ПОСОБИЕ ПРОШЛО НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКУЮ ОЦЕНКУ ФГБНУ ФИПИ ШКОЛЕ

ПРОЕКТ С УЧАСТИЕМ РАЗРАБОТЧИКОВ КИМ ЕГЭ

2020

ЕГЭ

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ТИПОВЫЕ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВАРИАНТЫ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
И. В. ЯЩЕНКО

10balnik.com
Делаем невозможное возможным

НАЦИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ
270406713

36 ВАРИАНТОВ

Пособие прошло научно-методическую оценку ФГБНУ ФИПИ — Школе

ПРОЕКТ С УЧАСТИЕМ РАЗРАБОТЧИКОВ КИМ ЕГЭ

2020

ЕГЭ

- АКТУАЛЬНО
- ДОСТОВЕРНО
- КАЧЕСТВЕННО

В СЕРИЮ ВКЛЮЧЕНЫ:

ДИАГНОСТИКА И КОНТРОЛЬ:

1. Типовые экзаменационные варианты ЕГЭ: **10 вариантов**
2. Типовые экзаменационные варианты ЕГЭ: **20–36 вариантов**

по предметам

МАТЕМАТИКА • РУССКИЙ ЯЗЫК • ИСТОРИЯ • ОБЩЕСТВОЗНАНИЕ
ЛИТЕРАТУРА • ФИЗИКА • ХИМИЯ • БИОЛОГИЯ • ГЕОГРАФИЯ
АНГЛИЙСКИЙ ЯЗЫК • ИНФОРМАТИКА И ИКТ

3. Тематические работы | СБОРНИК ПРОВЕРОЧНЫХ РАБОТ
4. Типовые экзаменационные задания | ТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ПРОБНЫЙ ЭКЗАМЕН | Индивидуальный экзаменационный комплект ЕГЭ



АКТУАЛИЗАЦИЯ И СИСТЕМАТИЗАЦИЯ ЗНАНИЙ:



1. Отличный результат
занятия по всем заданиям варианта ЕГЭ



2. Учебная тетрадь
занятия по всем темам ЕГЭ



3. Модульный триактив-курс
тематические модули для 5–11-х классов

100-БАЛЛОВ
Ведем к невозможное возможным

ПОСОБИЕ ПРОШЛО НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКУЮ ОЦЕНКУ ФГБНУ ФИПИ ШКОЛЕ

ПРОЕКТ С УЧАСТИЕМ РАЗРАБОТЧИКОВ КИМ ЕГЭ

2020

ЕГЭ

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ТИПОВЫЕ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВАРИАНТЫ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
И. В. ЯЩЕНКО

36 ВАРИАНТОВ

100 балов
Делаем лучше вместе

Пособие прошло научно-методическую оценку ФГБНУ «ФИПИ»

ЧОУ ДПО «Московский центр непрерывного математического образования»

Авторы-составители:
И. В. Ященко, И. Р. Высоцкий, Е. А. Коновалов

Под редакцией И. В. Ященко,
руководителя комиссии по разработке КИМ, используемых при проведении государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего и среднего общего образования по математике

В сборнике использованы задачи, предложенные:

И. Р. Высоцким, Р. К. Гординым, П. И. Захаровым, Е. А. Коноваловым, В. С. Панферовым, М. Я. Пратусевичем, Д. А. Ростовским, А. Р. Рязановским, И. Н. Сергеевым, В. А. Смирновым, К. М. Столбовым, А. С. Трепалиным, Ю. А. Цимбаловым, С. А. Шестаковым, Д. Э. Шнолем, И. В. Ященко

Серия подготовлена разработчиками контрольных измерительных материалов (КИМ) единого государственного экзамена. В сборнике представлены:

- 36 типовых экзаменационных вариантов, составленных в соответствии с проектом демоверсии КИМ ЕГЭ по математике **профильного уровня 2020** года;
- инструкция по выполнению экзаменационной работы;
- ответы ко всем заданиям;
- решения и критерии оценивания заданий 13–19.

Выполнение заданий типовых экзаменационных вариантов предоставляет обучающимся возможность самостоятельно подготовиться к государственной итоговой аттестации, а также объективно оценить уровень своей подготовки.

Учителя могут использовать типовые экзаменационные варианты для организации контроля результатов освоения школьниками образовательных программ среднего общего образования и интенсивной подготовки обучающихся к ЕГЭ.

Содержание

Введение 4
Карта индивидуальных достижений обучающегося 6
Инструкция по выполнению работы 8
Типовые бланки ответов ЕГЭ 9
Вариант 1 11
Вариант 2 16
Вариант 3 21
Вариант 4 26
Вариант 5 31
Вариант 6 36
Вариант 7 40
Вариант 8 45
Вариант 9 50
Вариант 10 55
Вариант 11 60
Вариант 12 65
Вариант 13 70
Вариант 14 75
Вариант 15 80
Вариант 16 85
Вариант 17 90
Вариант 18 94
Вариант 19 99
Вариант 20 104
Вариант 21 108
Вариант 22 113
Вариант 23 118
Вариант 24 122
Вариант 25 127
Вариант 26 132
Вариант 27 137
Вариант 28 142
Вариант 29 147
Вариант 30 152
Вариант 31 157
Вариант 32 162
Вариант 33 167
Вариант 34 172
Вариант 35 177
Вариант 36 182
Ответы 187
Решения и критерии оценивания заданий 13–19 205

100 БАЛЛОВ
100ballnik.com
Делаем невозможное возможным

Введение

Сборник предназначен для подготовки к единому государственному экзамену по математике и содержит 36 полных вариантов, составленных в соответствии с проектом демоверсии КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня 2019 года. Варианты подготовлены специалистами федеральной комиссии разработчиков контрольных измерительных материалов ЕГЭ.

В соответствии с документами, регламентирующими ЕГЭ по математике профильного уровня в 2020 году, каждый вариант содержит 19 заданий. Первая часть состоит из 8 заданий, вторая — из 11 заданий. Последние семь заданий подразумевают полное развёрнутое решение.

Семь вариантов даны с решениями, позволяющими проверить полноту и точность Ваших рассуждений. Ответы имеются ко всем заданиям.

В книге приведены типовые бланки ответов ЕГЭ, а также дана карта индивидуальных достижений обучающегося, которую можно использовать для отслеживания динамики результативности выполнения заданий типовых экзаменационных вариантов.

Если Вы собираетесь поступить в вуз на техническую или экономическую специальность и Вам нужен высокий балл на ЕГЭ по математике, эта книга для Вас.

Если Вы планируете продолжать своё математическое образование и претендуете на 90–100 баллов на ЕГЭ по математике, то Вам эта книга также будет полезна.

Как пользоваться сборником

Если Ваша цель — подтвердить свою школьную оценку и самооценку и получить хороший балл по математике для поступления в вуз, Ваш экзамен состоит из заданий 1–15. Все эти задания являются стандартными с точки зрения школьной программы. Помимо заданий практико-ориентированного блока здесь предлагаются задачи на понимание основных фактов и идей школьного курса математики, а также задачи, где нужно решить уравнения, найти элементы пространственной фигуры, исследовать функцию и т. п. Вы достигнете своей цели тренировкой, тренировкой и тренировкой. Обратите также внимание на задания 16 и 17. Они, конечно, посложнее предыдущих. Здесь уже нужно подумать, пофантазировать.

Если Ваша цель — поступить на математическую специальность и Вам нужен очень высокий балл на ЕГЭ, тогда Вы должны уверенно решать задания 1–15 (как ни странно, наиболее подготовленные учащиеся часто ошибаются в простых заданиях по небрежности). Вам нужно уметь выполнять (может быть, с некоторыми недочётами) задания 16 и 17. Основной объект Вашего внимания — задание 18, требующее умения комбинировать геометрические и алгебраические идеи, видеть за уравнением фигуру, за рисунком — решение уравнений и их систем; умения вообразить взаимное расположение двигающихся по плоскости линий и фигур.

Задание 19 требует высокой математической культуры, но не очень много специальных знаний. Все необходимые сведения о целых числах и делимости изучаются в 5–7-х классах. Вопрос не в знаниях, а в том, как их применить. Здесь важно сочетание опыта, фантазии и подготовки. Помощь окажут сборники олимпиадных заданий, популярные математические статьи и журналы. Небесполезным, надеемся, будет и наш сборник.

Как пользоваться готовыми решениями вариантов

Обратите внимание на то, что некоторые варианты похожи друг на друга. Будем говорить, что такие варианты собраны по одному плану. Если для какого-то варианта приведены решения задач, то варианты, собранные по тому же плану, имеют аналогичные решения. Можно предложить два способа использования готовых решений при подготовке.

Вы не можете решить задачу: в этом случае посмотрите решение и тщательно разберитесь в нём. Недостаточно просто прочесть решение и понять, что там написано. Решения не очень подробные. Нужно проделать самостоятельно пропущенные выкладки, не только понять ход решения, но и снять возникающие вопросы «почему так». Когда Вы разберётесь в решении, попробуйте повторить его самостоятельно, осмысленно и осознанно воспроизводя все логические шаги и вычисления. Ваш вариант решения будет гораздо больше по объёму, поскольку он будет подробнее. Затем возьмите вариант того же плана, но без решения, и решите в этом варианте аналогичное задание, ещё раз воспроизводя все логические построения и вычисления. Наконец, попробуйте изменить решение, может быть, улучшить его. Попробуйте решить похожую задачу с изменённым условием.

Вы решили задание самостоятельно, и ответы совпали. Это не означает, что Ваше решение не содержит упущений или логических ошибок. Сравните своё решение с решением, предложенным авторами. Попробуйте определить, какое решение Вам нравится больше, разобраться, в чём решения различаются, а в чём схожи. Проверьте, рассмотрели ли Вы все нужные случаи, убедительно ли сумели объяснить все свои построения и преобразования.

100 БАЛЛОВ Делаем невозможное возможным

Карта индивидуальных достижений обучающегося

Впишите баллы, полученные Вами при выполнении типовых экзаменационных вариантов, в таблицу.

Вариант / Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1																		
2																		
3																		
4																		
5																		
6																		
7																		
8																		
9																		
10																		
11																		
12																		
13																		
14																		
15																		
16																		
17																		
18																		
19																		
Сумма баллов																		

100БАЛЛОВ
100balnik.com
Делаем невозможное возможным

Вариант / Задание	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
1																		
2																		
3																		
4																		
5																		
6																		
7																		
8																		
9																		
10																		
11																		
12																		
13																		
14																		
15																		
16																		
17																		
18																		
19																		
Сумма баллов																		

100БАЛЛОВ Делаем невозможное возможным 100ballnik.com

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8 -0,8 Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, или капиллярной, или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

100 БАЛЛОВ Делаем невозможное возможным

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Единый государственный экзамен — 2020

Бланк ответов № 1

Код региона | Код предмета | Название предмета | Резерв - 4

С порядком проведения единого государственного экзамена ознакомлен(-а)
Подпись участника ЕГЭ строго внутри окошка

Заполнять гелевой или капиллярной ручкой ЧЁРНЫМИ чернилами ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ и ЦИФРАМИ по следующим образцам:

А Б В Г Д Е Ё Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я
A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z , -
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ВНИМАНИЕ! ***Все бланки и контрольные измерительные материалы рассматриваются в комплекте***

Результаты выполнения заданий с КРАТКИМ ОТВЕТОМ

1		21	
2		22	
3		23	
4		24	
5		25	
6		26	
7		27	
8		28	
9		29	
10		30	
11		31	
12		32	
13		33	
14		34	
15		35	
16		36	
17		37	
18		38	
19		39	
20		40	

100БАЛЛОВ 100ballov.com Делаем невозможное возможным

Замена ошибочных ответов на задания с КРАТКИМ ОТВЕТОМ

-		-	
-		-	
-		-	

Заполняется ответственным организатором в аудитории:

Количество заполненных полей «Замена ошибочных ответов»

Подпись ответственного организатора строго внутри окошка

Единый государственный экзамен — 2020

Бланк ответов № 2 лист 1

Код региона | Код предмета | Название предмета | Резерв - 5

Бланк ответов № 2 (лист 2) | Лист

Перепишите значения полей "Код региона", "Код предмета", "Название предмета" из БЛАНКА РЕГИСТРАЦИИ.
Отвечая на задания с РАЗВЁРНУТЫМ ОТВЕТОМ, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы.
Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете, например 31.
Условия задания переписывать не нужно.

ВНИМАНИЕ! ***Все бланки и контрольные измерительные материалы рассматриваются в комплекте***

100 БАЛЛОВ Репетиторский центр Лидии Невзяжкиной и Сергея Корепанова

Оборотная сторона бланка НЕ ЗАПОЛНЯЕТСЯ. Используйте бланк ответов № 2 (лист 2).

ВАРИАНТ 1

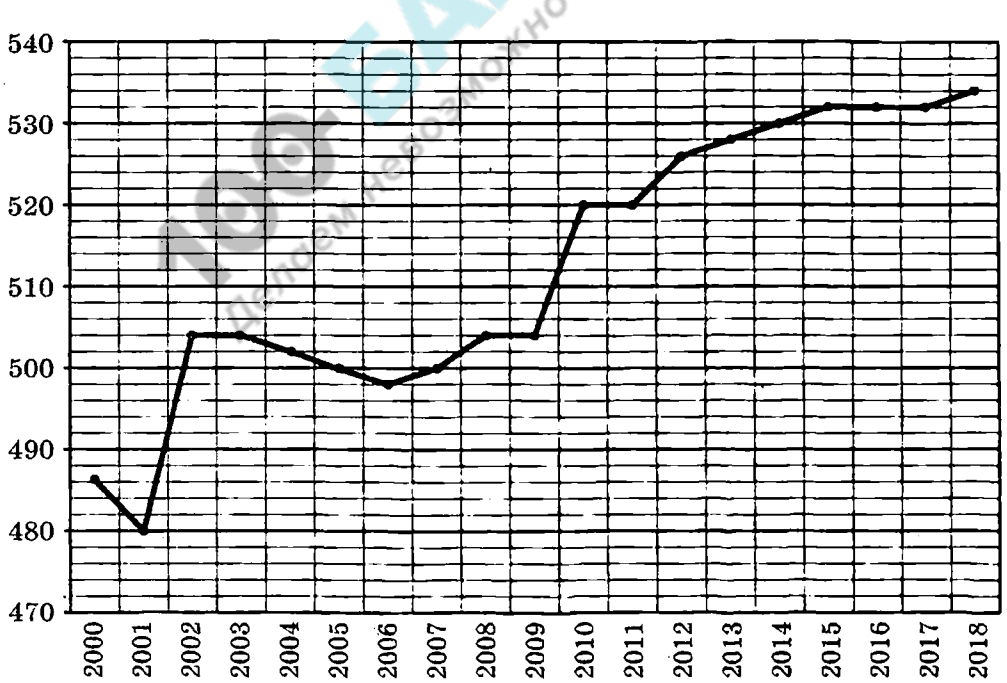
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 В школе немецкий язык изучают 189 учащихся, что составляет 35 % от числа всех учащихся школы. Сколько учащихся в школе?

Ответ:_____.

2 На рисунке показаны данные о численности населения в Астрахани на конец каждого года с 2000 года по 2018 год (в тыс. чел.). Для наглядности точки соединены отрезками.

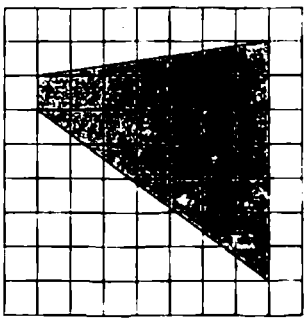


Определите, на сколько тысяч человек выросла численность населения в Астрахани за 2012 год.

Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите её площадь.



Ответ:_____.

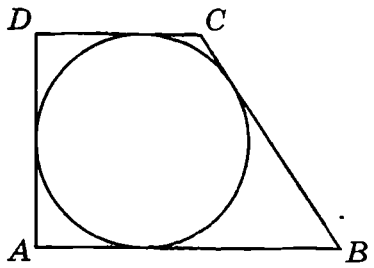
4 Всего в группе туристов 21 человек, в том числе Женя и Саша. Группу случайным образом делят на три подгруппы по 7 человек для посадки в три микроавтобуса. Какова вероятность того, что Женя и Саша случайно окажутся в одном микроавтобусе?

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $0{,}5^{4-5x}=64$.

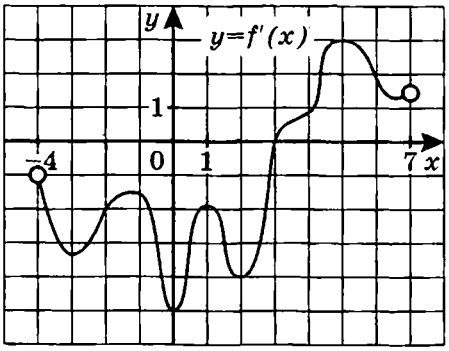
Ответ:_____.

6 Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 100, её большая боковая сторона равна 37. Найдите радиус окружности.



Ответ:_____.

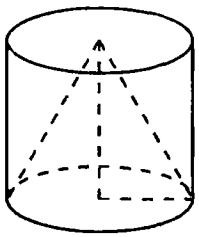
7 На рисунке изображён график $y=f'(x)$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 7)$. В какой точке отрезка $[-2; 2]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

8 Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём цилиндра равен 162. Найдите объём конуса.



Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $(\sqrt{3}-\sqrt{13})(\sqrt{3}+\sqrt{13})$.

Ответ:_____.

10 Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi=\omega t+\frac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega=60°/\text{мин}$ — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta=6°/\text{мин}^2$ — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет 3375°. Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

Ответ:_____.

11 Первая труба наполняет резервуар на 54 минуты дольше, чем вторая. Обе трубы наполняют этот же резервуар за 36 минут. За сколько минут наполняет этот резервуар одна вторая труба?

Ответ:_____.

12 Найдите точку минимума функции $y=x^2-28x+96\ln x-5$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+1=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi;\ -\frac{7\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK : KB = SM : MC = 1 : 5$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой BC.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA.

б) Найдите угол между плоскостями α и SBC.

15 Решите неравенство $\log_{0,5}(12-6x) \geq \log_{0,5}\left(x^2-6x+8\right)+\log_{0,5}(x+3)$.

16 Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая BO вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P.

а) Докажите, что $\angle POA = \angle PAO$.

б) Найдите площадь треугольника APO, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 6, $\angle BAC = 75°$, $\angle ABC = 60°$

17 15-го января планируется взять кредит в банке на некоторый срок (целое число месяцев). Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20 % больше суммы, взятой в кредит? (Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся.)

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$$

имеет ровно два различных корня.

19 В ящике лежит 76 фруктов, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два фрукта различной массы, а средняя масса всех фруктов равна 100 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых меньше 100 г, равна 85 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых больше 100 г, равна 124 г.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну фруктов массой меньше 100 г и фруктов массой больше 100 г?
б) Могло ли в ящике оказаться меньше 8 фруктов, масса каждого из которых равна 100 г?
в) Какую наибольшую массу может иметь фрукт в этом ящике?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

100БАЛЛОВ 100ballov.com Делаем невозможное возможным

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 2

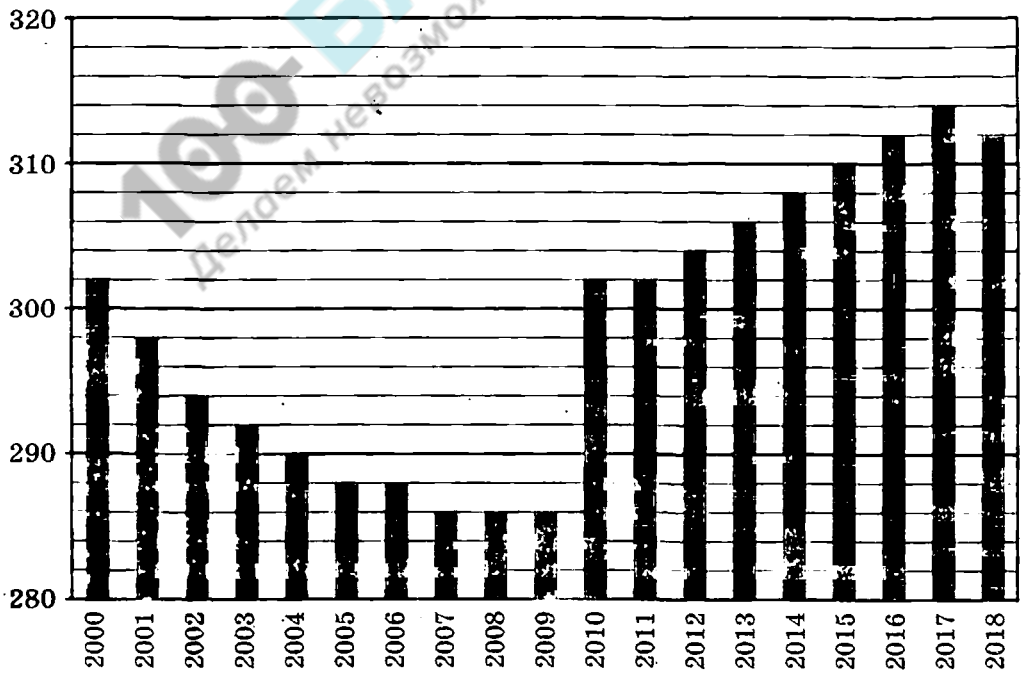
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 В магазине вся мебель продаётся в разобранном виде. Покупатель может заказать сборку мебели на дому, стоимость которой составляет 10 % от стоимости купленной мебели. Шкаф стоит 2400 рублей. Во сколько рублей обойдётся покупка этого шкафа вместе со сборкой?

