathbf{09}$

3) $83 \cdot 87 = (8 \cdot 9) \cdot 100 + (3 \cdot 7) = 7200 + 21 = \underline{72}\mathbf{21}$

4) $115^2 = 115 \cdot 115 = (11 \cdot 12) \cdot 100 + (5 \cdot 5) = 13200 + 25 = \underline{132}\mathbf{25}$

1.1.3. Дроби, действия над ними. Округление чисел

Признаки делимости	
на 2	Число оканчивается на чётную цифру (0, 2, 4, 6, 8).
на 3	Сумма цифр делится на 3.
на 4	Две последние цифры числа — или нули, или число, делящееся на 4.
на 5	Последняя цифра числа — 0 или 5.
на 6	Одновременное выполнение признаков делимости на 2 и на 3.
на 7	Отбросить последнюю цифру, умножить её на 2. Если получилось число, большее числа из оставшихся цифр, то следует вычесть из удвоенной последней цифры это число. Если число из оставшихся цифр больше, то надо из него вычесть удвоенную последнюю цифру.
на 8	Три последние цифры числа — нули или образуют число, делящееся на 8.
на 9	Сумма цифр числа делится на 9.
на 10	Последняя цифра числа — 0.
на 11	Разность между суммой цифр, стоящих на нечётных местах, и суммой цифр, стоящих на чётных местах, делится на 11.
на 13	Отбросить последнюю цифру, умножить её на 4 и прибавить к числу из оставшихся цифр.
на 25	Две последние цифры — нули или число, делящееся на 25.

Обыкновенные дроби и действия над ними

Основное свойство дроби:

$$\frac{m}{n} = \frac{m \cdot a}{n \cdot a};\ \frac{m}{n} = \frac{m : b}{n : b}$$

Сложение, вычитание дробей с одинаковыми знаменателями:

$$\frac{m}{n} + \frac{c}{n} = \frac{m + c}{n};\ \frac{m}{n} - \frac{c}{n} = \frac{m - c}{n}$$

Приведение дробей к наименьшему общему знаменателю (нахождение наименьшего общего кратного знаменателей — НОК):

Пример: $\frac{3}{8}, \frac{7}{10}, \frac{11}{12}$.

$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, $10 = 2 \cdot 5$, $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$,

НОК $(8, 10, 12) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 = 120$,

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 15}{120} = \frac{45}{120};\ \frac{7}{10} = \frac{7 \cdot 12}{120} = \frac{84}{120},$$

$$\frac{11}{12} = \frac{11 \cdot 10}{120} = \frac{110}{120}.$$

Сложение смешанных чисел:

Пример: $2\frac{3}{8} + 4\frac{7}{8} = 6 + \frac{3 + 7}{8} = 6\frac{10}{8} = 7\frac{2}{8} = 7\frac{1}{4}$.

Вычитание смешанных чисел:

Пример: $5\frac{3}{11} - 2\frac{6}{11} = 4\frac{14}{11} - 2\frac{6}{11} = 2 + \frac{14 - 6}{11} = 2\frac{8}{11}$.

Умножение дробей: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Взаимно обратные числа a и b, если $a \cdot b = 1$.

Пример:

$1{,}2 = \frac{6}{5}$ и $\frac{5}{6}$; $\frac{6}{5} \cdot \frac{5}{6} = 1$.

Деление дробей:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Умножение смешанных чисел:

Пример:

$$2\frac{1}{7} \cdot 3\frac{2}{5} = \frac{15}{7} \cdot \frac{17}{5} = \frac{15 \cdot 17}{7 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 17}{7} = \frac{51}{7} = 7\frac{2}{7}.$$

Десятичные дроби и действия над ними

Бесконечная десятичная дробь — дробь, у которой в дробной части бесконечное множество цифр.

Периодическая бесконечная дробь — дробь, ряд цифр которой постоянно повторяется.

Пример: 2,838383... = 2,(83) — периодическая дробь;

57,072351748... — непериодическая дробь.

Сложение и вычитание десятичных дробей

1) Уравнять количество цифр после запятой во всех десятичных дробях, участвующих в вычислении, приписывая нули.

2) Сложить или вычесть получившиеся дроби по разрядам.

Пример: 5,08 – 3,125 = 5,080 – 3,125 = 1,955.

Умножение десятичных дробей

1) Перемножить две десятичные дроби, как целые числа, не обращая внимания на запятые.

2) В полученном произведении отделить справа запятой столько цифр, сколько их было после запятых в обоих множителях вместе.

3) Деление десятичных дробей на целые числа производят так же, как деление целых чисел, а запятую в частном ставят после того, как закончено деление целой части.

Деление десятичных дробей на десятичную дробь

1) Перенести вправо запятую в делимом и делителе на столько цифр, сколько их имеется в дробной части делителя.

2) Разделить получившиеся числа, т.е. деление будет выполняться на целое число.

Перевод обыкновенной дроби в десятичную

Чтобы записать обыкновенную дробь в виде десятичной, нужно привести её к одному из знаменателей 10, 100, 1000 и т.д.

• Если знаменатель обыкновенной дроби не имеет никаких простых делителей, кроме 2 и 5, то эту обыкновенную дробь можно представить в виде десятичной.

Пример:

$$\frac{5}{8} = \frac{5}{2^3} = \frac{5 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{625}{1000} = 0{,}625;$$

$$\frac{7}{40} = \frac{7}{2^3 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5 \cdot 5^2} = \frac{175}{1000} = 0{,}175;$$

$$\frac{21}{60} = \frac{7}{20} = \frac{7}{2^2 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 5}{2^2 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{35}{100} = 0{,}35.$$

• Если знаменатель обыкновенной дроби имеет хотя бы один простой делитель, отличный от 2 и 5, и эта дробь несократима, то её нельзя представить в виде десятичной.

Обыкновенная дробь	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}$
Десятичная дробь	0,125	0,2	0,25	0,5	0,75	0,4

Обыкновенная дробь	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$
Десятичная дробь	0,6	0,8	0,375	0,625	0,875

Округление чисел

• Заменяют нулями цифры, стоящие правее данного разряда, а если они стоят после запятой, то их отбрасывают.

• Если цифра в следующем разряде после данного разряда равна 0, 1, 2, 3, 4, то в данном разряде оставляют ту же цифру, которая была.

• Если цифра в следующем разряде после данного разряда равна 5, 6, 7, 8, 9, то к цифре данного разряда прибавляют единицу.

Примеры:

1) Округлим число 3,76 до десятых.

Решение. В разряде сотых цифра 6, поэтому десятые увеличиваем на 1, остальные разряды обнуляем, а так как нули оказываются после запятой, то отбрасываем их, $3{,}76 \approx 3{,}8$.

2) Округлим число 6324,5 до тысяч.

Решение. В разряде сотен цифра 3, значит, тысячи оставляем без изменения, остальные разряды обнуляем, а стоящие после запятой отбрасываем, $6324{,}5 \approx 6000$.

3) Округлим 7835 до сотен; до тысяч.

Решение.
$7835 \approx 7800$ — округление до сотен;
$7835 \approx 8000$ — округление до тысяч.

4) Округлим 5,0229 до сотых; до тысячных.

Решение.
$5{,}0229 \approx 5{,}02$ — округление до сотых;
$5{,}0229 \approx 5{,}023$ — округление до тысячных.

1.1.4. Отношения, пропорции и проценты

Отношения

Отношение двух чисел — частное двух чисел.

• Отношение двух чисел показывает, во сколько первое число больше второго или какую часть первое число составляет от второго.

Пример.

Отношение числа 12 к числу 4 есть частное $12 : 4 = 3$, значит, 12 больше 4 в 3 раза. Отношение числа $5\frac{1}{4}$ к числу $6\frac{1}{8}$ есть частное $5\frac{1}{4} : 6\frac{1}{8} = \frac{6}{7}$, следовательно, число $5\frac{1}{4}$ составляет $\frac{6}{7}$ от числа $6\frac{1}{8}$.

Отношение величин (отношение длин, отношение масс, отношение площадей и т. д.) — отношение значений этих величин, измеренных одной и той же единицей измерения.

Пример.

Известно, что масса ребёнка — 20 кг, а масса взрослого человека 70 кг, тогда отношение масс равно $20 \text{ кг} : 70 \text{ кг} = \frac{20 \text{ кг}}{70 \text{ кг}} = \frac{2}{7}$, т. е. масса ребёнка составляет $\frac{2}{7}$ от массы взрослого человека.

• Отношения часто выражают в процентах.

Пример.

В классе 5 отличников из 25 учеников.

$\frac{5}{25} = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\ \%$.

Значит, в этом классе 20 % отличников.

Нахождение части от целого и целого по его части	
Нахождение части от целого	Чтобы найти часть от числа, выраженную дробью, нужно это число умножить на данную дробь. *Пример*. В школе из 200 учеников $\frac{3}{4}$ занимаются спортом. Сколько учеников школы занимаются спортом? *Решение*. $200 \cdot \frac{3}{4} = \frac{200 \cdot 3}{4} = 150$ учеников.
Нахождение целого по части	Чтобы найти число по его части, выраженной дробью, нужно разделить на эту дробь число, ей соответствующее. *Пример*. 150 учеников занимаются спортом, это $\frac{3}{4}$ всех учащихся. Сколько всего учеников в данной школе? *Решение*. $150 : \frac{3}{4} = \frac{150 \cdot 4}{3} = 200$ учеников.
Нахождение части в долях целого	Чтобы выразить часть в долях целого, надо разделить часть на целое. *Примеры*: 1) 150 школьников из 200 учеников данной школы занимаются спортом. Какая часть школьников занимается спортом? *Решение*. $\frac{150}{200} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ всех школьников. 2) Какую часть составляет 20 от 100? *Решение*. $\frac{20}{100} = \frac{2}{10} = 0{,}2 = \frac{1}{5}$.

Пропорция

Пропорция — равенство двух отношений:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ или } a : b = c : d,$$

где a, d — крайние члены пропорции; b, c — средние члены пропорции.

Основное свойство пропорции: если $ad = bc$,

то пропорция $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ верная.

Прямо пропорциональная зависимость. Если при увеличении (или уменьшении) величины m величина n во столько же раз увеличивается (или уменьшается), то m и n прямо пропорциональны.

Примеры прямо пропорциональных величин

- Количество товара и его стоимость при постоянной цене.
- Скорость и длина пути при постоянном времени.
- Длина пути, проходимого равномерно движущимся телом, и время его движения.
- Длина прямоугольника и его площадь при постоянной ширине.
- Объём параллелепипеда и площадь его основания при постоянной высоте.
- Величина дроби и её числитель при постоянном знаменателе.
- Объём выполненной работы и затраченное на неё время при постоянной производительности труда.
- Производительность труда и объём выполненной работы при постоянном времени.

Обратно пропорциональная зависимость. Если при увеличении (при уменьшении) величины m величина n во столько же раз соответственно уменьшается (увеличивается), то эти величины обратно пропорциональны.

Примеры обратно пропорциональных величин

• Количество товара и его цена при одинаковой стоимости покупки.

• Скорость и время движения равномерно движущегося объекта при одинаковой длине пути.

• Производительность труда и время работы при одинаковом объёме работы.

• Число рабочих и время выполнения ими заданной работы при одинаковой производительности труда всех рабочих.

• Величина дроби и её знаменатель при постоянном числителе.

Процент

Процент (%) — сотая часть числа.

$$\frac{1}{100} = 0{,}01 = 1\ \%$$

Нахождение процента от величины	**Нахождение величины по её проценту**
Например, требуется найти 13% от 80. *Решение*. $0{,}13 \cdot 80 = 10{,}4$.	*Например*, имеем 10,4 — это 13%. Необходимо найти 100 %. *Решение*. $10{,}4 : 0{,}13 = 80$.

• Если в условии задачи сказано, что число увеличилось (уменьшилось) на r %, то надо прибавить (вычесть) r % к (из) 100 %, то есть получится 100 % + r % (100 % – r %), затем записать результат в виде дроби и умножить на первоначальное число.

Примеры:

1) Цена товара 200 руб. Через месяц эта цена выросла на 30 %. Какова новая цена товара?

Решение. 100 % + 30 % = 130 % = 1,3.
$200 \cdot 1{,}3 = 260$ (руб.)

Ответ: 260 рублей.

2) Первоначальная цена товара 300 руб. Скидка составила 40 %. Найти новую цену.

Решение. 100 % – 40 % = 60 % = 0,6.
$300 \cdot 0{,}6 = 180$ (руб.)

Ответ: 180 рублей.

Сложные проценты

Сложный процент — это процент, начисленный на процент.

Формула сложных процентов:

$$B = B_0(1 + 0{,}01r)^n,$$

где B_0 — начальная сумма, B — конечная сумма, r % — процентная ставка, n — число периодов.

• Для удобства вычислений сложных процентов выражение $1 + 0{,}01r$ часто заменяют на переменную k, т.е. $k = 1 + 0{,}01r$.

Пример. Известно, что сумма вклада равна 5000 руб.; процентная ставка — 10 %; вклад оформлен на 3 года. Какая сумма будет на счету в конце срока?

Решение.
Из условия следует, что $B_0 = 5000$, $r = 10\ \% = 0{,}1$.
Отсюда, $k = 1{,}1$; $n = 3$.
$B = B_0 k^n = 5000 \cdot 1{,}1^3 = 5000 \cdot 1{,}331 = 6655$ (руб.).

Ответ: 6655 рублей сумма счёта в конце срока вклада.

Секреты ЕГЭ

Дано: $p = r\ \% = \dfrac{r}{100}$. Требуется найти r % от числа a.

$$\textit{Решение}: \frac{ar}{100} = ap;$$

$$k = 100\ \% + r\ \% = 1 + \frac{r}{100} = 1 + p.$$

Например, $p = 2\ \% = 0{,}02$.

$$k = 100\ \% + 2\ \% = 1 + \frac{2}{100} = 1{,}02.$$

1.1.5. Модуль и его свойства

Определение модуля числа

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Геометрический смысл модуля

Модуль числа — это расстояние на координатной прямой от начала отсчёта до точки, обозначающей соответствующее число. Данное расстояние измеряется в единичных отрезках.

Свойства модуля
$\lvert a \rvert \geqslant 0;$
$\lvert -a \rvert = \lvert a \rvert;$
$\lvert a^2 \rvert = \lvert a \rvert^2 = a^2;$
$\lvert ab \rvert = \lvert a \rvert \cdot \lvert b \rvert;$
$\lvert a : b \rvert = \lvert a \rvert : \lvert b \rvert,\ b \neq 0;$
$\lvert a + b \rvert \leqslant \lvert a \rvert + \lvert b \rvert;$
$\lvert a - b \rvert \geqslant \lvert a \rvert - \lvert b \rvert;$
$a^2 + b^2 \geqslant 2\lvert ab \rvert;$
$\lvert x \rvert = c,\ c \geqslant 0;\ x_1 = c,\ x_2 = -c;$
$\lvert x \rvert < c,\ c > 0;\ -c < x < c;$
$\lvert x \rvert > c,\ c > 0;\ x < -c,\ x > c.$

1.1.6. Положительные и отрицательные числа, действия над ними

$x > 0$ — положительное число $x < 0$ — отрицательное число $-x$ и x — противоположные числа
Сложение
1) Знак суммы всегда от большего модуля. 2) Одинаковые модули складываем, разные модули — вычитаем.

Вычитание
Заменяем сложением с противоположным числом. *Примеры*: -7 и 7; $-(-7)$ и -7 — противоположные числа; $-8 + 3 = -(8 - 3) = -5$; $-8 - 3 = -(8 + 3) = -11$; $-3 + 8 = 8 - 3 = 5$; $3 + 8 = 11$; $-8 - (-3) = -8 + 3 = -(8 - 3) = -5$; $3 - (-8) = 3 + 8 = 11$.
Умножение и деление
Одинаковые знаки в результате дают «плюс», разные знаки — «минус». Модули перемножаем или делим соответственно. *Примеры*: $-10 : 2 = -5$; $-18 \cdot (-4) = 72$.

1.1.7. Степени, корни и их свойства

Степень
Степень с натуральным (N) показателем
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$; $a^1 = a$ *Примеры*: $a^3 = a \cdot a \cdot a$; $4^5 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024$.
Степень с целым (Z) показателем
$a^0 = 1$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Примеры:

$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$;

$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$;

$\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} = 6{,}25.$

Степень с рациональным (Q) показателем

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, где $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, $a > 0$.

Примеры:

$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$;

$a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$;

$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4.$

Свойства степеней

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$a^m \cdot b^m = (ab)^m$

$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$, $b \neq 0$

Корень

Арифметический квадратный корень $\sqrt{a}$
(корень 2-ой степени)

$\sqrt{a} = b$, $a = b^2$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

Свойства арифметического квадратного корня

$$(\sqrt{a})^2 = a,\ a \geqslant 0$$

$$\sqrt{a^2} = |a|,\ a \in \mathbf{R}$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},\ a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},\ a \geqslant 0,\ b > 0$$

Корень n-ой степени $\sqrt[n]{a}$

$$\sqrt[n]{a} = b,\ a = b^n$$

- если n — чётное число, то $a \geqslant 0$;
- если n — нечётное число, то $a \in \mathbf{R}$.

Свойства корня n-ой степени

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}},\ b \neq 0$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

1.1.8. Логарифмы и их свойства

Понятие логарифма

$$log_a b = c,$$

где a — основание логарифма, b — выражение под знаком логарифма, c — логарифм; $b = a^c$, $a \neq 1$, $a > 0$, $b > 0$.

Основное логарифмическое тождество

$$a^{log_a b} = b$$

Примеры:

$5^{\log_5 8} = 8$;

$36^{\log_6 7} = (6^2)^{\log_6 7} = (6^{\log_6 7})^2 = 7^2 = 49$.

Свойства логарифмов $a \neq 1$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

$$\log_a b^k = k\log_a b$$

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$$

$$\log_{a^n} b^k = \frac{k}{n}\log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \ (c \neq 1)$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

Примеры:

- $\log_4 3{,}2 + \log_4 5 = \log_4(3{,}2 \cdot 5) = \log_4 16 = 2;$
- $\log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2}\log_2 2 = \frac{3}{2} = 1{,}5;$
- $\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2} = 1{,}5;$
- $\log_5 17 \cdot \log_{17} 5 = 1;$
- $27^{\log_9 25} = 25^{\log_9 27} = 25^{\frac{3}{2}\log_3 3} = 25^{\frac{3}{2}} =$
  $= (\sqrt{25})^3 = 5^3 = 125.$

$\log_{10} x = \lg x$ — **десятичный логарифм** числа x.
Примеры: $\lg 100 = 2$; $\lg 0{,}001 = -3$; $\lg 1 = 0$.

$\log_e x = \ln x$ — **натуральный логарифм** числа x, где e — иррациональное число и $e \approx 2{,}718281828459045...$
Примеры: $\ln e^2 = 2$; $\ln 1 = 0$.

1.2. Преобразование выражений с переменными

1.2.1. Раскрытие скобок

Раскрытие скобок, перед которыми стоит знак «плюс»:

- $-k + (-b + c - d) = -k - b + c - d.$
- $2x^2 + (6 + 5x - y) = 2x^2 + 6 + 5x - y.$

Раскрытие скобок, перед которыми стоит знак «минус»:

- $-(a - b + c) = -a + b - c.$
- $2m - (-\sqrt[3]{x^2} + 5) = 2m + \sqrt[3]{x^2} - 5.$

Произведение одночлена на многочлен:

- $x^2(2x^2 - y + z) = 2x^4 - yx^2 + zx^2.$
- $(3a^2b + 5ab^2 - c) \cdot ab = 3a^3b^2 + 5a^2b^3 - cab.$

Произведение многочленов:

$$(3x + 5y)(6x - 7y + 8b) = 3x \cdot 6x - 3x \cdot 7y + 3x \cdot 8b +$$
$$+ 5y \cdot 6x - 5y \cdot 7y + 5y \cdot 8b =$$
$$= 18x^2 - 21xy + 24xb + 30yx - 35y^2 + 40yb =$$
$$= 18x^2 + 9xy + 24xb - 35y^2 + 40yb.$$

1.2.2. Приведение подобных слагаемых

Приведение подобных слагаемых:

- $3ab - 4{,}2ab + 10ab = 8{,}8ab$;
- $7a + 2a - 5a + 11a = 15a$;
- $\frac{1}{2}m + \frac{5}{7}n + 1{,}5m - \frac{2}{7}n = 2m + \frac{3}{7}n$.

1.2.3. Формулы сокращённого умножения

Формулы сокращённого умножения (раскрытие скобок)
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$;
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$;
$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.

1.2.4. Различные способы разложения на множители

Вынесение общего множителя за скобки
$mk + mp = m(k + p)$

Формулы сокращённого умножения (разложение на множители)
$m^2 - k^2 = (m - k)(m + k)$
$m^2 + 2mk + k^2 = (m + k)^2$
$m^2 - 2mk + k^2 = (m - k)^2$
$m^3 + k^3 = (m + k)(m^2 - mk + k^2)$
$m^3 - k^3 = (m - k)(m^2 + mk + k^2)$
$m^3 + 3m^2k + 3mk^2 + k^3 = (m + k)^3$
$m^3 - 3m^2k + 3mk^2 - k^3 = (m - k)^3$
$m^4 - k^4 = (m^2 - k^2)(m^2 + k^2) = (m - k)(m + k)(m^2 + k^2)$

Метод группировки
$mk + mp + tk + tp =$ $= m(k + p) + t(k + p) = (k + p)(m + t)$
Пример. $3x - 21 + mx - 7m = 3(x - 7) + m(x - 7) = (x - 7)(3 + m)$.

1.3. Основы тригонометрии

1.3.1. Радианная и градусная меры произвольного угла

Радиан — длина дуги окружности, равная радиусу (в единичной окружности = 1).
Все окружности подобны, значит, отношение соответствующих длин отрезков прямых и кривых в окружностях постоянно.

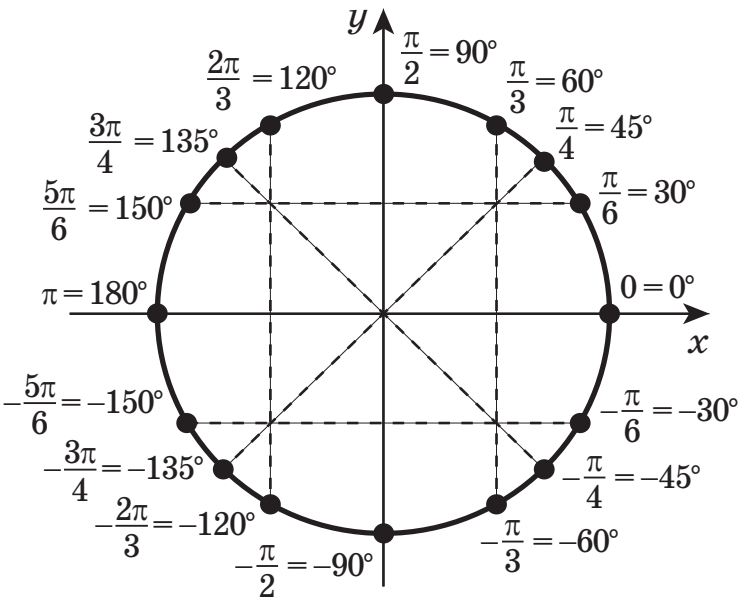
Если C — длина окружности, D — диаметр окружности, то для любых окружностей, верно, $\frac{C}{D} \approx$ $\approx 3{,}14$ или $\frac{C}{D} = \pi$, где π — бесконечная непериодическая десятичная дробь. Отсюда длина окружности $C = \pi D$, $D = 2R$, где R — радиус, $C = 2\pi R$. Если $R = 1$, то $C = 2\pi$.

При записи единиц измерения радиан опускают, т.е. $360° = 2\pi$ радиан, а пишем $360° = 2\pi$.

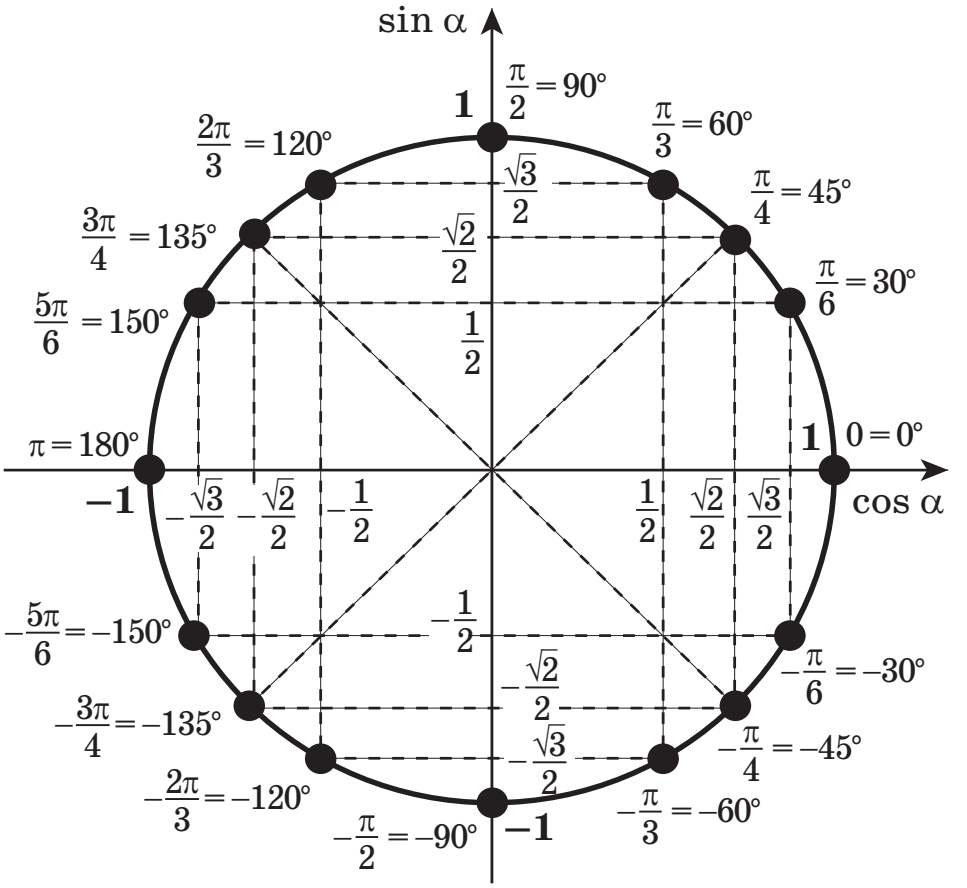
Окружность соответствует углу $360°$. Соотношение углов и соответствующих дуг окружности:

Градусы	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**180°**	**360°**
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

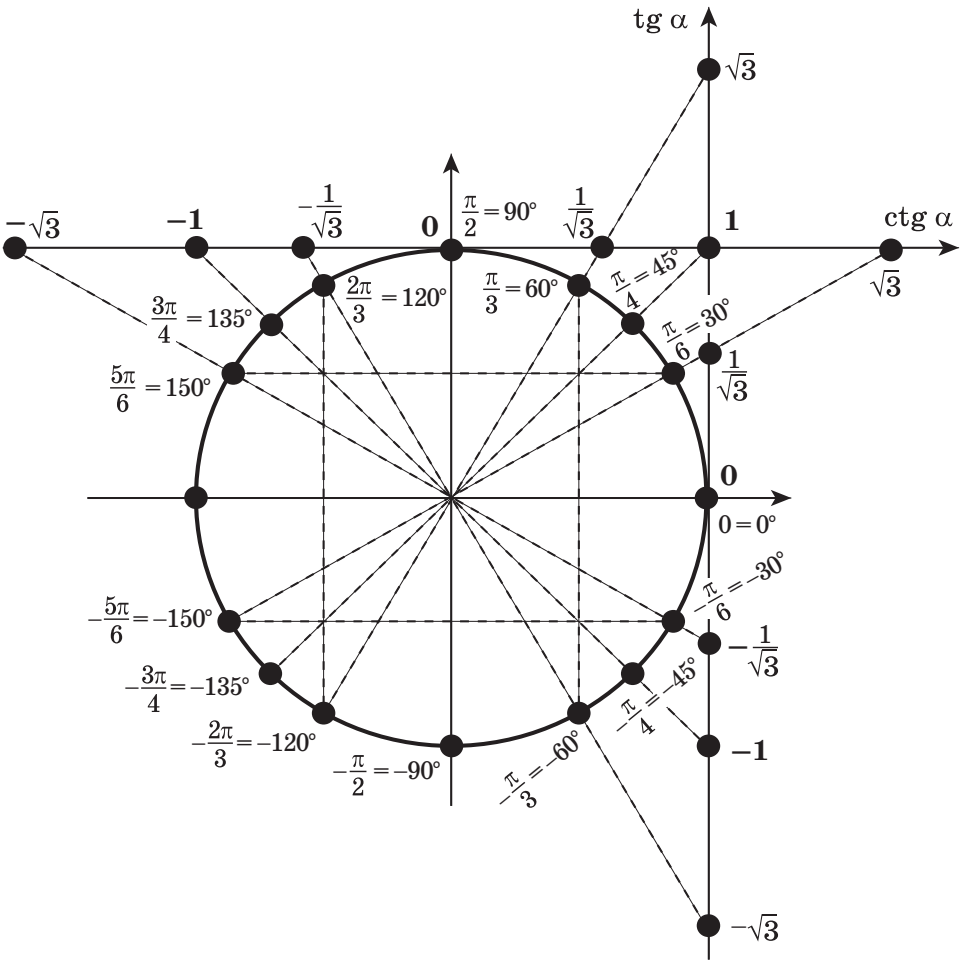
Градусы	**120°**	**135°**	**150°**	**270°**
Радианы	$\frac{2\pi}{3} =$ $= \pi - \frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4} =$ $= \pi - \frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6} =$ $= \pi - \frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2} =$ $= \pi + \frac{\pi}{2}$



1.3.2. Синус, косинус, тангенс и котангенс произвольного угла



$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$	$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$	$\sin 0$	$\sin\frac{\pi}{6}$	$\sin\frac{\pi}{4}$	$\sin\frac{\pi}{3}$	$\sin\frac{\pi}{2}$
$\cos\pi$	$\cos\frac{5\pi}{6}$	$\cos\frac{3\pi}{4}$	$\cos\frac{2\pi}{3}$	$\cos\frac{\pi}{2}$	$\cos\frac{\pi}{3}$	$\cos\frac{\pi}{4}$	$\cos\frac{\pi}{6}$	$\cos 0$
-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$-\frac{\sqrt{4}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$



$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$	$\operatorname{tg} 0$	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}$	$\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}$	$\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}$	$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$	$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$	$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$	$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$
$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

1.3.3. Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

1.3.4. Формулы приведения

Назовём тригонометрические функции синус и косинус, тангенс и котангенс **кофункциями**, так как их названия отличаются только приставкой «ко».