Ответ:_____.

2 На диаграмме приведены данные о численности населения в Вологде на конец каждого года с 2000 года по 2018 год (в тыс. чел.).

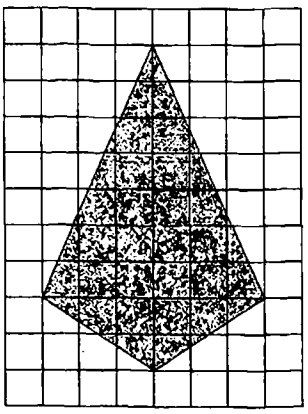


Определите, на сколько тысяч человек выросла численность населения в Вологде за период с конца 2008 года по конец 2018 года.

Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён четырёхугольник. Найдите его площадь.



Ответ:_____.

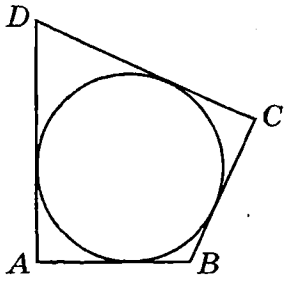
4 Всего в группе туристов 51 человек, в том числе Иван и Егор. Группу случайным образом делят на три подгруппы по 17 человек для посадки в три автобуса. Известно, что Иван оказался в третьем автобусе. Какова вероятность того, что при этом условии Егор окажется в первом автобусе?

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $0{,}2^{5+4x}=125$.

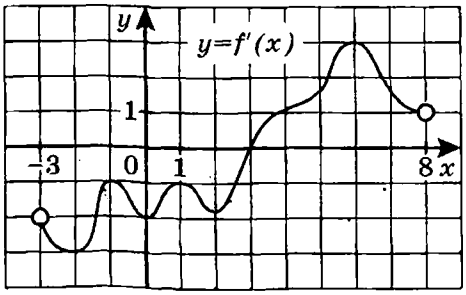
Ответ:_____.

6 В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB=8$, $BC=5$ и $CD=27$. Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.



Ответ:_____.

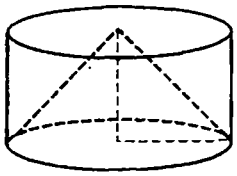
7 На рисунке изображён график $y=f'(x)$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3;8)$. В какой точке отрезка $[-2;3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

8 Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $27\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.



Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\left(3\frac{1}{8}-1{,}5\right):\frac{1}{56}$.

Ответ:_____.

10 В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора $C=5\cdot10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R=6\cdot10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0=34$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t=\alpha RC\log_2\frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha=1{,}7$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошла 51 с. Ответ дайте в киловольтах.

Ответ:_____.

11 Плиточник должен уложить 120 м^2 плитки. Если он будет укладывать на 8 м^2 в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 4 дня раньше. Сколько квадратных метров плитки в день планирует укладывать плиточник?

Ответ:_____.

12 Найдите точку максимума функции $y=x^3+18x^2+81x+23$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $2\sin^2 x - 3\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 5 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 5. На ребре SC отмечена точка K, причём $SK : KC = 1 : 3$. Плоскость α содержит точку K и параллельна плоскости SAD.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α — трапеция.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка S, а основанием — сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α.

15 Решите неравенство $\log_2(18 - 9x) - \log_2(x+2) > \log_2(x^2 - 6x + 8)$.

16 Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая BO вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке E.

а) Докажите, что $\angle EOC = \angle ECO$.

б) Найдите площадь треугольника ACE, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен $6\sqrt{3}$, $\angle ABC = 60°$.

17 15 января планируется взять кредит в банке на 49 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 2 млн рублей?

(Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся.)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{|x-6|+a-6}{x^2-10x+a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

19 В ящике лежит 58 овощей, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два овоща различной массы, а средняя масса всех овощей равна 1000 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых меньше 1000 г, равна 976 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых больше 1000 г, равна 1036 г.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну овощей массой меньше 1000 г и овощей массой больше 1000 г?
б) Могло ли в ящике оказаться ровно 12 овощей, масса каждого из которых равна 1000 г?
в) Какую наименьшую массу может иметь овощ в этом ящике?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

100 БАЛЛОВ Делаем невозможное возможным 100balnik.com

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 3

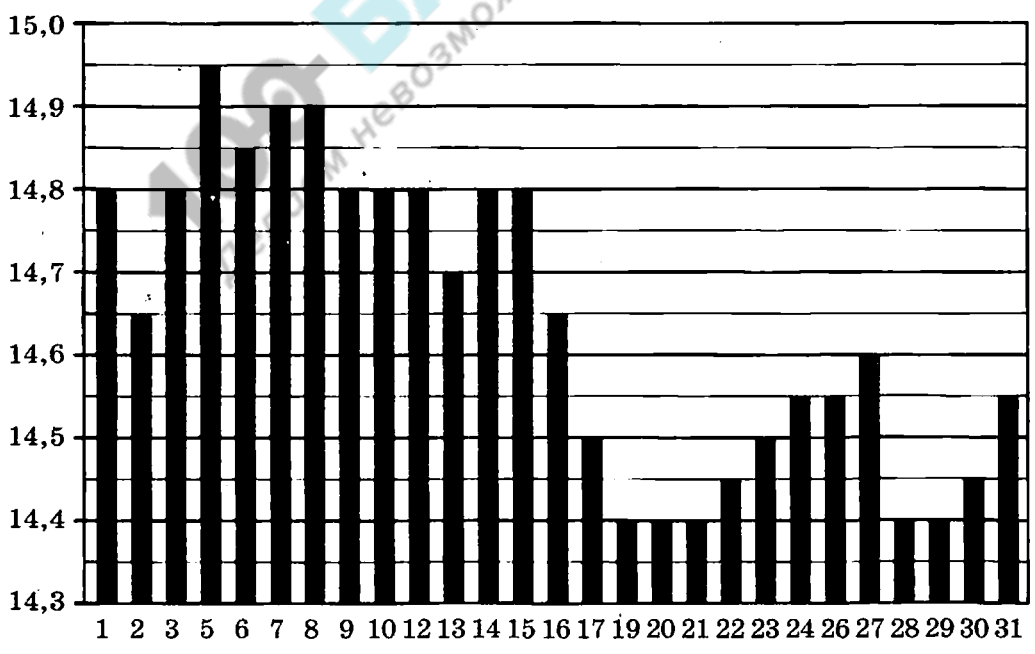
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Железнодорожный билет для взрослого стоит 480 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50 % от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 14 школьников и 2 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

Ответ:_____.

2 На диаграмме показана цена серебра на момент закрытия Нью-Йоркской товарной биржи во все торговые дни мая 2019 года. По горизонтали указаны числа месяца, по вертикали — цена тройской унции серебра в долларах США.

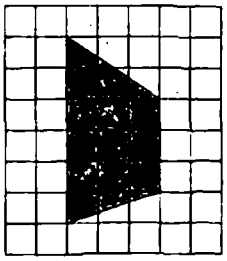


Определите по диаграмме, на сколько долларов цена тройской унции серебра 6 мая была выше, чем 26 мая.

Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите её площадь.



Ответ:_____.

4 Правильную игральную кость бросают дважды. Известно, что сумма выпавших очков больше 8. Найдите вероятность события «при втором броске выпало 6 очков».

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{11-5x}=1-x$.

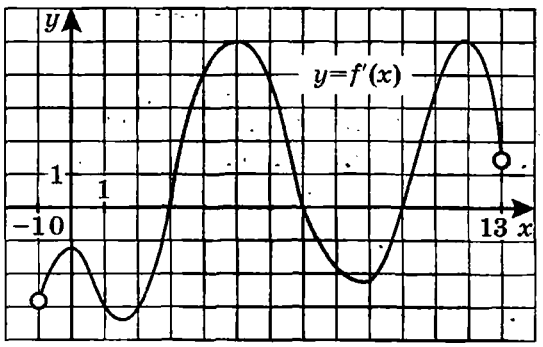
Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите наибольший из корней.

Ответ:_____.

6 Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 145. Найдите площадь параллелограмма $A'B'C'D'$, вершинами которого являются середины сторон данного параллелограмма.

Ответ:_____.

7 На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-1; 13)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y=x+18$ или совпадает с ней.



Ответ: _____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

8 Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём шара равен 188. Найдите объём конуса.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите $\log_a\left(ab^8\right)$, если $\log_a b = 8$.

Ответ:_____.

10 Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 292$ Гц. Чуть позже гудок издал подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону $f(v) = \dfrac{f_0}{1 - \dfrac{v}{c}}$ (Гц), где c — скорость звука (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее, чем на 8 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 300$ м/с. Ответ выразите в м/с.

Ответ:_____.

11 Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 16 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 10 км/ч больше скорости другого?

Ответ:_____.

12 Найдите наибольшее значение функции $y = \left(x^2 + 22x - 22\right)e^{2-x}$ на отрезке $[0;\ 5]$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\log_{\frac{1}{2}}(3\cos 2x - 2\cos^2 x + 5) = -2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной усечённой пирамиде $ABCA_1B_1C_1$ площадь нижнего основания ABC в четыре раза больше площади меньшего основания $A_1B_1C_1$. Через ребро AC проведена плоскость α, которая пересекает ребро BB_1 в точке K и делит пирамиду на два многогранника равного объёма.

а) Докажите, что точка K делит ребро BB_1 в отношении $7:1$, считая от точки B.

б) Найдите площадь сечения усечённой пирамиды плоскостью α, если высота пирамиды равна $2\sqrt{2}$, а ребро меньшего основания равно $2\sqrt{6}$.

15 Решите неравенство $25^{2x^2-0,5} - 0,6 \cdot 4^{2x^2+0,5} \le 10^{2x^2}$.

16 Окружность проходит через вершины A, B и D параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону BC в точках B и M, а также пересекает продолжение стороны CD за точку D в точке N.

а) Докажите, что $AM = AN$.

б) Найдите отношение $CD : DN$, если $AB : BC = 1 : 3$, а $\cos\angle BAD = 0,4$.

17 В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 1,587 млн рублей.

Сколько миллионов рублей было взято в банке, если известно, что он был полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

18 Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\left(\sqrt{12-x^2}-y\right)\left((x+4)^2+(y+4)^2-8(x+4)+x^2-y^2-24\right)}{2-x^2}=0, \\ y=1-2a. \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

19 В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся, а суммарно тест писал 51 учащийся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе № 1 вырасти в 2 раза?

б) Средний балл в школе № 1 вырос на 10 %, средний балл в школе № 2 также вырос на 10 %. Мог ли первоначальный средний балл в школе № 2 равняться 1?

в) Средний балл в школе № 1 вырос на 10 %, средний балл в школе № 2 также вырос на 10 %. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 4

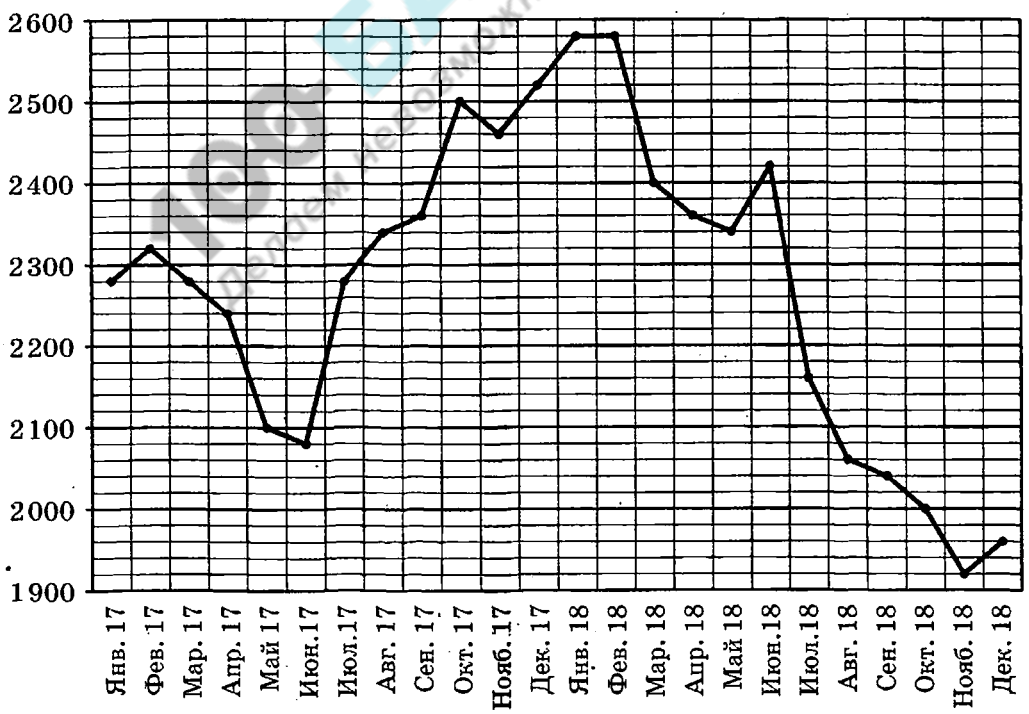
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Налог на доходы составляет 13 % от заработной платы. После удержания налога на доходы Мария Константиновна получила 15 660 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата Марии Константиновны?

Ответ:_____.

2 На рисунке показана средняя цена свинца во все месяцы 2017 и 2018 годов. По горизонтали указаны месяцы, по вертикали — цена тонны свинца в долларах США. Для наглядности точки соединены отрезками.

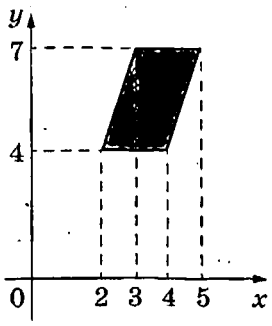


Определите по рисунку цену тонны свинца в июне 2018 года.

Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

3 Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.



Ответ:_____.

4 Игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность того, что произведение выпавших очков делится на 3. Ответ округлите до тысячных.

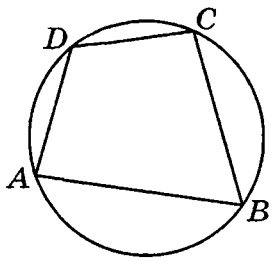
Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{2x-3}=x-3$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите наименьший из корней.

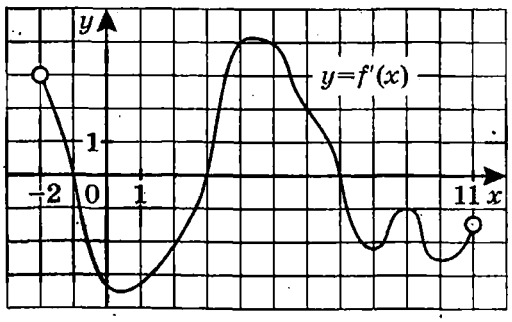
Ответ:_____.

6 Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 112° и 125°. Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.



Ответ:_____.

7 На рисунке изображён график $y=f'(x)$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 11)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y=-2x-5$ или совпадает с ней.



Ответ:_____

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

8 Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём конуса равен 19. Найдите объём шара.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите $\log_a\left(a^4b^3\right)$, если $\log_a b=4$.

Ответ:_____.

10 При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0=130$ Гц и определяется следующим выражением: $f=f_0\frac{c+u}{c-v}$ (Гц), где c — скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u=15$ м/с и $v=9$ м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет не менее 135 Гц?

Ответ:_____.

11 Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 25 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 114 км/ч, и через 30 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:_____.

12 Найдите наименьшее значение функции $y=(1-x)e^{2-x}$ на отрезке [0,5; 5].

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\log_{\frac{1}{3}}(2\sin^2 x - 3\cos 2x + 6) = -2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

14 В правильной треугольной усечённой пирамиде $ABCA_1B_1C_1$ площадь нижнего основания ABC в девять раз больше площади меньшего основания $A_1B_1C_1$. Через ребро AB проведена плоскость α, которая пересекает ребро CC_1 в точке N и делит пирамиду на два многогранника равного объёма.

а) Докажите, что точка N делит ребро CC_1 в отношении $5:13$, считая от точки C_1.

б) Найдите площадь сечения усечённой пирамиды плоскостью α, если высота пирамиды равна 13, а ребро меньшего основания равно 3.

15 Решите неравенство $3\cdot 25^{x+0,5} + 4^{2x+1,5} \le 22\cdot 20^x$.

16 Окружность проходит через вершины A, B и D параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону BC в точках B и M, а также пересекает продолжение стороны CD за точку D в точке N.

а) Докажите, что $AM = AN$.

б) Найдите отношение $CD : DN$, если $AB : BC = 2 : 3$, а $\cos\angle BAD = 0{,}7$.

17 В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 16 % по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 2,523 млн рублей.

Сколько миллионов рублей было взято в банке, если известно, что он был полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

18 Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\left(y-\sqrt{10-x^2}\right)\left((x+5)^2+(y+5)^2-10(x+7{,}5)+x^2-y^2+5\right)}{\sqrt{x^2-1}}=0, \\ y=ax+a-1. \end{cases}$$

имеет одно решение.

19 В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшиться в 10 раз?

б) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10 %, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10 %. Мог ли первоначальный средний балл в школе № 2 равняться 7?

в) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10 %, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10 %. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 5

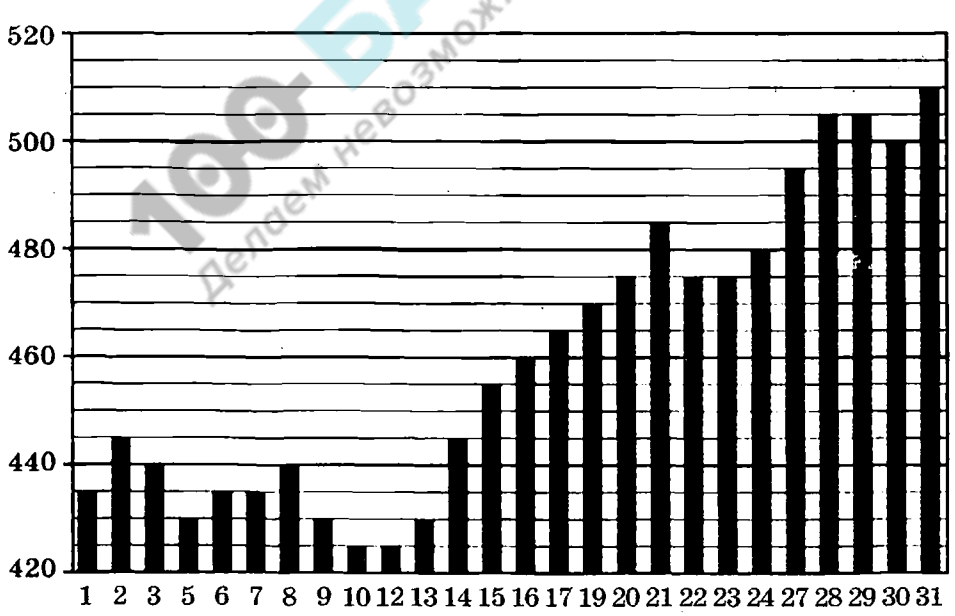
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 В школе 400 учеников, из них 30 % — ученики начальной школы. Среди учеников средней и старшей школы 30 % изучают французский язык. Сколько учеников в школе изучают французский язык, если в начальной школе французский язык не изучается?

Ответ:_____.

2 На диаграмме показана цена пшеницы на момент закрытия биржи во все торговые дни мая 2019 года. По горизонтали указаны числа месяца, по вертикали — цена 100 бушелей пшеницы в долларах США.

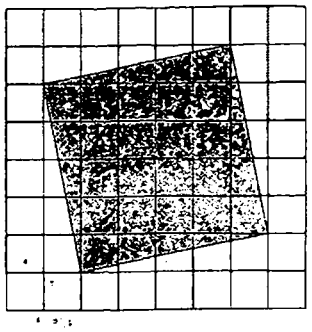


Определите по диаграмме наибольшую цену в долларах США 100 бушелей пшеницы с 14 по 24 мая.

Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён квадрат. Найдите его площадь.



Ответ:_____.

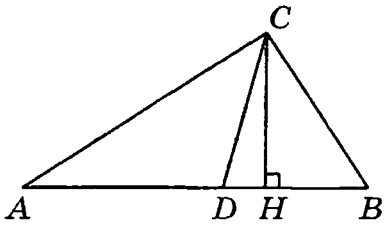
4 На заводе делают электрические лампочки. 5 % всех изготовленных лампочек неисправны. Система контроля качества выявляет все неисправные лампочки, но по ошибке бракует еще 1 % исправных лампочек. Все забракованные лампочки отправляются в переработку, а остальные — в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная лампочка отправится в переработку.

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $\log_3(x+6)=\log_3(10-x)-1$.

Ответ:_____.

6 Один из углов прямоугольного треугольника равен 66°. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



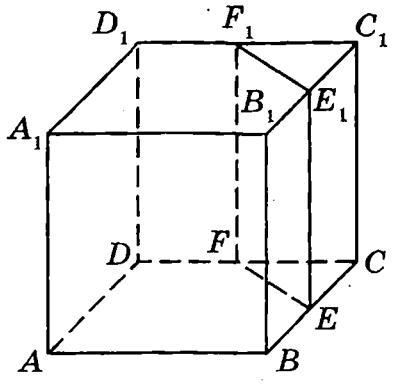
Ответ:_____.

7 Прямая $y=8x+11$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+7x-7$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

8 Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 25. Найдите объём куба.



Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{(5\sqrt{3})^2}{10}$.

Ответ:_____.

10 Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле $R = r_{\text{пок}} - \dfrac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K+1)^m}$, где $m = \dfrac{0{,}02K}{r_{\text{пок}} + 0{,}1}$, $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями, $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина, данная экспертами, K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина, если число покупателей, оценивших магазин, равно 15, их средняя оценка равна 0,3, а оценка экспертов равна 0,38.

Ответ:_____.

11 Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 30 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что в час автомобилист проезжает на 40 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 1 час позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:_____.

12 Найдите точку минимума функции $y = \dfrac{162}{x} + 2x + 7$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $2\cos^4 x + 3\sin^2 x - 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

14 Основанием пирамиды $FABC$ является правильный треугольник ABC со стороной 36. Все боковые рёбра пирамиды равны 30. На рёбрах FB и FC отмечены соответственно точки K и N так, что $BK = CN = 20$. Через точки K и N проведена плоскость α, перпендикулярная плоскости ABC.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану AM в отношении $2:7$.
б) Найдите расстояние от точки B до плоскости α.

15 Решите неравенство $\log^2_{0,2}(x-3)^8 + 8\log_5(x-3)^4 \le 32$.

16 В треугольнике ABC известно, что $AC = 10$ и $AB = BC = 14$.

а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная стороне AC, пересекает окружность, вписанную в треугольник ABC.
б) Найдите отношение длин отрезков, на которые окружность делит среднюю линию, параллельную стороне AC.

17 15 декабря планируется взять кредит в банке на сумму 600 тысяч рублей на месяц. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца с 1-го по n-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– 15-го числа n-го месяца долг составит 200 тысяч рублей;
– к 15-му числу $(n+1)$-го месяца кредит должен быть полностью погашен.
Найдите n, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 852 тысячи рублей.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

18 Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$(4|x|-a-3)(x^2-2x-2-a)\le 0$$

имеет хотя бы одно решение из промежутка $[-4; 4]$.

19 Группу детей можно перевезти автобусами модели А или автобусами модели Б. Известно, что в автобусе модели А количество мест больше 30, но меньше 40, а в автобусах модели Б — больше 40, но меньше 50. Если всех детей рассадить в автобусы модели А, то все места будут заняты. Если всех детей рассадить в автобусы модели Б, то все места также будут заняты, но потребуется на один автобус меньше.

а) Может ли потребоваться 5 автобусов модели А?
б) Найдите наименьшее возможное количество детей в группе, если известно, что их больше 150.
в) Найдите наибольшее возможное количество детей в группе.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

100 БАЛЛОВ Делаем невозможное возможным 100ballov.com

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 6

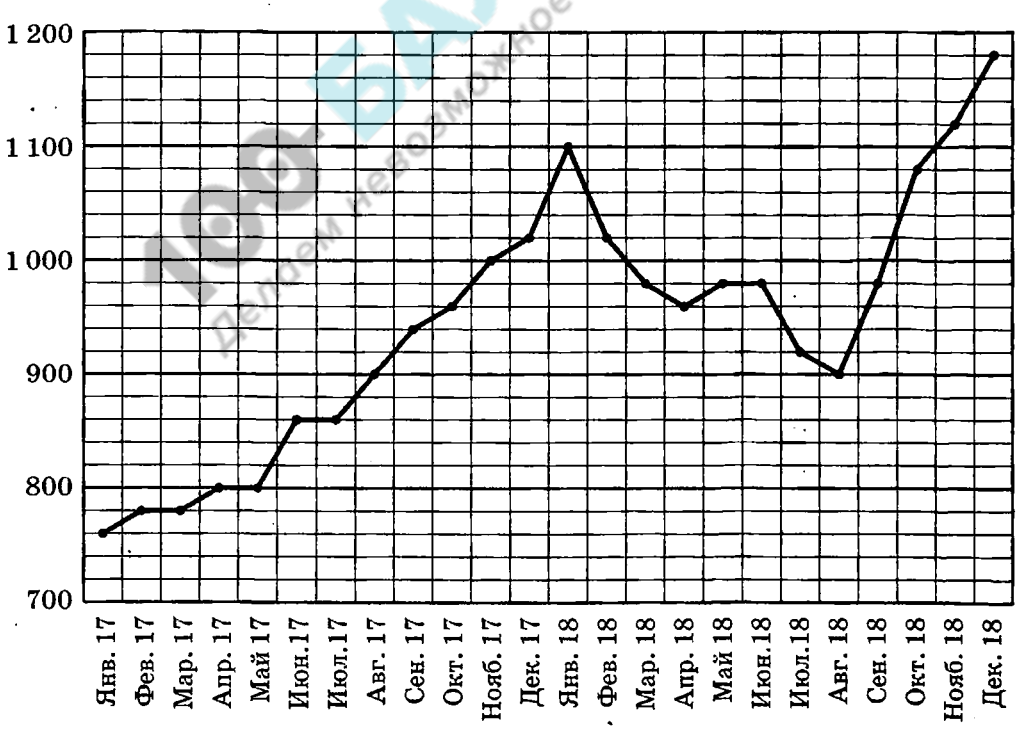
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Теплоход рассчитан на 750 пассажиров и 25 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 60 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

Ответ:_____.

2 На диаграмме показана цена палладия во все месяцы 2017 и 2018 годов. По горизонтали указаны месяцы, по вертикали — цена тройской унции палладия в долларах США. Для наглядности точки соединены отрезками.

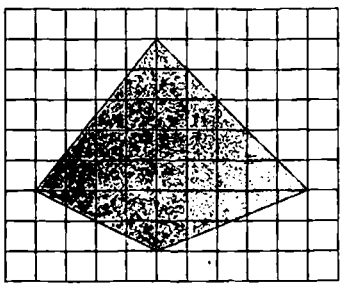


Определите наименьшую цену в долларах США тройской унции палладия в первом полугодии 2018 года.

Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён четырёхугольник. Найдите его площадь.



Ответ:_____.

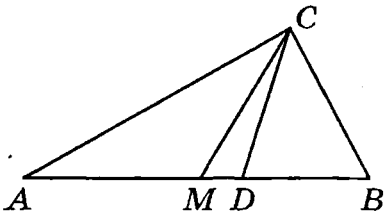
4 На заводе выпускают насосы для колодцев, из них 3 % выходят со сборочной линии со скрытым дефектом. При контроле качества продукции выявляется 90 % дефектных насосов. Остальные насосы поступают в продажу. Найдите вероятность того, что произведённый насос окажется в продаже.

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $\log_5(x+7)=\log_5(5-x)-1$.

Ответ:_____.

6 Острые углы прямоугольного треугольника равны 80° и 10°. Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

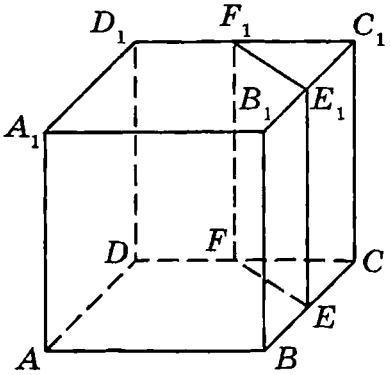


Ответ:_____.

7 Прямая $y=6x+7$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2-5x+6$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ:_____.

8 Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 11. Найдите объём куба.



Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

© 2020: ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{20}{(2\sqrt{2})^2}$.

Ответ:_____.

10 При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^h = 7{,}776 \cdot 10^6$ Па $\cdot$ м^4, где p — давление в газе в паскалях, V — объём газа в кубических метрах, $h = \dfrac{4}{3}$. Найдите, какой объём V (в куб. м) будет занимать газ при давлении p, равном $3{,}75 \cdot 10^6$ Па.

Ответ:_____.

11 Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 16 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 2 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 53 часа после отплытия из него. Сколько километров прошёл теплоход за весь рейс?

Ответ:_____.

12 Найдите точку минимума функции $y = -\dfrac{x}{x^2 + 900}$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $4\sin^4 x + 7\cos^2 x - 4 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi; -4\pi]$.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

14 Основанием пирамиды $FABC$ является правильный треугольник ABC со стороной 48. Все боковые рёбра пирамиды равны 40. На рёбрах FB и FC отмечены соответственно точки K и N так, что $FK = FN = 10$. Через точки K и N проведена плоскость α, перпендикулярная плоскости ABC.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану AM в отношении $1:3$.
б) Найдите расстояние от точки C до плоскости α.

15 Решите неравенство $3\log_4^2(4-x)^8 + 4\log_{0,5}(4-x)^6 \geq 72$.

16 В треугольнике ABC известно, что $AC = 26$ и $AB = BC = 38$.

а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная стороне AC, пересекает окружность, вписанную в треугольник ABC.
б) Найдите отношение длин отрезков, на которые окружность делит среднюю линию, параллельную стороне AC.

17 15 декабря планируется взять кредит в банке на сумму 1 000 000 рублей на $(n+1)$ месяцев. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\,\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца с 1-го по n-й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– 15-го числа n-го месяца долг составит 200 тысяч рублей;
– к 15-му числу $(n+1)$-го месяца кредит должен быть полностью погашен.
Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1 378 тысяч рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых любое значение из промежутка $[-1{,}5;\ -0{,}5]$ является решением неравенства

$$(4|x|-a-3)(x^2-2x-2-a)\geq 0.$$

19 Группу детей можно перевезти автобусами модели А или автобусами модели Б. Известно, что в автобусе модели А количество мест больше 40, но меньше 50, а в автобусах модели Б — больше 50, но меньше 60. Если всех детей рассадить в автобусы модели А, то все места будут заняты. Если всех детей рассадить в автобусы модели Б, то все места также будут заняты, но потребуется на один автобус меньше.

а) Может ли потребоваться 4 автобуса модели Б?
б) Найдите наибольшее возможное количество детей в группе, если известно, что их меньше 300.
в) Найдите наибольшее возможное количество автобусов модели А.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 7

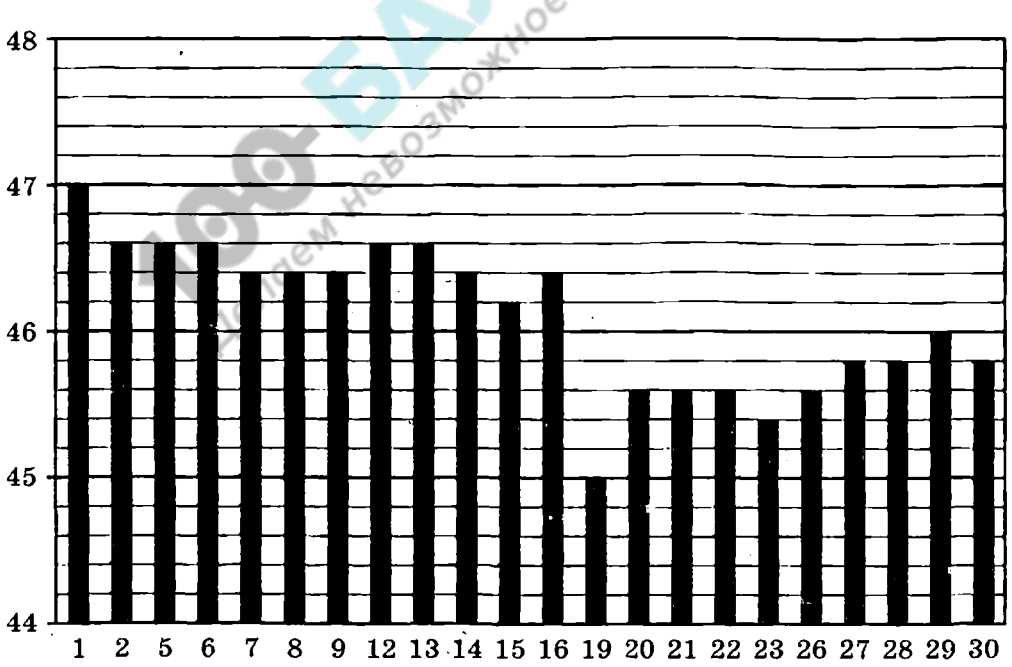
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Флакон шампуня стоит 160 рублей. Какое наибольшее количество флаконов можно купить на 700 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35 %?

Ответ:_____.

2 На диаграмме показан курс австралийского доллара, установленный Центробанком РФ на все рабочие дни марта 2019 года. По горизонтали указаны числа месяца, по вертикали — цена австралийского доллара в рублях.

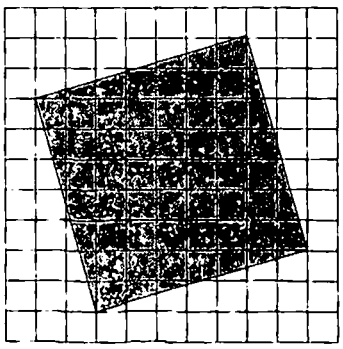


Определите, на сколько рублей стала ниже цена австралийского доллара на конец марта по сравнению с началом марта 2019 года.

Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён квадрат. Найдите его площадь.



Ответ:_____.

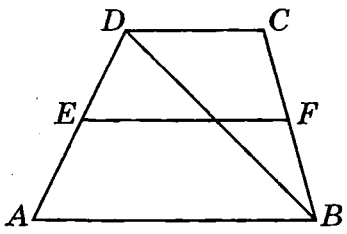
4 Два автомобилиста, независимо друг от друга, выезжают из пункта A в пункт B. Навигатор предлагает каждому из них 5 равноценных маршрутов, и автомобилисты выбирают маршрут случайным образом. Найдите вероятность того, что автомобилисты выберут один и тот же маршрут.

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $3\frac{5}{9}x = 5\frac{1}{3}$.

Ответ:_____.

6 Основания трапеции равны 15 и 26. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.



Ответ:_____.

7 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 - 9t - 22$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, прошедшее с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 3 м/с?

Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

8 От треугольной пирамиды, объём которой равен 42, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объём отсечённой треугольной пирамиды.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\frac{\log_3 4}{\log_3 2}+\log_2 0{,}5$.

Ответ:_____.

10 Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h км над землёй, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l=\sqrt{2Rh}$, где $R=6400$ км — радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 64 км? Ответ выразите в километрах.

Ответ:_____.

11 Смешав 31-процентный и 57-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 22-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 47-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 31-процентного раствора использовали для получения смеси?

Ответ:_____.

12 Найдите наименьшее значение функции $y=-9-8\sqrt{3}\pi+24\sqrt{3}x-48\sqrt{3}\sin x$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $24\cdot 4^{x-0,5}-11\cdot 2^{x+1}+6=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-1;\,1]$.

14 Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=15$ и $BC=25$. Все боковые рёбра пирамиды равны $5\sqrt{17}$. На рёбрах AD и BC отмечены соответственно точки K и N так, что $AK=CN=8$. Через точки K и N проведена плоскость α, перпендикулярная ребру SB.

а) Докажите, что плоскость α проходит через точку M — середину ребра SB.
б) Найдите расстояние между прямыми DS и KM.

15 Решите неравенство $\sqrt{x+\frac{1}{2}}\cdot\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2|1-x|\right)\geq 0$.

16 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса $R=27$. Известно, что $AB=BC=CD=36$.

а) Докажите, что прямые BC и AD параллельны.
б) Найдите AD.

17 По бизнес-плану четырёхлетний проект предполагает начальное вложение — 25 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 20 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей и в первый, и во второй годы, а также целое число m млн рублей и в третий, и в четвёртый годы. Найдите наименьшее значение n, при котором первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, и наименьшее значение m, такое, что при найденном ранее значении n первоначальные вложения за четыре года вырастут как минимум в четыре раза.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается!

18 Найдите все значения a, при каждом из которых линии $y=a|x-2|+|a|-2$ и $y=\frac{a}{2}$ ограничивают многоугольник, площадь которого не более 0,5.

19 Издательство на выставку привезло несколько книг для продажи (каждую книгу привезли в единственном экземпляре). Цена каждой книги — натуральное число рублей. Если цена книги меньше 100 рублей, на неё приклеивают бирку «выгодно». Однако до открытия выставки цену каждой книги увеличили на 10 рублей, из-за чего количество книг с бирками «выгодно» уменьшилось.

а) Могла ли уменьшиться средняя цена книг с биркой «выгодно» после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг с биркой «выгодно» до открытия выставки?

б) Могла ли уменьшиться средняя цена книг без бирки «выгодно» после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг без бирки «выгодно» до открытия выставки?