Формулой приведения будем называть равенство, в одной части которого записана какая-нибудь тригонометрическая функция от суммы или разности, содержащей точки $\frac{\pi k}{2}$, т.е. $\sin\left(\frac{\pi k}{2} \pm \alpha\right)$, $\cos\left(\frac{\pi k}{2} \pm \alpha\right)$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi k}{2} \pm \alpha\right)$, $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi k}{2} \pm \alpha\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Далее следуем мнемоническому (упрощённому) правилу:

1) Знак. Перед приведённой функцией ставится тот знак, который имеет исходная функция, если условно считать $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2) Исходная функция меняется на кофункцию, если в выражении $\frac{\pi k}{2}$ «k» — число нечётное, т.е. $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, и не меняется, если k — число чётное, т.е. πk, $k \in \mathbf{Z}$.

Примеры:

• $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$, так как $\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ во II четверти, где sin больше нуля, а наличие $\frac{\pi}{2}$ в формуле требует поменять sin на cos.

• $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$, так как $(\pi-\alpha)$ во II четверти, где cos меньше нуля, а наличие π в формуле позволяет не менять cos.

• $\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha$, так как $\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)$ в III четверти, где tg больше нуля, а наличие $\frac{7\pi}{2}$ в формуле требует поменять tg на ctg.

• $\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha$, так как $\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)$ в I четверти, где tg больше нуля, а наличие $\frac{5\pi}{2}$ в формуле требует поменять ctg на tg.

• $\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha$.

• $\cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha$.

• $\operatorname{tg}(270^\circ+\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$.

• $\operatorname{ctg}(180^\circ+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha$.

1.3.5. Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Примеры:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{6}\sin\alpha=$

$=\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha.$

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha=$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha).$

1.3.6. Синус и косинус двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha-1 = 1-2\sin^2\alpha$$

1.4. Уравнения и системы уравнений

1.4.1. Уравнение с одной переменной, корень уравнения

Уравнение с одной переменной (уравнение с одной неизвестной) — равенство, содержащее переменную.

Корень уравнения — значение переменной, при котором уравнение обращается в верное равенство.

Решить уравнение — найти все его корни или доказать, что корней нет.

Правила решения уравнений
• Если любое слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом знак слагаемого, то корни уравнения не изменяются. • Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, то корни уравнения не изменяются.

1.4.2. Линейные уравнения

Линейное уравнение — целое уравнение вида $ax + b = 0$, где x — переменная, a и b — некоторые числа.
Решение линейных уравнений
• Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $x = -\frac{b}{a}$; • Если $a \neq 0$, $b = 0$, то $x = 0$; • Если $a = 0$, $b \neq 0$, то корней нет; • Если $a = 0$, $b = 0$, то x — любое число.

1.4.3. Квадратные уравнения

Квадратное уравнение — уравнение вида: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$		
Неполные квадратные уравнения		
• при $c = 0$, $b \neq 0$ $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$ $x(ax + b) = 0$ $x = 0$ или $x = -\frac{b}{a}$	• при $c = 0$, $b = 0$ $\boldsymbol{ax^2 = 0}$ $x^2 = 0$ $x = 0$	• при $c \neq 0$, $b = 0$ $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$ $x^2 = -\frac{c}{a}$; $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ если $-\frac{c}{a} < 0$, то корней нет

Вычисление дискриминанта D и корней квадратного уравнения

- $D = b^2 - 4ac$,
- $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
- Если b — чётное, то $D_1 = k^2 - ac$, $k = \dfrac{b}{2}$,

  $x_{1,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$

Теорема Виета

$ax^2 + bx + c = 0$	$x^2 + bx + c = 0$ ($a = 1$) — **приведённое квадратное уравнение**
$x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$	$x_1 \cdot x_2 = c$
$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$	$x_1 + x_2 = -b$

- Если $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{c}{a}$.
- Если $a - b + c = 0$, то $x_1 = -1$, $x_2 = -\dfrac{c}{a}$.

Решение неприведённого квадратного уравнения по теореме Виета

$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 + bm + ac = 0$

$D = b^2 - 4ac$,

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$,

$m_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2}$, $x_{1,2} = \dfrac{m_{1,2}}{a}$,

находим $m_{1,2}$ по теореме Виета.

Пример. Решите уравнение: $3x^2 - 14x + 16 = 0$.

Решение.

1) $D = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16 =$

$= 196 - 192 = 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ 2 корня.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{14 + \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{14 + 2}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{14 - \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{14 - 2}{6} = \frac{12}{6} = 2.$$

Ответ: $x_1 = 2\frac{2}{3}$, $x_2 = 2$.

2) $b = -14$ — чётное, $k = \frac{b}{2}$.

$D = k^2 - ac = (-7)^2 - 3 \cdot 16 = 49 - 48 = 1$.

$$x_1 = \frac{-k + \sqrt{D_1}}{a} = \frac{7 + 1}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

$$x_2 = \frac{-k - \sqrt{D_1}}{a} = \frac{7 - 1}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Ответ: $x_1 = 2\frac{2}{3}$, $x_2 = 2$.

3) Применяя теорему Виета, перепишем данное уравнение в виде $m^2 + bm + ac = 0$.

$m^2 - 14m + 3 \cdot 16 = 0$, $m^2 - 14m + 48 = 0$.

$x_1 = \frac{m_1}{3}$, $x_2 = \frac{m_2}{3}$, m_1 и m_2 находим подбором:

$m_1 \cdot m_2 = c$, $m_1 + m_2 = -b \to 8 \cdot 6 = 48$, $8 + 6 = 14$.

$x_1 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{6}{3} = 2$. Теперь проверяем корни:

$\frac{8}{3} \cdot 2 = \frac{16}{3} = \frac{c}{a}$, $\frac{8}{3} + \frac{6}{3} = \frac{14}{3} = -\frac{b}{a}$.

Ответ: $x_1 = 2\frac{2}{3}$, $x_2 = 2$.

1.4.4. Дробно-рациональные уравнения

Рациональные уравнения — уравнения, левая и правая части которых являются рациональными выражениями.

Алгоритм решения рациональных уравнений

Разделить левую и правую части уравнения на общий делитель, если таковой имеется.

↓

Разложить на множители многочлены в знаменателях, если они раскладываются.

↓

Домножить на наименьший общий знаменатель левую и правую части уравнения.

↓

Решить полученное целое уравнение.

↓

Проверить корни уравнения, не превращают ли они знаменатель первоначального уравнения в нуль. Если да, то исключить такие корни.

↓

Записать ответ.

Примеры:

1) $\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2^{\backslash x-1}}{x-1} - 3^{\backslash x^2-2x+1} = 0 \mid (x-1)^2 \neq 0,\ x \neq 1.$

$1 + \underline{2x} - 2 - 3x^2 + \underline{6x} - 3 = 0,$

$3x^2 - 8x + 4 = 0.$

$x_1 = \frac{2}{3};$

$x_2 = 2.$

Ответ: $x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = 2.$

2) $\frac{60}{x+10} + 3 = \frac{60}{x} \mid :3$

$\frac{20^{\backslash x}}{x+10} + 1^{\backslash x^2+10x} = \frac{20^{\backslash x+10}}{x} \mid \begin{array}{l} x(x+10) \neq 0,\ x \neq 0, \\ x \neq -10. \end{array}$

$20x + x^2 + 10x = 20x + 200,$

$x^2 + 10x - 200 = 0,$

$x_1 = -20,$

$x_2 = 10.$

Ответ: $-20;\ 10.$

Секреты ЕГЭ

Часто, решая уравнения с большими числами, мы получаем дискриминант квадратного уравнения равный пятизначному числу. В некоторых случаях можно упростить решение, воспользовавшись заменой переменной.

Примеры:

1) $\dfrac{50}{25-y}=\dfrac{50-3y}{y}$.

Решение.

Сократим дроби в левой и правой части уравнения на 25, $m=\dfrac{y}{25}$, т.е. $y=25m$.

$$\frac{2}{1-m}=\frac{2-3m}{m}\ \Big|\cdot m(1-m)\neq 0,\ m\neq 0,\ m\neq 1$$

$2m=2-5m+3m^2$;

$3m^2-7m+2=0$;

$m_1=\dfrac{1}{3}$,

$m_2=2$;

$y_1=25m_1=\dfrac{25}{3}=8\dfrac{1}{3}$;

$y_2=25m_2=25\cdot 2=50$.

Ответ: $8\dfrac{1}{3}$; 50.

2) $\dfrac{180}{x+12}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{180}{x}$.

Решение.
Сократим две дроби с числителем 180 на 12,

$m=\dfrac{x}{12}$, т.е. $x=12m$,

$$\frac{15^{\backslash 6m}}{m+1}+\frac{1}{6}^{\backslash m^2+m}=\frac{15}{m}^{\backslash 6m+6}\ \Bigg|\ \begin{array}{l}\cdot 6m(m+1)\neq 0,\ m\neq 0\\ m\neq -1\end{array}$$

$15\cdot 6m+m^2+m=15\cdot 6m+90;$
$m^2+m-90=0;$
$m_1=9,\ m_2=-10;$
$x_1=9\cdot 12=108,\ x_2=-10\cdot 12=-120.$

Ответ: 108.

1.4.5. Иррациональные уравнения

Иррациональные уравнения — уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня.

Основные типы иррациональных уравнений	
$\sqrt[n]{f(x)}=a$	• Если n — чётно, то при $a\geqslant 0$ — $f(x)=a^n$; при $a<0$ — решений нет; • Если n — нечётно, то $f(x)=a^n$.
$\sqrt{f(x)}=g(x)$	$\begin{cases}g(x)\geqslant 0,\\ f(x)=g^2(x).\end{cases}$
$\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)}$	• Если n — чётно, то $\begin{cases}g(x)\geqslant 0,\\ f(x)=g(x),\end{cases}$ или $\begin{cases}f(x)\geqslant 0,\\ f(x)=g(x).\end{cases}$ • Если n — нечётно, то $f(x)=g(x)$.

Примеры:

1) $\sqrt{20-x}=x$.

Решение.

$\begin{cases}20-x=x^2,\\ x\geqslant 0;\end{cases}\begin{cases}x^2+x-20=0,\\ x\geqslant 0;\end{cases}\begin{cases}x=4,\\ x\geqslant 0;\end{cases}$ или $\begin{cases}x=-5,\\ x\geqslant 0.\end{cases}$

Ответ: 4.

2) $\sqrt{10+x}=\sqrt{3-x}$.

Решение.

$\begin{cases}10+x=3-x,\\ 3-x\geqslant 0;\end{cases}\begin{cases}2x=-7,\\ x\leqslant 3;\end{cases}\begin{cases}x=-3{,}5,\\ x\leqslant 3.\end{cases}$

Ответ: $-3{,}5$.

1.4.6. Показательные уравнения

Показательные уравнения — уравнения, в которых переменная входит только в показатели степени при постоянных основаниях.

Простейшее показательное уравнение
$a^x=b$, $a>0$, $a\neq 1$.

- Если $b>0$, то $x=\log_a b$.
- Если $b\leqslant 0$, то решений нет.

Примеры:

1) $2^x=7$, $x=\log_2 7$;

2) $3^x=-4$, $-4<0$, решений нет.

Уравнение $a^{p(x)}=a^{g(x)}$, $a>0$, $a\neq 1$

Решение: $p(x)=g(x)$.

Пример.

$4^{x-15}=\frac{1}{2}$; $2^{2(x-15)}=\frac{1}{2}$; $2^{2x-30}=2^{-1}$; $2x-30=-1$;

$2x=29$, $x=14{,}5$.

Уравнение $a^{p(x)} = b^{p(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$

$$\textit{Решение}: \frac{a^{p(x)}}{b^{p(x)}} = 1; \left(\frac{a}{b}\right)^{p(x)} = \left(\frac{a}{b}\right)^{0}; p(x) = 0.$$

Пример. $4^{4-x} = 0{,}4 \cdot 10^{4-x}$.

Решение: $\left(\frac{4}{10}\right)^{4-x} = 0{,}4$; $0{,}4^{4-x} = 0{,}4$; $4 - x = 1$; $x = 3$.

Ответ: 3.

Методы решения показательных уравнений

• **Замена переменной**

Пример. $4^{x+1} - 4 \cdot 2^x - 3 = 0$.

Решение.

$4 \cdot 4^x - 4 \cdot 2^x - 3 = 0$; $4 \cdot (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x - 3 = 0$.

Замена $2^x = t$. $4t^2 - 4t - 3 = 0$; $t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_2 = \frac{3}{2}$;

$2^x = -\frac{1}{2}$ — нет решений; $2^x = \frac{3}{2}$; $x = \log_2 \frac{3}{2}$;

$x = \log_2 3 - 1$.

Ответ: $\log_2 3 - 1$.

• **Однородные уравнения**

Пример. $9^x - 2 \cdot 6^x - 3 \cdot 4^x = 0$.

Решение.

$(3^x)^2 - 2 \cdot 2^x \cdot 3^x - 3 \cdot (2^x)^2 = 0 \mid : (2^x)^2$;

$\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 3 = 0$. Замена $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t$; $t^2 - 2t - 3 = 0$;

$t_1 = -1$, $t_2 = 3$; $\left(\frac{3}{2}\right)^x = -1$ — решений нет; $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 3$,

$x = \log_{1,5} 3$.

Ответ: $\log_{1,5} 3$.

1.4.7. Логарифмические уравнения

Логарифмические уравнения — уравнения, в которых переменная находится под знаком логарифма или в основании логарифма.

Простейшее логарифмическое уравнение

$$\log_a x = b,$$

$$a > 0,\ a \neq 1,\ x = a^b.$$

Пример.

$\log_3 (5 - x) = 5.$

Решение.

$5 - x = 3^5;\ x = 5 - 243;\ x = -238.$

Ответ: -238.

Уравнение

$$\log_a p(x) = \log_a g(x),$$

$$\begin{cases} p(x) = g(x), \\ p(x) > 0. \end{cases}$$ (примечание, или $g(x) > 0$, что удобнее)

Пример.

$\log_3 (x^2 - 2) = \log_3 (x + 4).$

Решение.

$$\begin{cases} x^2 - 2 = x + 4, \\ x + 4 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0, \\ x > -4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -2, \\ x > -4; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_2 = 3, \\ x > -4. \end{cases}$$

Ответ: $-2;\ 3$.

Замена переменной

Пример. $2\log_9^2 x - 3\log_9 x + 1 = 0$.

Решение.

Замена: $\log_9 x = t$, $2t^2 - 3t + 1 = 0$; $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{2}$;

$\log_9 x = 1$ или $\log_9 x = \frac{1}{2}$; $x = 9$ или $x = 9^{\frac{1}{2}}$, $x = 3$.

Ответ: 3; 9.

1.4.8. Тригонометрические уравнения

Решение простейших тригонометрических уравнений

Уравнение	Общее решение	Частные случаи		
		$a = 0$	$a = 1$	$a = -1$
$\sin x = a$, $\lvert a \rvert \leqslant 1$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$ или $\begin{cases} x_1 = \arcsin a + 2\pi k \\ x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi k \end{cases}$	$x = \pi k$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$
$\cos x = a$, $\lvert a \rvert \leqslant 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi k$ или $\begin{cases} x_1 = \arccos a + 2\pi k \\ x_2 = -\arccos a + 2\pi k \end{cases}$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$	$x = 2\pi k$	$x = \pi + 2\pi k$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi k$			
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$			

где $k \in \mathbf{Z}$ ($\mathbf{Z}$ — множество целых чисел: ..., −4, −3, − 2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, ...)

Методы решений тригонометрических уравнений

Метод замены переменной

Пример. $3\cos 2x - 5\sin x + 1 = 0$.

Решение. $3(1 - 2\sin^2 x) - 5\sin x + 1 = 0$. Замена $\sin x = t$, $3(1 - 2t^2) - 5t + 1 = 0$; $3 - 6t^2 - 5t + 1 = 0$; $6t^2 + 5t - 4 = 0$; $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = -\frac{4}{3}$; $\sin x = \frac{1}{2}$, $\sin x = -\frac{4}{3} < -1$; $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Однородные уравнения

Пример. $3\cos^2 x - \sin^2 x + \sin 2x = 2$.

Решение.

$3\cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin x \cos x = 2\cos^2 x + 2\sin^2 x$;

$\cos^2 x - 3\sin^2 x + 2\sin x \cos x = 0 \quad | : \cos^2 x$;

$1 - 3\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x = 0$; $3\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 1 = 0$; $\operatorname{tg} x = 1$ или $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}$;

$x = \operatorname{arctg} 1 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ или $x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

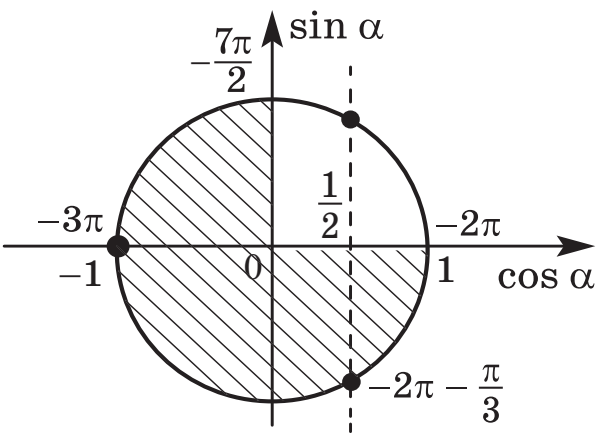
Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, $-\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Отбор корней тригонометрического уравнения на промежутке

Пример.

$\cos x = \frac{1}{2}$ или $\cos x = -1$.

$x \in \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.



$-2\pi \overset{\times 3}{\backslash} -\frac{\pi}{3} = \frac{-6\pi - \pi}{3} = -\frac{7\pi}{3}$.

Ответ: $-3\pi; -\frac{7\pi}{3}$.

1.4.9. Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных

Система линейных уравнений с двумя переменными — система вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2; \end{cases}$$

где a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 — некоторые числа, x и y — переменные.

Например, $\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ 15x - 6y = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 8. \end{cases}$

Решение системы уравнений с двумя переменными — пара значений переменных, которая обращает каждое уравнение системы в верное равенство.

Способы решения систем линейных уравнений

I. Графический способ	II. Способ подстановки	III. Способ сложения

I. Графический способ решения системы уравнений

Графический способ состоит в том, что в одной координатной плоскости строят два графика, каждый из которых соответствует одному из уравнений. Координаты точек пересечения этих графиков удовлетворяют и первому, и второму уравнению, т. е. являются решением системы.

Решения системы линейных уравнений с двумя переменными (в каждом уравнении хотя бы один из коэффициентов не равен нулю) графическим способом

• Если графики уравнений (прямые) пересекаются, то система имеет единственное решение, равное координатам точки пересечения;

• если графики уравнений (прямые) параллельны, то система не имеет решений;

• если графики уравнений (прямые) совпадают, то система имеет бесконечно много решений.

II. Способ подстановки для решения систем уравнений с двумя переменными

1. Выражают одну переменную через другую в одном из уравнений системы.

2. Полученное выражение подставляют в другое уравнение системы вместо выраженной переменной.

3. Решают уравнение, получившееся в результате подстановки.

4. Полученное значение переменной подставляют в первое уравнение и находят значение оставшейся переменной.

Примеры:

1) Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} xy = 10, \\ x - y = 3. \end{cases}$$

Решение. Выразим переменную x через y из второго уравнения $x = y + 3$. Подставим в первое уравнение вместо переменной x выражение $y + 3$.

Решим полученное уравнение с переменной y:
$(y + 3)y = 10$; $y^2 + 3y - 10 = 0$;

$y_1 = 2$;

$y_2 = -5$.

Подставим в уравнение $x = y + 3$ вместо y его значения.

$x_1 = 2 + 3$; $x_1 = 5$;

$x_2 = -5 + 3$; $x_2 = -2$.

Ответ: (5; 2) и (−2; −5).

2) Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9, \\ 3x - 6y = 10. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9, \\ 3x - 6y = 10; \end{cases}$$

$2x + 3y = 9$; $3y = 9 - 2x$;

$$y = \frac{9 - 2x}{3};$$

$$3x - 6 \cdot \frac{9 - 2x}{3} = 10;$$

$3x - 2 \cdot (9 - 2x) = 10$;

$3x - 18 + 4x = 10$;

$7x = 28$;

$$x = \frac{28}{7};\ x = 4;\ y = \frac{9 - 2 \cdot 4}{3};\ y = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left(4; \frac{1}{3}\right)$.

III. Способ сложения для решения систем уравнений с двумя переменными

1. Уравнения системы почленно умножают на некоторые множители, которые подбирают таким образом, чтобы коэффициенты при одной из переменных в обоих уравнениях стали противоположными числами.

2. Левые и правые части уравнений почленно складывают.

3. Находят значение одной из переменных, решая получившееся уравнение с одной переменной.

4. Находят значение второй переменной, подставляя в оставшееся уравнение значение первой переменной.

Примеры:

1) $\begin{cases} x^2 + y = 6, \\ x - y = 6. \end{cases}$

Решение.

Коэффициенты при переменной y в первом и втором уравнениях — противоположные числа 1 и –1. Поэтому складываем почленно уравнения и получаем уравнение с одной переменной:

$x^2 + x = 12$; $x^2 + x - 12 = 0$;

$x_1 = -4$; $x_2 = 3$.

Найдём вторую переменную:

$y = x - 6$;

$y_1 = -4 - 6 = -10$;

$y_2 = 3 - 6 = -3$.

Ответ: (–4; –10) и (3; –3).

2) $\begin{cases} 12x - 5y = 1, \\ 6x + y = 4. \end{cases}$

Решение.

Домножим второе уравнение на -2, чтобы коэффициенты при переменной x были противоположными числами 12 и -12.

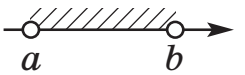
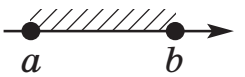
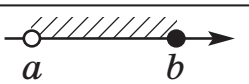
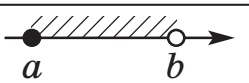
$$\begin{cases} 12x - 5y = 1, \\ -2 \cdot 6x - 2 \cdot y = -2 \cdot 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} 12x - 5y = 1, \\ -12x - 2y = -8. \end{cases}$$

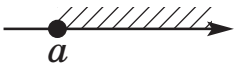
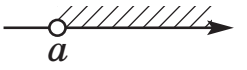
Складываем почленно оба уравнения. Получаем:
$-7y = -7$; $y = 1$; $6x + 1 = 4$; $6x = 4 - 1$; $6x = 3$;
$x = \frac{3}{6}$; $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

1.5. Неравенства и системы неравенств

1.5.1. Линейные неравенства

Числовые промежутки			
Вид промежутка	**Геометрическое изображение**	**Обозначение**	**Запись с помощью неравенств**
Интервал		$(a; b)$	$a < x < b$
Отрезок		$[a; b]$	$a \leqslant x \leqslant b$
Полуинтервал		$(a; b]$	$a < x \leqslant b$
Полуинтервал		$[a; b)$	$a \leqslant x < b$

Вид промежутка	Геометрическое изображение	Обозначение	Запись с помощью неравенств
Луч		$[a; +\infty)$	$x \geqslant a$
Луч		$(-\infty; b]$	$x \leqslant b$
Открытый луч		$(a; +\infty)$	$x > a$
Открытый луч		$(-\infty; b)$	$x < b$

Линейные неравенства с одной переменной — неравенства вида $ax > b$ (или $ax < b$, $ax \geqslant b$, $ax \leqslant b$), а также равносильные им неравенства, где a и b — некоторые числа.

Решение неравенства $ax > b$

- Если $a > 0$, то $x > \frac{b}{a}$;
- если $a < 0$, то $x < \frac{b}{a}$;
- если $a = 0$ и $b > 0$, то нет решений;
- если $a = 0$ и $b < 0$, то x — любое число.

1.5.2. Квадратные неравенства

Неравенство второй степени с одной переменной — неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$ (или $ax^2 + bx + c \geqslant 0$), $ax^2 + bx + c < 0$ (или $ax^2 + bx + c \leqslant 0$), где $a \neq 0$.

Схема решения квадратных неравенств

1. Находят дискриминант квадратного трёхчлена $D = b^2 - 4ac$ и выясняют, имеет ли этот трёхчлен корни.

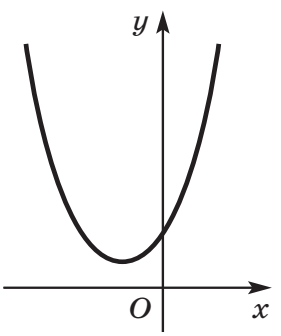
2. Если корней нет, то схематически изображают параболу (при $a > 0$ она лежит в верхней полуплоскости, а её ветви направлены вверх; при $a < 0$ — в нижней полуплоскости, а её ветви направлены вниз). Если же корни есть, то их отмечают на оси абсцисс и через отмеченные точки схематически проводят параболу, у которой ветви направлены вверх при $a > 0$ или вниз при $a < 0$.

3. Находят промежутки оси абсцисс, на которых точки параболы расположены выше этой оси (при решении неравенства $ax^2 + bx + c > 0$) или ниже этой оси (при решении неравенства $ax^2 + bx + c < 0$).