в) Известно, что первоначально средняя цена всех книг составляла 110 рублей, средняя цена книг с биркой «выгодно» составляла 81 рубль, а средняя цена книг без бирки — 226 рублей. После увеличения цены средняя цена книг с биркой «выгодно» составила 90 рублей, а средняя цена книг без бирки — 210 рублей. При каком наименьшем количестве книг такое возможно?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 8

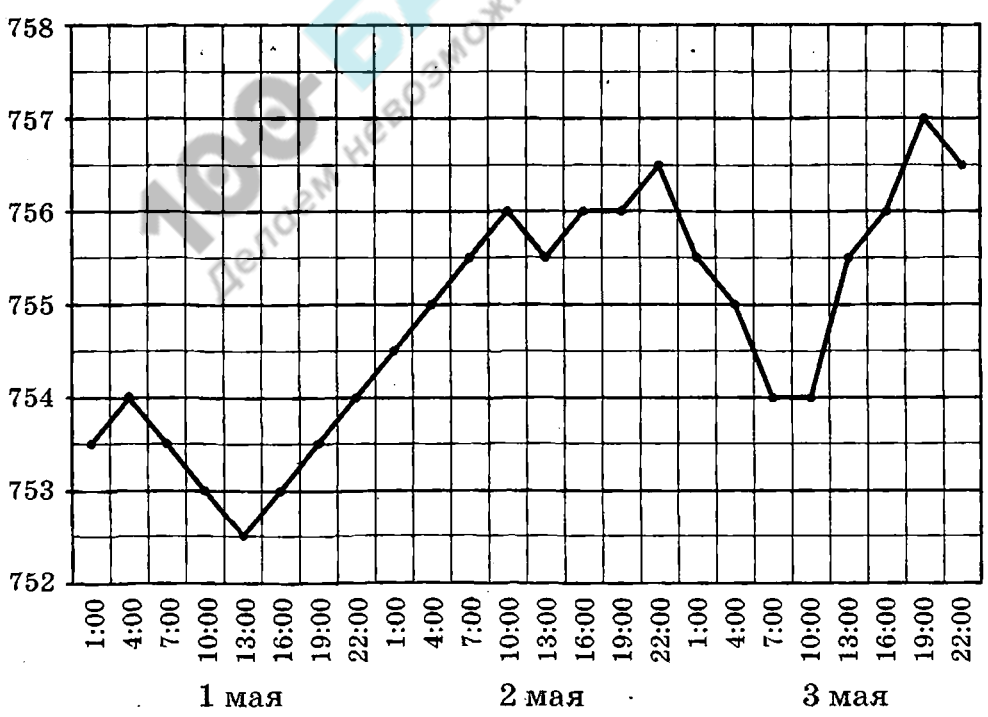
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Рост человека 6 футов 5 дюймов. Выразите его рост в сантиметрах, если 1 фут равен 12 дюймам. Считайте, что 1 дюйм равен 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.

Ответ:_____.

2 На рисунке точками показано атмосферное давление в Норильске с 1 по 3 мая 2019 года. По горизонтали указаны моменты измерений, по вертикали — атмосферное давление в миллиметрах ртутного столба. Для наглядности точки соединены отрезками.

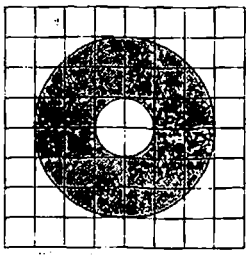


Определите по рисунку, на сколько выросло атмосферное давление за 24 часа с 19 часов 1 мая до 19 часов 2 мая.

Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

3 На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 30. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



Ответ:_____.

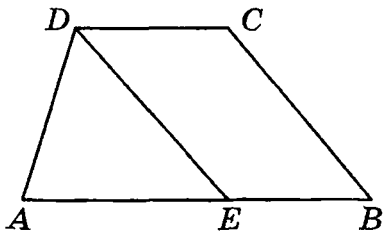
4 Два автомобилиста, независимо друг от друга, выезжают из пункта A в пункт B. Навигатор предлагает каждому из них 8 равноценных маршрутов, и автомобилисты выбирают маршрут случайным образом. Найдите вероятность того, что автомобилисты выберут различные маршруты.

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $7\frac{7}{9}x=5\frac{5}{6}$.

Ответ:_____.

6 Прямая, проведённая параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 41, отсекает треугольник, периметр которого равен 83. Найдите периметр трапеции.



Ответ:_____.

7 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{3}t^3-6t+20$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, прошедшее с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 3 м/с?

Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

8 Найдите объём правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 12, а высота равна $6\sqrt{3}$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{\log_7 2}{\log_7 5} - \log_5 10$.

Ответ:_____.

10 Двигаясь со скоростью $v = 5$ м/с, трактор тащит сани с силой $F = 100$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Мощность, развиваемая трактором, вычисляется по формуле $N = Fv\cos\alpha$. Найдите, при каком угле α (в градусах) эта мощность будет равна 250 кВт (кВт — это $\dfrac{\text{кН}\cdot\text{м}}{\text{с}}$).

Ответ:_____.

11 Два человека отправляются из одного дома на прогулку до опушки леса, находящейся в 3,5 км от дома. Один идёт со скоростью 3,6 км/ч, а другой — со скоростью 4,8 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от дома произойдёт их встреча? Ответ дайте в километрах.

Ответ:_____.

12 Найдите точку минимума функции $y = (3 - 2x)\cos x + 2\sin x + 4$, принадлежащую промежутку $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $4\cdot 25^{x+0,5}-60\cdot 5^{x-1}+1=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-3;-1]$.

14 Основанием пирамиды $TABCD$ является прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=26$ и $BC=18$. Все боковые рёбра пирамиды равны $10\sqrt{5}$. На рёбрах AB и CD отмечены соответственно точки N и M так, что $BN=DM=12$. Через точки N и M проведена плоскость α, перпендикулярная ребру TA.

а) Докажите, что плоскость α проходит через точку K — середину ребра TA.

б) Найдите расстояние между прямыми TC и KN.

15 Решите неравенство $\sqrt{x+3}\cdot\log_{\frac{1}{3}}(\log_3|1+x|)\le 0$.

16 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса $R=12$. Известно, что $AB=BC=CD=18$.

а) Докажите, что прямые BC и AD параллельны.

б) Найдите AD.

17 По бизнес-плану четырёхлетний проект предполагает начальное вложение — 20 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 15 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей и в первый, и во второй годы, а также целое число m млн рублей и в третий, и в четвёртый годы. Найдите наименьшее значение n, при котором первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, и наименьшее значение m, такое, что при найденном ранее значении n первоначальные вложения за четыре года как минимум утроятся.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых линии $y=a|3-x|+|a|-3$ и $y=\frac{a}{3}$ ограничивают многоугольник, площадь которого не менее $\frac{1}{3}$.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

19 Издательство на выставку привезло несколько книг для продажи (каждую книгу привезли в единственном экземпляре). Цена каждой книги — натуральное число рублей. Если цена книги меньше 80 рублей, на неё приклеивают бирку «выгодно». Однако до открытия выставки цену каждой книги увеличили на 5 рублей, из-за чего количество книг с бирками «выгодно» уменьшилось.

а) Могла ли уменьшиться средняя цена книг с биркой «выгодно» после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг с биркой «выгодно» до открытия выставки?

б) Могла ли уменьшиться средняя цена книг без бирки «выгодно» после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг без бирки «выгодно» до открытия выставки?

в) Известно, что первоначально средняя цена всех книг составляла 103 рубля, средняя цена книг с биркой «выгодно» составляла 67 рублей, а средняя цена книг без бирки — 157 рублей. После увеличения цены средняя цена книг с биркой «выгодно» составила 70 рублей, а средняя цена книг без бирки — 146 рублей. При каком наименьшем количестве книг такое возможно?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 9

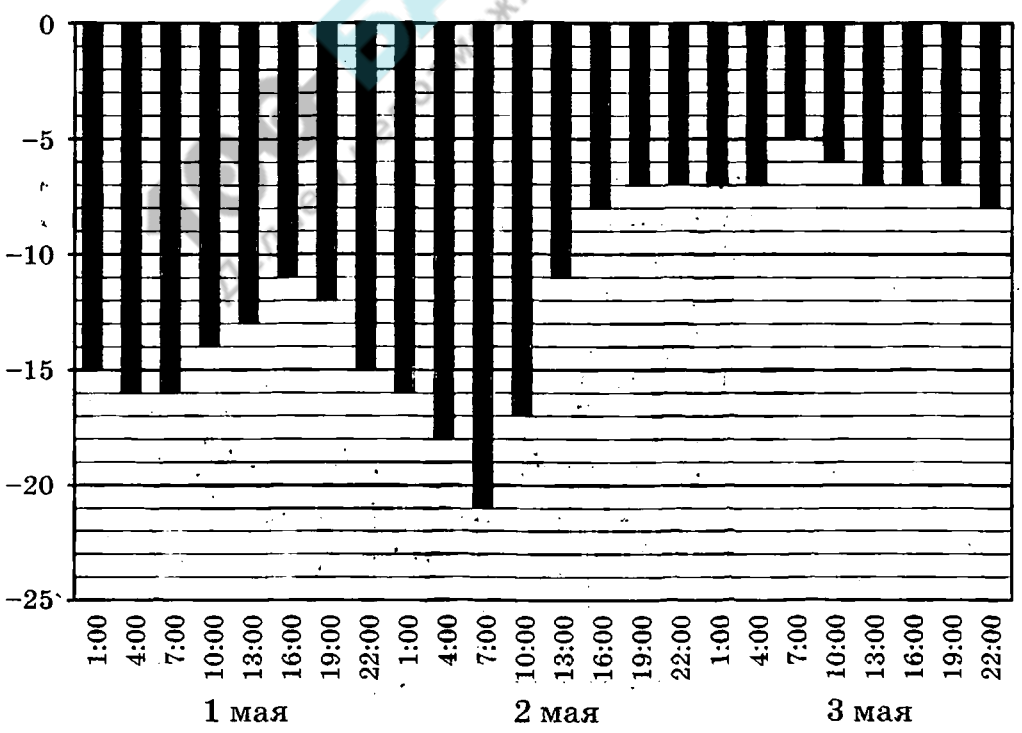
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 На счету Юлиного мобильного телефона было 93 рубля, а после разговора с Мишей осталось 28 рублей. Сколько минут длился разговор с Мишей, если одна минута разговора стоит 2 рубля 50 копеек?

Ответ:_____.

2 На диаграмме показаны значения температуры в Норильске с 1 по 3 мая 2019 года. По горизонтали указаны моменты измерений, по вертикали — температура в градусах Цельсия.



Определите по диаграмме значение наибольшей температуры в Норильске 1 мая.

Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

3 Точки $O(0; 0)$, $A(23; 0)$, $B(20; 18)$, $C(3; 18)$ являются вершинами трапеции. Найдите длину её средней линии DE.

Ответ:_____.

4 Вероятность того, что новый фен прослужит больше года, равна 0,97. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,88. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $\log_2(8-x)=2\log_2(4+x)$.

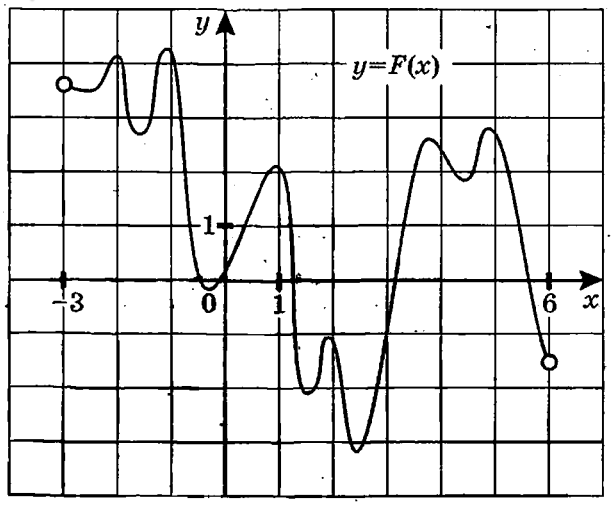
Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите наименьший из корней.

Ответ:_____.

6 В треугольнике со сторонами 8 и 4 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой из этих сторон, равна 1. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?

Ответ:_____.

7 На рисунке изображён график функции $y=F(x)$ — одной из первообразных функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 6)$. Найдите количество решений уравнения $f(x)=0$ на отрезке $[-2; 5]$.



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

8 Шар, объём которого равен 64, вписан в цилиндр. Найдите объём цилиндра.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{\left(2^{\frac{4}{7}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}\right)^{21}}{6^{12}}$.

Ответ:_____.

10 Груз массой 0,3 кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v = v_0 \cos\dfrac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T = 2$ с — период колебаний, $v_0 = 0{,}2$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \dfrac{mv^2}{2}$, где m – масса груза в килограммах, v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 33 с после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Ответ:_____.

11 На изготовление 33 деталей первый рабочий тратит на 8 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 77 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 4 детали больше, чем второй. Сколько деталей за час делает второй рабочий?

Ответ:_____.

12 Найдите наименьшее значение функции $y = 2x^2 - 5x + \ln x - 5$ на отрезке $\left[\dfrac{5}{6}; \dfrac{7}{6}\right]$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $8^{\cos^2 x} = (\sqrt{2})^{5\sin 2x} \cdot 0{,}5$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

14 Основание пирамиды $SABC$ — равносторонний треугольник ABC. Боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания, точки M и N — середины рёбер BC и AB соответственно, причём $SN = AM$.

а) Докажите, что угол между прямыми AM и SN равен $60°$.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если $BC = 3\sqrt{2}$.

15 Решите неравенство $4^{2x+1,5} - 9^{x+0,5} \geq 2 \cdot 12^x$.

16 В треугольнике ABC все стороны различны. Прямая, содержащая высоту BH треугольника ABC, вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке F. Отрезок BD — диаметр этой окружности.

а) Докажите, что $AD = CF$.

б) Найдите DF, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 12, $\angle BAC = 35°$, $\angle ACB = 65°$.

17 В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 14 % по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 3,249 млн рублей.

Сколько миллионов рублей было взято в банке, если известно, что он был полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2+x+a}{x^2-2x+a^2+6a}=0$$

имеет ровно два различных корня.

19 Группу детей можно перевезти автобусами модели А или автобусами модели Б. Известно, что в автобусе модели А количество мест больше 30, но меньше 40, а в автобусах модели Б — больше 40, но меньше 50. Если всех детей рассадить в автобусы модели А, то все места будут заняты. Если всех детей рассадить в автобусы модели Б, то все места также будут заняты, но потребуется на один автобус меньше.

а) Может ли потребоваться 6 автобусов модели А?
б) Найдите наименьшее возможное количество детей в группе.
в) Сколько в группе детей, если для их перевозки потребовалось 3 автобуса модели Б?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

100БАЛЛОВ 100ballov.com Делаем невозможное возможным

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 10

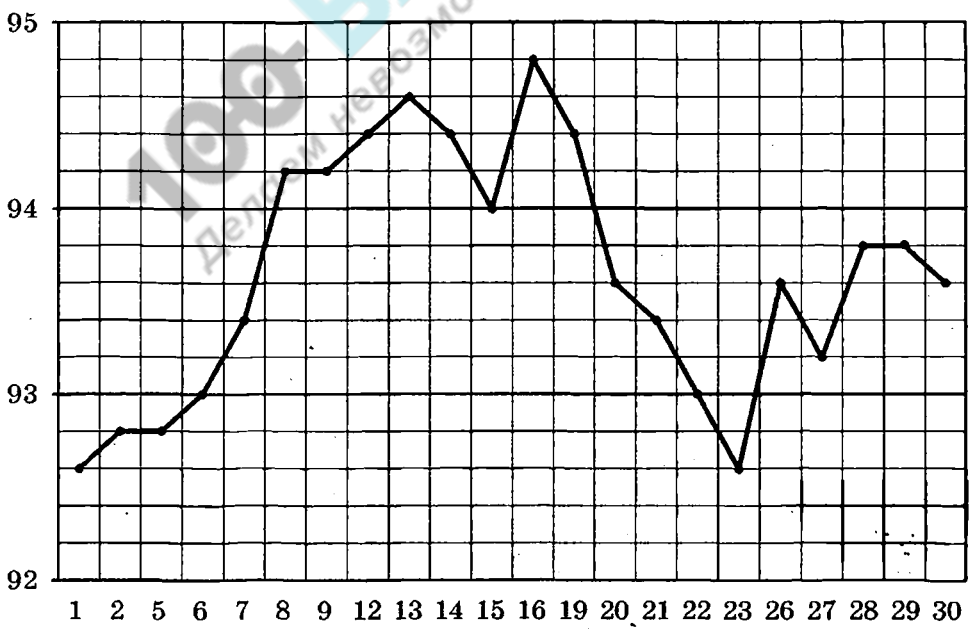
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Задачу № 1 правильно решили 24 840 человек, что составляет 72 % от выпускников города. Сколько всего выпускников в этом городе?

Ответ:_____.

2 На рисунке показан курс индийской рупии, установленный Центробанком РФ на все рабочие дни марта 2019 года. По горизонтали указаны числа месяца, по вертикали — цена 100 индийских рупий в рублях. Для наглядности точки соединены отрезками.

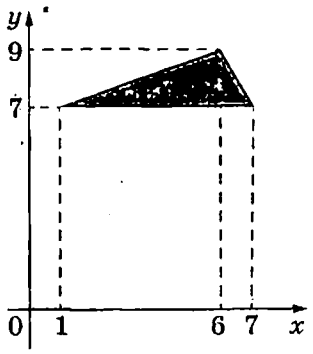


Определите, сколько рабочих дней в период с 16 по 30 марта 2019 года цена 100 индийских рупий была ниже 94 рублей.

Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

3 Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке.



Ответ:_____.

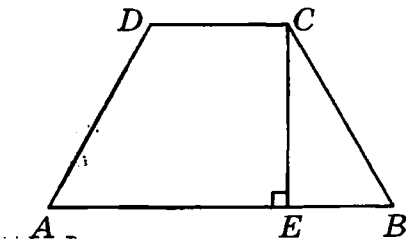
4 В коробке 8 чёрных и 5 белых шаров. Случайным образом достают 6 шаров. Во сколько раз событие «среди выбранных шаров ровно четыре чёрных» более вероятно, чем событие «среди выбранных шаров ровно пять чёрных»?

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $\log_7(x+18)=2\log_7(2-x)$.
Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите наибольший из корней.

Ответ:_____.

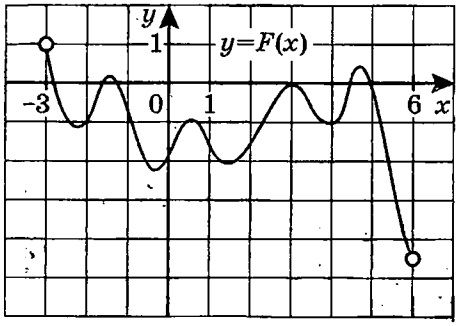
6 Перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла на большее основание равнобедренной трапеции, делит его на части, имеющие длины 10 и 9. Найдите среднюю линию этой трапеции.



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

7 На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 6)$. Найдите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2; 5]$.



Ответ:_____.

8 Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 74. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $2{,}5^{\frac{1}{7}} \cdot 2^{\frac{2}{7}} \cdot 10^{\frac{6}{7}}$.

Ответ:_____.

10 Два тела, массой $m = 10$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v = 10$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q = mv^2\sin^2\alpha$, где m — масса в килограммах, v — скорость в м/с. Найдите, под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось энергии не менее 750 джоулей.

Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

11 Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 6 рабочих, а во второй — 15 рабочих. Через 5 дней после начала работы в первую бригаду перешли 7 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

Ответ:_____.

12 Найдите наименьшее значение функции $y = 4x^2 - 12x + 4\ln x - 10$ на отрезке $\left[\frac{12}{13}; \frac{14}{13}\right]$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $125^{\sin^2 x} = (\sqrt{5})^{5\sin 2x} \cdot 0{,}2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-3\pi; -2\pi]$.

14 Основание пирамиды $SABC$ — равносторонний треугольник ABC. Боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания, точки M и N — середины рёбер BC и AB соответственно, причём $SN = AM$.

а) Докажите, что угол между прямыми AM и SN равен 60°.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если $BC = 6$.

15 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{4}}(5-5x) \le \log_{\frac{1}{4}}(x^2-3x+2) + \log_4(x+4)$.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

16 В треугольнике ABC все стороны различны. Прямая, содержащая высоту BH треугольника ABC, вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке K. Отрезок BN — диаметр этой окружности.

а) Докажите, что AC и KN параллельны.

б) Найдите расстояние от точки N до прямой AC, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен $6\sqrt{6}$, $\angle BAC = 30°$, $\angle ABC = 105°$.

17 По бизнес-плану четырёхлетний проект предполагает начальное вложение — 10 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 12 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: **целое** число n млн рублей и в первый, и во второй годы, а также **целое** число m млн рублей и в третий, и в четвёртый годы. Найдите наименьшее значение n, при котором первоначальные вложения за два года вырастут как минимум в полтора раза, и наименьшее значение m, такое, что при найденном ранее значении n первоначальные вложения за четыре года как минимум утроятся.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = (a+2)x^2 + 2ax + a - 2, \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

19 Издательство на выставку привезло несколько книг для продажи (каждую книгу привезли в единственном экземпляре). Цена каждой книги — натуральное число рублей. Если цена книги меньше 75 рублей, на неё приклеивают бирку «выгодно». Однако до открытия выставки цену каждой книги увеличили на 15 рублей, из-за чего количество книг с бирками «выгодно» уменьшилось.