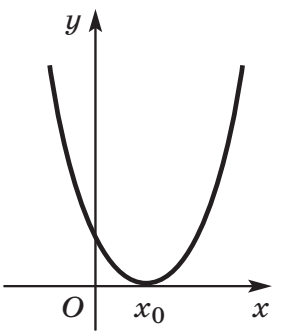
Решение квадратного неравенства при $a > 0$

$ax^2 + bx + c > 0$	$D < 0$	$x \in (-\infty; +\infty)$	Рис. *а*)
	$D = 0$	$x \in (-\infty; x_0) \cup \cup (x_0; +\infty)$	Рис. *б*)
	$D > 0$	$x \in (-\infty; x_1) \cup \cup (x_2; +\infty)$	Рис. *в*)
$ax^2 + bx + c \geqslant 0$	$D < 0$	$x \in (-\infty; +\infty)$	Рис. *а*)
	$D = 0$	$x \in (-\infty; +\infty)$	Рис. *б*)
	$D > 0$	$x \in (-\infty; x_1] \cup \cup [x_2; +\infty)$	Рис. *в*)

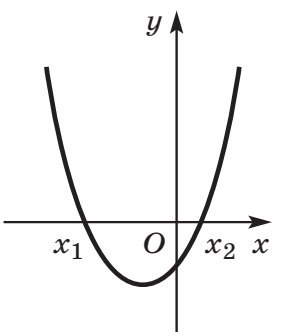
Решение квадратного неравенства при $a > 0$			
$ax^2 + bx + c < 0$	$D < 0$	Нет решений	Рис. *а*)
	$D = 0$	Нет решений	Рис. *б*)
	$D > 0$	$x \in (x_1; x_2)$	Рис. *в*)
$ax^2 + bx + c \leqslant 0$	$D < 0$	Нет решений	Рис. *а*)
	$D = 0$	$x = x_0$	Рис. *б*)
	$D > 0$	$x \in [x_1; x_2]$	Рис. *в*)



а)



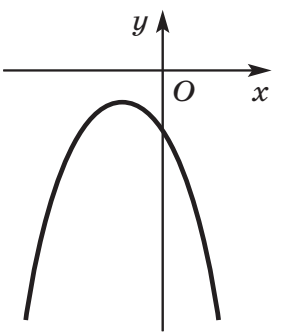
б)



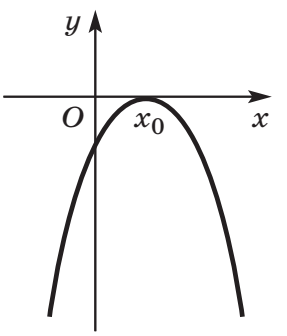
в)

Решение квадратного неравенства при $a < 0$			
$ax^2 + bx + c > 0$	$D < 0$	Нет решений	Рис. *а*)
	$D = 0$	Нет решений	Рис. *б*)
	$D > 0$	$x \in (x_1; x_2)$	Рис. *в*)
$ax^2 + bx + c \geqslant 0$	$D < 0$	Нет решений	Рис. *а*)
	$D = 0$	$x = x_0$	Рис. *б*)
	$D > 0$	$x \in [x_1; x_2]$	Рис. *в*)

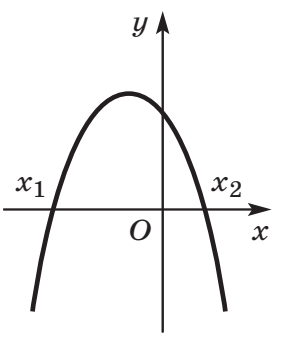
Решение квадратного неравенства при $a < 0$			
$ax^2 + bx + c < 0$	$D < 0$	$x \in (-\infty; +\infty)$	Рис. *а*)
	$D = 0$	$x \in (-\infty; x_0) \cup \cup (x_0; +\infty)$	Рис. *б*)
	$D > 0$	$x \in (-\infty; x_1) \cup \cup (x_2; +\infty)$	Рис. *в*)
$ax^2 + bx + c \leqslant 0$	$D < 0$	$x \in (-\infty; +\infty)$	Рис. *а*)
	$D = 0$	$x \in (-\infty; +\infty)$	Рис. *б*)
	$D > 0$	$x \in (-\infty; x_1] \cup \cup [x_2; +\infty)$	Рис. *в*)



а)



б)



в)

Примеры:

1) Решить неравенство $x^2 - x - 6 > 0$.

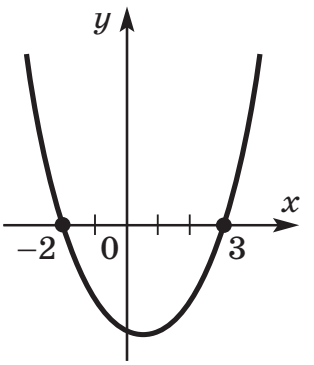
Решение.

$x^2 - x - 6 = 0$;

$D = 1 + 24 = 25$; $D > 0$;

$x_1 = \dfrac{1 + 5}{2}$; $x_1 = 3$;

$x_2 = \dfrac{1 - 5}{2}$; $x_2 = -2$.



На рисунке изображена парабола $y = x^2 - x - 6$, пересекающая ось абсцисс при $x_1 = 3$; $x_2 = -2$. Эта парабола лежит выше оси абсцисс в промежутках $x \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

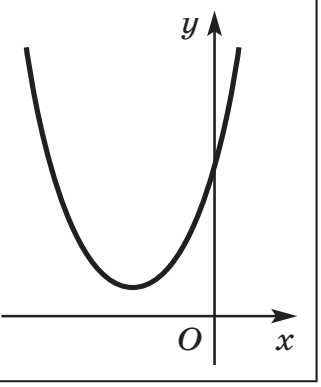
2) Решить неравенство $x^2 + 5x + 7 > 0$.

Решение.

$x^2 + 5x + 7 = 0$;

$D = 25 - 28 = -3$.

Так как $D < 0$, то парабола $y = x^2 + 5x + 7$ лежит выше оси абсцисс при любых значениях x.



Ответ: $x \in (-\infty; +\infty)$.

1.5.3. Рациональные неравенства и метод интервалов

Метод интервалов используется для неравенств вида $\frac{p(x)}{q(x)} > 0$, и для неравенств вида $p(x) > 0$, где $p(x)$ и $q(x)$ — многочлены, а вместо знака $>$ могут быть использованы знаки $<$, $\geqslant$, $\leqslant$.

Алгоритм решения

1) Приравниваем к нулю каждый множитель (и в числителе, и в знаменателе, если дробное выражение).

2) Отмечаем полученные числа на координатной прямой.
• Если неравенство строгое (знаки $>$ или $<$), то все точки выколоты.
• Если неравенство нестрогое (знаки $\geqslant$, $\leqslant$), то выколотые точки будут только те, которые в знаменателе, а из числителя заштрихованные.

3) Расставляем знаки в промежутках между точками.
• Если перед переменной везде знак «+», значит в правом интервале ставим плюс, далее чередуем знаки справа налево.
• Если перед одной из переменных стоит знак минус, то в правом интервале ставим знак «−» и далее чередуем знаки справа налево.

4) Штрихуем промежутки в соответствии со знаком неравенства:
$>$, $\geqslant$ штрихуем там где «+»,
$<$, $\leqslant$ штрихуем там где «−».

5) Выписываем ответ.

Важно!

• Если среди множителей есть степени отличные от единицы, то все нечётные заменяем на 1 степень, а чётные на 2 степень

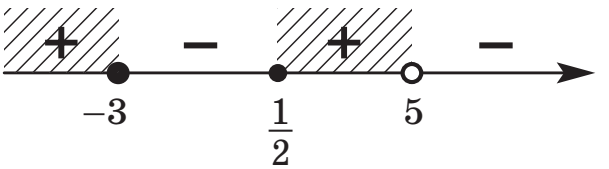
• Если есть множители с показателем степени 2, то они не влияют на знак неравенства, поэтому эти множители приравниваем к нулю и записываем отдельно от неравенства

• Если это значение переменной обращает всю дробь или все произведение в нуль и это нестрогое неравенство, то оно образует совокупность

• Если выражение с чётным показателем степени в знаменателе и неравенство строгое, то образуется система.

Примеры:

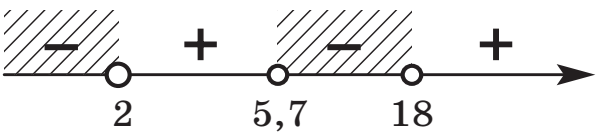
1) $\dfrac{(x+3)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}{5-x} \geqslant 0.$



Справа знак «−», так как в выражении $5 - x$ перед переменной x стоит «−».

Ответ: $(-\infty; -3] \cup \left[\dfrac{1}{2}; 5\right)$.

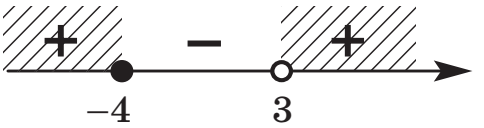
2) $(x - 5{,}7)(x - 18)(x - 2) < 0.$



Ответ: $(-\infty; 2) \cup (5{,}7; +\infty)$.

3) $\dfrac{x^2(x+4)}{x-3} \geqslant 0.$

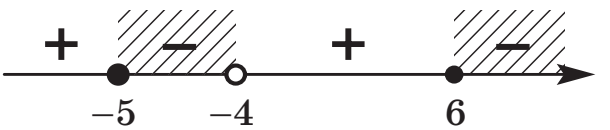
$x^2 = 0;\ x = 0$ или $\dfrac{x+4}{x-3} \geqslant 0.$



Ответ: $(-\infty; -4] \cup \{0\} \cup [3; +\infty).$

4) $\dfrac{(6-x)(x+5)}{(x-8)^2(x+4)} \leqslant 0.$

$$\begin{cases} x \neq 8, \\ \dfrac{(6-x)(x+5)}{(x+4)} \leqslant 0. \end{cases}$$



Ответ: $[-5; 4) \cup [6; 8) \cup (8; +\infty).$

1.5.4. Показательные неравенства

Решение простейших показательных неравенств				
	$0 < a < 1$		$a > 1$	
	$b \leqslant 0$	$b > 0$	$b \leqslant 0$	$b > 0$
$a^x < b$	Нет решений	$x > \log_a b$	Нет решений	$x < \log_a b$
$a^x \leqslant b$	Нет решений	$x \geqslant \log_a b$	Нет решений	$x \leqslant \log_a b$
$a^x \geqslant b$	$x \in \mathbf{R}$	$x \leqslant \log_a b$	$x \in \mathbf{R}$	$x \geqslant \log_a b$
$a^x > b$	$x \in \mathbf{R}$	$x < \log_a b$	$x \in \mathbf{R}$	$x > \log_a b$

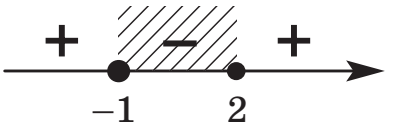
Методы решения показательных неравенств

1. Приведение степеней к одному основанию

Пример.

$7^{x^2} \leqslant 49 \cdot 7^x$; $7^{x^2} \leqslant 7^{2+x}$; $x^2 \leqslant 2 + x$;

$y = 7^x$ возрастает, т.к. $7 > 1$. $x^2 - x - 2 \leqslant 0$.

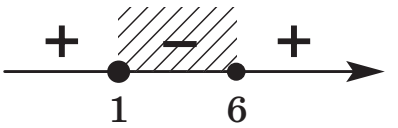


Ответ: $x \in [-1; 2]$.

2. Метод замены переменной

Пример.

$5^x + 6 \cdot 5^{-x} \leqslant 7$; $5^x + \frac{6}{5^x} \leqslant 7$; $5^x = t > 0$. Произведём замену. $t + \frac{6}{t} \leqslant 7$; $t^2 + 6 \leqslant 7t$; $t^2 - 7t + 6 \leqslant 0$.



$1 \leqslant 5^x \leqslant 6$; $0 \leqslant x \leqslant \log_5 6$.

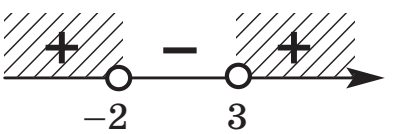
Ответ: $x \in [0; \log_5 6]$.

3. Однородные неравенства

Пример. $9^x - 15^x - 6 \cdot 25^x > 0 \,\big|\, : 25^x$;

$\left(\frac{9}{25}\right)^x - \left(\frac{15}{25}\right)^x - 6 > 0$; $\left(\left(\frac{3}{5}\right)^x\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^x - 6 > 0$. Замена $\left(\frac{3}{5}\right)^x = t$.

$t^2 - t - 6 > 0$;



$\left(\frac{3}{5}\right)^x > 3$; $\left(\frac{3}{5}\right)^x > \left(\frac{3}{5}\right)^{\log_{\frac{3}{5}} 3}$; $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ убывает, т.к. $\frac{3}{5} < 1$;

$x < \log_{\frac{3}{5}} 3$.

Ответ: $x \in (-\infty; \log_{\frac{3}{5}} 3)$.

1.5.5. Логарифмические неравенства

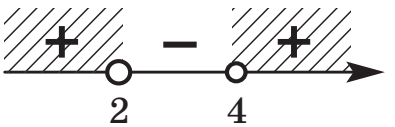
Решение простейших показательных неравенств

	$\log_a x \leqslant b$	$\log_a x < b$	$\log_a x \geqslant b$	$\log_a x > b$
$0 < a < 1$	$x \geqslant a^b$	$x > a^b$	$0 < x \leqslant a^b$	$0 < x < a^b$
$a > 1$	$0 < x \leqslant a^b$	$0 < x < a^b$	$x \geqslant a^b$	$x > a^b$

Методы решения логарифмических неравенств

1. Замена переменной

Пример.
$\log_3^2 x + 8 > 6\log_3 x$; $\log_3^2 x - 6\log_3 x + 8 > 0$.
Замена: $\log_3 x = t$; $t^2 - 6t + 8 > 0$.



$\log_3 x < 2$ или $\log_3 x > 4$; $0 < x < 9$ или $x > 81$.
Ответ: $x \in (0; 9) \cup (81; +\infty)$.

2. Использование свойств логарифма

Пример.

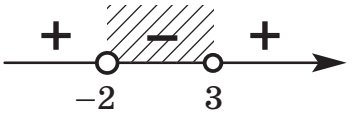
$\log_5 (6 - 6x) < \log_5 (x^2 - 5x + 4) + \log_5 (x + 3)$.

$$\begin{cases} \log_5 (6 \cdot (1 - x)) < \log_5 ((x - 1)(x - 4)(x + 3)), \\ 1 - x > 0, \\ (x - 1)(x - 4) > 0, \\ x + 3 > 0; \end{cases}$$

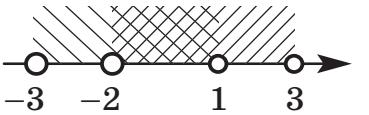
$y = \log_5 x$ возрастает, т.к. $5 > 1$.

$$\begin{cases} 6(1 - x) < (x - 1)(x - 4)(x + 3), \\ x - 1 < 0, \\ x - 4 < 0, \\ x + 3 < 0; \end{cases} \quad \Big| : (x - 1) < 0$$

$$\begin{cases}(x-4)(x+3)+6<0,\\ -3<x<1;\end{cases} \qquad \begin{cases}x^2-x-6<0,\\ -3<x<1;\end{cases}$$



$$\begin{cases}-2<x<3,\\ -3<x<1.\end{cases}$$



Ответ: $x \in (-2; 1)$.

1.5.6. Метод рационализации

Метод рационализации для решения неравенств (основан на монотонности функций)

1) $\log_{h(x)} g(x) - \log_{h(x)} f(x)$ заменяем на:
$$\begin{cases}\dfrac{g(x)-f(x)}{h(x)-1},\\ g(x)>0,\\ f(x)>0,\\ h(x)>0.\end{cases}$$

Частные случаи

А) $\log_{h(x)} g(x) - 1$ заменяем на:
$$\begin{cases}\dfrac{g(x)-h(x)}{h(x)-1},\\ g(x)>0,\\ h(x)>0.\end{cases}$$

Б) $\log_{h(x)} g(x)$ заменяем на:
$$\begin{cases}\dfrac{g(x)-1}{h(x)-1},\\ g(x)>0,\\ h(x)>0.\end{cases}$$

2) $g(x)^{f(x)} - g(x)^{h(x)}$ заменяем на:
$$\begin{cases}\dfrac{f(x)-h(x)}{g(x)-1},\\ g(x)>0.\end{cases}$$

3) $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$ заменяем на:
$$\begin{cases}f(x)-g(x),\\ f(x)\geqslant 0,\\ g(x)\geqslant 0.\end{cases}$$

Примеры:

1) $\log_{x+2}(2x+3) - \log_{x+2}(5-x) \leqslant 0$ заменяем на:

$$\begin{cases} \dfrac{2x+3-(5-x)}{x+2-1} \leqslant 0, \\ 2x+3>0, \\ 5-x>0, \\ x+2>0. \end{cases}$$

2) $\log_x(3x^2-1) \geqslant 1$ заменяем на: $\begin{cases} \dfrac{3x^2-1-x}{x-1} \geqslant 0, \\ 3x^2-1>0, \\ x>0. \end{cases}$

3) $\log_{7-x}(2x+11) > 0$ заменяем на: $\begin{cases} \dfrac{2x+11-1}{7-x-1} > 0, \\ 2x+11>0, \\ 7-x>0. \end{cases}$

4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+2} - \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3} < 0$ заменяем на: $\dfrac{x+2-(x-3)}{\frac{1}{5}-1} < 0.$

5) $\sqrt{x^2-2x+3} - \sqrt{x^2+2x} > 0$ заменяем на:

$$\begin{cases} x^2-2x+3-(x^2+2x)>0, \\ x^2-2x+3 \geqslant 0, \\ x^2+2x \geqslant 0. \end{cases}$$

6) $\dfrac{(\log_{5x-1}x^2 - \log_{5x-1}x^3)(\sqrt{2x}-\sqrt{x+1})}{\log_{x+2}(6x-2)} \geqslant 0$ заменяем:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-x^3}{5x-1-1}\cdot(2x-(x+1)) \\ \hline \dfrac{6x-2-1}{x+2-1} \end{cases} \geqslant 0,$$

$$\begin{cases} x^2>0, \\ x^3>0, \\ 5x-1>0, \\ 2x \geqslant 0, \\ x+1 \geqslant 0, \\ 6x-2>0, \\ x+2>0. \end{cases}$$

1.5.7. Системы неравенств с одной переменной

Решение системы неравенств с одной переменной — значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы.
Решить систему — значит найти все её решения или доказать, что решений нет.

Примеры

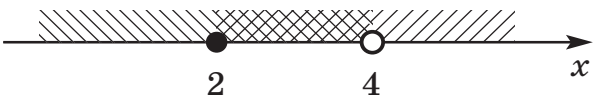
1) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 7x - 5 \geqslant 9, \\ 2x < 8. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} 7x - 5 \geqslant 9, \\ 2x < 8; \end{cases} \quad \begin{cases} 7x \geqslant 14, \\ 2x < 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x < 4. \end{cases}$$

Отметим на координатной прямой числовые промежутки. Ответом служит их пересечение.



Ответ: [2; 4).

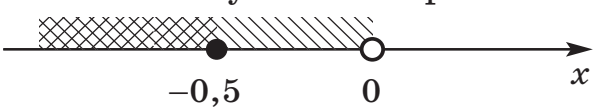
2) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 2 - 10x \geqslant 7, \\ 3x + 4 \leqslant 4. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} 2 - 10x \geqslant 7, \\ 3x + 4 \leqslant 4; \end{cases} \quad \begin{cases} -10x \geqslant 5, \\ 3x \leqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leqslant -0{,}5, \\ x \leqslant 0. \end{cases}$$

Отметим на координатной прямой числовые промежутки. Ответом служит их пересечение.

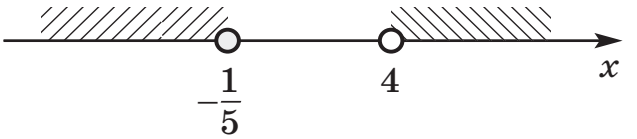


Ответ: $(-\infty; -0{,}5]$.

3) Решите систему неравенств:
$\begin{cases} 3x + 7 > 19, \\ 2 - 5x > 3. \end{cases}$

Решение.
$\begin{cases} 3x + 7 > 19, \\ 2 - 5x > 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x > 12, \\ -5x > 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 4, \\ x < -\frac{1}{5}. \end{cases}$

Отметим на координатной прямой числовые промежутки. Пересечений нет, значит, система не имеет решений.



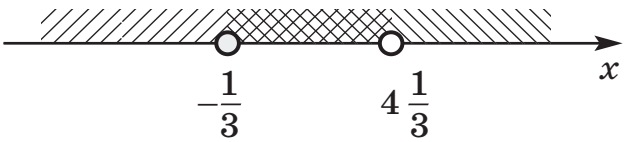
Ответ: нет решений.

4) Решить неравенство: $-6 < 3x - 5 < 8$.

Решение.
1 способ.
Данное двойное неравенство $-6 < 3x - 5 < 8$ равносильно системе неравенств:

$\begin{cases} 3x - 5 > -6, \\ 3x - 5 < 8; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x > 5 - 6, \\ 3x < 8 + 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x > -1, \\ 3x < 13; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -\frac{1}{3}, \\ x < 4\frac{1}{3}. \end{cases}$

Отметим на координатной прямой числовые промежутки. Ответом служит их пересечение.



Ответ: $x \in \left(-\frac{1}{3}; 4\frac{1}{3}\right)$.

2 способ.
Данное двойное неравенство можно решить, не преобразуя его в систему неравенств.

$-6 < 3x - 5 < 8; -6 + 5 < 3x < 8 + 5; -1 < 3x < 13;$

$-\frac{1}{3} < x < \frac{13}{3}; -\frac{1}{3} < x < 4\frac{1}{3}.$

Ответ: $\left(-\frac{1}{3}; 4\frac{1}{3}\right)$.

1.6. Текстовые задачи и методы их решения

1.6.1. Решение текстовых задач арифметическим способом

Решение текстовых задач по действиям

↓

Решение задачи по действиям

↓

Краткое условие

↓

Действие и его результат

↓

Единицы измерения и пояснения

↓

Ответ

Примеры:

1) Между городами A и B расстояние 600 км. Из города A в город B выехал мотоциклист со скоростью 50 км/ч, на два часа позже из города B в город A выехал автомобилист со скоростью 75 км/ч. На каком расстоянии от города B встретятся мотоциклист и автомобилист?

Решение.
Скорость v мот. — 50 км/ч;
скорость v авт. — 75 км/ч.

1. $50 \cdot 2 = 100$ (км) — мотоциклист проехал за 2 часа;

2. $600 - 100 = 500$ (км) — расстояние между мотоциклистом и автомобилистом в момент начала движения;

3. $50 + 75 = 125$ (км/ч) — скорость сближения автомобилиста и мотоциклиста;

4. $500 : 125 = 4$ (ч) — время до встречи;

5. $75 \cdot 4 = 300$ (км) — расстояние от пункта B до места встречи.

Ответ: 300 км.

2) Две трубы заполняют бассейн за 1 ч 12 мин. Одна вторая труба заполняет бассейн за 3 ч. За сколько часов заполнит бассейн одна первая труба?

Решение.
Первая труба — ? ч,
вторая труба — за 3 ч,
две трубы — за 1 ч 12 мин. } 1 бассейн

$$1 \text{ ч } 12 \text{ мин} = 1 \text{ ч} + \frac{12}{60} \text{ ч} = 1\frac{1}{5} \text{ ч} = \frac{6}{5} \text{ ч}.$$

1) $1 : 3 = \frac{1}{3}$ (басс./ч) — вторая труба заполняет за час;

2) $1 : \frac{6}{5} = \frac{5}{6}$ (басс./ч) — первая и вторая труба вместе за час;

3) $\frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{5-2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (басс./ч) первая труба за час;

4) $1 : \frac{1}{2} = 2$ (ч) — время работы первой трубы.

Ответ: 2 ч.

3) Мимо пешехода, идущего вдоль железнодорожных путей со скоростью 4 км/ч, в том же направлении проезжает поезд со скоростью 64 км/ч. Длина поезда — 500 м. За сколько секунд поезд проедет мимо пешехода?

Решение.
v пешехода — 4 км/ч;
v поезда — 64 км/ч.
1) 64 – 4 = 60 (км/ч) — скорость поезда относительно пешехода;
2) 60 км/ч = 1 км/мин = 1000 м/мин;
3) $500 : 1000 = \frac{500}{1000} = \frac{1}{2}$ (мин) = 30 (с) — время движения поезда мимо пешехода.
Ответ: 30 с.

1.6.2. Решение текстовых задач алгебраическим методом

Решение текстовых задач алгебраическим методом — это решение задач с помощью уравнений и систем уравнений.

Алгоритм решения

1. Составить таблицу:
а) в одной из колонок таблицы обозначить одну величину переменной, например, x;
б) в другую колонку таблицы вписать известную величину из условия;
в) с помощью уже заполненных двух колонок таблицы получить выражение с переменной и записать его в свободную колонку.
2. С помощью выражений из таблицы составить уравнение.
3. Решить уравнение.
4. Записать в ответ числа, соответствующие вопросу задачи.

Примеры:

1) Теплоход прошёл 30 км против течения реки, затем 40 км по течению. Общее время движения составило 5 часов. Скорость течения реки равна 5 км/ч. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде.

Решение. Пусть x км/ч — скорость теплохода в неподвижной воде.

	Скорость	**Время**	**Расстояние**
I (против течения)	$(x-5)$ км/ч	$\frac{30}{x-5}$ ч	30 км
II (по течению)	$(x+5)$ км/ч	$\frac{40}{x+5}$ ч	40 км

$$\frac{30}{x-5}+\frac{40}{x+5}=5 \quad |:5$$

$$\frac{6^{\backslash x+5}}{x-5}+\frac{8^{\backslash x-5}}{x+5}=1^{\backslash x^2-25} \quad \Big| \cdot (x-5)(x+5) \neq 0,\ x \neq -5,\ x \neq 5.$$

$\underline{6x} + 30 + \underline{8x} - 40 = x^2 - 25;$
$x^2 - 14x - 15 = 0;$
$x_1 = -1,\ x_2 = 15.$

Ответ: 15 км/ч.

2) Одна первая труба заполняет бассейн за 2 ч, а одна вторая труба — за 3 ч. Найдите, за сколько часов заполняют бассейн обе трубы одновременно.

Решение.

	Производительность	**Время**	**Работа**
I (одна первая труба)	$\frac{1}{2}$ басс./ч	2 ч	1 басс.
II (одна вторая труба)	$\frac{1}{3}$ басс./ч	3 ч	1 басс.
I + II (обе трубы)	$\frac{1}{x}$ басс./ч	x ч	1 басс.

$$\frac{1}{2}^{\backslash 3x}+\frac{1}{3}^{\backslash 2x}=\frac{1}{x}^{\backslash 6} \quad \Big| \cdot 6x$$

$3x + 2x = 6;\ 5x = 6;$

$x = \frac{6}{5};\ x = 1{,}2.$

Ответ: 1,2 часа.

Текстовые задачи на среднее значение

1. Средняя скорость.
2. Средняя стоимость.
3. Концентрация раствора.
4. Процентное содержание сплава.
5. Средняя оценка.
6. Средняя производительность.

Сходство этих задач состоит в том, что суммируются величины во второй и третьей колонках.

Важно! Значения во второй и третьей колонках не принципиальны для среднего значения первой колонки, их можно заменять на пропорциональные числа.

	A	**B**	**C**
I	p_1	m_1	$p_1 m_1$
II	p_2	m_2	$p_2 m_2$
IIIср	$p_{\text{ср}}$	$m_1 + m_2$	$p_{\text{ср}} m_1 + p_{\text{ср}} m_2$
	Скорость	Время	Путь
	Цена	Количество	Стоимость
	Концентрация	Масса раствора	Масса вещества
	Процентное содержание	Масса сплава	Масса вещества
	Оценки	Количество оценок	Сумма оценок
	Производительность	Время	Объём работ

$$p_1 m_1 + p_2 m_2 = p_{ср} m_1 + p_{ср} m_2$$
$$(p_1 - p_{ср}) m_1 = (p_{ср} - p_2) m_2$$
$$\frac{p_1 - p_{ср}}{p_{ср} - p_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

Примеры:

Возьмём задачи с разными условиями, но с одинаковыми переменными, уравнением и ответом.

1. Автомобилист за 8 часов проехал весь путь. Часть времени он ехал со скоростью 50 км/ч, оставшееся время со скоростью 30 км/ч. Средняя скорость составила 45 км/ч. Сколько времени он ехал со скоростью 30 км/ч?

2. Купили 2 вида товара по цене 50 руб. за килограмм и 30 руб. за килограмм. Средняя цена составила 45 руб. за килограмм. Всего купили 8 кг товара. Сколько купили килограммов товара по цене 30 руб. за килограмм?

3. В одном сосуде 50%-ный раствор кислоты, а в другом 30%-ный раствор этой же кислоты. Растворы смешали в третьем сосуде, где получилось 8 кг 45% раствора кислоты. Сколько было кислоты в сосуде с 30%-ным раствором?

4. Имеется два сплава с разным содержанием никеля: в первом содержится 50% никеля, а во втором 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав, в котором никеля 45%. Масса третьего сплава 8 кг. Какова масса сплава с 30% содержанием никеля?

5. Ученик получил 8 отметок по 50 баллов и по 30 баллов. Сколько должно быть 30-балльных отметок, чтобы средняя отметка была равна 45 баллам?

6. Рабочий за 8 часов изготовил некоторое количество деталей. Часть времени он изготавливал по 50 деталей в час, остальное время — по 30 деталей в час. В среднем получилось 45 деталей в час. Сколько времени у рабочего была производительность 30 деталей в час?

Решение.
Используем обозначения из таблицы на стр. 78.
$p_1 = 50$, $p_2 = 30$, $p_{ср} = 45$, $p_2 < p_{ср} < p_1$, $30 < 45 < 50$.
Найти m_2.
Составим уравнение по формуле:
$\frac{50-45}{45-30} = \frac{m_2}{m_1}$; $\frac{5}{15} = \frac{m_2}{m_1}$; $\frac{1}{3} = \frac{m_2}{m_1}$;
$m_2 = x$, $m_1 = 3x$;
$x + 3x = 8$;
$4x = 8$;
$x = 2$, т.е. $m_2 = 2$.
Ответ: 2.

• Если в колонке **B** все числа одинаковые, то $p_{ср}$ находят как среднее арифметическое p_1 и p_2, $p_{ср} = \frac{p_1 + p_2}{2}$.

• Если в колонке **C** все числа одинаковые, то $p_{ср}$ находят как среднее гармоническое, $p_{ср} = \frac{2p_1p_2}{p_1 + p_2}$.