а) Могла ли уменьшиться средняя цена книг с биркой «выгодно» после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг с биркой «выгодно» до открытия выставки?

б) Могла ли уменьшиться средняя цена книг без бирки «выгодно» после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг без бирки «выгодно» до открытия выставки?

в) Известно, что первоначально средняя цена всех книг составляла 80 рублей, средняя цена книг с биркой «выгодно» составляла 56 рублей, а средняя цена книг без бирки — 152 рубля. После увеличения цены средняя цена книг с биркой «выгодно» составила 70 рублей, а средняя цена книг без бирки — 145 рублей. При каком наименьшем количестве книг такое возможно?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 11

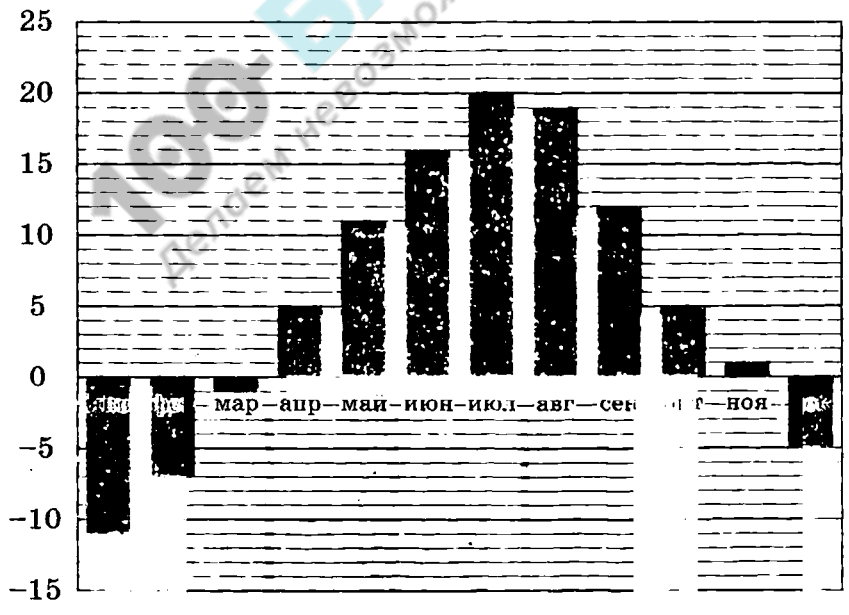
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Железнодорожный билет для взрослого стоит 580 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50 % от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 17 школьников и 3 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

Ответ:_____.

2 На диаграмме показана средняя температура воздуха в Казани за каждый месяц 2017 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия.

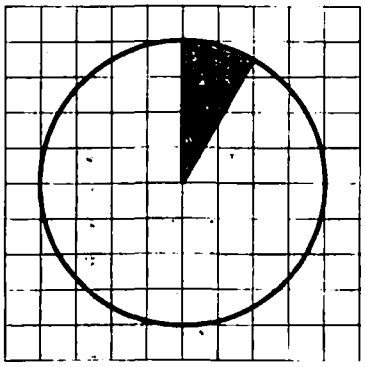


Определите по диаграмме, в каком месяце первого полугодия 2017 года средняя температура за месяц в Казани была наибольшей. Запишите в ответ значение средней температуры в этот месяц в градусах Цельсия.

Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

3 На клетчатой бумаге изображён круг площадью 60. Найдите площадь закрашенного сектора.



Ответ:_____.

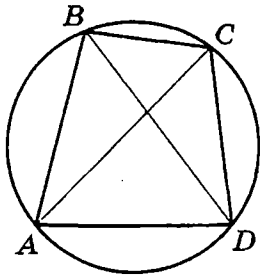
4 Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 51 спортсмен, среди которых 14 спортсменов из России, в том числе Т. Найдите вероятность того, что в первом туре Т. будет играть с каким-либо спортсменом из России.

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $\frac{4}{7}x=-4\frac{5}{7}$.

Ответ:_____.

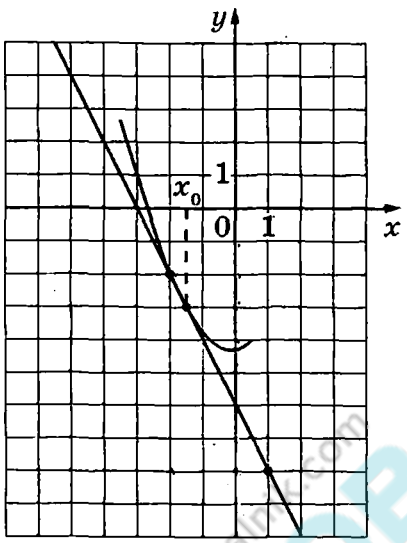
6 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 122°, угол ABD равен 36°. Найдите угол CAD. Ответ дайте в градусах.



Ответ:_____.

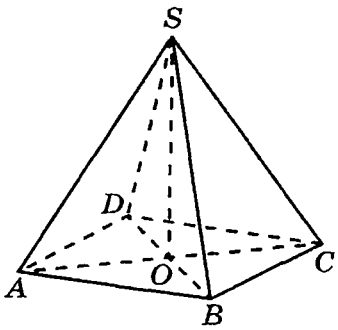
© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО».
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается!

7 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:_____.

8 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 9$, $SC = 15$. Найдите длину отрезка BD.



Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $(27^4)^3 : (9^2)^8$.

Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

10 Велосипедист совершает n оборотов педалей велосипеда, а велосипед при этом проходит путь, который можно найти по формуле

$$S = 2\pi R\frac{a_1}{a_2}n \text{ м},$$

где R — радиус колеса в метрах, a_1 и a_2 — количество зубцов на большой и малой звёздочках велосипеда соответственно. Какой путь пройдёт велосипед при 13 оборотах педалей, если на большой звёздочке 40 зубьев, на малой — 15, а диаметр колеса 57 см? Считайте, что $\pi = 3{,}14$. Результат округлите до целого числа метров.

Ответ:_____.

11 Имеется два сосуда. Первый содержит 55 кг, а второй — 20 кг растворов кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 68 % кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 75 % кислоты. Сколько процентов кислоты содержится в первом сосуде?

Ответ:_____.

12 Найдите наибольшее значение функции $y = -\frac{4}{3}x\sqrt{x} + 6x + 13$ на отрезке $[4;16]$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\cos x + 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\sin 2x - 1$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$.

14 Точки A, B и C лежат на окружности основания конуса с вершиной S, причём A и C диаметрально противоположны. Точка M — середина BC.

а) Докажите, что прямая SM образует с плоскостью ABC такой же угол, как и прямая AB с плоскостью SBC.
б) Найдите угол между прямой SA и плоскостью SBC, если $AB = 6$, $BC = 8$ и $SC = 5\sqrt{2}$.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей недопустимы

15 Решите неравенство $4\log_4^2(\sin^3 x)+8\log_2(\sin x)\geq 1$.

16 На гипотенузе AB и катетах BC и AC прямоугольного треугольника ABC отмечены точки M, N и K соответственно, причём прямая NK параллельна прямой AB и $BM=BN=\frac{1}{2}KN$. Точка P — середина отрезка KN.

а) Докажите, что четырёхугольник $BCPM$ — равнобедренная трапеция.
б) Найдите площадь треугольника ABC, если $BM=1$ и $\angle BCM=15°$.

17 Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на четыре года. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20 % по сравнению с началом года. В конце 1-го и 2-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 3-го и 4-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика превысит 8 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(ay-ax+2)(y-x+3a)=0,\\ |xy|=a\end{cases}$$

имеет ровно шесть решений.

19 Известно, что в кошельке лежало n монет, каждая из которых могла иметь достоинство 2, 5 или 10 рублей. Аня сделала все свои покупки, расплатившись за каждую покупку отдельно без сдачи только этими монетами, потратив при этом все монеты из кошелька.

а) Могли ли все её покупки состоять из блокнота за 56 рублей и ручки за 29 рублей, если $n=14$?
б) Могли ли все её покупки состоять из чашки чая за 10 рублей, сырка за 15 рублей и пирожка за 20 рублей, если $n=19$?
в) Какое наименьшее количество пятирублёвых монет могло быть в кошельке, если Аня купила только альбом за 85 рублей и $n=24$?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 12

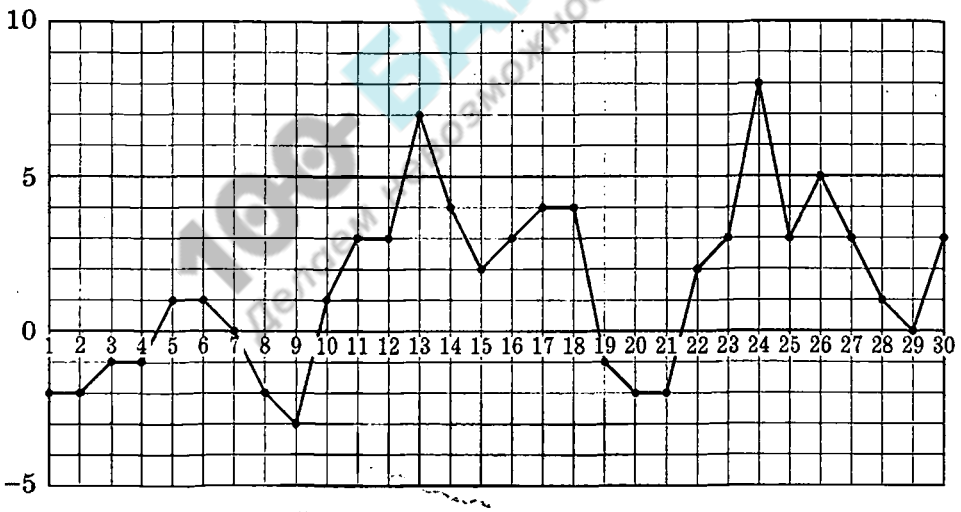
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 В университетскую библиотеку привезли новые учебники для четырёх курсов, по 360 штук для каждого курса. В книжном шкафу 7 полок, на каждой полке помещается 20 учебников. Какое наименьшее количество шкафов потребуется, чтобы в них разместить все новые учебники?

Ответ:_____.

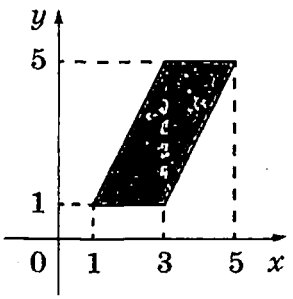
2 На рисунке жирными точками показана средняя температура воздуха в Мурманске во все дни апреля 2018 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Для наглядности точки на рисунке соединены линией.



Определите, сколько дней в апреле 2018 года средняя температура в Мурманске была меньше 1,5 градуса Цельсия.

Ответ:_____.

3 Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

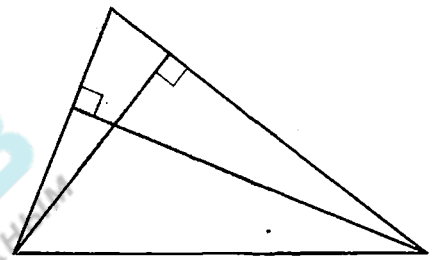
4 Из ящика, в котором лежат фломастеры, не глядя достали два фломастера. Найдите вероятность того, что эти фломастеры оказались одного цвета, если известно, что в ящике 12 синих и 13 красных фломастеров.

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $8^{x-3}=16^{2x}$.

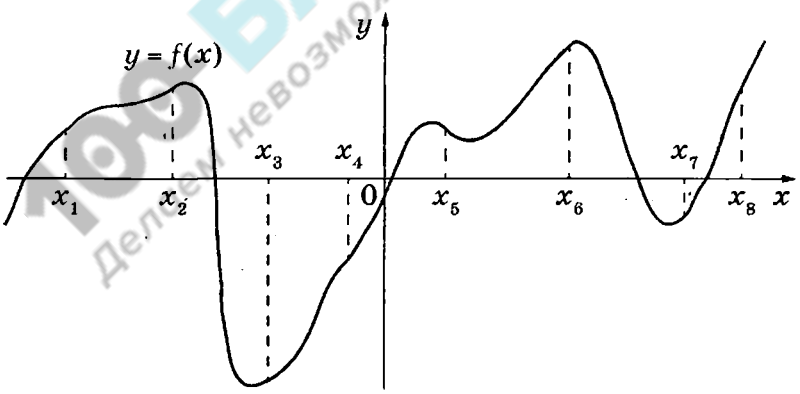
Ответ:_____.

6 Два угла треугольника равны 68° и 35°. Найдите тупой угол, который образуют высоты треугольника, выходящие из вершин этих углов. Ответ дайте в градусах.



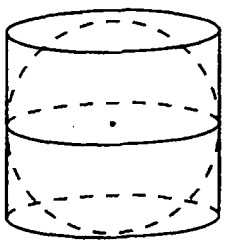
Ответ:_____.

7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$. На оси абсцисс отмечено восемь точек: x_1, x_2, ... x_8. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ положительна.



Ответ:_____.

8 Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 26. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.



Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

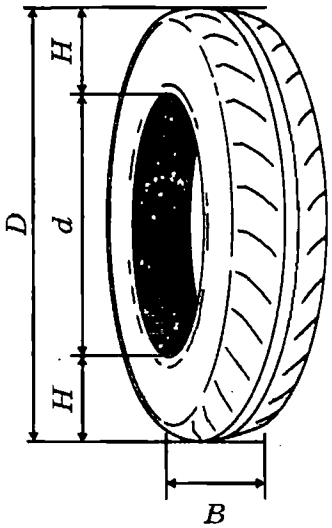
Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{10\cos 105^\circ}{\sin 15^\circ \cdot \cos 60^\circ}$.

Ответ:_____.

10 На автомобильной шине с помощью специальной маркировки указаны её размеры. Например, 265/60R18. Первое число означает ширину шины B в миллиметрах (см. рис.). Второе число означает отношение высоты профиля шины H к ширине шины в процентах. Буква означает конструкцию шины (R — радиальный тип), а последнее число означает диаметр обода колеса d в дюймах.

На автомобиль «Лада-Калина» завод устанавливает шины с маркировкой 185/60R14. Найдите диаметр колеса D этого автомобиля. В одном дюйме 25,4 мм. Ответ дайте в сантиметрах с округлением до целого.



Ответ:_____.

11 Автомобиль выехал с постоянной скоростью 72 км/ч из города A в город B, расстояние между которыми равно 246 км. Одновременно с ним из города C в город B, расстояние между которыми равно 221 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 35 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город B одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:_____.

12 Найдите наименьшее значение функции $y = 5x - \ln(5x) + 12$ на отрезке $\left[\dfrac{1}{10}; \dfrac{1}{2}\right]$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\sin x+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=\cos 2x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[4\pi;\ \frac{11\pi}{2}\right]$.

14 Точки A, B и C лежат на окружности основания конуса с вершиной S, причём A и C диаметрально противоположны. Точка M — середина BC.

а) Докажите, что прямая SM образует с плоскостью ABC такой же угол, как и прямая AB с плоскостью SBC.

б) Найдите угол между прямой SA и плоскостью SBC, если $AB=4$, $BC=6$ и $SC=4\sqrt{2}$.

15 Решите неравенство $20\log_4^2(\cos x)+4\log_2(\cos x)\le 1$.

16 На гипотенузе AB и катетах BC и AC прямоугольного треугольника ABC отмечены точки M, N и K соответственно, причём прямая NK параллельна прямой AB и $BM=BN=\frac{1}{2}KN$. Точка P — середина отрезка KN.

а) Докажите, что четырёхугольник $BCPM$ — равнобедренная трапеция.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $BM=2$ и $\angle BCM=30^\circ$.

17 Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на четыре года. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 25 % по сравнению с началом года. В конце 1-го и 2-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 3-го и 4-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика превысит 9 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(ay-ax+2)(y-x+3a)=0,\\ |xy|=a\end{cases}$$

имеет ровно восемь решений.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

19 Известно, что в кошельке лежало n монет, каждая из которых могла иметь достоинство 2, 5 или 10 рублей. Таня сделала все свои покупки, расплатившись за каждую покупку отдельно без сдачи только этими монетами, потратив при этом все монеты из кошелька.

а) Могли ли все её покупки состоять из блокнота за 64 рубля и ручки за 31 рубль, если $n = 16$?

б) Могли ли все её покупки состоять из стакана компота за 15 рублей, сырка за 20 рублей и булочки за 25 рублей, если $n = 26$?

в) Какое наименьшее количество пятирублёвых монет могло быть в кошельке, если Таня купила только альбом за 96 рублей и $n = 19$?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

100 БАЛЛОВ Делаем невозможное возможным 100balnik.com

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 13

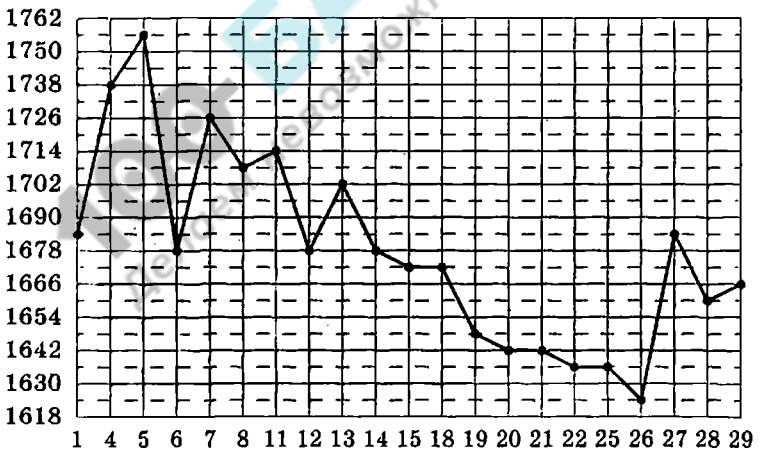
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Таксист за месяц проехал 11 000 км. Цена бензина 35 рублей за литр. Средний расход бензина на 100 км составляет 7 литров. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?

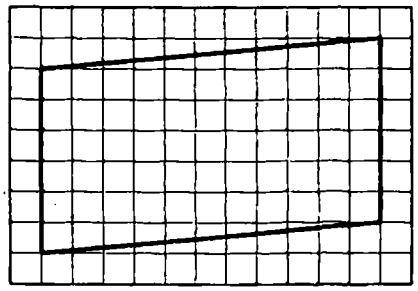
Ответ:_____.

2 На рисунке жирными точками показана цена золота, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни в октябре 2011 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена золота в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшую цену золота в период с 1 по 11 октября (в рублях за грамм).



Ответ:_____.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм. Найдите длину его бóльшей высоты.



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

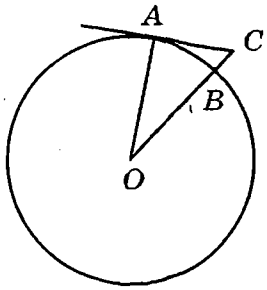
4 В группе туристов 12 человек. С помощью жребия они выбирают трёх человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{3x+49}=10$.

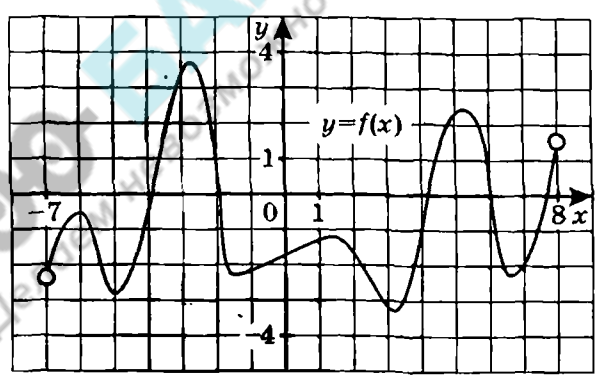
Ответ:_____.

6 Найдите угол ACO, если его сторона CA касается окружности с центром O, отрезок CO пересекает окружность в точке B (см. рис.), а дуга AB окружности, заключённая внутри этого угла, равна 17°. Ответ дайте в градусах.



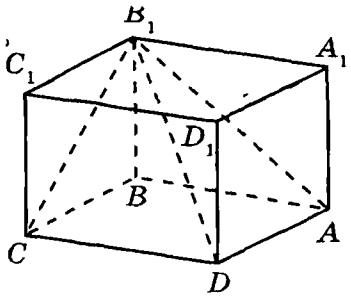
Ответ:_____.