Такой результат получают из уравнений:

$\frac{2}{p_{ср}} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ или $\frac{p_1 - p_{ср}}{p_{ср} - p_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

Секреты ЕГЭ

В открытом банке математических задач ЕГЭ профильного уровня в заданиях № 11 (текстовые задачи) встречаются задачи на движение и на работу, в которых разность скоростей (производительность) и разность времени одни и те же числа. Легко доказать, что такое возможно, если скорости (производительность) первого и второго объекта равны времени второго и первого соответственно. Поэтому решать подобные задачи следует подбором, составив уравнение $x(x + a) = c$, где x меньшая скорость, а $x + a$ — бóльшая. Далее читаем вопрос задачи.

Примеры:

1) Скорость одного туриста на 2 км/ч больше скорости другого туриста, а расстояние 24 км он проходит на 2 часа быстрее. Найти скорость второго туриста.

Решение. Составим уравнение $x(x + 2) = 24$, где x — скорость второго туриста, а $x + 2$ — скорость первого туриста (которая в данном типе задач численно равна времени второго туриста). Подбираем:
$x = 4$, т. к. $4 \cdot 6 = 24$, $6 = 4 + 2$.
Ответ: 4 км/ч скорость второго туриста.

2) Один рабочий за час делает на 6 деталей меньше второго и изготавливает 216 деталей на 6 часов дольше. Сколько деталей в час изготавливает 2 рабочий?

Решение. Составим уравнение $x(x + 6) = 216$. Подбираем $x = 12$, $x + 6 = 12 + 6 = 18$.
Ответ: 18 деталей в час.

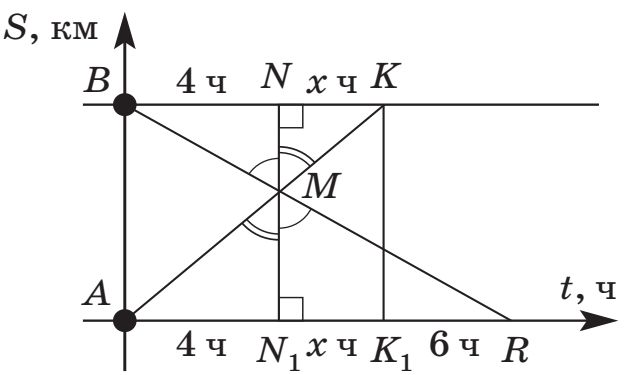
1.6.3. Решение текстовых задач графическим методом

Иногда вместо привычных арифметического и алгебраического метода решения задач удобно применить **графический метод.**

Рассмотрим на примере задачи на движение.

Пример.
Автомобилист и велосипедист выехали одновременно навстречу друг другу из городов A и B. Велосипедист приехал в город A на 6 часов позже, чем автомобилист прибыл в город B. Встретились они через 4 часа после выезда. Сколько часов затратил на путь из города B в город A велосипедист?

Решение.
Изобразим условие задачи на координатной плоскости, где вертикальная ось покажет перемещение в км, а горизонтальная ось время в часах.



AB — расстояние от A до B,
$BN = AN_1 = 4$ ч — время до встречи,
$NK = N_1K_1 = x$ ч — время движения автомобилиста от места встречи до города B,
$K_1R = 6$ ч.

$\Delta BNM \sim \Delta N_1MR$ и $\Delta NKM \sim \Delta AMN_1$ — признак подобия прямоугольных треугольников по одному острому углу.

$k = \dfrac{N_1M}{NM}$ — коэффициент подобия для обоих пар подобных треугольников. Составим уравнение:

$\dfrac{x+6}{4} = \dfrac{4}{x}$; $x^2 + 6x = 16$, $x^2 + 6x - 16 = 0$, $x_1 = -8$;

$x_2 = 2$.

Время велосипедиста: $4 + x + 6 = 4 + 2 + 6 = 12$ ч.

Ответ: 12 ч.

1.7. Прогрессии

1.7.1. Арифметическая прогрессия

Каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d (разность прогрессии):

$$a_{n+1} = a_n + d;\ d = a_{n+1} - a_n$$

Формула n-го члена через a_1	$a_n = a_1 + d(n-1)$
Формула n-го члена через a_m	$a_n = a_m + d(n-m)$, $n > m$
Формула суммы n первых членов (через первый член и n-й)	$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$
Формула суммы n первых членов (через первый член и разность)	$S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$
Характеристическое свойство	$a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

1.7.2. Геометрическая прогрессия

Каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q (знаменатель прогрессии):

$$b_{n+1} = b_n \cdot q,\ q \neq 0$$

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Формула n-го члена через b_1	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Формула n-го члена через b_m	$b_n = b_m \cdot q^{n-m},\ n > m$
Формула суммы n первых членов (через первый член и n-й)	$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$
Формула суммы n первых членов (через первый член и знаменатель)	$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$
Характеристическое свойство	$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$
Сумма бесконечной геометрической прогрессии	$S = \frac{b_1}{1 - q},\ \lvert q \rvert < 1$

2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

2.1. Функции

2.1.1. Функция, область определения функции, множество значений функции

Функция — это такая зависимость переменной y от переменной x, когда каждому x поставлено в соответствии единственное значение y. При этом: x — независимая переменная (аргумент); y — зависимая переменная (функция).

Обозначение функции: $y = f(x)$

Область определения функции $D(f)$ — это все значения, которые принимает независимая переменная x, при этом если функция задана формулой и не указана её область определения, то считают, что область определения функции состоит из всех значений аргумента, при которых данная формула имеет смысл. Если же функция описывает реальный процесс, то её область определения зависит от конкретных условий.

Например, $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$, $D(f) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$;

$S(a) = a^2$, $D(S) = (0; +\infty)$, S — площадь квадрата, a — длина стороны квадрата.

Область значений функции $E(f)$ — множество, которое состоит из всех чисел $f(x)$, таких, что x принадлежит области определения функции f.

2.1.2. График функции

График функции — множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

2.1.3. Преобразование графиков: параллельный перенос, симметрия относительно осей координат

Преобразования графиков

• График функции $y = f(x) + n$ получают смещением графика функции $y = f(x)$ на величину n вдоль оси Oy. При $n > 0$ график смещают вверх, при $n < 0$ — вниз;

• График функции $y = kf(x)$ при $k > 1$ получают из графика функции $y = f(x)$ растяжением от оси Ox в k раз, а при $0 < k < 1$ — сжатием к оси Ox в $\frac{1}{k}$ раз;

• График функции $y = f(x + m)$ получают смещением графика функции $y = f(x)$ на величину m вдоль оси Ox. На месте остаются только точки пересечения графика с осью Ox;

• График функции $y = f(px)$ при $p > 1$ получают из графика функции $y = f(x)$ сжатием к оси Oy в p раз, а при $0 < p < 1$ — растяжением от оси Oy в $\frac{1}{p}$ раз. На месте остаются только точки пересечения графика с осью Oy.

2.2. Элементарное исследование функций

2.2.1. Чётность и нечётность функций

Чётная функция — функция f с областью определения $D(f)$, симметричной относительно начала координат, для которой при любом x из $D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Например,
$f(x) = x^2$ — чётная,
так как $(-x)^2 = x^2$.

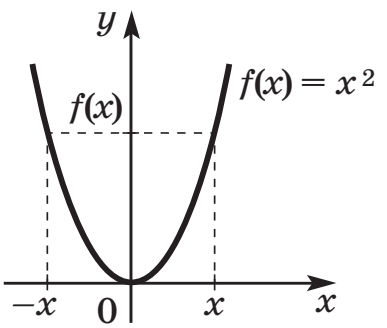


График чётной функции симметричен относительно оси ординат.

Нечётная функция — функция f с областью определения $D(f)$, симметричной относительно начала координат, для которой при любом x из $D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Например,
$f(x) = x^3$ — нечётная,
так как $(-x)^3 = -x^3$.

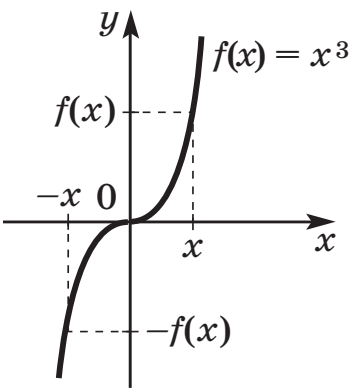
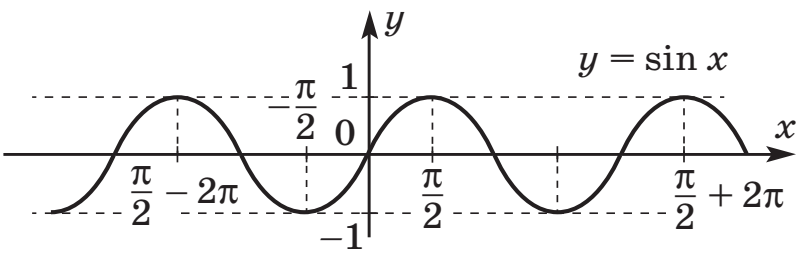


График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

2.2.2. Периодичность функций

Периодическая функция — функция f с областью определения $D(f)$, для которой при любом x из $D(f)$ $x + T$ также принадлежит $D(f)$ и выполняется равенство $f(x + T) = f(x)$, где T — **период.**

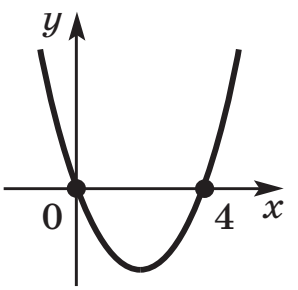
Например, $f(x) = \sin x$, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.
Период $T = 2\pi$.



2.2.3. Нули функции, промежутки знакопостоянства

Нули функции — значения x, при которых значения функции равны нулю.

Например,
$x = 0$ и $x = 4$ — нули функции $f(x) = x^2 - 4x$.



Промежутки знакопостоянства — промежутки, на которых функция принимает только положительные или только отрицательные значения.

Например, для функции $f(x) = \frac{6}{x}$, $f(x) > 0$ при $x \in (0; +\infty)$ и $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$.

2.2.4. Монотонность функции. Промежутки возрастания и убывания

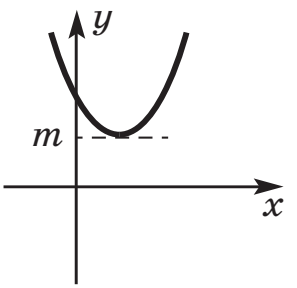
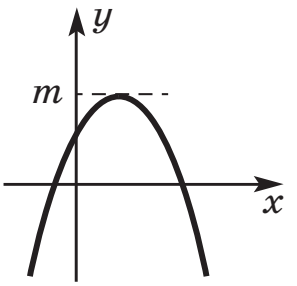
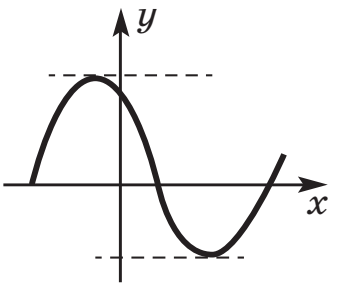
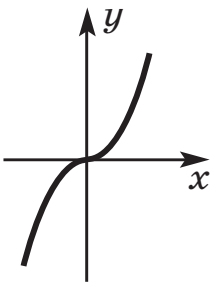
Промежутки монотонности — промежутки, на которых функция постоянно возрастает или постоянно убывает.

• Функция f **возрастает** на множестве G, если для любых x_1 и x_2 из множества $G \subset D(f)$ таких, что $x_2 > x_1$, выполняется условие $f(x_2) > f(x_1)$.	• Функция f **убывает** на множестве G, если для любых x_1 и x_2 из множества $G \subset D(f)$ таких, что $x_2 > x_1$, выполняется условие $f(x_2) < f(x_1)$.

2.2.5. Точки экстремума (локального максимума и минимума) функции

Точка минимума функции f — точка x_0, такая, что для всех x из некоторой окрестности x_0 выполняется условие: $f(x) \geqslant f(x_0)$.	**Точка максимума функции f** — точка x_0, такая, что для всех x из некоторой окрестности x_0 выполняется условие: $f(x) \leqslant f(x_0)$.
Точки экстремума — общее название точек максимума и минимума.	

2.2.6. Ограниченность функции

Функция называется ограниченной снизу, если все значения функции не меньше некоторого числа m (т.е. $y(x) \geqslant m$).	
Функция называется ограниченной сверху, если все значения функции не больше некоторого числа m (т.е. $y(x) \leqslant m$).	
Если функция ограничена и снизу, и сверху, то она называется **ограниченной.**	
Неограниченная функция	

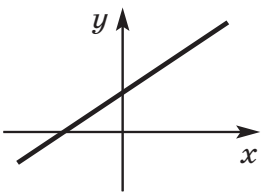
2.3. Основные элементарные функции

2.3.1. Линейная функция, её график

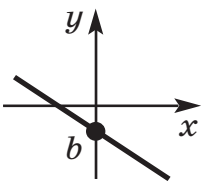
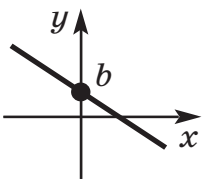
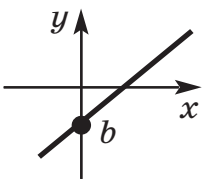
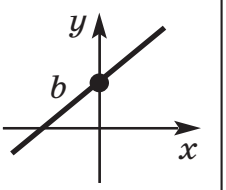
Линейная функция $y = kx + b$

Область значения $k \neq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y \in (-\infty; +\infty)$; $k = 0 \Rightarrow y = b$

График — прямая

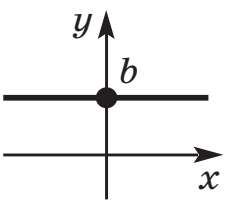


Область определения $x \in (-\infty; +\infty)$

$k < 0, b < 0$	$k < 0, b > 0$	$k > 0, b < 0$	$k > 0, b > 0$
			
Убывает $k < 0$	Убывает $k < 0$	Возрастает $k > 0$	Возрастает $k > 0$

Частные случаи линейной функции

$k = 0$
Постоянная функция $y = b$



$k \neq 0, b = 0$
Прямая пропорциональность $y = kx$

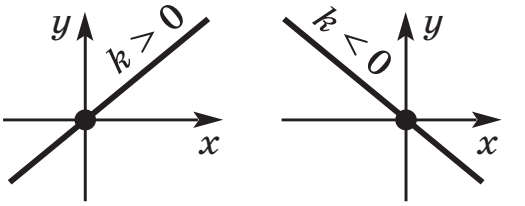


График — прямая, симметричная относительно начала координат

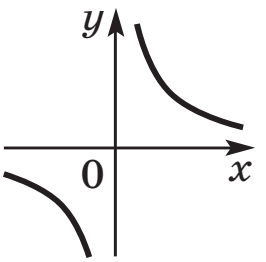
2.3.2. Функция, описывающая обратно пропорциональную зависимость, её график

Функция — обратная пропорциональность

$$y = \frac{k}{x},\ k \neq 0.$$

Область значений $y \neq 0$

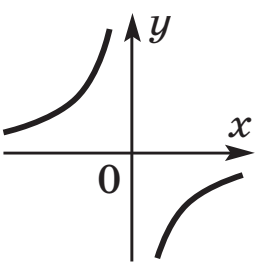
График — **гипербола.**



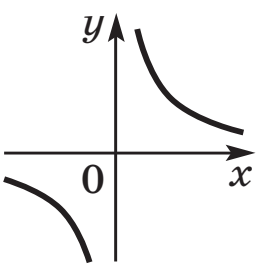
Кривая, ветви которой симметричны относительно начала координат $y(-x) = -y(x)$

Область определения $x \neq 0$

$k < 0$



$k > 0$

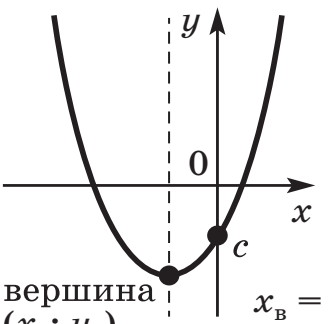


2.3.3. Квадратичная функция, её график

Квадратичная функция
$y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

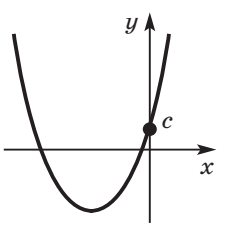
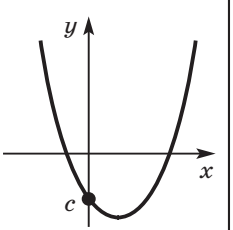
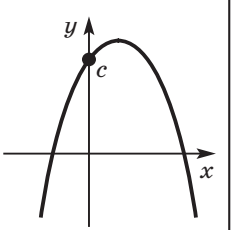
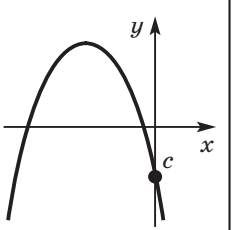
Область значений
$a > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow [y_в; +\infty)$;
$a < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (-\infty; y_в]$
$y_в$ — значение функции в вершине параболы

График — **парабола** — кривая, симметричная относительно вертикальной прямой, проходящей через её вершину.



вершина $(x_в; y_в)$
$x_в = -\frac{b}{2a}$

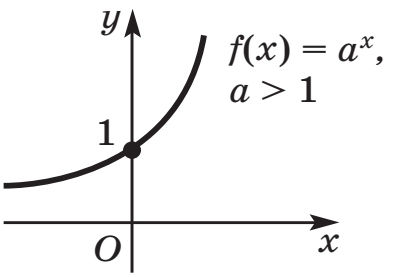
Область определения
$x \in (-\infty; +\infty)$

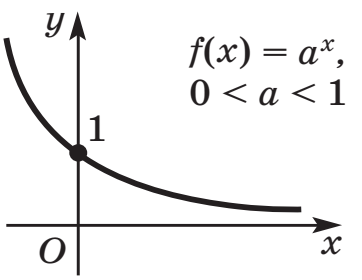
$a > 0, c > 0$	$a > 0, c < 0$	$a < 0, c > 0$	$a < 0, c < 0$
ветви параболы направлены вверх	ветви параболы направлены вверх	ветви параболы направлены вниз	ветви параболы направлены вниз
			

2.3.4. Показательная функция, её график

Показательная функция — функция вида $f(x) = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

- Область определения: $D(f) = \mathbf{R}$.
- Область значений: $E(f) = (0; +\infty)$.
- Чётность, нечётность: функция не является ни чётной, ни нечётной.
- Нулей нет.
- Промежутки знакопостоянства: $f(x) > 0$ при $x \in \mathbf{R}$.
- Промежутки монотонности: если $0 < a < 1$, то функция убывает при $x \in \mathbf{R}$; если $a > 1$, то функция возрастает при $x \in \mathbf{R}$.
- Экстремумов нет.
- График функции проходит через точку $(0; 1)$.
- Асимптота: $f(x) = 0$.





2.3.5. Логарифмическая функция, её график

Логарифмическая функция — функция вида $f(x) = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

• Область определения: $D(f) = (0; +\infty)$.

• Область значений: $E(f) = \mathbf{R}$.

• Чётность, нечётность: функция не является ни чётной, ни нечётной.

• Нули: если $f(x) = 0$, то $x = 1$.

• Промежутки знакопостоянства:

– если $0 < a < 1$, то $f(x) > 0$ при $x \in (0; 1)$, $f(x) < 0$ при $x \in (1; +\infty)$;

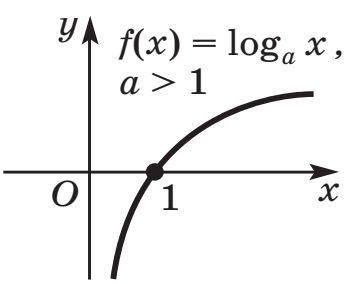
– если $a > 1$, то $f(x) > 0$ при $x \in (1; +\infty)$, $f(x) < 0$ при x $(0; 1)$.

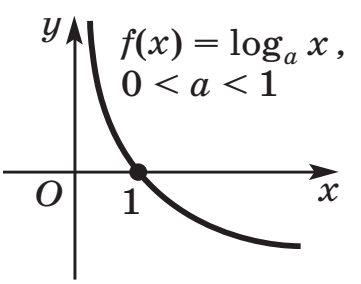
• Промежутки монотонности: если $0 < a < 1$, то функция убывает при $x \in (0; +\infty)$; если $a > 1$, то функция возрастает при $x \in (0; +\infty)$.

• Экстремумов нет.

• График функции проходит через точку $(1; 0)$.

• Асимптота: $x = 0$.

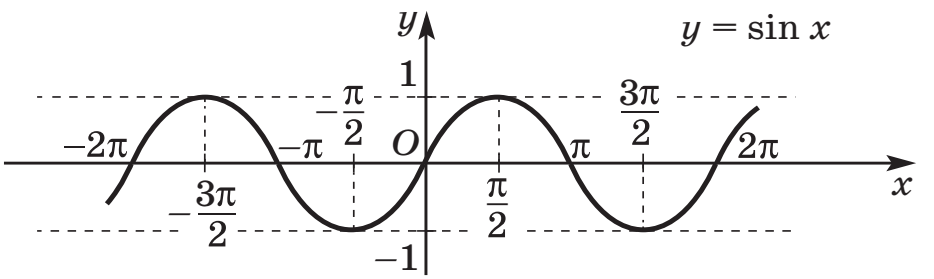




2.3.6. Тригонометрические функции, их графики

Функция $y = \sin x$

- График — **синусоида**.
- Область определения: $D(f) = \mathbf{R}$.
- Область значений: $E(f) = [-1; 1]$.
- Чётность, нечётность: функция нечётная.
- Периодичность: функция периодическая.
- Период: $T = 2\pi$.
- Нули: $\sin x = 0$ при $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
- Промежутки знакопостоянства: $\sin x > 0$ при $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$;
$\sin x < 0$ при $x \in (-\pi + 2\pi n; 2\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$.
- Промежутки монотонности: функция возрастает при $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$; функция убывает при $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$.
- Экстремумы: $x_{\min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $f(x)_{\min} = -1$.
$x_{\max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $f(x)_{\max} = 1$.



Функция $y = \cos x$

• График — синусоида, сдвинутая на величину $\frac{\pi}{2}$ влево.

• Область определения: $D(f) = \mathbf{R}$.

• Область значений: $E(f) = [-1; 1]$.

• Чётность, нечётность: функция чётная.

• Периодичность: функция периодическая.

• Период: $T = 2\pi$.

• Нули: $\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

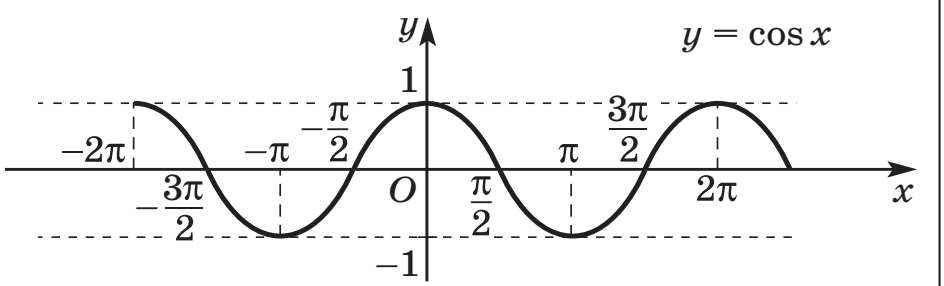
• Промежутки знакопостоянства: $\cos x > 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$;

$\cos x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

• Промежутки монотонности: функция возрастает при $x \in [-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$, $n \in \mathbf{Z}$; функция убывает при $x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbf{Z}$.

• Экстремумы: $x_{\min} = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $f(x)_{\min} = -1$.

• $x_{\max} = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $f(x)_{\max} = 1$.



Функция $y = \operatorname{tg} x$

• График — **тангенсоида.**

• Область определения: $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

• Область значений: $E(f) = \mathbf{R}$.

• Чётность, нечётность: функция нечётная.

• Периодичность: функция периодическая.

• Период: $T = \pi$.

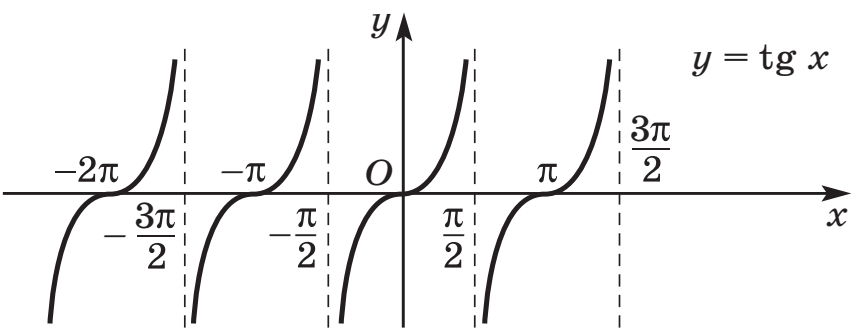
• Нули: $\operatorname{tg} x = 0$ при $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

• Промежутки знакопостоянства: $\operatorname{tg} x > 0$ при $x \in (\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$;
$\operatorname{tg} x < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

• Промежутки монотонности: функция возрастает при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

• Экстремумов нет.

• Асимптоты: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.



Функция $y = \operatorname{ctg} x$

• График — тангенсоида, перенесенная на $\frac{\pi}{2}$ вправо и симметрично отраженная относительно оси Ox.

• Область определения: $D(f) = (\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$.

• Область значений: $E(f) = \mathbf{R}$.

• Чётность, нечётность: функция нечётная.

• Периодичность: функция периодическая.

• Период: $T = \pi$.

• Нули: $\operatorname{ctg} x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

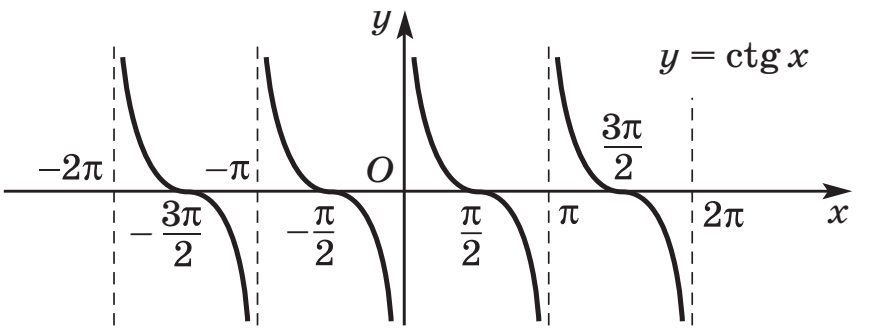
• Промежутки знакопостоянства: $\operatorname{ctg} x > 0$ при $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$;

$\operatorname{ctg} x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

• Промежутки монотонности: функция убывает при $x \in (\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$.

• Экстремумов нет.

• Асимптоты: $x = \pi n$, $n \in \mathrm{Z}$.



2.4. Производная

2.4.1. Понятие о производной функции, геометрический смысл производной

Производная функции f в точке x_0 — это число, к которому стремится разностное отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, если Δx стремится к нулю.

Геометрический смысл производной: производная функции в точке равна тангенсу угла, образованного касательной к графику функции в этой точке с положительным направлением оси абсцисс.

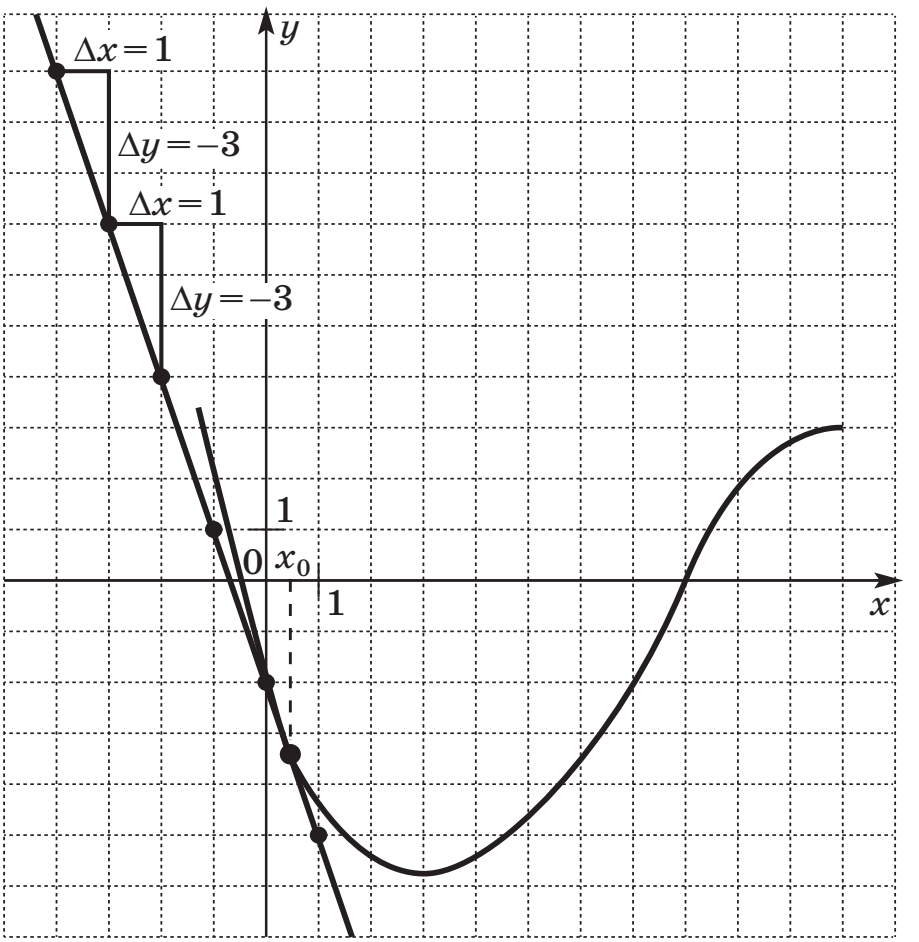
Производная функции $f(x)$ по переменной x — это мгновенная скорость изменения функции (любой).

Например, $S = a^2$, сторона квадрата меняется от 1 до 4: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, а площадь квадрата S растёт быстрее: $S_1 = 1$, $S_2 = 4$, $S_3 = 9$, $S_4 = 16$, т.е. $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = 1$, а $S_2 - S_1 = 3$, $S_3 - S_2 = 5$, $S_4 - S_3 = 7$. Мы видим, что площадь S растёт с большей скоростью при увеличении стороны квадрата. Скорость, соответственно, производная, может быть как положительной, так и отрицательной или равняться нулю. Значения производной зависят только от изменения функции, $\Delta f > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$, $\Delta f < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$, $\Delta f = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$.
Изменение аргумента Δx всегда рассматриваем как положительное число, т.е. $\Delta x > 0$.
С помощью производной можно исследовать функцию на монотонность, на максимумы и минимумы (экстремумы).

Секреты ЕГЭ

Производная в точке x_0 равна производной касательной (прямой), у которой она постоянное число.

Например, на рисунке $f'(x_0) = \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{-3}{1} = -3$.



2.4.2. Физический смысл производной

Физический смысл производной: производная от координаты материальной точки по времени есть значение мгновенной скорости в данный момент времени.

2.4.3. Уравнение касательной к графику функции

Касательная к графику функции f, дифференцируемой в точке x_0, — прямая, которая проходит через точку $(x_0; f(x_0))$ и имеет угловой коэффициент $f'(x_0)$.

Уравнение касательной имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

где $(x_0; f(x_0))$ — координаты точки, через которую проходит касательная.

2.4.4. Производные суммы, разности, произведения, частного

Производная суммы или разности функций	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
Производная произведения	$(uv)' = u'v + v'u$
Производная частного	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
Постоянный множитель C можно вынести за знак производной	$(Cu)' = Cu'$

2.4.5. Производные основных элементарных функций

Функция $f(x)$	**Производная $f'(x)$**
C	0
$kx + b$	k
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

2.5. Исследование функций с помощью производной

2.5.1. Применение производной к исследованию функций и построению графиков

Признаки возрастания (убывания) функции

Достаточный признак возрастания функции состоит в том, что функция $f(x)$ возрастает на некотором промежутке, если производная функции $f'(x)$ на этом промежутке неотрицательна, т.е. $f(x)$ возрастает при $f'(x) \geqslant 0$.

Достаточный признак убывания функции состоит в том, что функция $f(x)$ убывает на некотором промежутке, если производная $f'(x)$ на этом промежутке неположительна, т.е. $f(x)$ убывает при $f'(x) \leqslant 0$.

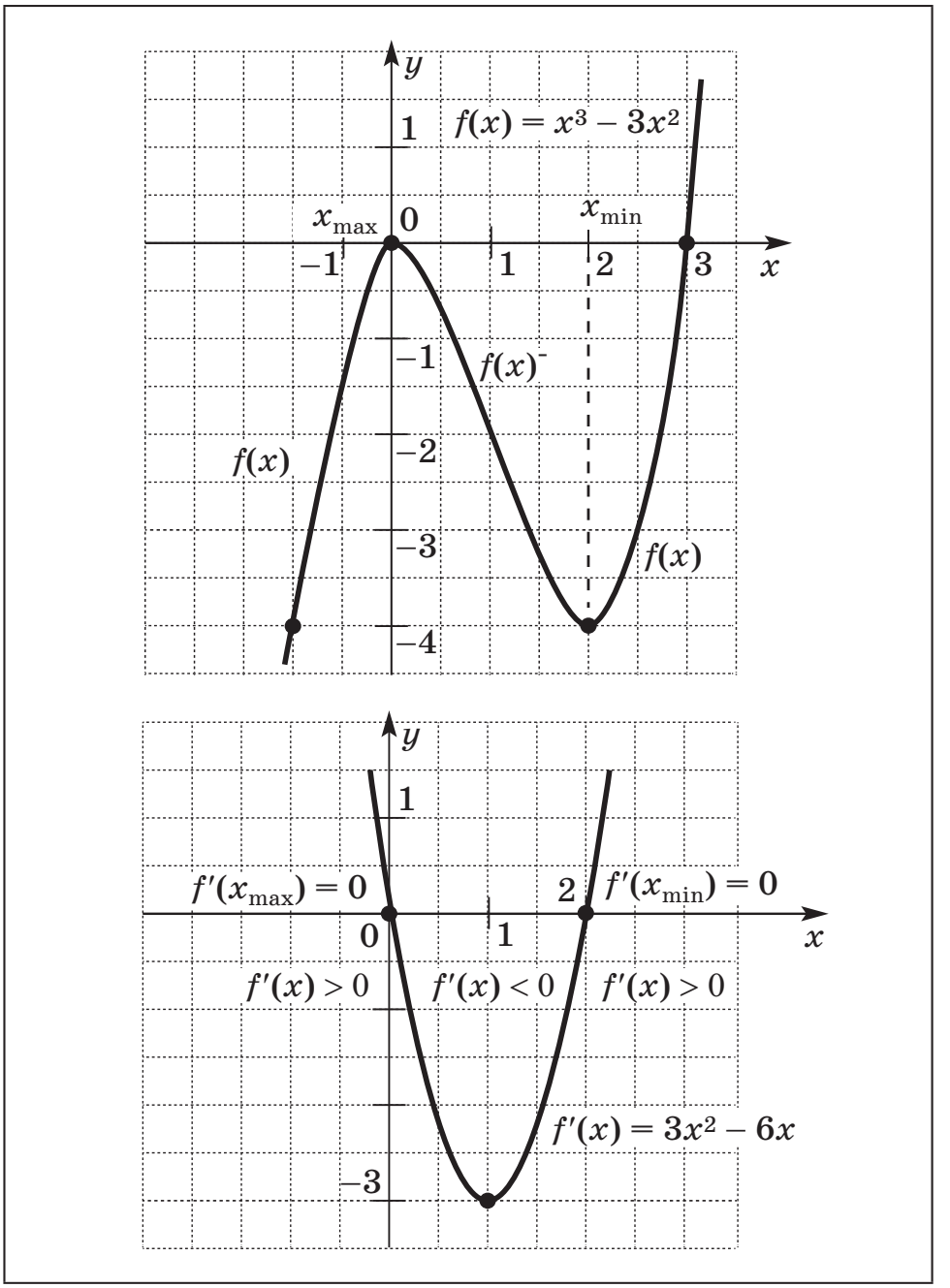
Точки экстремума функции — это внутренние точки области определения функции $f(x)$, в которых:

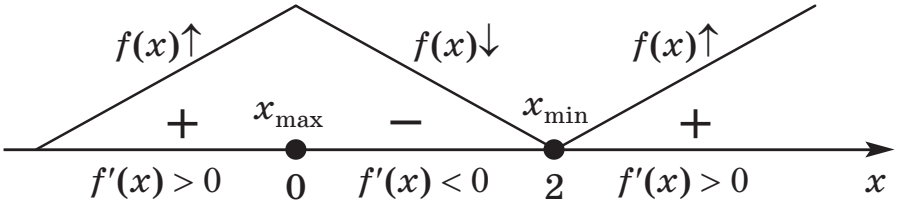
1) $f'(x) = 0$ или не существует,

2) $f'(x)$ меняет знак:

а) в x_{max} с плюса на минус;

б) в x_{min} с минуса на плюс.


y
1
f(x) = x³ − 3x²
x_max
0
x_min
−1
1
2
3
x
−1
f(x)
−2
f(x)
−3
−4
y
1
f′(x_max) = 0
2
f′(x_min) = 0
0
1
x
f′(x) > 0
f′(x) < 0
f′(x) > 0
f′(x) = 3x² − 6x
−3

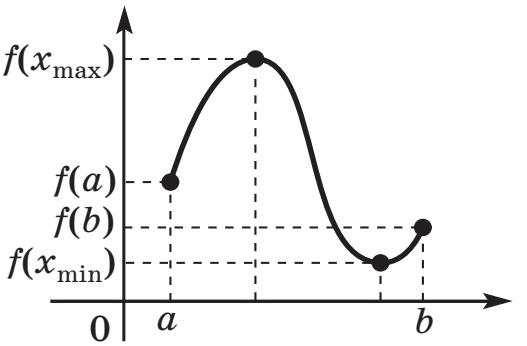


$f'(x) = 3x^2 - 6x$; $3x^2 - 6x = 0$; $x(3x - 6) = 0$; $x = 0$ или $3x - 6 = 0$, $x = 2$.

Функция, непрерывная на отрезке, достигает своего **наибольшего и наименьшего значения на этом отрезке** либо в точках экстремума, либо на концах отрезка.

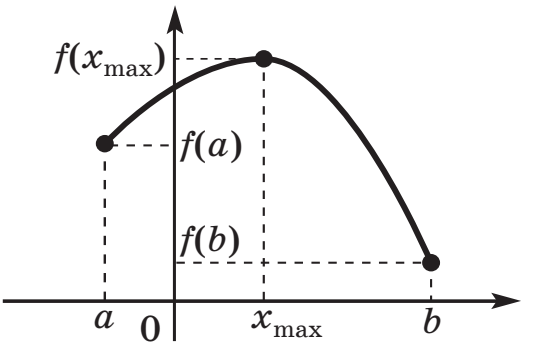
Примеры:

1)



$\max_{[a;\,b]} f(x) = f(x_{\max})$; $\min_{[a;\,b]} f(x) = f(x_{\min})$.

2)



$\max_{[a;\,b]} f(x) = f(x_{\max})$; $\min_{[a;\,b]} f(x) = f(b)$.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$, непрерывной на отрезке

1. Найти производную $f'(x)$.

2. Найти точки, где $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует.

3. Изобразить эти точки на координатной прямой, расставить знаки производной между ними «+» или «−». (Если перед x стоят знаки «+», то в правом промежутке ставим «+», далее знаки чередуются, кроме точек, образованных кратными корнями).

4. Далее отмечаем промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$ в соответствии со знаком производной.

5. Отмечаем на прямой концы отрезка и определяем $\max f(x)$ на отрезке или $\min f(x)$ на этом отрезке.

6. Если в предыдущем пункте наибольшее или наименьшее значения функции не удалось получить однозначно, то подставляем соответствующее значение x, точек экстремума и концов отрезка в функцию $f(x)$, чтобы сравнить их значения и выбрать наибольшее или наименьшее.

Секреты ЕГЭ

В открытом банке математических задач ЕГЭ профильного уровня в заданиях № 12 (наибольшее и наименьшее значение функции, точки экстремума) встречаются задания с логарифмами, степенью, числом e, тригонометрией, в которых надо найти наибольшее или наименьшее значения функции.

Если внимательно изучить данные примеры, при этом понимая, что ответ возможен только в виде целого числа или конечной десятичной дроби, то можно заметить, что в этих случаях легко находить значения x без взятия производной. Обычно в таких случаях значение переменной x единственное, которое позволяет получить ответ в нужном виде (целое число или конечная десятичная дробь).

Примеры:

1) Найдите наименьшее значение функции:

$y = 12x - \ln (x + 11)^{12}$ на отрезке $[-10{,}5; 0]$.

Решение.

Сначала нужно избавиться от натурального логарифма:

$\ln 1 = 0$, значит, $x = -10$,

тогда $y = 12(-10) - \ln(-10 + 11)^{12} = -120 - \ln 1^{12} = = -120$.

Ответ: -120.

2) Найдите наименьшее значение функции:
$y = (x - 14)e^{x-13}$ на отрезке $[12; 14]$.

Решение.

Избавляемся от иррациональности числа e.
$e^0 = 1$, значит, берём $x = 13$,
тогда $y = (13 - 14)e^{13-13} = -1 \cdot e^0 = -1$.

Замечаем, что можно было взять за x и число 14.
В этом случае ответ 0 не является наименьшим.

Ответ: -1.

3) Найдите наибольшее значение функции:
$y = 4\sqrt{2}\cos x + 4x - \pi + 4$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

Нужно избавиться от иррациональности числа π. Возьмём $x = \frac{\pi}{4}$ и получаем $y = 4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} +$

$+ 4 \cdot \frac{\pi}{4} - \pi + 4 = 4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \pi - \pi + 4 = 4 + 4 = 8.$

Ответ: 8.

При нахождении точек экстремума и наибольшего и наименьшего значений сложных монотонных функций, где под знаком логарифма, под корнем или в показателе степени стоит квадратичная функция, мы находим x вершины параболы, это и будет точка экстремума.

Если необходимо найти наибольшее или наименьшее значение функции, то, подставив этот x в данную функцию, находим y. Вершину параболы можно найти по формуле:

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Можно также воспользоваться способом нахождения производной от квадратичной функции, приравняв её к нулю, а затем найти значения x.

Примеры:

1) Найдите точку минимума функции:
$y = \log_2 (x^2 - 14x + 72) - 8.$

Решение.
$(x^2 - 14x + 72)' = 2x - 14; 2x - 14 = 0; x = 7.$

Ответ: 7.

2) Найдите наименьшее значение функции:
$y = 2^{x^2 + 8x + 18}.$

Решение.
$(x^2 + 8x + 18)' = 2x + 8; 2x + 8 = 0; x = -4.$
$y(-4) = 2^{(-4)^2 + 8(-4) + 18} = 2^2 = 4.$

Ответ: 4.

3) Найдите наибольшее значение функции:
$y = \sqrt{31 - 30x - x^2}.$

Решение.
$(31 - 30x - x^2)' = -30 - 2x; -30 - 2x = 0; 2x = -30;$
$x = -15. y(-15) = \sqrt{31 - 30(-15) - (-15)^2} =$
$= \sqrt{31 + 450 - 225} = \sqrt{256} = 16.$

Ответ: 16.

2.6. Первообразная

2.6.1. Первообразные элементарных функций

Первообразная для функции $f(x)$ на данном промежутке — такая функция $F(x)$, что для любого x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Основное свойство первообразных

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то и функция $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, также является первообразной функции $f(x)$.

Правила нахождения первообразных

• Если $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, а $G(x)$ — первообразная для функции $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ есть первообразная для $f(x) + g(x)$.

• Если $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, а k — постоянная, то $kF(x)$ есть первообразная для функции $kf(x)$.

• Если $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, а k и b — постоянные, причём $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx + b)$ есть первообразная для функции $f(kx + b)$.

Первообразные для некоторых функций	
Функция $f(x)$	**Первообразная $F(x)$**
0	C
k	$kx + C$
x^{α}	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$

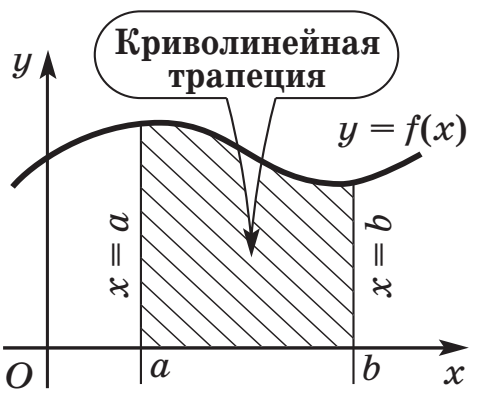
2.6.2. Площадь криволинейной трапеции

Криволинейная трапеция — фигура, ограниченная графиком непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ (причём функция не меняет знак для всех $x \in [a; b]$), двумя вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$, а также осью Ox.

Теорема для вычисления площади криволинейной трапеции

Если $f(x)$ — неотрицательная, непрерывная функция на отрезке $[a; b]$, а $F(x)$ — её первообразная на данном отрезке, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции равна разности первообразных конца и начала отрезка:

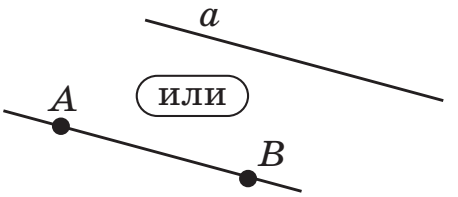
$$S = F(b) - F(a).$$



3. ГЕОМЕТРИЯ (ПЛАНИМЕТРИЯ)

3.1. Начальные сведения

3.1.1. Точки, прямые, лучи, отрезки

Основные геометрические фигуры на плоскости	
Точка	**Прямая**
	

Взаимное расположение точки и прямой	
$A \in a$ 	$A \notin a$ 
прямая a проходит через точку A	прямая a не проходит через точку A

Аксиомы — исходные положения какой-либо теории, принимаемые в рамках данной теории истинными без доказательства.
Теоремы — положения теории, требующие доказательства.

Аксиомы взаимного расположения точек и прямых

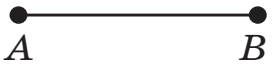
- Каждой прямой принадлежат по крайней мере две точки.
- Имеются по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.
- Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.

Луч — одна из двух частей прямой, на которые прямую делят лежащие на ней точки.



На рисунке — луч AB и луч AC; точка A — начало лучей AB и AC.

Отрезок — часть прямой, лежащая между двумя точками этой прямой. Эти точки называются концами отрезка.



На рисунке — отрезок AB; точки A и B — концы отрезка AB.

3.1.2. Углы. Вертикальные и смежные углы

Угол — геометрическая фигура, которая состоит из точки и двух лучей, исходящих из этой точки.

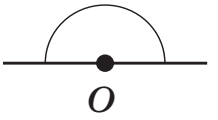
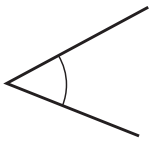
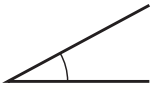
Лучи называют **сторонами угла**, а их общее начало — **вершиной угла**.

Угол обозначают либо через вершину и две точки на сторонах угла, либо только через вершину, либо через лучи. *Например*, $\angle B$, $\angle ABC$ или $\angle hn$.

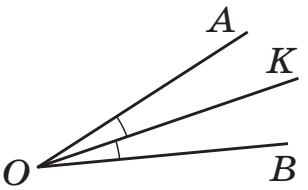
Развёрнутый угол — угол, стороны которого лежат на одной прямой.

Градус — угол, равный $\frac{1}{180}$ части развёрнутого угла.

Градусная мера угла — положительное число, которое показывает, сколько раз градус и его части укладываются в данном угле.

Развёрнутый угол	равен 180°	
Неразвёрнутый угол	меньше 180°	
Прямой угол	равен 90°	
Острый угол	меньше 90°	
Тупой угол	больше 90°, но меньше 180°	

Биссектриса угла — луч, исходящий из вершины угла и делящий его на две равные части.



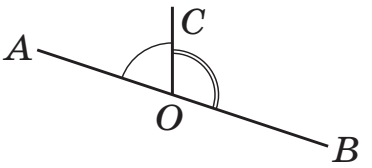
Свойства биссектрисы угла

• Любая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон (или продолжения сторон).

• Любая точка биссектрисы угла, за исключением вершины угла, является центром окружности, касающейся сторон (или продолжений сторон) этого угла.

• Биссектриса угла является осью симметрии самого угла, а также угла, образованного продолжением его сторон.

Смежные углы — два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой.

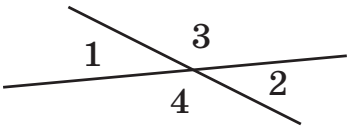


Свойство смежных углов

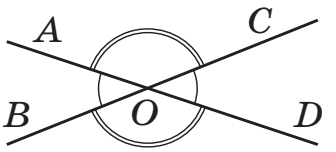
• Сумма смежных углов равна 180°.

Например, пары смежных углов:

$\angle 1 + \angle 3 = \angle 3 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 4 = \angle 4 + \angle 1 = 180°$.



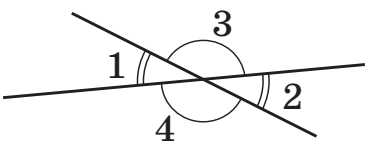
Вертикальные углы — два угла, у которых стороны одного являются продолжениями сторон другого.



Свойство вертикальных углов

• Вертикальные углы равны.

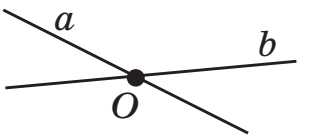
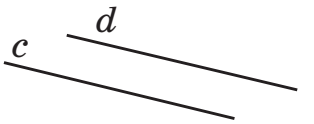
Например, пары вертикальных углов: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.



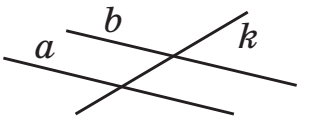
3.1.3. Прямая. Параллельность и перпендикулярность прямых

Параллельные прямые — прямые на плоскости, не имеющие общей точки.
Параллельность прямых обозначают знаком «$\parallel$».
Например, $a \parallel b$.

Взаимное расположение двух прямых на плоскости

• Две прямые имеют общую точку (пересекаются). $a \cap b = O$	
• Две прямые не имеют общих точек (параллельны). $d \parallel c$	

Секущая прямая по отношению к двум другим прямым — прямая, пересекающая их в двух точках. *Например*, прямая k — секущая прямая к прямым a и b.



Свойства параллельных прямых

1. Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной (аксиома параллельных прямых).

2. Все точки одной из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.

3. Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую прямую.

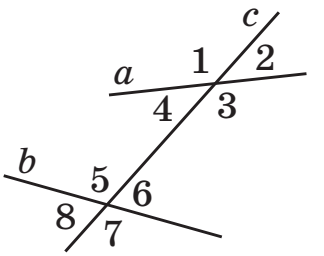
4. Если две различные прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

5. Если две различные прямые перпендикулярны третьей прямой, то они параллельны.

6. Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

7. Отрезки параллельных прямых, заключённых между параллельными прямыми, равны.

При пересечении двух прямых и секущей образуются 8 углов



$a \cap c$
$b \cap c$

Накрест лежащие углы:
$\angle 3$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 6$.

Односторонние углы:
$\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$.

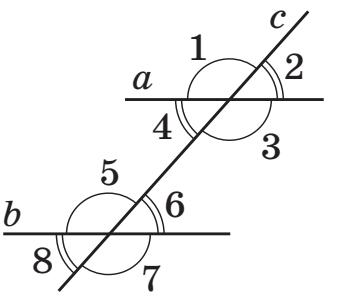
Соответствующие углы:
$\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 7$.

Свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей

1. Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то соответственные углы равны.

2. Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то накрест лежащие углы равны.

3. Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то сумма односторонних углов равна 180°.



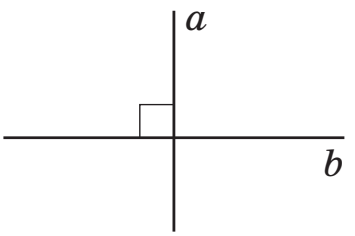
Признаки параллельности прямых

1. Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

2. Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.

3. Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

Перпендикулярные прямые — две пересекающиеся прямые, которые образуют четыре прямых угла.

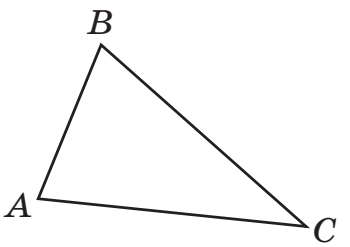


Например, прямые a и b — перпендикулярные: $a \perp b$.

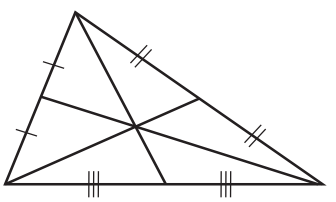
3.2. Треугольник

3.2.1. Треугольник. Медиана, биссектриса, высота, средняя линия треугольника

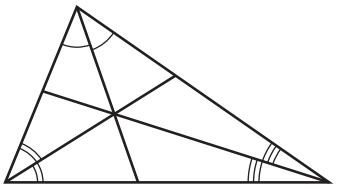
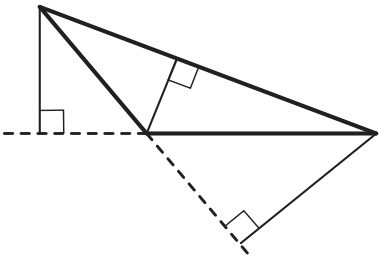
Треугольник — геометрическая фигура, которая состоит из 3-х точек, не лежащих на одной прямой, и 3-х отрезков, соединяющих эти точки попарно.



- Точки A, B, C — **вершины треугольника**;
- отрезки AB, BC, AC — **стороны треугольника**;
- углы A, B, C — **углы треугольника**.



Медиана треугольника — отрезок, который соединяет вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

	**Биссектриса треугольника** — отрезок биссектрисы угла треугольника, который соединяет вершину треугольника с точкой противоположной стороны.
	**Высота треугольника** — перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону.

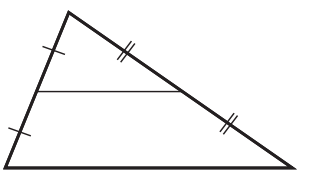
Свойства медианы, биссектрисы, высоты

• В любом треугольнике медианы пересекаются в одной точке и делятся в отношении 2 к 1, считая от вершины;

• в любом треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке;

• в любом треугольнике высоты или их продолжения также пересекаются в одной точке.

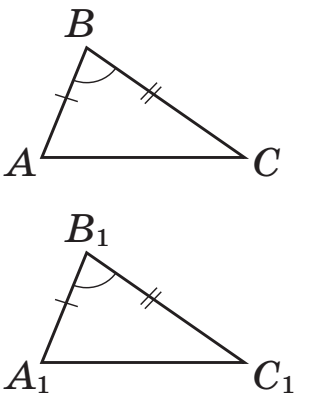
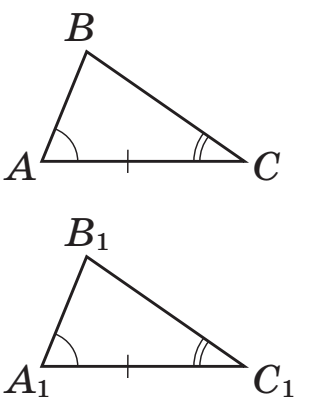
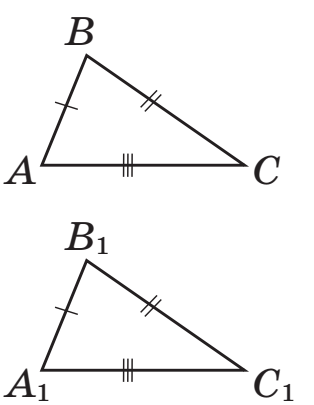
Средняя линия треугольника — отрезок, который соединяет середины двух сторон треугольника.



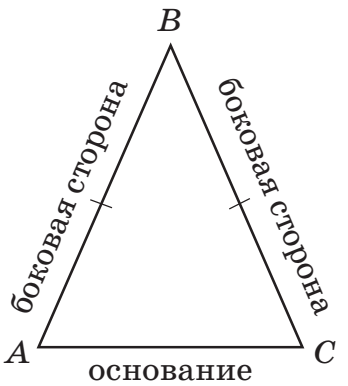
Свойство средней линии треугольника

• Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

3.2.2. Признаки равенства треугольников

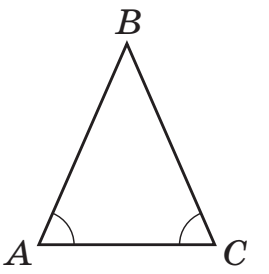
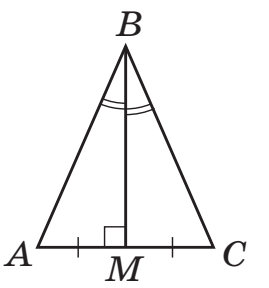
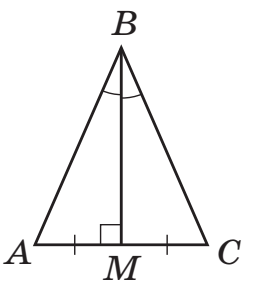
Признаки равенства треугольников	
1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.	
2. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.	
3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.	

3.2.3. Равнобедренный треугольник. Свойства и признаки равнобедренного треугольника

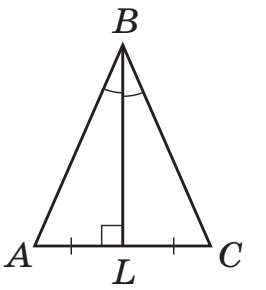


Равнобедренный треугольник — треугольник, у которого две стороны равны.