7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-7; 8)$. $F(x)$ — одна из первообразных функции $y=f(x)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $F(x)$ параллельна прямой $y=-x+2$ или совпадает с ней.



Ответ:_____.

8 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C, D, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB=9$, $BC=3$, $BB_1=8$.



Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{81^{2,6}}{9^{3,7}}$.

Ответ:_____.

10 В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём меняется по закону $H(t)=at^2+bt+H_0$, где H — высота столба воды в метрах, $H_0=8$ м — начальный уровень воды, $a=\dfrac{1}{72}$ м/мин^2 и $b=-\dfrac{2}{3}$ м/мин — постоянные, t — время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. Сколько минут вода будет вытекать из бака?

Ответ:_____.

11 Два велосипедиста одновременно отправились в 140-километровый пробег. Первый ехал со скоростью на 4 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 4 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:_____.

12 Найдите наибольшее значение функции $y=\ln(8x)-8x+7$ на отрезке $\left[\dfrac{1}{16};\dfrac{5}{16}\right]$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\left((0{,}04)^{\sin x}\right)^{\cos x} = 5^{-\sqrt{3}\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

14 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки B, A_1 и D_1.

б) Найдите угол между плоскостями BA_1C_1 и BA_1D_1.

15 Решите неравенство $\log_2\left(x^2-2\right)-\log_2 x \le \log_2\left(x-\frac{2}{x^2}\right)$.

16 Окружность с центром в точке O пересекает каждую из сторон трапеции $ABCD$ в двух точках. Четыре получившиеся хорды окружности равны.

а) Докажите, что биссектрисы всех углов трапеции пересекаются в одной точке.

б) Найдите высоту трапеции, если окружность пересекает боковую сторону AB в точках K и L так, что $AK = 19$, $KL = 12$, $LB = 3$.

17 15 июня планируется взять кредит в банке на сумму 1300 тысяч рублей на 16 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 15-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
— 15-го числа 15-го месяца долг составит 100 тысяч рублей;
— к 15-му числу 16-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1636 тысяч рублей.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(a+1)\left(x^2+y^2\right)+(a-1)x+(a+1)y+2=0,\\ xy-1=x-y\end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

19 Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 12 раз больше, либо в 12 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 8750.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

100 БАЛЛОВ Делаем невозможное возможным 100ballnik.com

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 14

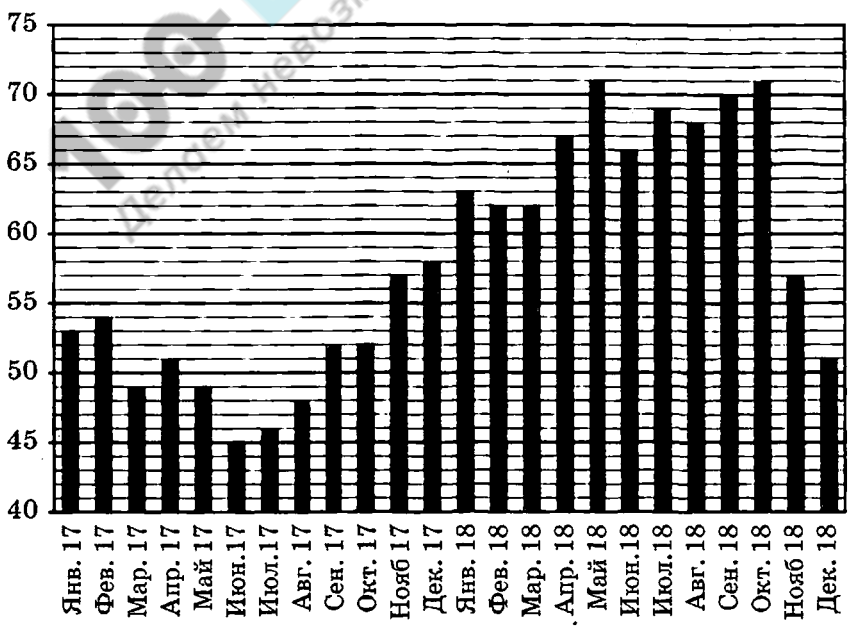
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Люда отправила sms-сообщения с новогодними поздравлениями своим 18 друзьям. Стоимость одного sms-сообщения 1 рубль 10 копеек. Перед отправкой сообщений на счёте у Люды было 44 рубля. Сколько рублей останется на счёте после отправки всех сообщений?

Ответ:_____

2 На диаграмме показана средняя цена нефти марки WTI во все месяцы 2017 и 2018 годов. По горизонтали указаны месяцы, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США.

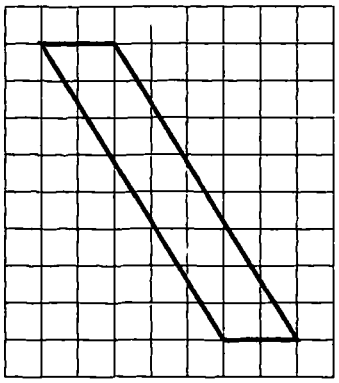


Определите, сколько месяцев во втором полугодии 2017 года цена барреля нефти была выше 50 долларов.

Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм. Найдите его площадь.



Ответ:_____.

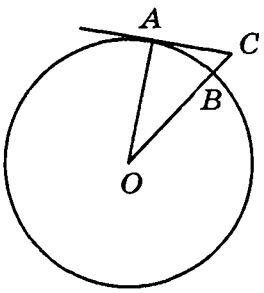
4 На чемпионате по прыжкам в воду выступают 40 спортсменов, среди них 3 прыгуна из Голландии и 6 прыгунов из Аргентины. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что тринадцатым будет выступать прыгун из Аргентины.

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $4^{x-7}=\dfrac{1}{64}$.

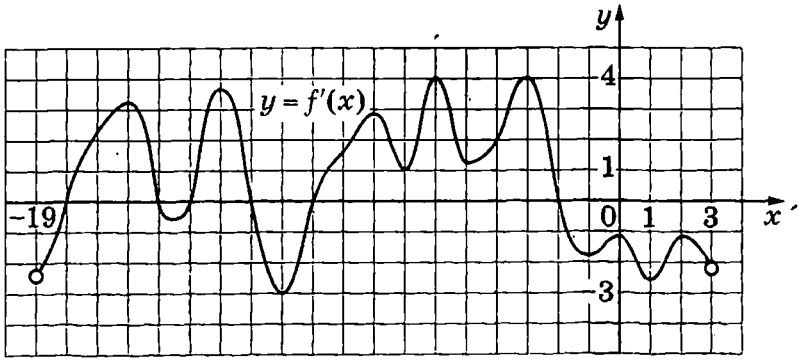
Ответ:_____.

6 Угол ACO равен 62°. Его сторона CA касается окружности с центром в точке O. Отрезок CO пересекает окружность в точке B (см. рис.). Найдите градусную меру дуги AB окружности, заключённой внутри этого угла. Ответ дайте в градусах.



Ответ:_____.

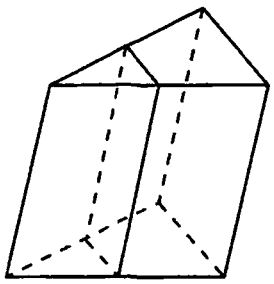
7 На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-19; 3)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-17; -4]$.



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

8 Через среднюю линию основания треугольной призмы, объём которой равен 52, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём отсечённой треугольной призмы.



Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $4^{\frac{1}{5}} \cdot 16^{\frac{9}{10}}$.

Ответ:_____.

10 Сила тока I (в А) в электросети вычисляется по закону Ома: $I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение электросети (в В), R — сопротивление подключаемого электроприбора (в Ом). Электросеть прекращает работать, если сила тока превышает 5 А. Определите, какое наименьшее сопротивление может быть у электроприбора, подключаемого к электросети с напряжением 220 В, чтобы электросеть продолжала работать. Ответ дайте в омах.

Ответ:_____.

11 Расстояние между городами А и В равно 500 км. Из города А в город В выехал первый автомобиль, а через час после этого навстречу ему из города В выехал со скоростью 80 км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 260 км от города А. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:_____.

12 Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x+9)^5 - 5x$ на отрезке $[-8{,}5;\ 0]$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\left((0{,}25)^{\sin x}\right)^{\cos x} = 2^{-\sqrt{2}\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]$.

14 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через середины его рёбер AB, B_1C_1, AD.

б) Найдите угол между плоскостью A_1BD и плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, B_1C_1, AD.

15 Решите неравенство $\log_5\left(2-\frac{2}{x}\right)-\log_5(x+3)\geq\log_5\left(\frac{x+3}{x^2}\right)$.

16 Окружность с центром в точке O пересекает каждую из сторон трапеции $ABCD$ в двух точках. Четыре получившиеся хорды окружности равны.

а) Докажите, что биссектрисы всех углов трапеции пересекаются в одной точке.

б) Найдите высоту трапеции, если окружность пересекает боковую сторону AB в точках K и L так, что $AK=13$, $KL=6$, $LB=1$.

17 15 мая планируется взять кредит в банке на 17 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 16-й долг должен быть на 50 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

— к 15-му числу 17-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1472 тысячи рублей?

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a\left(x^2+y^2\right)-ax+(a-3)y+1=0, \\ xy-1=y-x \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

19 Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 14 раз больше, либо в 14 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 7424.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

100 БАЛЛОВ Делаем невозможное возможным 100ballnik.com

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 15

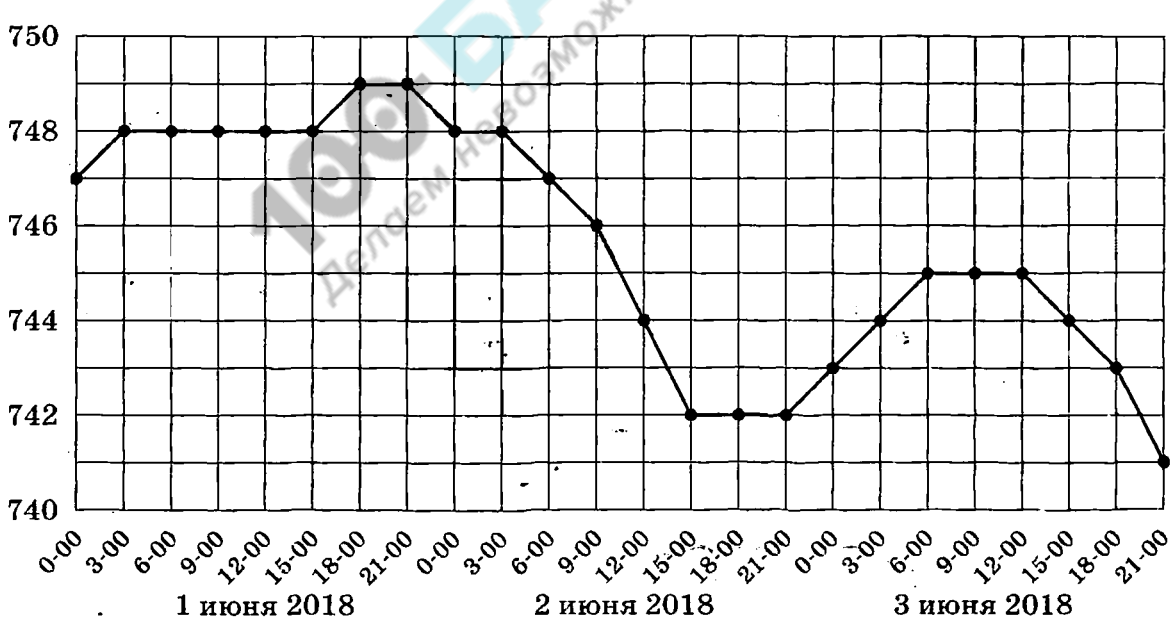
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Часы стоили 1200 рублей. После снижения цены они стали стоить 972 рубля. На сколько процентов была снижена цена на часы?

Ответ:_____.

2 На диаграмме показано изменение атмосферного давления в Казани с 1 по 3 июня 2018 года. По горизонтали указано время, по вертикали — атмосферное давление в миллиметрах ртутного столба.

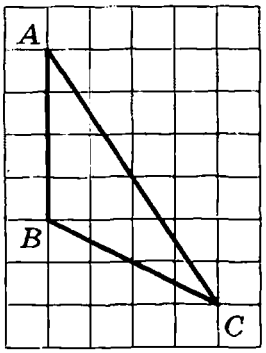


Определите по рисунку наибольшее и наименьшее значения атмосферного давления (в миллиметрах ртутного столба) 3 июня 2018 года в Казани. Запишите в ответ разность этих значений.

Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его высоты, проведённой к прямой, содержащей сторону AB.



Ответ:_____.

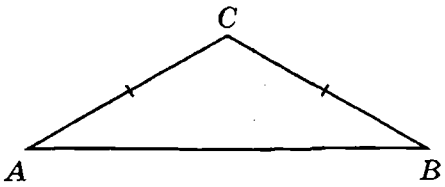
4 По отзывам покупателей Пётр Петрович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,95. Пётр Петрович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что оба магазина доставят товар.

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{15-2x}=x$.
Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

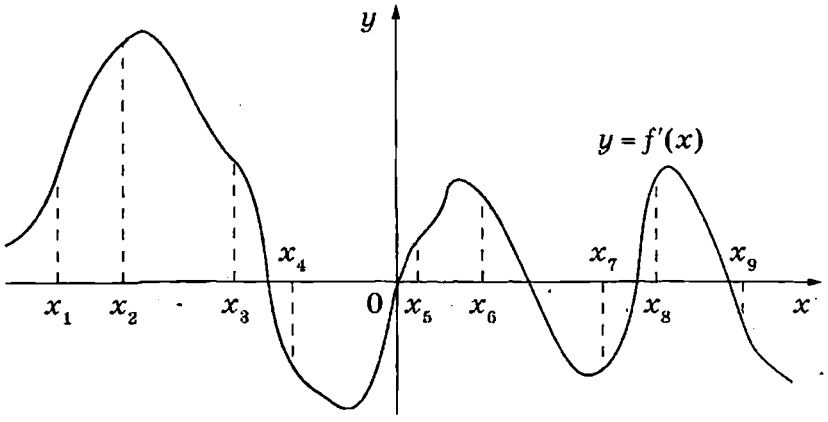
Ответ:_____.

6 В треугольнике ABC известно, что $AC=BC$, $AB=20$, $\sin A=\frac{\sqrt{5}}{3}$. Найдите длину стороны AC.



Ответ:_____.

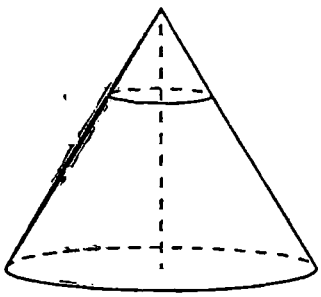
7 На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечено девять точек: x_1, x_2, ..., x_9. Найдите количество точек, лежащих на промежутках возрастания функции $f(x)$.



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

8 Площадь боковой поверхности конуса равна 30. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту в отношении 2 : 3, считая от вершины конуса. Найдите площадь боковой поверхности отсечённого конуса.



Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\log_3 32 \cdot \log_2 9$.

Ответ:_____.

10 Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в К) от времени работы:

$$T(t) = T_0 + bt + at^2,$$

где t — время (в мин.), $T_0 = 1600$ К, $a = -5$ К/мин^2, $b = 105$ К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1870 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.

Ответ:_____.

11 От пристани А к пристани В, расстояние между которыми равно 208 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 3 часа после этого следом за ним со скоростью на 3 км/ч большей отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт В оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:_____.

12 Найдите точку максимума функции $y = (x+7)^2 \cdot e^{-1-x}$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\dfrac{4}{\sin^2\left(\dfrac{7\pi}{2}-x\right)}-\dfrac{11}{\cos x}+6=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi;\dfrac{7\pi}{2}\right]$.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 1. Точка F — середина ребра AS.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей SAD и BCF.

б) Найдите угол между плоскостями SAD и BCF.

15 Решите неравенство $9^{x+\frac{1}{9}}-4\cdot 3^{x+\frac{10}{9}}+27\geq 0$.

16 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём сторона CD — диаметр этой окружности. Продолжение перпендикуляра AH к диагонали BD пересекает сторону CD в точке E, а окружность — в точке F, причём H — середина AE.

а) Докажите, что четырёхугольник $BCFE$ — параллелограмм.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AB=5$ и $AH=4$.

17 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение второго года кредитования нужно вернуть банку 339 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение первого года кредитования?

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

18 Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 3|x - a^2| - 5x$$

имеет более двух точек экстремума.

19 В одном из заданий на конкурсе бухгалтеров требуется выдать премии сотрудникам некоторого отдела на общую сумму 600 000 рублей (размер премии каждого сотрудника — целое число, кратное 1000). Бухгалтеру дают распределение премий, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея 100 купюр по 1000 рублей и 100 купюр по 5000 рублей.

а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудников и все должны получить поровну?
б) Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать 40 000 рублей, а остальное поделить поровну на 70 сотрудников?
в) При каком наибольшем количестве сотрудников в отделе задание удастся выполнить при любом распределении размеров премий?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

100БАЛЛОВ 100ballov.com Делаем невозможное возможным

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 16

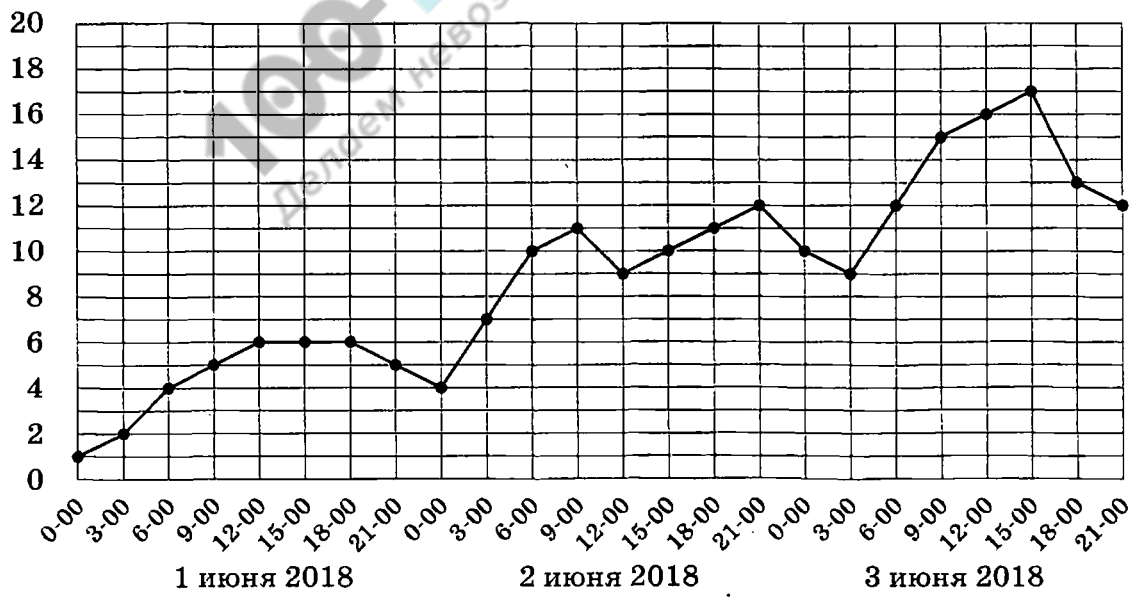
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Рост человека 6 футов 2 дюйма. Выразите его рост в сантиметрах, если 1 фут равен 12 дюймам. Считайте, что 1 дюйм равен 2,54 см. Результат округлите до целого числа.

Ответ:_____.

2 На рисунке жирными точками показана средняя температура воздуха в Казани с 1 по 3 июня 2018 года. По горизонтали указываются дни и время измерения, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности точки на рисунке соединены линией.

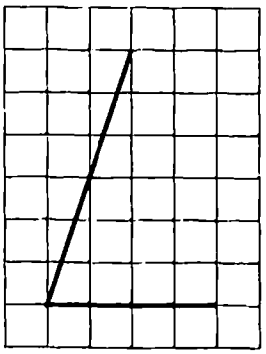


Определите по рисунку наименьшую температуру в Казани 3 июня 2018 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.

Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите тангенс этого угла.



Ответ:_____.

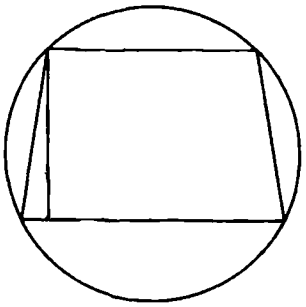
4 На уроке физкультуры 26 школьников, из них 12 девочек, остальные — мальчики. По сигналу учителя физкультуры все быстро выстраиваются в одну шеренгу в случайном порядке. Найдите вероятность того, что справа в шеренге первые двое окажутся мальчиками.

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{6}{4x-54}}=\frac{1}{7}$.

Ответ:_____.

6 Основания равнобедренной трапеции равны 24 и 10. Радиус описанной окружности равен 13. Центр окружности лежит внутри трапеции. Найдите высоту трапеции.

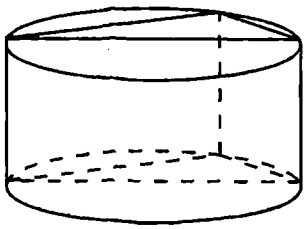


Ответ:_____.

7 Прямая $y=-5x+6$ является касательной к графику функции $28x^2+23x+c$. Найдите c.

Ответ:_____.

8 В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 5 и 6. Боковые рёбра призмы равны $\frac{4}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.



Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Часть 2

9 Найдите значение выражения $3^{2+\log_3 7}$.

Ответ:_____.

10 Груз массой 0,58 кг колеблется на пружине. Его скорость v (в м/с) меняется по закону $v = v_0 \sin\frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний в секундах, $T = 6$ с — период колебаний, $v_0 = 2$ м/с. Кинетическая энергия E (в Дж) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза (в кг), v — скорость груза (в м/с). Найдите кинетическую энергию груза через 4 секунды после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Ответ:_____.

11 Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 21 час. Через 5 часов после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

Ответ:_____.

12 Найдите наименьшее значение функции $y = 6 + \frac{\sqrt{3}\pi}{2} - 3\sqrt{3}x - 6\sqrt{3}\cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\cos 4x - \sin 2x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 1. Точка F — середина ребра SB, G — середина ребра SC.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABG и GDF.
б) Найдите угол между плоскостями ABG и GDF.

15 Решите неравенство $9^x - 10 \cdot 3^{x+1} + 81 \geq 0$.

16 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём сторона CD — диаметр этой окружности. Продолжение перпендикуляра AH к диагонали BD пересекает сторону CD в точке E, а окружность — в точке F, причём H — середина AE.

а) Докажите, что четырёхугольник $BCFE$ — параллелограмм.
б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AB = 6$ и $AH = 2\sqrt{5}$.

17 31 декабря 2014 года Михаил взял в банке некоторую сумму в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Михаил переводит в банк 2 928 200 рублей. Какую сумму взял Михаил в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 4|x - a^2| - 8x$$

имеет хотя бы одну точку максимума.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

19 Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел −1, 3, 4, −5, 7, −9, −10, 11. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел −1, 3, 4, −5, 7, −9, −10, 11. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?
б) Может ли в результате получиться 1?
в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

100БАЛЛОВ 100balnik.com Делаем невозможное возможным

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО».
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 17

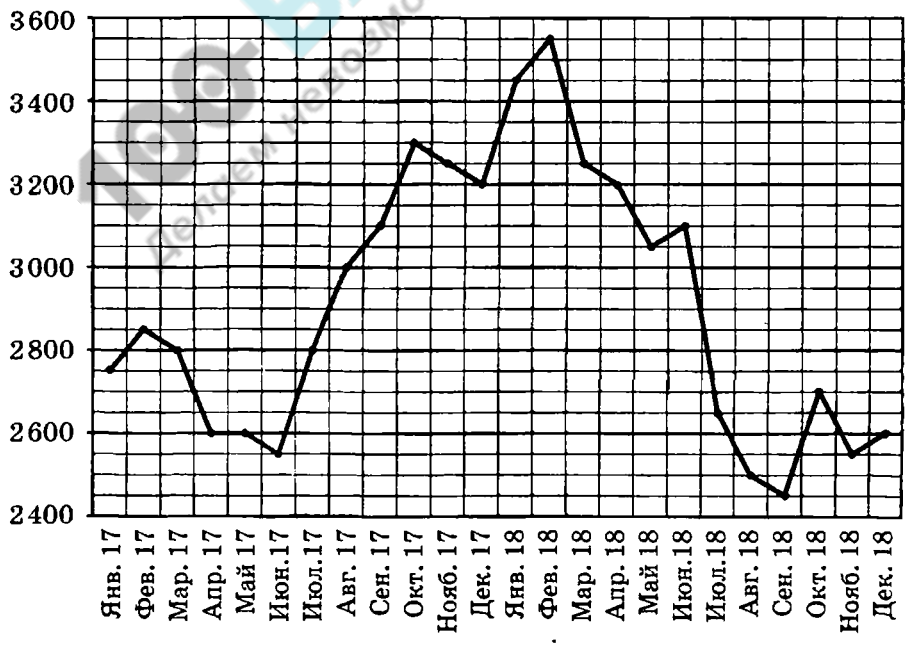
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 На бензоколонке один литр бензина стоит 33 рубля 20 копеек. Водитель залил в бак 25 литров бензина и взял бутылку воды за 25 рублей. Сколько рублей сдачи он получит с 1000 рублей?

Ответ:_____.

2 На рисунке показана средняя цена цинка во все месяцы 2017 и 2018 годов. По горизонтали указаны месяцы, по вертикали — цена тонны цинка в долларах США. Для наглядности точки соединены отрезками.

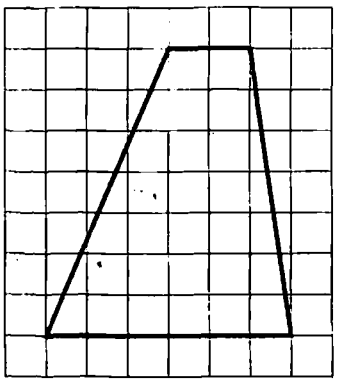


Определите, на сколько долларов стала ниже цена тонны цинка в сентябре 2018 года по сравнению с сентябрём 2017 года.

Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.



Ответ:_____.

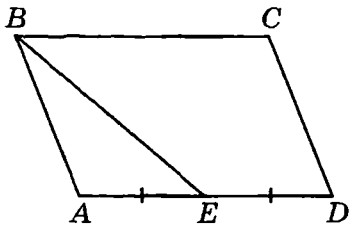
4 В группе туристов 20 человек. Их вертолётом доставляют в труднодоступный район, перевозя по 4 человека за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист В., входящий в состав группы, полетит первым рейсом вертолёта.

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{7x-31}=2$.

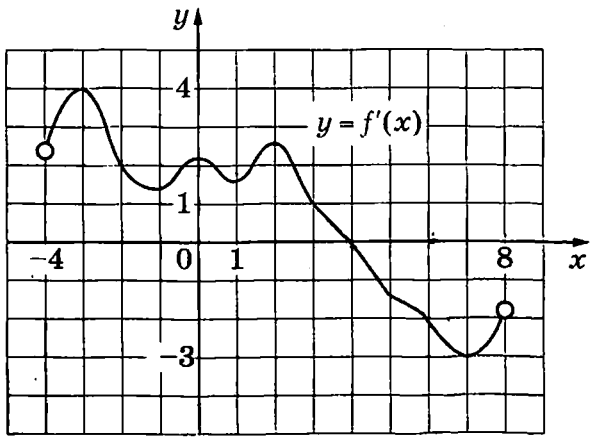
Ответ:_____.

6 Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 28. Точка E — середина стороны AD. Найдите площадь трапеции $BCDE$.



Ответ:_____.

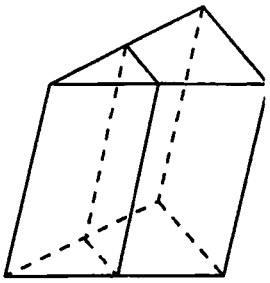
7 На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 8)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащую отрезку $[1; 6]$.



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

8 Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы равна 36. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.



Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $(\sqrt{96}-\sqrt{24})\cdot\sqrt{6}$.

Ответ:_____.

10 К источнику с ЭДС $\mathscr{E}=180$ В и внутренним сопротивлением $r=1$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R (в Ом). Напряжение (в В) на этой нагрузке вычисляется по формуле $U=\dfrac{\mathscr{E}R}{R+r}$. При каком значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет равно 170 В? Ответ дайте в омах.

Ответ:_____.

11 Заказ на изготовление 209 деталей первый рабочий выполняет на 8 часов быстрее, чем второй. Сколько деталей за час изготавливает второй рабочий, если известно, что первый за час изготавливает на 8 деталей больше?

Ответ:_____.

12 Найдите наименьшее значение функции $y=9x-\ln(x+5)^9$ на отрезке $[-4{,}5;\ 0]$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\left(2\cos^2 x+3\sin x-3\right)\cdot\log_2\left(\sqrt{2}\cos x\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi;\ -3\pi]$.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

14 В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A, B и C, а на окружности другого основания — точка C_1, причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 45°$, $AB = 3\sqrt{2}$, $CC_1 = 6$.

а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен $60°$.
б) Найдите расстояние от точки B до прямой AC_1.

15 Решите неравенство $\log_5\left(\frac{3}{x}+2\right)-\log_5(x+2)\le\log_5\left(\frac{x+1}{x^2}\right)$.

16 Окружность с центром O_1 касается оснований BC и AD, а также боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Окружность с центром O_2 касается сторон BC, CD и AD. Известно, что $AB = 9$, $BC = 8$, $CD = 4$, $AD = 15$.

а) Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции $ABCD$.
б) Найдите O_1O_2.

17 15-го марта планируется взять кредит в банке на 26 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 25-й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
— к 15-му числу 26-го месяца кредит должен быть полностью погашен.
Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1924 тысячи рублей?

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^4+y^2=a^2, \\ x^2+y=|a+1| \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

19 На доске написано 12 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое семи наименьших из них равно 8, а среднее арифметическое семи наибольших равно 16.

а) Может ли наибольшее из этих двенадцати чисел равняться 18?
б) Может ли среднее арифметическое всех двенадцати чисел равняться 11?
в) Найдите наименьшее значение среднего арифметического всех двенадцати чисел.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 18

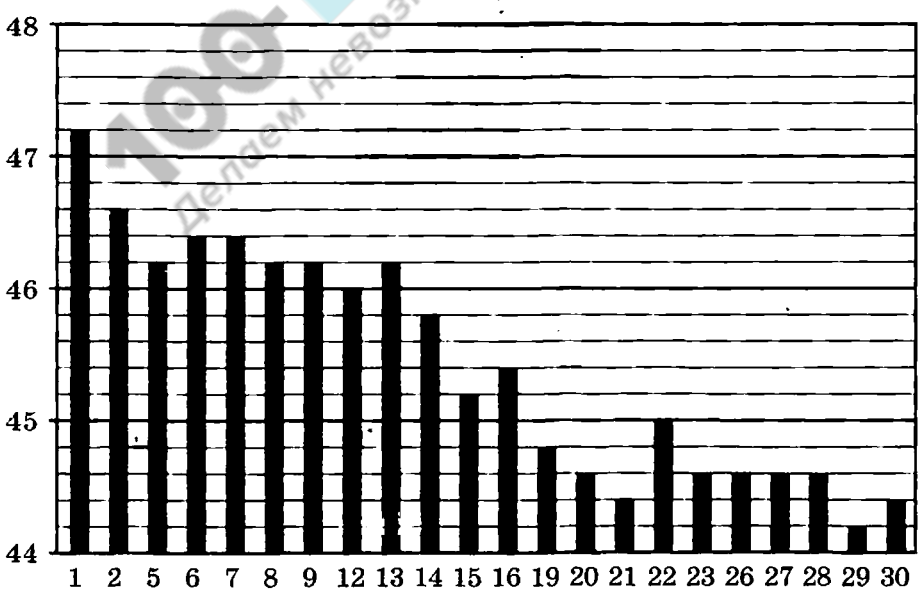
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Стоимость полугодовой подписки на журнал составляет 720 рублей, а стоимость одного номера журнала — 36 рублей. За полгода Аня купила 25 номеров журнала. На сколько рублей меньше она бы потратила, если бы подписалась на журнал?

Ответ:_____.

2 На диаграмме показан курс южноафриканского рэнда, установленный Центробанком РФ на все рабочие дни марта 2019 года. По горизонтали указаны числа месяца, по вертикали — цена 10 южноафриканских рэндов в рублях.

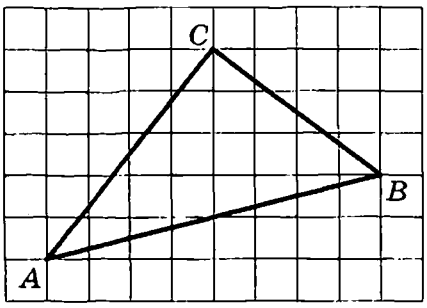


Определите наименьшую цену в рублях 10 южноафриканских рэндов в период с 13 по 23 марта 2019 года.

Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его медианы, проведённой из вершины C.



Ответ:_____.

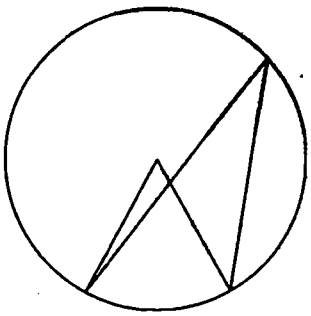
4 На конференцию приехали учёные из трёх стран: 7 из Сербии, 3 из России и 2 из Дании. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что десятым окажется доклад учёного из России.

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x+6}=4$.

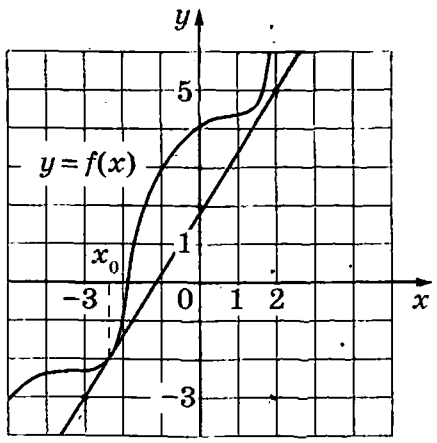
Ответ:_____.

6 Найдите центральный угол, если он на 28° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу. Ответ дайте в градусах.



Ответ:_____.

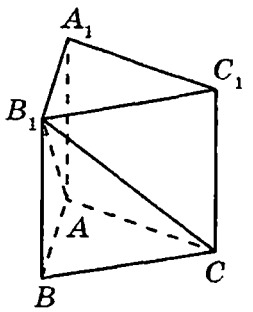
7 На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

8 Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 8, а боковое ребро равно 6. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, C, A_1, B_1, C_1.



Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\left(2^{16}\right)^5 : 2^{74}$.

Ответ:_____.

10 Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 60$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 18$ км/ч^2. Расстояние (в км) от мотоциклиста до города вычисляется по формуле $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, где t — время в часах, прошедшее после выезда из города. Определите время, прошедшее после выезда мотоциклиста из города, если известно, что за это время он удалился от города на 21 км. Ответ дайте в минутах.

Ответ:_____.

11 Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 285 литров она заполняет на 4 минуты дольше, чем вторая труба?

Ответ:_____.

12 Найдите наименьшее значение функции $y = 12x - \ln(12x) + 4$ на отрезке $\left[\frac{1}{24}; \frac{5}{24}\right]$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\left(2\sin^2 x-\cos x-1\right)\log_3(-0{,}2\sin x)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[5\pi;\ 7\pi]$.

14 В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A, B и C, а на окружности другого основания — точка C_1, причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB=30^\circ$, $AB=\sqrt{2}$, $CC_1=4$.

а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 60°.

б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

15 Решите неравенство $15^x-9\cdot 5^x-3^x+9\le 0$.

16 Окружность с центром O_1 касается оснований BC и AD, а также боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Окружность с центром O_2 касается сторон BC, CD и AD. Известно, что $AB=15$, $BC=32$, $CD=14$, $AD=11$.

а) Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции $ABCD$.

б) Найдите O_1O_2.

17 15 июля планируется взять кредит в банке на сумму 1400 тысяч рублей на 31 месяц. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\,\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 30-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

— 15-го числа 30-го месяца долг составит 500 тысяч рублей;

— к 15-му числу 31-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1989 тысяч рублей.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^4 + y^2 = a^2 - 1, \\ x^2 - y = |a - 1| \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

19 На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 8, а среднее арифметическое семи наибольших равно 14.

а) Может ли наибольшее из этих одиннадцати чисел равняться 16?

б) Может ли среднее арифметическое всех одиннадцати чисел равняться 10?

в) Найдите наименьшее значение среднего арифметического всех одиннадцати чисел.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

100 БАЛЛОВ Делаем невозможное возможным 100balnik.com

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 19

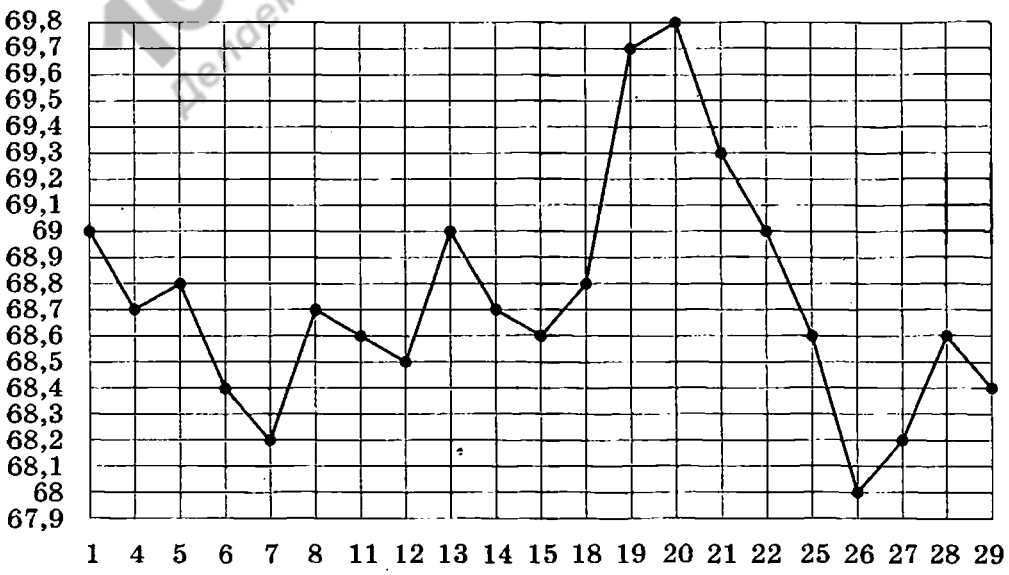
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 В июле на рынке голландские помидоры стоили на 25 % дешевле краснодарских; в августе они подорожали на 10 %, а краснодарские помидоры подешевели на 40 % за счёт сезонного падения цен. На сколько процентов голландские помидоры дороже краснодарских в августе?

Ответ:_____.

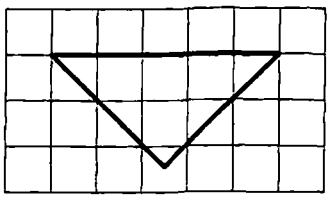
2 На графике жирными точками показан курс евро, установленный Центробанком РФ, на все рабочие дни с 1 по 29 сентября 2017 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена евро в рублях. Для наглядности точки соединены линиями. Определите наименьший курс евро в рублях в период с 5 по 18 сентября.



Ответ:_____.

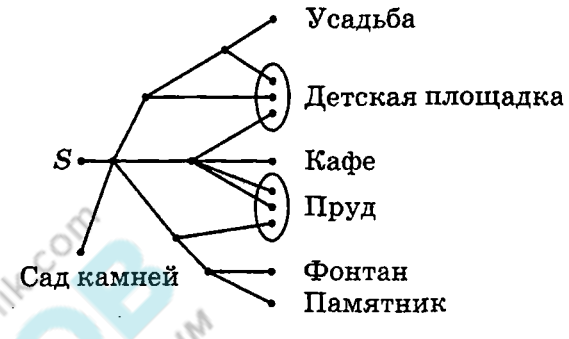
© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите длину его медианы, проведённой к гипотенузе.