Равные стороны — **боковые стороны**, третья сторона — **основание треугольника**.

Свойства равнобедренного треугольника	
1. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.	
2. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, является медианой и высотой.	
3. В равнобедренном треугольнике высота, проведённая к основанию, является медианой и биссектрисой.	

4. В равнобедренном треугольнике медиана, проведённая к основанию, является высотой и биссектрисой.

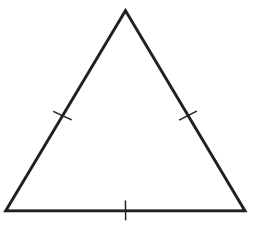


5. В равнобедренном треугольнике медианы (а также высоты или биссектрисы), проведённые к боковым сторонам, равны.

Признак равнобедренного треугольника

Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

Равносторонний треугольник — треугольник, у которого все стороны равны.



Свойства равностороннего треугольника

1. У равностороннего треугольника все углы равны по 60°.

2. В равностороннем треугольнике любая биссектриса является одновременно медианой и высотой.

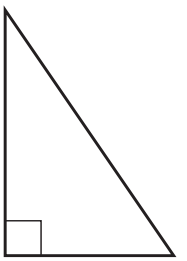
3. В равностороннем треугольнике все медианы (а также высоты или биссектрисы) равны между собой.

4. Точка пересечения медиан (высот, биссектрис) равностороннего треугольника является центром вписанной и описанной окружностей.

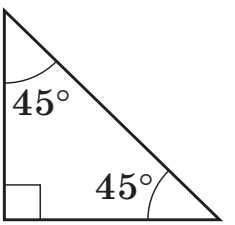
5. Все равносторонние треугольники подобны между собой.

3.2.4. Прямоугольный треугольник. Свойства и признаки прямоугольного треугольника. Теорема Пифагора

Прямоугольный треугольник — треугольник, у которого один из углов прямой, два других — острые.

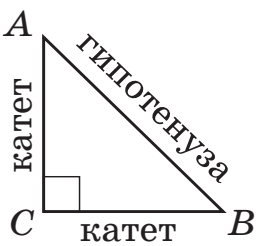


Равнобедренный прямоугольный треугольник — треугольник, у которого два острых угла равны по 45°.



Катеты — две стороны прямоугольного треугольника, лежащие на сторонах прямого угла.

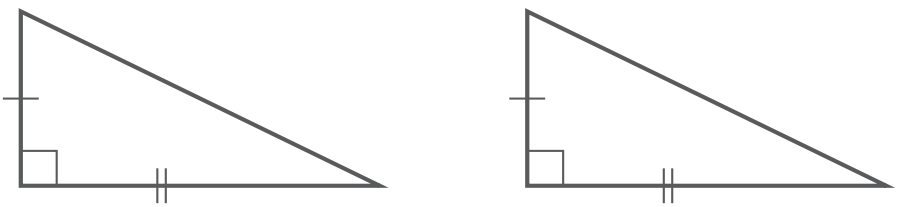
Гипотенуза — сторона прямоугольного треугольника, лежащая напротив прямого угла.



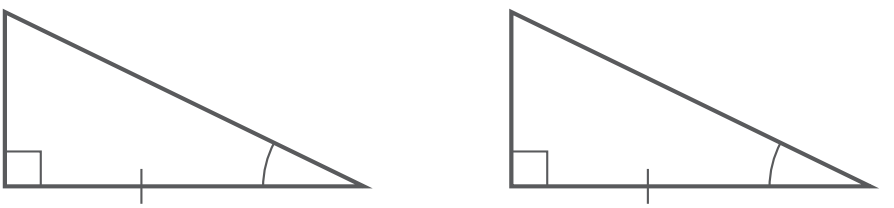
AC и BC — катеты, AB — гипотенуза

Признаки равенства прямоугольных треугольников

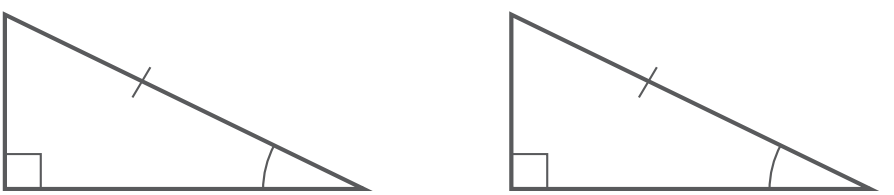
1. По двум катетам



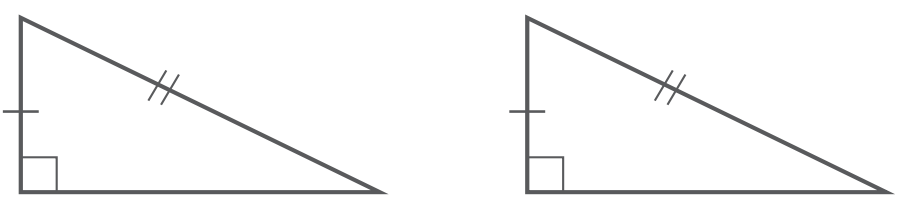
2. По катету и прилежащему к нему острому углу

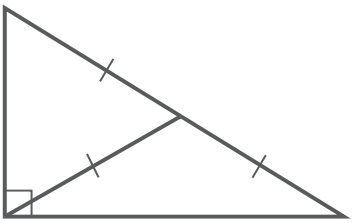


3. По гипотенузе и острому углу

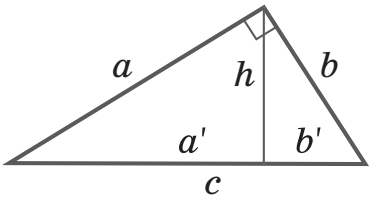


4. По гипотенузе и катету

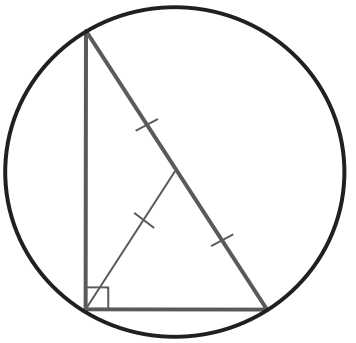




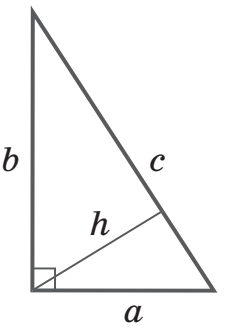
Медиана к гипотенузе:
1) равна половине гипотенузы;
2) делит треугольник на два равнобедренных треугольника равной площади.



Высота h, проведённая к гипотенузе:
1) $h = \sqrt{a'b'} = \dfrac{ab}{c}$;
2) делит треугольник на два подобных ему треугольника.



Центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы.



Площадь равна:
$S = \dfrac{1}{2}ab$ или $S = \dfrac{1}{2}ch$

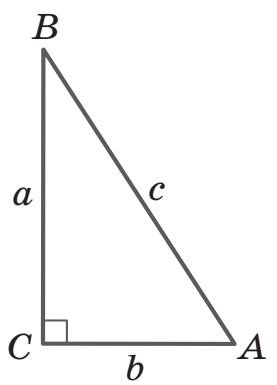
Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.
Например, если a и b — катеты, c — гипотенуза, то $a^2 + b^2 = c^2$.

Теорема, обратная теореме Пифагора: если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то этот треугольник является прямоугольным.

Пифагоровы тройки		
3, 4, 5 (египетский треугольник)	$3^2 = 4 + 5$	$3^2 + 4^2 = 5^2$
5, 12, 13	$5^2 = 12 + 13$	$5^2 + 12^2 = 13^2$
7, 24, 25	$7^2 = 24 + 25$	$7^2 + 24^2 = 25^2$
9, 40, 41	$9^2 = 40 + 41$	$9^2 + 40^2 = 41^2$
8, 15, 17		$8^2 + 15^2 = 17^2$

3.2.5. Синус, косинус, тангенс острого угла прямоугольного треугольника



ΔABC;
a и b — катеты;
c — гипотенуза.

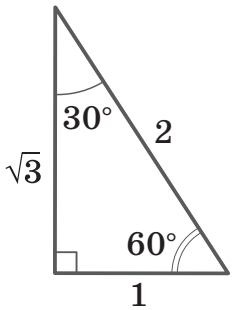
$$\sin A = \frac{a}{c} = \cos B$$

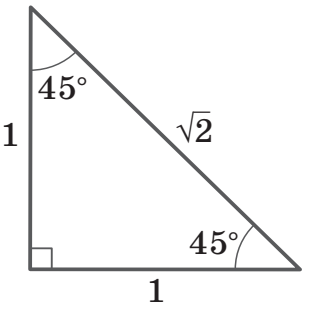
$$\cos A = \frac{b}{c} = \sin B$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \operatorname{ctg} B$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} B$$

Синус, косинус, тангенс и котангенс углов 30°, 45°, 60° в прямоугольном треугольнике





$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1}}{2} = \cos 60^\circ$$

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{ctg} 60^\circ$$

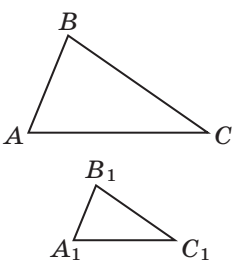
$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1 = \operatorname{ctg} 45^\circ$$

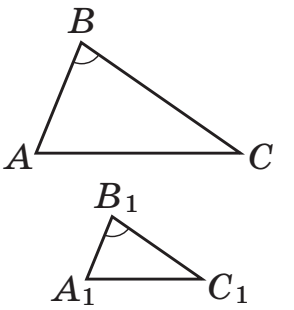
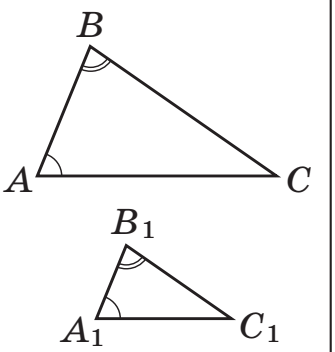
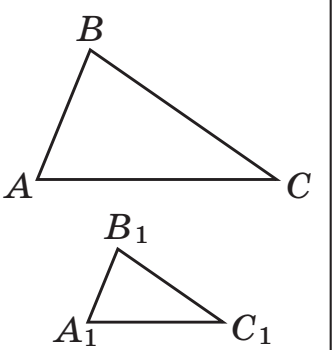
$$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} = \operatorname{ctg} 30^\circ$$

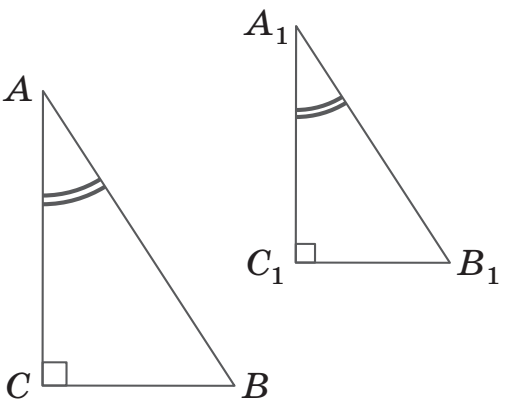
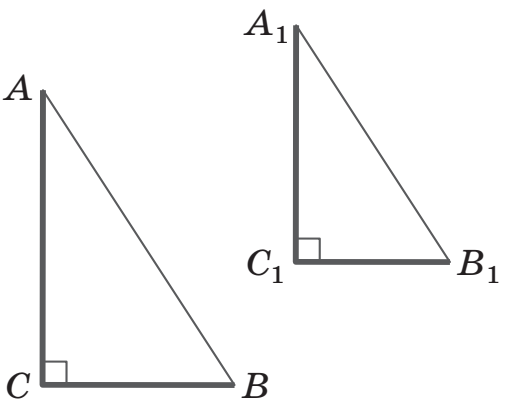
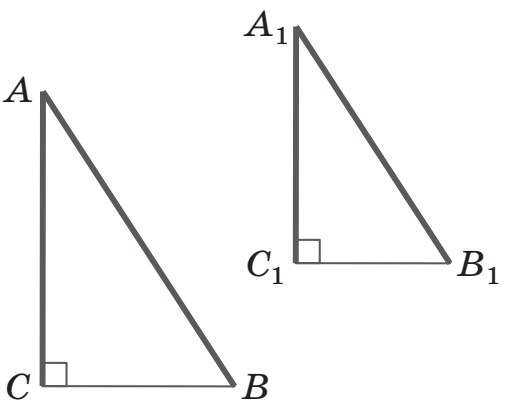
3.2.6. Признаки подобия треугольника

Подобные треугольники — треугольники, у которых соответствующие углы равны, а стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника.

Например,
ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ подобны.
$\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$; $\angle C = \angle C_1$;
$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.



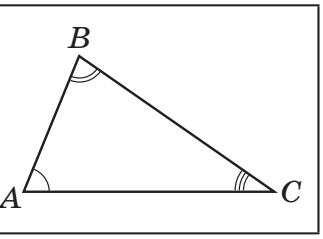
Признаки подобия треугольников	
• по двум пропорциональным сторонам и углу между ними. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}; \angle B = \angle B_1,$ следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1.$	
• по двум углам. $\angle A = \angle A_1; \angle B = \angle B_1,$ следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1.$	
• по трём пропорциональным сторонам. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1},$ следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1.$	

Подобие прямоугольных треугольников	
• по острому углу. $\angle A = \angle A_1$, следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.	
• по двум катетам. $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$, следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.	
• по катету и гипотенузе. $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = k$, следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.	

3.2.7. Сумма углов треугольника. Внешние углы треугольника

Сумма углов треугольника равна 180°.

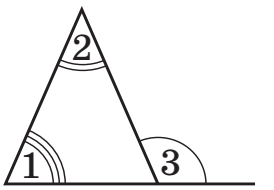
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$



Внешний угол треугольника — угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника.

Свойство внешнего угла треугольника

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

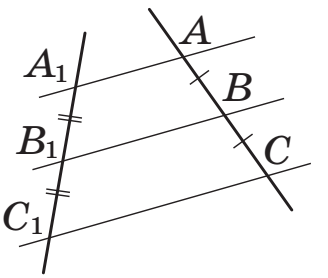


$$\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$$

3.2.8. Теорема Фалеса

Теорема Фалеса

Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.



3.2.9. Теорема синусов. Теорема косинусов

Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

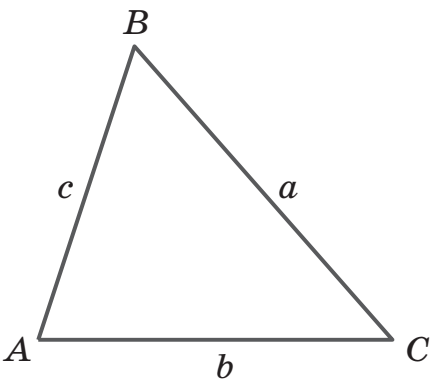
Например,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где a, b и c — длины сторон треугольника;
$\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$ — величины соответствующих углов треугольника;
R — радиус описанной окружности.

Теорема косинусов

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

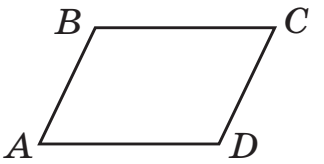


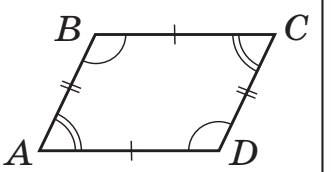
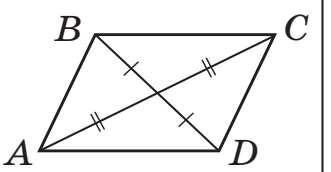
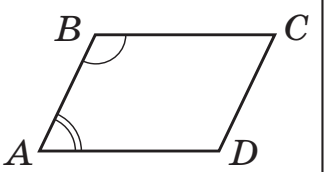
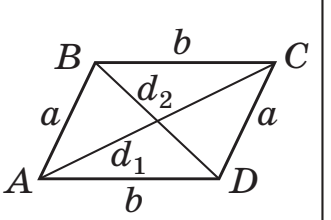
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

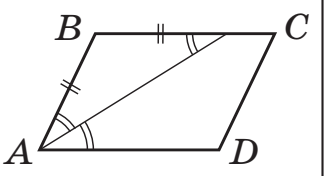
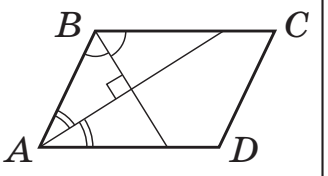
3.3. Многоугольники

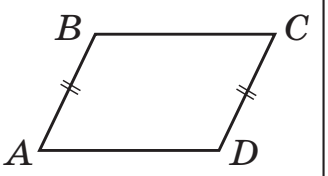
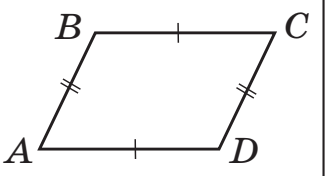
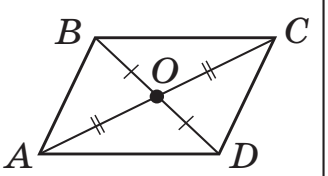
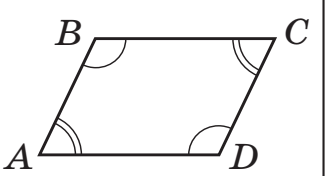
3.3.1. Параллелограмм

Параллелограмм — четырёхугольник, у которого противоположные стороны параллельны (т. е. лежат на параллельных прямых).
Например, $ABCD$ — параллелограмм, так как $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.



Свойства параллелограмма	
• В параллелограмме противоположные стороны равны, и противоположные углы равны.	
• Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.	
• Сумма двух углов параллелограмма, прилежащих к одной его стороне, равна 180°.	
• Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна удвоенной сумме квадратов его сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.	

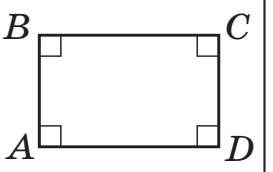
• Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.	
• Биссектрисы углов параллелограмма, прилегающих к одной его стороне, взаимно перпендикулярны.	

Признаки параллелограмма	
• Если две стороны четырёхугольника равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм. $AB \parallel CD$	
• Если противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.	
• Если в четырёхугольнике диагонали пересекаются и в точке пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.	
• Если в четырёхугольнике противоположные углы равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.	

3.3.2. Прямоугольник и ромб

Прямоугольник — параллелограмм, у которого все углы прямые.

Например, $ABCD$ — прямоугольник, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$.



Свойства прямоугольника

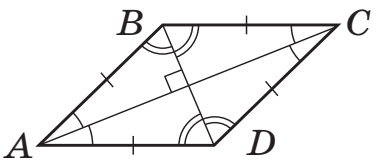
- Диагонали прямоугольника равны.
- Перпендикуляры, проходящие через середины сторон прямоугольника, являются его осями симметрии.

Признаки прямоугольника

- Если диагонали в параллелограмме равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.
- Если в параллелограмме один угол прямой, то это — прямоугольник.

Ромб — параллелограмм, у которого все стороны равны.

Например, $ABCD$ — ромб, $AB = BC = CD = AD$.



Свойства ромба

- Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.
- Диагонали ромба являются биссектрисами углов ромба.
- Прямые, на которых лежат диагонали ромба, являются его осями симметрии.

Признаки ромба

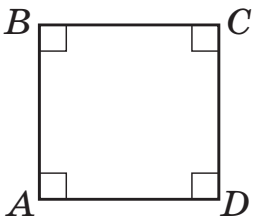
• Если в параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны, то это — ромб.

• Если диагональ параллелограмма лежит на биссектрисе его угла, то это — ромб.

• Если стороны четырехугольника равны, то это — ромб.

3.3.3. Квадрат

Квадрат — прямоугольник, у которого все стороны равны.
Например, $ABCD$ — квадрат,
$AB = BC = CD = AD$,
$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$.



Свойства квадрата

• Все углы квадрата прямые.

• Диагонали квадрата равны.

• Диагонали квадрата взаимно перпендикулярны.

• Диагонали квадрата точкой пересечения делятся пополам.

• Диагонали квадрата делят углы квадрата пополам.

• Квадрат имеет четыре оси симметрии: две диагонали и два перпендикуляра к его сторонам, проходящих через их середины.

Признаки квадрата

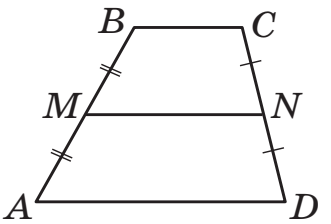
• Если в параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны и равны, то этот параллелограмм — квадрат.

• Если стороны четырёхугольника равны и диагонали также равны, то этот четырёхугольник — квадрат.

3.3.4. Трапеция

Трапеция — четырёхугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны.

Например,
$ABCD$ — трапеция, $BC \parallel AD$, $AB \nparallel CD$.



Основания трапеции — её параллельные стороны ($BC \parallel AD$).

Боковые стороны трапеции — её непараллельные стороны ($AB \nparallel CD$).

Средняя линия трапеции — отрезок, соединяющий середины её боковых сторон (MN).

Свойства трапеции

• Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

• Сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов боковых сторон и удвоенного произведения её оснований.

• Середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции лежат на одной прямой.

• Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен её основаниям и равен их полуразности.

Равнобедренная трапеция — трапеция, боковые стороны которой равны.

Свойства равнобедренной трапеции

• В равнобедренной трапеции углы при основании равны.

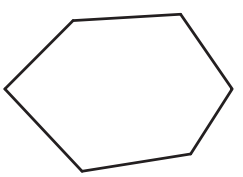
• В равнобедренной трапеции диагонали равны.

• В равнобедренной трапеции высота, опущенная из вершины на большее основание, делит его на два отрезка, один из которых равен полусумме оснований, другой — полуразности оснований.

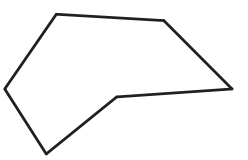
• В равнобедренной трапеции прямая, проходящая через середины оснований, перпендикулярна основаниям и является осью симметрии трапеции.

3.3.5. Сумма углов выпуклого многоугольника

Выпуклый многоугольник — многоугольник, который лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.



Выпуклый многоугольник

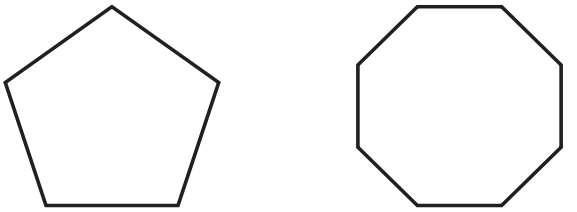


Невыпуклый многоугольник

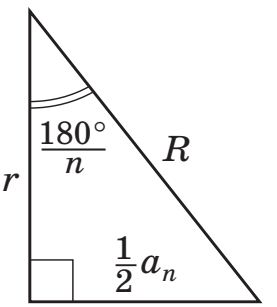
Сумма углов выпуклого n-угольника равна: $(n - 2) \cdot 180°$.

3.3.6. Правильные многоугольники

Правильный многоугольник — выпуклый многоугольник, у которого равны все стороны и равны все углы.



Радиусы вписанной и описанной окружностей правильных n-угольников (r — радиус вписанной окружности, R — радиус описанной окружности, a — сторона, S — площадь).

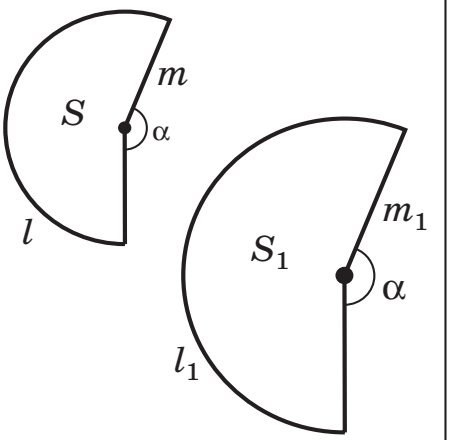


	r	R	S
Треугольник равносторонний	$\frac{a}{2\sqrt{3}}$	$\frac{a}{\sqrt{3}}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
Квадрат	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	a^2
Правильный шестиугольник	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	a	$\frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}$
n-угольник	$\frac{a}{2\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}}$	$\frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$	$\frac{a^2 n}{4\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}}$

3.3.7. Подобие произвольных фигур

Подобие геометрических фигур

Фигура F подобна фигуре F_1 ($F \sim F_1$).
Внутри подобных фигур сохраняются:



- углы $\alpha = \alpha_1$;
- отношения любых длин $\frac{l}{m} = \frac{l_1}{m_1}$;

Между подобными фигурами существуют постоянные:

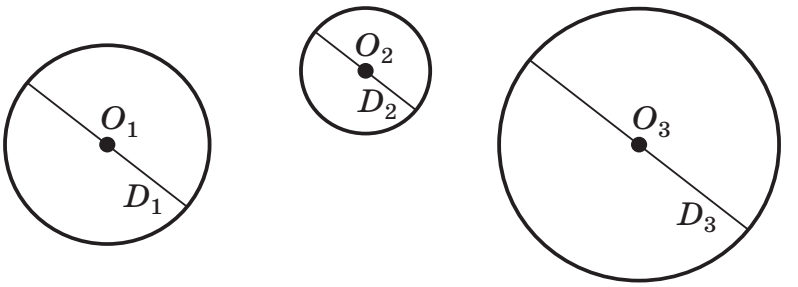
- отношения соответствующих длин $\frac{m_1}{m} = \frac{l_1}{l} = k$ — коэффициент подобия;
- отношения соответствующих площадей $\frac{S_1}{S} = k^2$;
- отношение соответствующих объёмов $\frac{V_1}{V} = k^3$.

Геометрические фигуры, которые подобны всегда:

- все правильные многоугольники. *Например*, равносторонние треугольники, квадраты, правильные шестиугольники;
- окружности, круги;
- правильные многогранники. *Например*, правильные тетраэдры, кубы;
- шары.

Именно с подобием окружностей связано появление числа π.

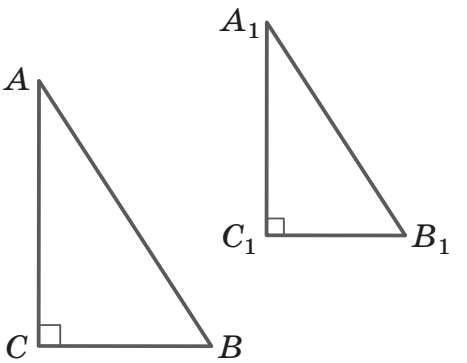
Для любых окружностей (подобных фигур) отношения любых длин сохраняются.



C — длина окружности; D — диаметр окружности.

$$\frac{C_1}{D_1} = \frac{C_2}{D_2} = \frac{C_3}{D_3} = \pi \approx 3{,}14.$$

Именно с подобием прямоугольных треугольников связано появление тригонометрических функций синуса, косинуса, тангенса и котангенса, так как $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, то отношение любых длин постоянны в подобных фигурах.



$$\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1} = \sin B = \cos A; \quad \frac{CB}{AB} = \frac{C_1B_1}{A_1B_1} = \cos B = \sin A;$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A_1C_1}{C_1B_1} = \operatorname{tg} B = \operatorname{ctg} A; \quad \frac{CB}{AC} = \frac{C_1B_1}{A_1C_1} = \operatorname{ctg} B = \operatorname{tg} A.$$

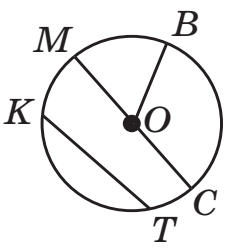
3.4. Окружность и круг

3.4.1. Основные понятия

Окружность — геометрическая фигура, которая состоит из всех точек, расположенных на заданном расстоянии от данной точки, центра окружности.

Круг — часть плоскости, ограниченная окружностью.

Например, на рисунке представлена окружность с центром в точке O, радиусом $R = OB$, диаметром $D = MC$, хордой KT. $D = 2R$.



3.4.2. Вписанный и центральный углы

Дуга окружности — каждая из двух частей окружности, на которые окружность делится двумя точками.

Центральный угол — угол, вершина которого совпадает с центром окружности.

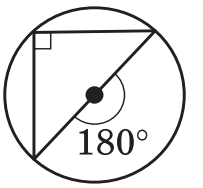
Полуокружность — дуга, концы которой являются концами диаметра окружности.

Вписанный угол — угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность.

Теорема о вписанном угле

Угол, вписанный в окружность, равен половине дуги, на которую он опирается или половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

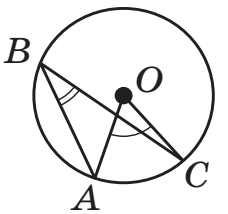
Следствия к теореме о вписанном угле



• Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны;

• вписанный угол, опирающийся на полуокружность, — прямой.

Пример.

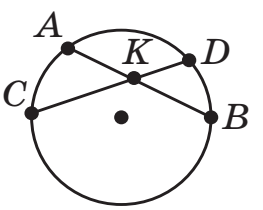


$\angle AOC$ — центральный угол; $\angle ABC$ — вписанный угол; $\cup AC$ — дуга; $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\cup AC$

Теорема о произведении отрезков пересекающихся хорд

Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

Например, если AB и CD — хорды окружности, пересекающиеся в точке K, то $AK \cdot BK = CK \cdot DK$.



8.4.3. Касательная и секущая к окружности

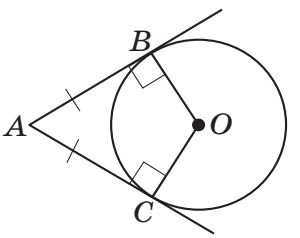
Касательная — прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку.

Секущая прямая — прямая, которая имеет две общие точки с окружностью.

Точка касания — общая точка касательной и окружности.

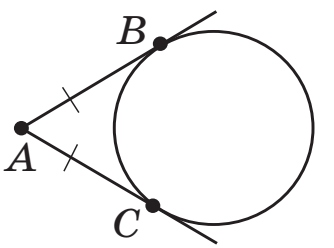
Отрезки касательных — расстояния от точки, из которой проведены две касательные к окружности, до точек касания.

Например, AB и AC — касательные к окружности, тогда отрезки AB и AC — отрезки касательных.



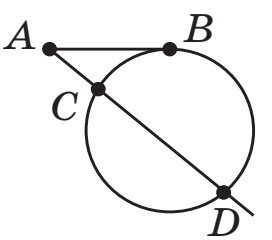
• Отрезки касательных, проведённых из одной точки, равны:

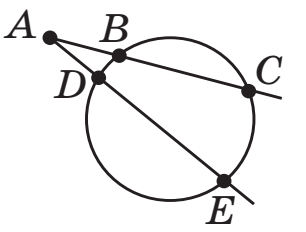
$$AB = AC.$$



• Квадрат отрезка касательной равен произведению отрезков секущей, проведённой из той же точки:

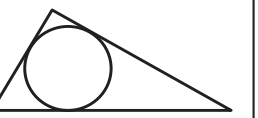
$$AB^2 = AC \cdot AD.$$



• Произведения отрезков секущих, проведённых из одной точки, равны: $AB \cdot AC = AD \cdot AE.$	

3.4.4. Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника

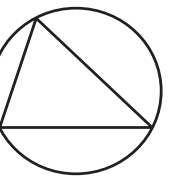
Окружность, вписанная в треугольник



Окружность, вписанная в треугольник, касается всех сторон треугольника.

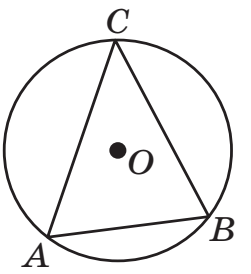
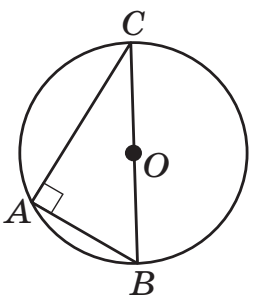
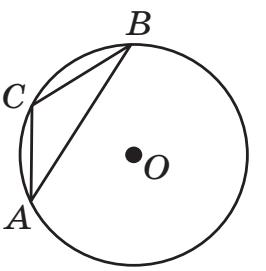
Центр окружности, вписанной в треугольник, — точка пересечения биссектрис углов треугольника. В любой треугольник можно вписать окружность, и только одну.

Окружность, описанная около треугольника



Окружность, описанная около треугольника, проходит через все его вершины.

Центр окружности, описанной около треугольника, — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Около любого треугольника можно описать окружность, и только одну.

Центр описанной окружности		
Остроугольный треугольник	Внутри треугольника	
Прямоугольный треугольник	На середине гипотенузы	
Тупоугольный треугольник	Вне треугольника	

3.4.5. Вписанные и описанные четырёхугольники

Вписанные четырёхугольники
Свойство вписанного четырёхугольника
В любом вписанном четырёхугольнике сумма противолежащих углов равна 180°.
Признак вписанного четырёхугольника
Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°, то около него можно описать окружность. *Примеры* вписанного четырёхугольника — прямоугольник, равнобедренная трапеция.

Описанные четырёхугольники
Свойство описанного четырёхугольника
В любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны.
Признак описанного четырёхугольника
Если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность. *Пример* описанного четырёхугольника — ромб.

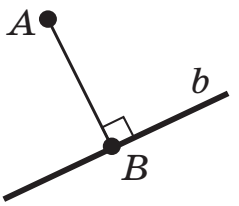
3.5. Измерение геометрических величин

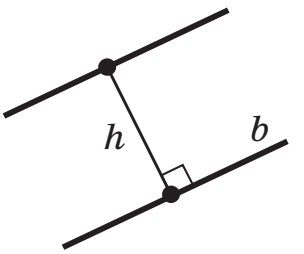
3.5.1. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми

Расстояние от точки до прямой, не содержащей эту прямую — длина отрезка перпендикуляра, проведенного из точки на прямую.

Расстояние между двумя параллельными прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра.

Расстояние между двумя параллельными прямыми — расстояние от любой точки одной из этих прямых до другой прямой.





3.5.2. Периметр многоугольников

Периметр P многоугольника — сумма длин всех сторон многоугольника.

$$P = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

3.5.3. Длина окружности

Длина окружности C

$$C = 2\pi R = \pi D,$$

где R — радиус окружности, D — диаметр окружности, $D = 2R$, $\pi \approx 3{,}14$.

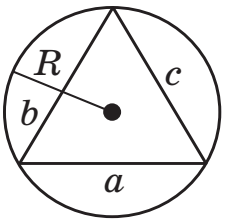
3.5.4. Площадь квадрата, прямоугольника

Площадь квадрата со стороной a	$S = a^2$
Площадь прямоугольника со сторонами a и b	$S = ab$

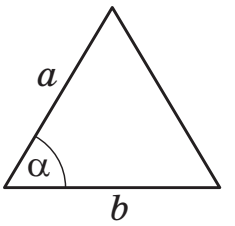
3.5.6. Площадь параллелограмма и ромба, выпуклого четырёхугольника

Площадь параллелограмма	
• Произведение основания на высоту	$S = a \cdot h_a$
• Произведение его смежных сторон на синус угла между ними	$S = a \cdot b \cdot \sin \alpha$
• Половина произведения его диагоналей на синус угла между ними	$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$
Площадь ромба	
• Произведение основания на высоту	$S = a \cdot h_a$
• Произведение квадрата его стороны на синус угла между сторонами	$S = a^2 \cdot \sin \alpha$
• Половина произведения его диагоналей	$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$
Площадь выпуклого четырёхугольника	
• Половина произведения его диагоналей на синус угла между ними	$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$

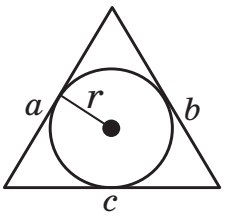
3.5.6. Площадь треугольника



$$S_\Delta = \frac{abc}{4R}$$



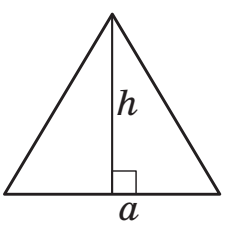
$$S_\Delta = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$$



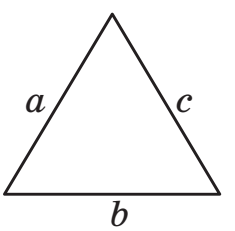
$$S_\Delta = \frac{1}{2}Pr$$

$$P = a + b + c$$

Площадь треугольника



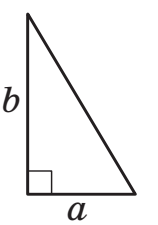
$$S_\Delta = \frac{1}{2}ah$$



Формула Герона

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

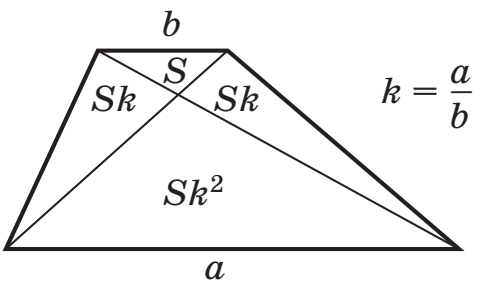


$$S_\Delta = \frac{1}{2}ab$$

В прямоугольном треугольнике a и b — катеты.

3.5.7. Площадь трапеции

Площадь трапеции	
• Произведение полусуммы её оснований на высоту	$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$
• Произведение средней линии на её высоту	$S = m \cdot h$
• Половина произведения диагоналей на синус угла между ними	$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \sin\alpha$



$k = \frac{a}{b}$

$$S_{тр} = S + 2Sk + Sk^2 = S(1 + 2k + k^2) = S(1 + k)^2$$

3.5.8. Площадь круга. Площадь сектора

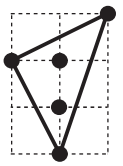
Площадь круга	
Произведение числа π на квадрат радиуса круга.	$S = \pi R^2$ $\pi \approx 3{,}14.$
Площадь кругового сектора	
Произведение отношения градусной меры дуги окружности к 360 °и площади круга.	$S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha,$ где α — градусная мера дуги; R — радиус окружности.

3.5.9. Формула Пика для нахождения площади многоугольников на клетчатой бумаге

$S = \text{В} + \frac{\Г}{2} - 1$, где

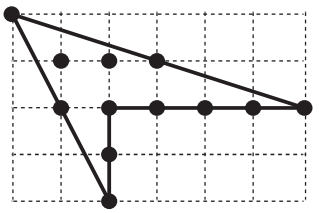
S — площадь многоугольника;
В — количество узлов сетки, лежащих внутри многоугольника;
Г — количество узлов сетки, лежащих на границе многоугольника.

Примеры:

1) 

$\text{В} = 2, \Г = 3,$

$S = 2 + \frac{3}{2} - 1 = 2{,}5.$

2) 

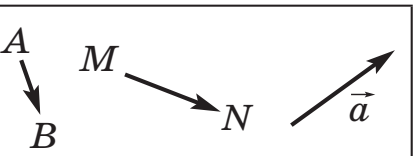
$\text{В} = 2, \Г = 10,$

$S = 2 + \frac{10}{2} - 1 = 6.$

3.6. Векторы на плоскости

3.6.1. Вектор, длина вектора, равенство векторов

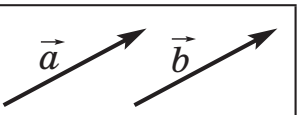
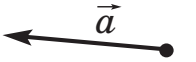
Вектор — направленный отрезок, т. е. отрезок, у которого одна из крайних точек называется началом, а другая — концом.



Обозначение вектора — две заглавные латинские буквы или одна строчная латинская буква со стрелкой над ними. *Например*: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$, $\vec{a}$.

Нулевой вектор — вектор, у которого начало совпадает с концом. Обозначается: $\vec{0}$ или $\overrightarrow{MM}$, $\overrightarrow{AA}$ и т.п.

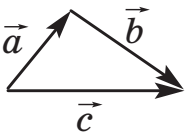
Длина ненулевого вектора (абсолютная величина или **модуль вектора)** — длина отрезка, которым изображается данный вектор. Длину нулевого вектора считают равной нулю: $|\vec{0}| = 0$.

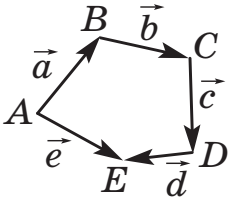
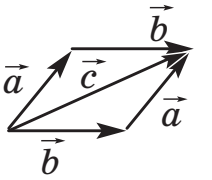
Равные векторы — сонаправленные векторы, одинаковой длины.	
Вектор, отложенный от точки, — вектор, началом которого является данная точка.	

• От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и только один.

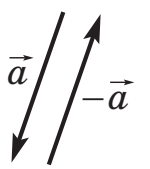
• Равные векторы можно откладывать от разных точек, считать их одним и тем же вектором и обозначать одной буквой.

3.6.2. Операции над векторами

Правила сложения векторов	
• Правило треугольника для сложения двух векторов состоит в том, что второй вектор откладывают от конца первого и считают суммой вектор, начало которого совпадает с началом первого вектора, а конец — с концом второго вектора.	*Например*, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ 

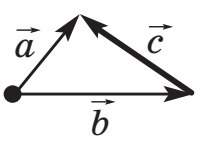
• Правило многоугольника для сложения нескольких векторов состоит в том, что складываемые вектора откладывают таким образом, чтобы каждый следующий вектор начинался от конца предыдущего. Тогда суммой всех данных векторов будет вектор, который начинается от начала первого вектора и соединяет его с концом последнего.	*Например*, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{e}$ 
• Правило параллелограмма для сложения двух неколлинеарных векторов состоит в том, что оба вектора откладывают от одной точки, полученную фигуру достраивают до параллелограмма, используя данные вектора как стороны параллелограмма. Искомой суммой будет вектор, совпадающий с диагональю параллелограмма и имеющий началом ту же точку, что и слагаемые.	*Например*, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ 

Законы сложения векторов	
Переместительный закон	$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
Сочетательный закон	$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
	$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

Противоположные векторы — векторы, имеющие одинаковые длины и противоположно направленные. Записывают так: $\vec{a}$ и $-\vec{a}$, причём $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.	

Разность двух векторов — вектор, который в сумме с вычитаемым вектором даёт уменьшаемый вектор.

Например, $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.



Теорема о разности векторов

Равенство $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ справедливо для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Правила вычитания векторов

• Для того чтобы вычесть из одного вектора другой, надо к первому вектору прибавить вектор, противоположный второму.

• Для того чтобы вычесть из одного вектора другой, надо из произвольной точки плоскости отложить оба вектора, затем построить вектор, который начинается на конце второго вектора (вычитаемого), а заканчивается на конце первого вектора (уменьшаемого).

Произведение векторов

Произведение ненулевого вектора на число — вектор, который сонаправлен с данным, если число положительное, и противоположно направлен к данному вектору, если число отрицательное. Длина искомого вектора равна произведению модуля числа на длину данного вектора.

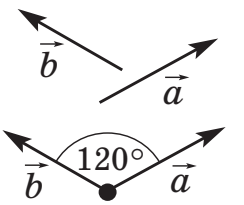
Произведение нулевого вектора на любое число — нулевой вектор.

Произведение числа нуль на любой вектор — нулевой вектор.

Законы умножения вектора на число	
Сочетательный закон	$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$
Распределительный закон	$(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

3.6.3. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов

Угол между векторами — угол, который образуется, если отложить оба вектора от одной точки. Сторонами искомого угла будут лучи, содержащие данные векторы.

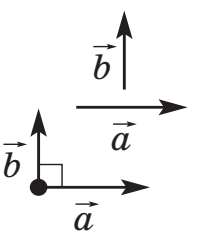


Угол между векторами обозначают:

$$\overset{\wedge}{\vec{a}\,\vec{b}} \text{ или } \angle(\vec{a}\,\vec{b}).$$

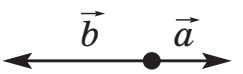
Перпендикулярные векторы — векторы, угол между которыми равен 90°.

Обозначают как: $\vec{a} \perp \vec{b}$.



• Если векторы сонаправлены, в том числе оба или только один из них нулевой, то угол между этими векторами считается равным 0°.

• Если векторы противоположно направлены, то угол между ними — 180°.



Скалярное произведение двух векторов — произведение длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}\, \vec{b}).$$

Свойства скалярного произведения двух векторов

- Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, так как $\cos 90° = 0$;
- если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$;
- если $\angle(\vec{a} \cdot \vec{b}) > 90°$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$;
- если $\angle(\vec{a} \cdot \vec{b}) < 90°$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$;
- если $\angle(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Скалярное произведение в координатах

$\vec{a}\{x_1; y_1\}$, $\vec{b}\{x_2; y_2\}$; $\vec{a}\, \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$

Скалярный квадрат вектора
равен квадрату его длины

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

Свойства скалярного произведения вектора	
Переместительный закон	$\vec{m} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \vec{m}$
Сочетательный закон	$(k\vec{m})\vec{n} = k(\vec{m}\, \vec{n})$
Распределительный закон	$\vec{p}\, (\vec{m} + \vec{n}) = \vec{p}\, \vec{m} + \vec{p}\, \vec{n}$

3.6.4 Простейшие задачи в координатах

Координаты середины отрезка $C(x; y)$ — середины отрезка AB, где $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ вычисляют по формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Длина вектора $\vec{a}\{x; y\}$ вычисляется по формуле:

$$|a| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Расстояние d **между двумя точками** $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ в пространстве находят по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

3.6.5. Уравнение окружности

• Уравнение окружности с центром в точке $O(a; b)$ и радиусом R имеет вид:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

• Уравнение окружности с центром в точке $O(0; 0)$ и радиусом R имеет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

3.7. Дополнительные материалы к главе 3

3.7.1. Использование подобия треугольников при решении задач

Примеры:

1. В треугольнике ABC угол $\angle C = 90°$, $AC = 8$, $\operatorname{tg} A = \dfrac{21}{2\sqrt{2}}$.

Найти: AB.

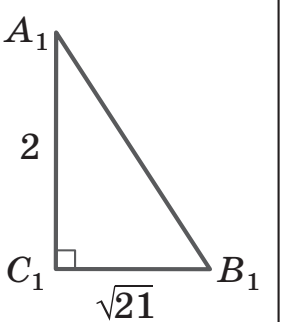
Решение.

Упростим тангенс:

$\operatorname{tg} A = \dfrac{21}{2\sqrt{21}} = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

Теперь построим:

$\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$.



По теореме Пифагора найдём A_1B_1:

$A_1B_1 = \sqrt{2^2 + \sqrt{21}} = 5$;

$\dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1}$;

$\dfrac{8}{2} = \dfrac{AB}{5}$;

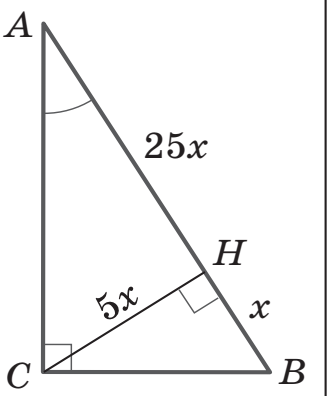
$AB = 20$.

Ответ: 20.

2. В треугольнике ABC угол $\angle C = 90°$, $CH \perp AB$, $AB = B$, $\text{tg}\, A = \frac{1}{5}$.

Найти: AH.

Решение.



1) Обозначим $HB = x$,
тогда $CH = 5HB = 5x$, так как
$\angle HCB = \angle CA$; $\text{tg}\, HCB = \frac{1}{5}$;
$\Delta HCB \sim \Delta CAB$ по острому углу;
$\angle$B — общий.

2) В ΔACH:

$CH = 5x$, тогда $AH = 25x$, так как $\text{tg}\, CAH = \frac{1}{5}$.

3) $AH = 25x$;

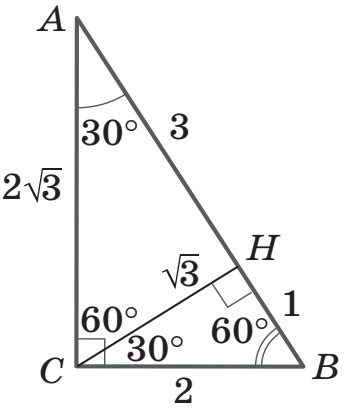
$HB = x$;

$AB = 26x = 13$;

$x = \frac{1}{2}$;

$AH = 25x = \frac{25}{2} = 12{,}5$.

Ответ: 12,5.



• Соотношение отрезков в прямоугольных треугольниках с острым углом 30° и 60°:

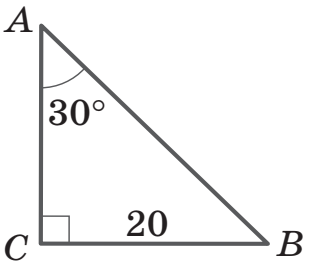
1) $HB = 1$, $CB = 2$, $CH = \sqrt{3}$ из ΔCHB;

2) $CH = \sqrt{3}$, $AC = 2\sqrt{3}$, $AH = 3$ из ΔACH;

3) $CB = 2$, $AB = 4$, $AC = 2\sqrt{3}$ из ΔABC.

Катет, лежащий против угла 30° равен половине гипотенузы и в $\sqrt{3}$ раз меньше второго катета.

Например,



$BC = 20$, тогда $AB = 40$, $AC = 20\sqrt{3}$.

• Формула радиуса вписанной окружности r в прямоугольном треугольнике:

$r = \dfrac{a + b - c}{2}$, где a и b — катеты, c — гипотенуза.

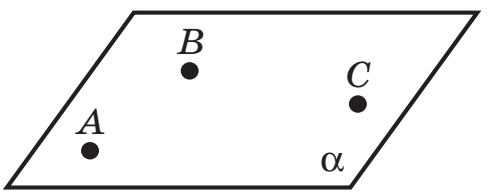
4. ГЕОМЕТРИЯ (СТЕРЕОМЕТРИЯ)

4.1. Прямые и плоскости в пространстве

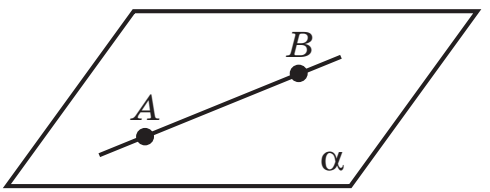
4.1.1. Основные аксиомы стереометрии и следствия к ним

Аксиомы стереометрии

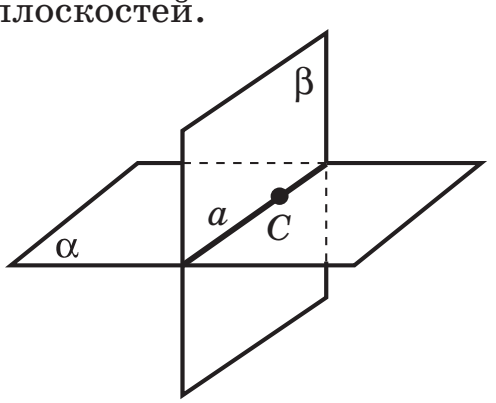
• Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.



• Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

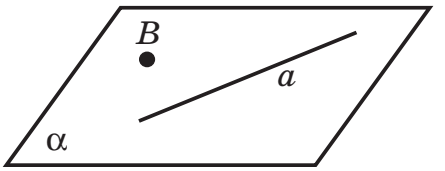


• Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

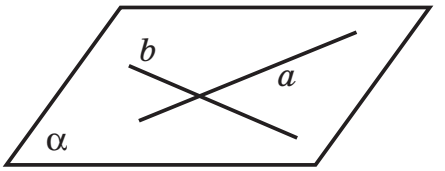


Следствия из аксиом

• Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.

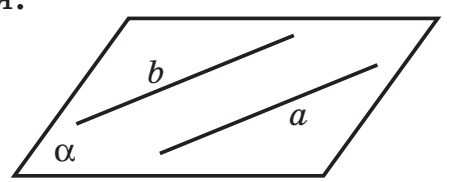


• Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

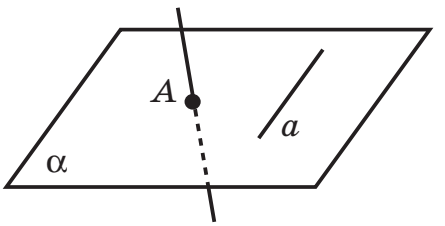


4.1.2. Взаимное расположение прямых в пространстве

• **Параллельные прямые** — две прямые в пространстве, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются.

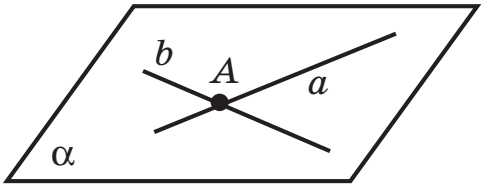


• **Скрещивающиеся прямые** — две прямые, которые не лежат в одной плоскости.



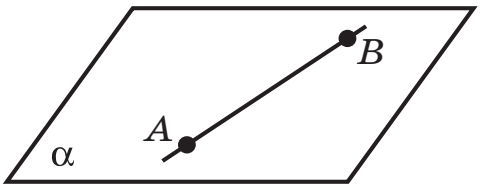
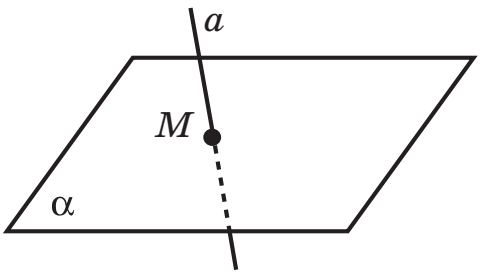
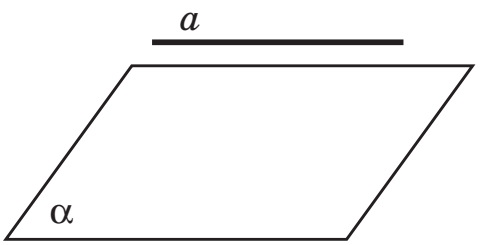
• Если одна прямая лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.

• **Пересекающиеся прямые** — две различные прямые, которые имеют общую точку и лежат в одной плоскости.



Перпендикулярные прямые в пространстве — две пересекающиеся или скрещивающиеся прямые, угол между которыми равен 90°. Обозначаются: $a \perp b$.

4.1.3. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве	
• прямая лежит в плоскости;	
• прямая и плоскость имеют только одну общую точку, т.е. пересекаются;	
• прямая и плоскость не имеют ни одной общей точки.	

Прямую и плоскость называют параллельными, если они не имеют общих точек.

Признак параллельности прямой и плоскости

• Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этот плоскости, то она параллельна данной плоскости.

Свойства параллельных прямой и плоскости

• Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

• Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

• Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Свойства перпендикулярных прямой и плоскости

• Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

• Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

• **Перпендикуляр к плоскости** — отрезок прямой, которая перпендикулярна плоскости, имеющий концом точку пересечения прямой и плоскости.

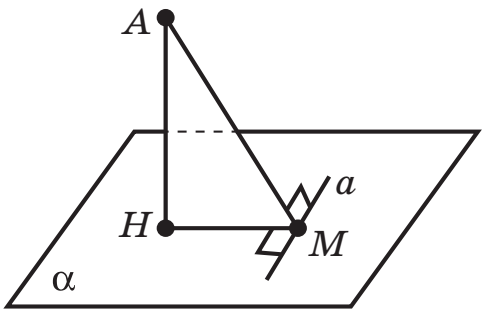
• **Основание перпендикуляра** — конец перпендикуляра, лежащий на плоскости.

• **Наклонная к плоскости** — отрезок, соединяющий точку A вне плоскости с точкой M лежащей на плоскости, но не совпадающий с основанием перпендикуляра из точки A к этой плоскости.

• **Основание наклонной** — точка M лежащая в плоскости.

Теорема
о трёх перпендикулярах

• Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к её проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.



$AH \perp \alpha$

AM — наклонная,

HM – проекция наклонной на α.

Теорема обратная теореме
о трёх перпендикулярах

• Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к её проекции.

4.1.4. Взаимное расположение плоскостей в пространстве

Параллельные плоскости — плоскости, не имеющие общих точек.

Признак параллельности двух плоскостей

• Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Свойства параллельных плоскостей

• Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

• Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.

Перпендикулярные плоскости — две пересекающиеся плоскости, угол между которыми равен 90°.

Признак перпендикулярности плоскостей

• Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

Свойство перпендикулярности плоскостей

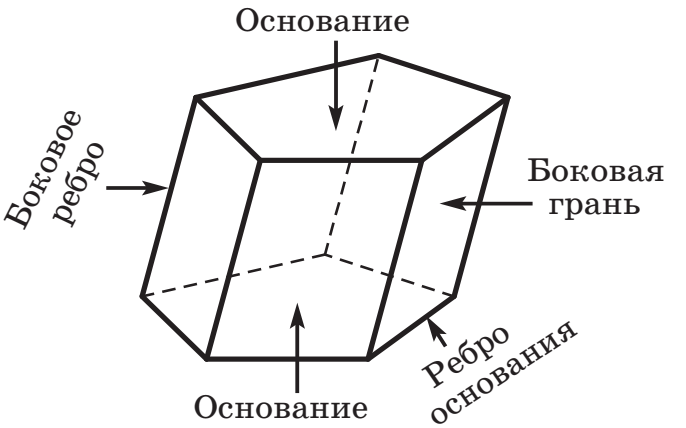
• Плоскость, перпендикулярная прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна каждой из этих плоскостей.

4.2. Многогранники

4.2.1. Призма, параллелепипед, куб

Призма

Призма — многогранник, две грани которого — равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные грани — параллелограммы.



Основания призмы — равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях.

Боковые рёбра — рёбра, не лежащие на основаниях. Все боковые рёбра параллельны между собой.

Высота призмы — перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания.

Прямая призма — призма, боковые рёбра которой перпендикулярны плоскостям оснований.

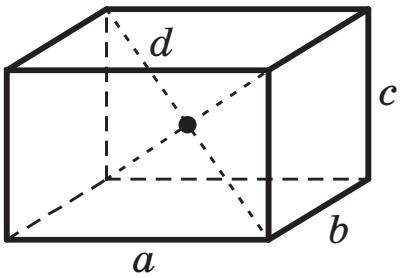
Боковые грани прямой призмы — прямоугольники.

Высота прямой призмы равна боковому ребру.

Правильная призма — прямая призма, основания которой являются правильными многоугольниками.

Параллелепипед

Параллелепипед — призма, основания которой — параллелограммы.



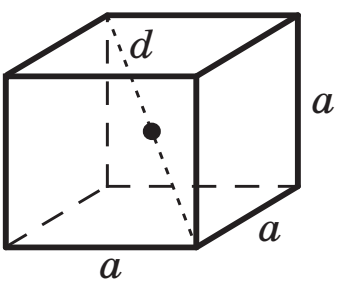
Прямоугольный параллелепипед — параллелепипед, у которого боковые рёбра перпендикулярны основаниям, а основания являются прямоугольниками.

Все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх измерений ($d^2 = a^2 + b^2 + c^2$).

Куб

Куб — прямоугольный параллелепипед, все рёбра которого равны.



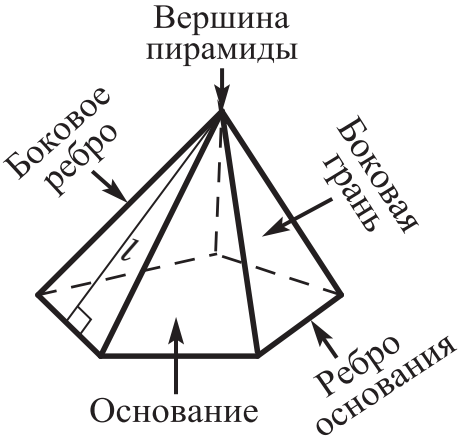
Все грани — квадраты.

Квадрат диагонали куба равен квадрату трёх его сторон ($d^2 = 3a^2$).

4.2.2. Пирамида

Пирамида

Пирамида — многогранник, составленный из n-угольника и n-треугольников, при этом n-угольник считают основанием пирамиды, а треугольник — боковыми гранями.



Основание пирамиды — многоугольники.

Боковые грани — треугольники с общей вершиной.

Боковые рёбра — стороны боковых граней, не лежащие в основании пирамиды.

Высота — отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины пирамиды на плоскость ее основания.

Апофема l — высота боковой грани.

Правильная пирамида — пирамида, в основании которой лежит правильный многоугольник, а вершина пирамиды проектируется в центр основания. Все боковые грани — равные равнобедренные треугольники. Все боковые рёбра равны. Все апофемы равны. **Тетраэдр** — это треугольная пирамида. У правильного тетраэдра все грани — равносторонние треугольники.

4.2.3. Сечение многогранника

Сечение многогранника — многоугольник, сторонами которого являются отрезки, по которым секущая плоскость пересекает грани многогранника.

Например, тетраэдр имеет четыре грани — его сечением могут быть только треугольники и четырёхугольники; параллелепипед имеет шесть граней — его сечениями могут быть треугольники, четырёхугольники, пятиугольники и шестиугольники.

Пример.

Дано: $SABC$ — пирамида, $O \in AB$, $F \in SB$, $D \in AC$.

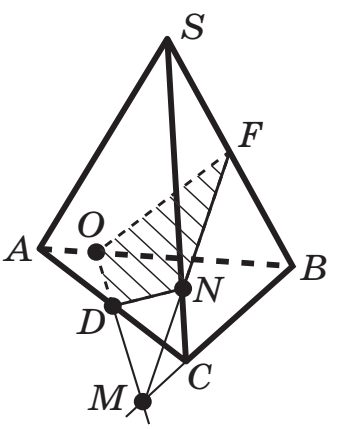
Построить: сечение пирамиды плоскостью OFD.

Решение:

1) $OD \cap BC = M$;

2) $MF \cap SC = N$;

3) $OFND$ — искомое сечение.

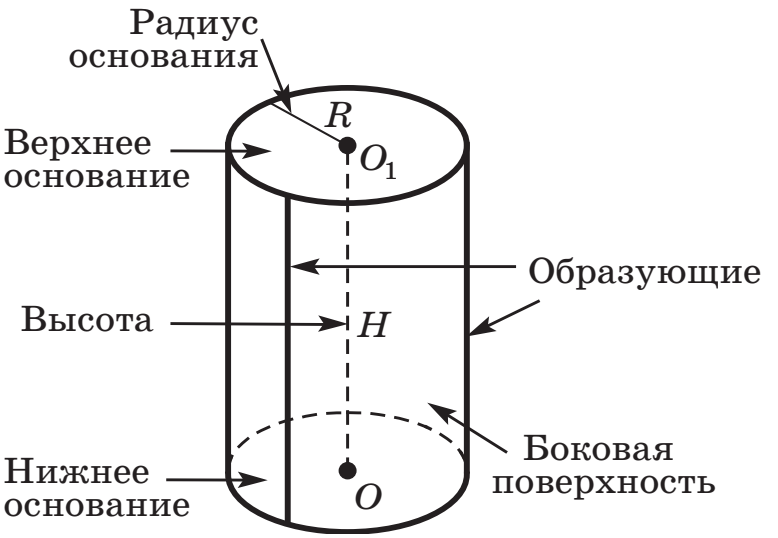


4.3. Тела вращения

4.3.1. Цилиндр

Цилиндр

Цилиндр (прямой круговой цилиндр) — тело, которое получают в результате вращения прямоугольника вокруг одной из его сторон.



Ось цилиндра — ось вращения, которая является его осью симметрии.

Цилиндр состоит из двух оснований (кругов) и боковой поверхности (развёртка — прямоугольник).

Высота цилиндра h — отрезок, соединяющий точки на основаниях, и перпендикулярный плоскостям оснований.

Образующая цилиндра l — отрезок, соединяющий точки окружностей оснований, и перпендикулярный плоскостям оснований.

Высота цилиндра равна его образующей l.

Боковая поверхность состоит из образующих. Её площадь равна произведению сторон: длины $2\pi R$ (R — радиус оснований) и ширины h (высота):

$$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh$$

Осевое сечение цилиндра — сечение цилиндра плоскостью, которая проходит через ось цилиндра и является прямоугольником. Две стороны прямоугольника — образующие цилиндра, а две другие — диаметры его оснований.

Круговое сечение цилиндра — сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра. Круговое сечение является кругом, равным основаниям цилиндра.

4.3.2. Конус

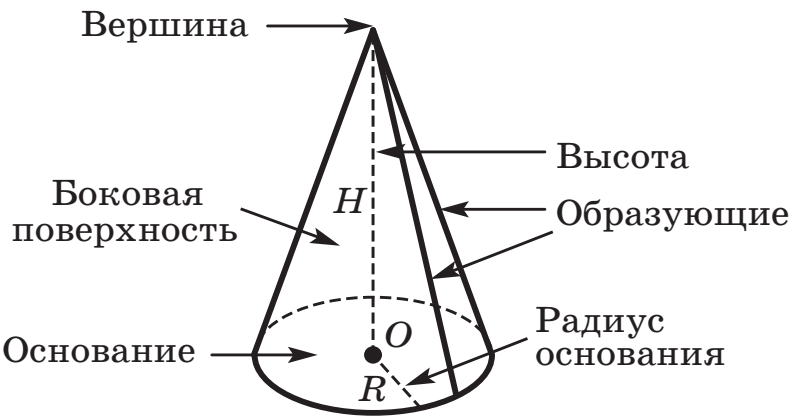
Конус

Конус (прямой круговой конус) — тело, которое получают в результате вращения прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов.

Ось конуса — ось вращения, которая является его осью симметрии.

Конус состоит из основания (круг радиусом R) и боковой поверхности.

Высота конуса h — отрезок, соединяющий вершину конуса с центром основания.



Образующая конуса l — отрезок, соединяющий вершину конуса с любой точкой окружности основания.

Осевое сечение конуса — сечение конуса плоскостью, проходящей через ось конуса и являющееся равнобедренным треугольником, боковые стороны которого — это образующие конуса, а основание — диаметр основания конуса.

Круговое сечение конуса — сечение конуса плоскостью, перпендикулярной оси конуса и являющееся кругом с центром, расположенном на оси конуса.

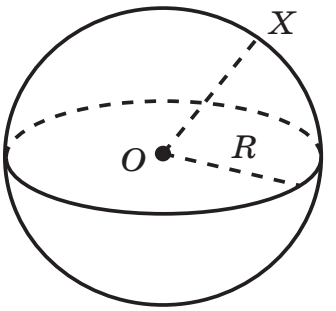
Развёртка боковой поверхности конуса — круговой сектор, радиус которого равен образующей конуса, а длина дуги сектора равна длине окружности основания конуса.

4.3.3. Шар и сфера

Шар и сфера

Сфера — это множество точек, удалённых от данной точки (центра сферы) на одинаковое расстояние (равное радиусу сферы).

Шар — это множество точек, удалённых от данной точки (центр шара) на расстояние, не большее заданного (радиус шара).

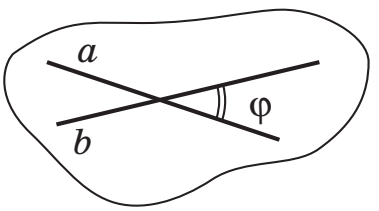


4.4. Измерение геометрических величин в пространстве

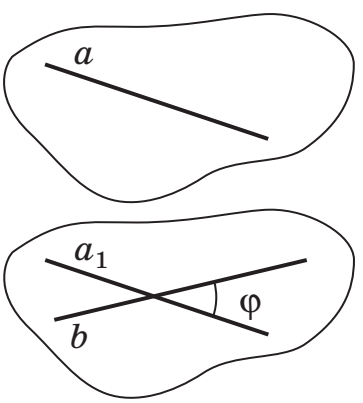
4.4.1. Угол между прямыми в пространстве, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями

Угол между прямыми в пространстве

Угол между пересекающимися прямыми — наименьший из углов, образованных при пересечении этих прямых (если при пересечении образовались четыре равных угла, то прямые перпендикулярны).



Угол между скрещивающимися прямыми — угол между двумя пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся прямым.



• Если a и b — скрещиваются,
то $\angle(a, b) = \angle(a_1, b) = \varphi$, где $a_1 \parallel a$.

Угол между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней — это угол между прямой и её проекцией на плоскость.

Угол между плоскостями — это угол между перпендикулярами к линии их пересечения, проведёнными в этих плоскостях.

4.4.2. Расстояние от точки до плоскости. Расстояние между параллельными и скрещивающимися прямыми. Расстояние между параллельными плоскостями

Расстояние от точки до плоскости — длина перпендикуляра, проведённого из данной точки к этой плоскости.

Расстояние между параллельными плоскостями — расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости.

Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью — расстояние от произвольной точки прямой до плоскости.

Расстояние между скрещивающимися прямыми — расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую, параллельно первой.

4.4.3. Площадь поверхности многогранника

Площадь поверхности куба	$S = 6a^2$
Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда	$S = 2(ab + bc + ac)$
Площадь боковой поверхности призмы	$S = P_{\text{осн}} h$
Площадь полной поверхности призмы	$S = 2S_{\text{осн}} + P_{\text{осн}} h$
Площадь боковой поверхности правильной пирамиды	$S = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} l$, где l — апофема
Площадь полной поверхности пирамиды	$S = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$

4.4.4. Площадь поверхности фигур вращения

Площадь боковой поверхности конуса	$S = \pi Rl$, где l — образующая
Площадь полной поверхности конуса	$S = \pi R^2 + \pi Rl$
Площадь боковой поверхности цилиндра	$S = 2\pi Rh$, где h — высота
Площадь полной поверхности цилиндра	$S = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$
Площадь поверхности сферы	$S = 4\pi R^2$

4.4.5. Объёмы

Куб	$V = a^3$
Прямоугольный параллелепипед	$V = abc$
Параллелепипед, призма, цилиндр	$V = S_{\text{осн}}h$, где h — высота
Пирамида, конус	$V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}h$, где h — высота
Шар	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

4.5. Координаты и векторы в пространстве

4.5.1. Декартовы координаты в пространстве. Координаты вектора

Прямоугольная система координат в пространстве — три взаимно перпендикулярные прямые x, y, z, на которых выбраны направление и единица измерения отрезков, которые лежат в трёх разных плоскостях xy, yz, xz и имеют общую точку пересечения O.

Оси координат — прямые x, y, z с выбранными на них направлениями.

Начало координат — точка их пересечения O.

Оси координат в пространстве обозначают Ox, Oy, Oz (соответственно ось абсцисс, ось ординат, ось аппликат).

Координатные векторы — единичные векторы, направление которых совпадает с положительным направлением координатных осей.

Вектор $\vec{i}$ совпадает по направлению с осью абсцисс, вектор $\vec{j}$ совпадает по направлению с осью ординат, вектор $\vec{k}$ — с осью аппликат.

Любой вектор $\vec{c}$ можно разложить по координатным векторам: $\vec{c} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Координаты вектора $\vec{c}$ в данной системе координат — коэффициенты разложения x, y и z, которые определяются единственным образом: $\vec{c}\{x; y; z\}$.

4.5.2. Скалярное произведение векторов в пространстве. Угол между векторами в пространстве

Скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ в координатах находится по формуле: $\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Косинус угла α **между ненулевыми векторами** $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ вычисляется по формуле:

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

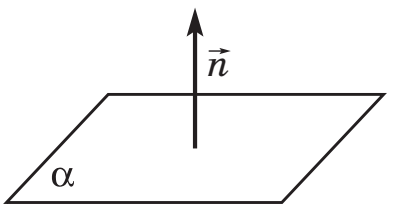
Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — угол, который получается, если отложить от произвольной точки M векторы $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$; в этом случае лучи MA и MB образуют искомый угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

4.5.3. Уравнение плоскости

Уравнение плоскости в прямоугольной системе координат

$Ax + By + Cz + D = 0$ — уравнение плоскости α в общем виде.

$\vec{n}\{A; B; C\}$ — вектор нормали к плоскости. $\vec{n} \perp \alpha$.



2 способа нахождения уравнения плоскости:

1) Любая плоскость проходит через 3 точки, не лежащие на одной прямой. Чтобы найти A, B, C, D, нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0; \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0; \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0, \end{cases}$$

где даны координаты 3 точек $(x_1; y_1; z_1)$, $(x_2; y_2; z_2)$, $(x_3; y_3; z_3)$.

Все коэффициенты A, B, C, D выражают через один из них, так как уравнение плоскости не меняется при умножении левой и правой части на одно и то же число, не равное нулю.

2) Так как в уравнении плоскости:

$Ax + By + Cz + D = 0$, $\vec{n}\{A; B; C\}$ можно найти коэффициенты A, B и C с помощью нахождения координат вектора нормали.

Если вектор $\vec{m}\{x_1; y_1; z_1\} \subset \alpha$,
и вектор $\vec{p}\{x_2; y_2; z_2\} \subset \alpha$,
при этом $\vec{m} \nparallel \vec{p}$ и $\vec{m} \neq \vec{p}$, то так как $\vec{n} \perp \alpha$, то $\vec{n} \perp \vec{m}$ и $\vec{n} \perp \vec{p}$ следовательно $\vec{n}\vec{m} = 0$ и $\vec{n}\vec{p} = 0$.

Составим систему из 2-х уравнений:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 = 0; \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 = 0, \end{cases}$$

Коэффициенты A, B, C (координаты вектора нормали) выражаем через один из них.

Для записи уравнения плоскости используем полученные коэффициенты A, B, C. Коэффициент D берём произвольно и получаем уравнение плоскости, параллельное искомой.

Если для дальнейших вычислений нужна конкретная плоскость (измерение расстояний или площадей), то берём координаты любой точки искомой плоскости, подставляем в уравнение x, y, z и находим коэффициент D.

1) Угол между прямой и плоскостью.

• Берём вектор на прямой $\vec{s}\{x; y; z\}$ и вектор нормали к плоскости $\vec{n}\{A; B; C\}$.

• Находим модуль косинуса угла между векторами используя формулу скалярного произведения векторов.

$$\bullet\ \cos \overset{\wedge}{\vec{n}\,\vec{s}} = \frac{|Ax + By + Cz|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

• Тогда синус угла между прямой и плоскостью равен косинусу угла между векторами:

• $\sin \alpha = \cos \overset{\wedge}{\vec{n}\,\vec{s}}$, где α — искомый угол.

2) Угол между плоскостями.

• Берём два вектора нормали для каждой из плоскостей $\vec{n}_1\{A_1; B_1; C_1\}$ и $\vec{n}_2\{A_2; B_2; C_2\}$.

• Находим модуль косинуса угла между этими векторами:

$$\bullet\ \cos \overset{\wedge}{\vec{n}_1\vec{n}_2} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

3) Расстояние от точки до плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

4.5.4. Простейшие задачи в координатах в пространстве

Координаты середины отрезка $C(x; y; z)$ — середины отрезка AB, где $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, вычисляют по формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Длина вектора $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ вычисляется по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Расстояние d **между двумя точками** $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ в пространстве находят по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

5. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

5.1. Элементы статистки

Среднее арифметическое нескольких чисел — частное от деления этих чисел на число слагаемых.

Например, найдём среднее арифметическое чисел: 21, 46, 50.
$(21 + 46 + 50) : 3 = 39$.

Медиана нескольких чисел — число, стоящее посередине данных чисел, выписанных в порядке возрастания.
Если количество чисел чётное, то медианой будет среднее арифметическое двух чисел, стоящих посередине.

Например:

1) Найдём медиану чисел: 5, 3, 2, 5, 4.

Решение. Запишем эти числа по возрастанию: 2, 3, 4, 5, 5. Медиана равна 4.
Ответ: 4.

2) Найдём медиану чисел: 3, 4, 4, 5, 5, 5.
Решение. $(4 + 5) : 2 = 4{,}5$.
Ответ: 4,5.

Размах нескольких чисел — разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел.

Мода нескольких чисел — число, которое встречается чаще других.

5.2. Элементы комбинаторики

5.2.1. Основные формулы комбинаторики

Основные формулы комбинаторики	
Факториал	$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$
Число перестановок из n элементов	$P_n = A_n^n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$
Число перестановок с повторениями из n элементов, из которых k — одинаковые	$\overline{P}_n(k) = \frac{n!}{k!}$
Число перестановок с повторениями из n элементов, из которых k_1, k_2, ..., k_m — одинаковые	$\overline{P}_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$
Число размещений из n элементов по k элементов	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \times \times (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$
Число размещений с повторениями из n элементов по k элементов	$\overline{A_n^k} = n^k$
Число сочетаний из n элементов по k элементов	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$

Число сочетаний с повторениями из n элементов по k элементов	$\overline{C_n^k} = C_{(k+n-1)}^k$
Формула, связывающая размещения, сочетания и перестановки	$A_n^k = C_n^k \cdot P_k$

5.3. Элементы теории вероятностей

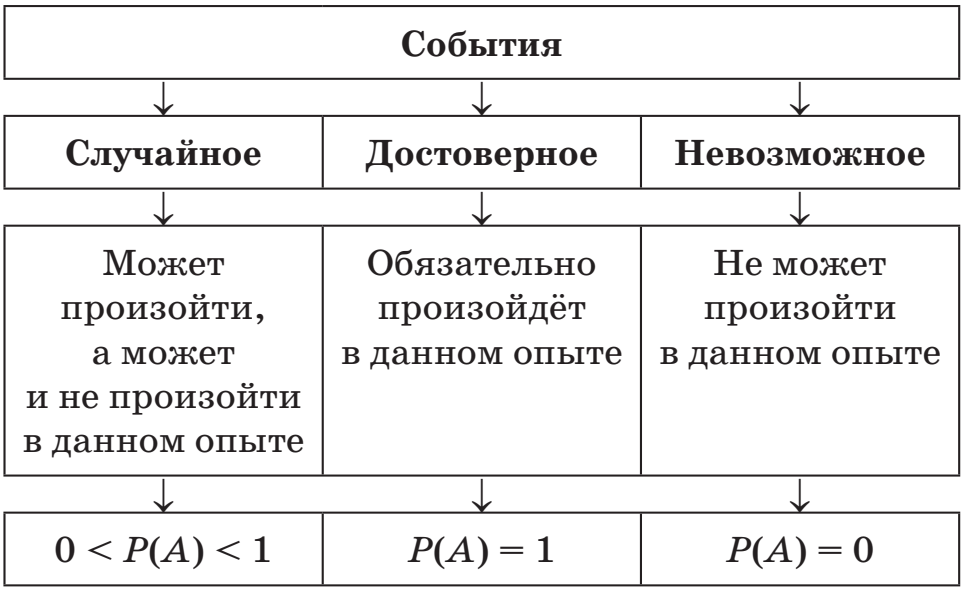
5.3.1. Вероятности событий. Классическое определение вероятности

Теория вероятностей — математическая наука, изучающая закономерности случайных событий и случайных величин при массовом их появлении.

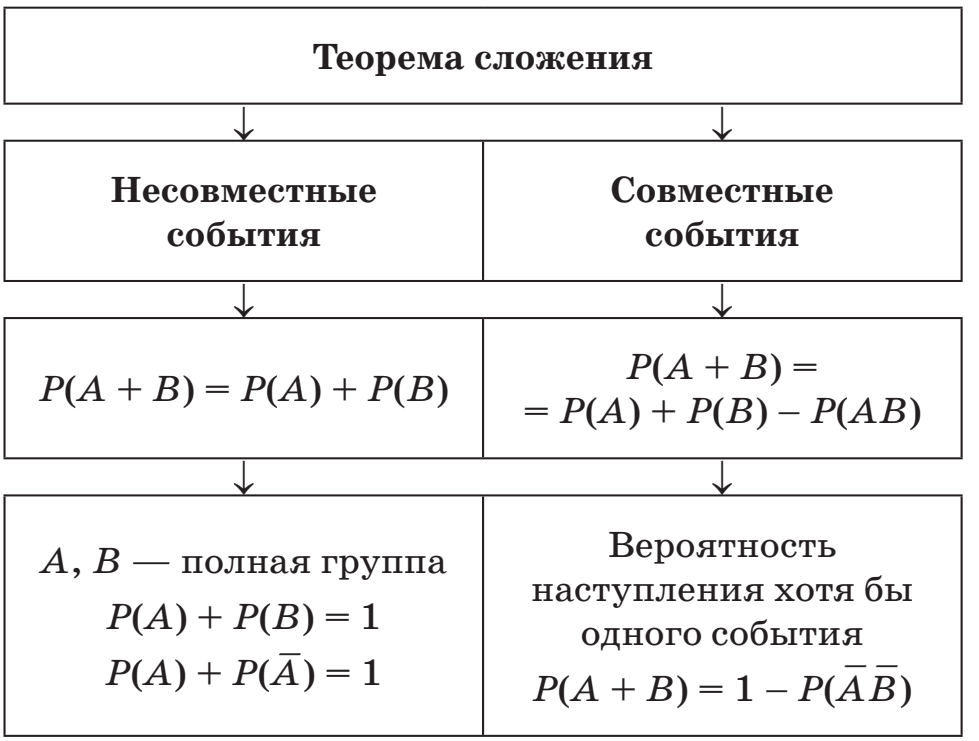
Опыт (испытание) — действие, которое можно повторять большое число раз в одинаковых условиях и результат которого нельзя предугадать заранее.

Относительная частота случайного события к серии испытаний — отношение числа испытаний, в которых наступило это событие, к числу всех испытаний.

Классическая вероятность — вероятность события в испытании с равновозможными исходами, которая равно отношению благоприятного количества исходов для данного события к числу всех равновозможных исходов.



5.3.1. Теорема о вероятности событий



Теорема умножения

Независимые события	**Зависимые события**
$P(AB) = P(A)P(B)$	$P(AB) = P(A)P_A(B)$

Повторные независимые испытания

Формула Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где C_n^k — число сочетаний,
p — вероятность успеха,
q — вероятность неудачи,
n — число независимых испытаний,
k — количество выпавших событий,
$q = 1 - p$,
n, k — достаточно малы.

$\bar{A}$ — событие, противоположное событию A.

$P_A(B)$ — условная вероятность, т. е. вероятность события B, вычисленная при условии, что событие A уже произошло.

6. ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

6.1. Банковские задачи

Кредиты с аннуитетными платежами

A — кредит;

$r\,\% = \dfrac{r}{100}$ — процент по кредиту;

n — количество лет (месяцев);

$k = 1 + \dfrac{r}{100}$;

x — ежегодные (ежемесячные) платежи — постоянные;

A_k — остатки на k-й месяц;

S_n — сумма выплат.

Решение.

$A_1 = Ak - x$;

$A_2 = Ak^2 - xk - x = Ak^2 - x(k + 1)$;

$A_3 = Ak^3 - xk^2 - xk - x = Ak^3 - x(k^2 + k + 1)$;

$A_4 = Ak^4 - xk^3 - xk^2 - xk - x =$

$= Ak^4 - x(k^3 + k^2 + k + 1) =$

$= Ak^4 - x(k + 1)(k^2 + 1)$;

$S_4 = 4x$;

$S_n = nx$.

Кредиты
с дифференцированными платежами

A — кредит;

$r\,\% = \dfrac{r}{100} = p$ — процент по кредиту;

n — число лет (месяцев) ;

S_n — общая сумма выплат;

A_k — остаток на k-й год;

Каждый год (месяц) кредит уменьшается на одну и ту же сумму.

Решение.

Выплаты	**Остатки**
$x_1 = \dfrac{A}{n} + Ap$	$A_1 = A - \dfrac{A}{n}$
$x_2 = \dfrac{A}{n} + \left(A - \dfrac{A}{n}\right)p = \dfrac{A}{n} + Ap - \dfrac{Ap}{n}$	$A_2 = A - \dfrac{2A}{n}$
$x_3 = \dfrac{A}{n} + \left(A - \dfrac{2A}{n}\right)p = \dfrac{A}{n} + Ap - \dfrac{2Ap}{n}$	$A_3 = A - \dfrac{3A}{n}$
$x_n = \dfrac{A}{n} + \left(A - \dfrac{(n-1)A}{n}\right)p = \dfrac{A}{n} + Ap - \dfrac{(n-1)Ap}{n}$	$A_n = 0$

$$S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$$

$S_n = \frac{x_1 + x_n}{2}$, где x_n — арифметическая прогрессия;

$$S_n = A + Apn - \frac{(n-1)Ap}{n} \cdot \frac{n}{2} =$$

$$= A + Apn - \frac{(n-1)Ap}{2} = A + Ap\left(n - \frac{(n-1)}{2}\right) =$$

$$= A + Ap\frac{(n+1)}{2}.$$

Справочное издание

Серия «Краткий справочник в таблицах
для подготовки к ЕГЭ и ОГЭ»

МАТЕМАТИКА

КРАТКИЙ СПРАВОЧНИК В ТАБЛИЦАХ И СХЕМАХ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ и ОГЭ

Редакция «Образовательные проекты»
Ответственный редактор *Н. А. Шармай*
Технический редактор *Е. П. Кудиярова*
Компьютерная вёрстка *С. А. Смоленского*

Подписано в печать 12.02.2020. Формат 60×70 $^{1}/_{32}$.
Усл. печ. л. 9,36. Тираж 7000 экз. Заказ №

Общероссийский классификатор продукцииОК-034-2014
(КПЕС-2008): — 58.11.1 — книги, брошюры печатные

Произведено в Российской Федерации.
Дата изготовления: март 2020 г.
Изготовитель: ООО «Издательство АСТ»

Адрес места осуществления деятельности по изготовлению
продукции: 123112, Москва, Пресненская наб., д. 6,
стр. 2, ДК «Империя», 14, 15 эт.

ООО «Издательство АСТ». 129085, РФ, г. Москва,
Звёздный бульвар, д. 21, стр. 1, комн. 705, пом. I, 7 этаж

Наш электронный адрес: www.ast.ru; e-mail:
stelliferovskiy@ast.ru

По вопросам приобретения книг обращаться по адресу:
123317, г. Москва, Пресненская наб., д. 6, стр. 2,
Деловой комплекс «Империя», а/я № 5

Для заметок _____

Для заметок _____

Для заметок _____

ГОСУДАРСТВЕННАЯ ИТОГОВАЯ АТТЕСТАЦИЯ

В справочнике в виде наглядных и доступных таблиц и схем представлен весь учебный материал по предмету, проверяемый на ЕГЭ и ОГЭ:

«Алгебра»,

«Элементы математического анализа»,

«Геометрия»,

«Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей»,

«Финансовая математика».

Удобный и наглядный способ подачи материала позволяет быстро повторить нужные темы и успешно подготовиться к сдаче ЕГЭ и ОГЭ.

ISBN 978-5-17-121354-1

9 785171 213541

WWW.AST.RU