Ответ:_____.

4 Артём гуляет по парку. Он выходит из точки S и, дойдя до очередной развилки, с равными шансами выбирает следующую дорожку, но не возвращается обратно. Найдите вероятность того, что таким образом он выйдет к пруду или фонтану.

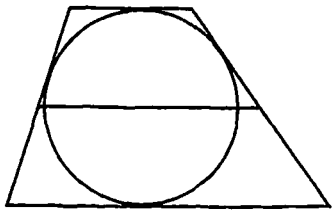


Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $\log_7(x+8)=1+\log_7(3x-14)$.

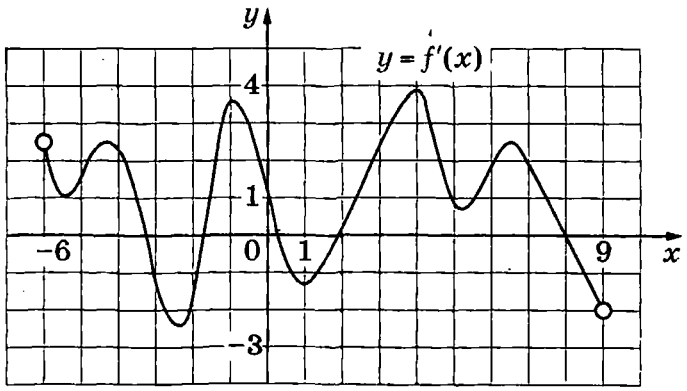
Ответ:_____.

6 Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 28. Найдите длину её средней линии.



Ответ:_____.

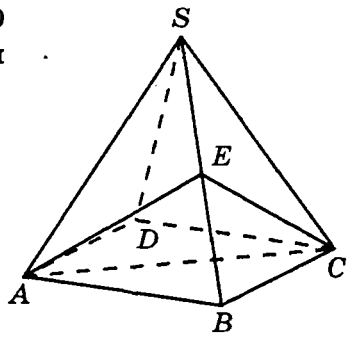
7 На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6;\ 9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-3;\ 7]$.



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

8 Объём правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равен 52. Точка E — середина ребра SB. Найдите объём треугольной пирамиды $EABC$.



Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[5]{45}\cdot\sqrt[5]{189}}{\sqrt[5]{35}}$.

Ответ:_____.

10 Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана — Больцмана, согласно которому $P=\sigma S T^4$, где P — мощность излучения звезды (в Вт), $\sigma=5{,}7\cdot10^{-8}\,\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды (в м^2), а T — температура (в К). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\dfrac{1}{256}\cdot10^{11}$ м^2, а мощность её излучения равна $4{,}617\cdot10^{13}$ Вт. Найдите температуру этой звезды. Ответ дайте в кельвинах.

Ответ:_____.

11 Имеется два сплава. Первый сплав содержит 15 % меди, второй — 40 % меди. Масса второго сплава больше массы первого на 45 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 35 % меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ:_____.

12 Найдите точку максимума функции $y=2x^2-57x+203\ln x+28$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\sqrt{3}\cos x+2\cos\left(x-\frac{5\pi}{6}\right)=\cos 2x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2};\,-4\pi\right]$.

14 Точки A, B и C лежат на окружности основания конуса с вершиной S, причём A и C диаметрально противоположны. Точка M — середина BC.

а) Докажите, что прямая SM образует с плоскостью ABC такой же угол, как и прямая AB с плоскостью SBC.

б) Найдите угол между прямой SA и плоскостью SBC, если $AB=6$, $BC=10$ и $SC=4\sqrt{3}$.

15 Решите неравенство $2\log_2^2(\cos^2 x)+7\log_2(\cos x)\geq 1$.

16 На гипотенузе AB и катетах BC и AC прямоугольного треугольника ABC отмечены точки M, N и K соответственно, причём прямая NK параллельна прямой AB и $BM=BN=\frac{1}{2}KN$. Точка P — середина отрезка KN.

а) Докажите, что четырёхугольник $BCPM$ — равнобедренная трапеция.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $BM=2$ и $\angle PMC=15°$.

17 1 января 2015 года Иван Сергеевич взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1-го числа каждого следующего месяца банк начисляет 2 % на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 2 %), затем Иван Сергеевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Иван Сергеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 200 тыс. рублей?

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

18 Найдите все значения a, при каждом из которых множество значений функции $y=\dfrac{5a+150x-10ax}{100x^2+20ax+a^2+25}$ содержит отрезок $[0;1]$.

19 Известно, что в кошельке лежало n монет, каждая из которых могла иметь достоинство 2, 5 или 10 рублей. Мила сделала все свои покупки, расплатившись за каждую покупку отдельно без сдачи только этими монетами, потратив при этом все монеты из кошелька.

а) Могли ли все её покупки состоять из блокнота за 58 рублей и ручки за 26 рублей, если $n=19$?

б) Могли ли все её покупки состоять из чашки кофе за 15 рублей, ватрушки за 25 рублей и шоколадного батончика за 30 рублей, если $n=31$?

в) Какое наименьшее количество десятирублёвых монет могло быть в кошельке, если Мила купила только альбом за 129 рублей и $n=21$?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 20

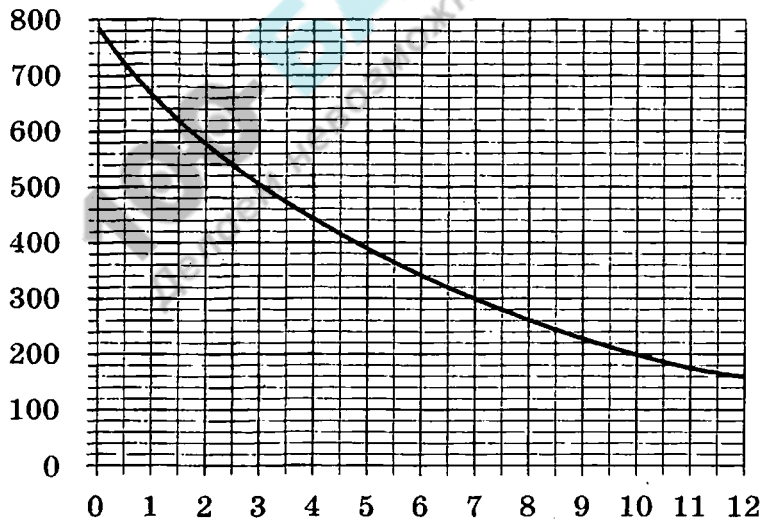
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Розничная цена учебника 184 рубля за штуку, она на 15 % выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 9900 рублей?

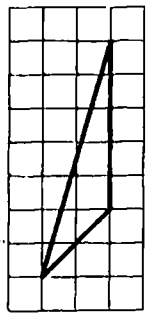
Ответ:_____.

2 На графике изображена зависимость атмосферного давления от высоты над уровнем моря. На горизонтальной оси отмечена высота над уровнем моря в километрах, на вертикальной — давление в миллиметрах ртутного столба. Определите, используя график, на сколько атмосферное давление на высоте 0,5 км выше, чем на высоте 7 км. Ответ дайте в миллиметрах ртутного столба.



Ответ:_____.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

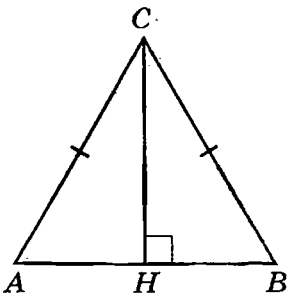
4 Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не попадёт в неё. Вероятность попадания при каждом отдельном выстреле равна $p = 0{,}6$. Найдите вероятность того, что стрелку потребуется ровно три попытки.

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $7^{4-x} = 3{,}5 \cdot 2^{4-x}$.

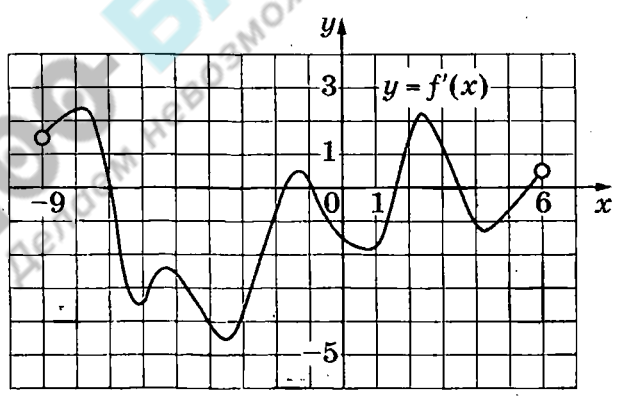
Ответ:_____.

6 В треугольнике ABC известно, что $AC = BC$, высота CH равна 9, $\operatorname{tg} A = 1{,}8$. Найдите сторону AB.



Ответ:_____.

7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 6)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -x + 2$ или совпадает с ней.



Ответ:_____.

8 Высота конуса равна 12, а длина образующей равна 15. Найдите диаметр основания конуса.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{1{,}8}\cdot\sqrt{1{,}5}}{\sqrt{0{,}3}}$.

Ответ:_____.

10 Угловая скорость вращения вала автомобильного двигателя $\omega_{двиг}$ и угловая скорость вращения колёс автомобиля $\omega_{кол}$ измеряются в оборотах в минуту. Эти величины связаны соотношением

$$\omega_{кол}=\frac{\omega_{двиг}}{kb},$$

где k — передаточное число дифференциала автомобиля, а b — передаточное число коробки передач при выбранной передаче. В таблице указаны передаточные числа для автомобиля «Лада-Калина».

	Коробка передач						Дифференциал
	1-я пер.	2-я пер.	3-я пер.	4-я пер.	5-я пер.	Задняя	
Передаточное число	3,636	1,950	1,357	0,941	0,784	3,500	3,706

Водитель разгонялся на 5-й передаче, пока число оборотов двигателя не достигло 2000 об/мин. В этот момент водитель, не меняя скорости, включил 2-ю передачу. Найдите угловую скорость вращения вала двигателя после переключения. Результат округлите до целого числа оборотов.

Ответ:_____.

11 Алексей купил рубашку, пиджак и носовой платок. Если бы пиджак стоил втрое дороже, общая стоимость покупки выросла бы на 130 %. Если бы платок стоил вдвое дешевле, то общая стоимость покупки уменьшилась бы на 4 %. Сколько процентов от общей стоимости покупки составляет стоимость рубашки?

Ответ:_____.

12 Найдите наибольшее значение функции $y=\log_2\left(-60-16x-x^2\right)-3$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $6\log_{27}^2 x + 5\log_{27} x + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, которые больше 0,3.

14 Высота цилиндра равна 3, а радиус основания равен 13.

а) Постройте сечение цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра, так, чтобы площадь этого сечения равнялась 72.

б) Найдите расстояние от плоскости сечения до центра основания цилиндра.

15 Решите неравенство $\log_2\left(4^x + 81^x - 4\cdot 9^x + 3\right) \geq 2x$.

16 Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На катете AC взята точка M. Окружность с центром O и диаметром CM касается гипотенузы в точке N.

а) Докажите, что прямые MN и BO параллельны.

б) Найдите площадь четырёхугольника $BOMN$, если $CN = 4$ и $AM : MC = 1 : 3$.

17 Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 30 квадратных метров и номера «люкс» площадью 40 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 940 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 4000 рублей в сутки, а номер «люкс» — 5000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

18 Найдите все значения b, при каждом из которых уравнение $\dfrac{\sin x - b\cos x}{\sin x + \cos x} = \dfrac{1}{b+2}$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

19 Первый набор чисел состоит из чисел 2, 4, 8, ..., 2^{10}. Второй набор состоит из чисел 3, 9, 27, ..., 3^{10}. Числа разбиты на пары. В каждой паре на первом месте — число из первого набора, а на втором — число из второго. В каждой паре два числа умножили друг на друга и полученные произведения сложили.

а) Может ли полученная сумма делиться на 9?

б) Может ли полученная сумма быть больше 1 000 000?

в) Найдите наименьшее возможное значение полученной суммы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 21

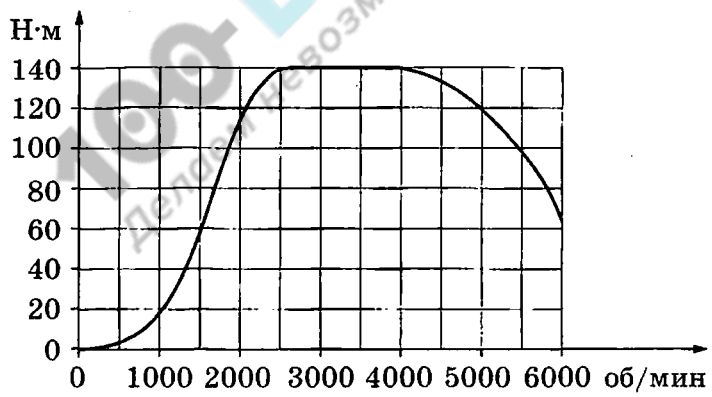
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Держатели дисконтной карты книжного магазина получают при покупке скидку 6%. Книга стоит 650 рублей. Сколько рублей заплатит держатель дисконтной карты за эту книгу?

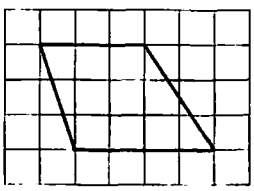
Ответ:_____.

2 На графике изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа его оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту, на оси ординат — крутящий момент в Н · м. Какое число оборотов в минуту должен совершать двигатель, чтобы крутящий момент был не менее 60 Н · м?



Ответ:_____.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

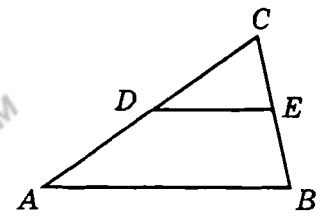
4 В среднем из 600 садовых насосов, поступивших в продажу, 3 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $9^{6+x}=81^{2x}$.

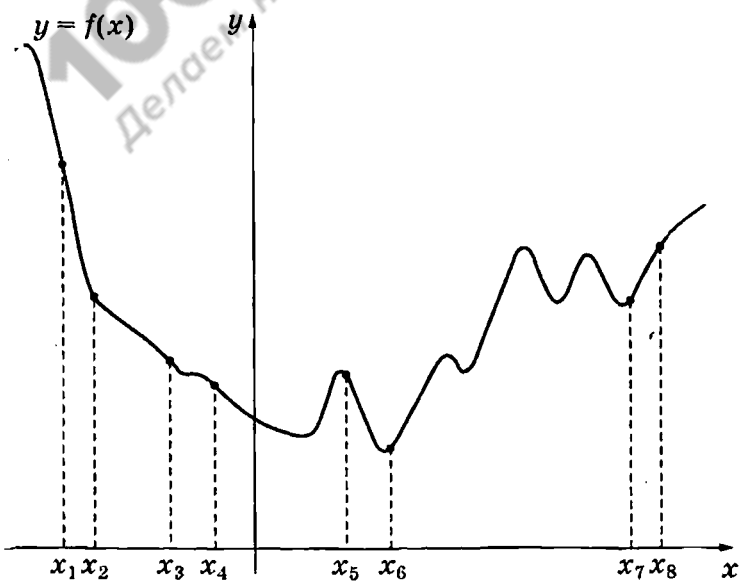
Ответ:_____.

6 Площадь треугольника ABC равна 152. DE — средняя линия.
Найдите площадь треугольника CDE.



Ответ:_____.

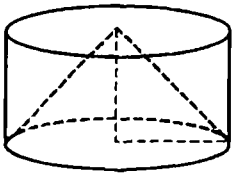
7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

8 Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём конуса равен 28. Найдите объём цилиндра.



Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите $-25\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}8$.

Ответ:_____.

10 В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1 = 56$ Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление задаётся формулой $R_{общ} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 24 Ом. Ответ дайте в омах.

Ответ:_____.

11 Расстояние между пристанями А и В равно 77 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через 1 час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот проплыл 40 км. Найдите скорость моторной лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:_____.

12 Найдите точку минимума функции $y = x - \ln(x + 6) + 3$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $4 \cdot 16^{\cos x} - 9 \cdot 4^{\cos x} + 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14 На ребре SA правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ отмечена точка M, причём $SM : MA = 5 : 1$. Точки P и Q — середины рёбер BC и AD соответственно.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MPQ является равнобедренной трапецией.

б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость MPQ разбивает пирамиду.

15 Решите неравенство $\dfrac{\log_3 x}{\log_3\left(\dfrac{x}{27}\right)} \geq \dfrac{4}{\log_3 x} + \dfrac{8}{\log_3^2 x - \log_3 x^3}$.

16 В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза меньше основания BC. Внутри трапеции взяли точку M так, что углы BAM и CDM прямые.

а) Докажите, что $BM = CM$.

б) Найдите угол ABC, если угол BCD равен $64°$, а расстояние от точки M до прямой BC равно стороне AD.

17 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 300 000 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на r % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найдите r, если известно, что кредит будет полностью погашен за два года, причём в первый год будет выплачено 160 000 рублей, а во второй год — 240 000 рублей.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{5-7x}\cdot\ln\left(9x^2-a^2\right)=\sqrt{5-7x}\cdot\ln(3x+a)$$

имеет ровно один корень.

19 На доске написано 35 различных натуральных чисел, каждое из которых либо чётное, либо его десятичная запись оканчивается на цифру 3. Сумма написанных чисел равна 1062.

а) Может ли на доске быть ровно 27 чётных чисел?
б) Могут ли ровно два числа на доске оканчиваться на 3?
в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 3, может быть на доске?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

100БАЛЛОВ Делаем невозможное возможным 100ballov.com

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 22

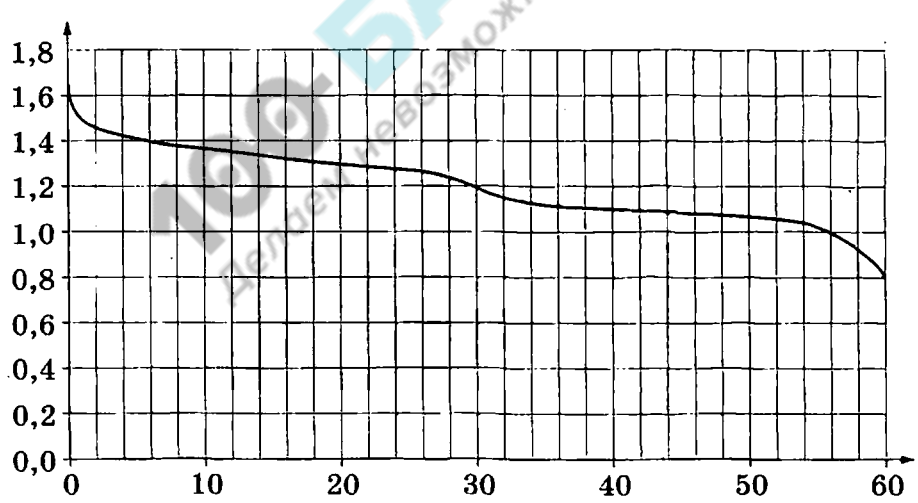
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Держатели дисконтной карты книжного магазина получают при покупке скидку 7 %. Книга стоит 200 рублей. Сколько рублей заплатит держатель дисконтной карты за эту книгу?

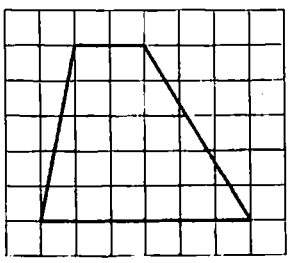
Ответ:_____.

2 При работе фонарика батарейка постепенно разряжается, и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На рисунке показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по рисунку, через сколько часов работы фонарика напряжение уменьшится до 1 вольта.



Ответ:_____.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

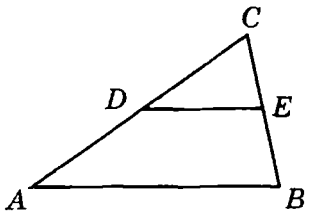
4 В среднем из 3000 садовых насосов, поступивших в продажу, 12 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $7^{6-x}=49^{x}$.

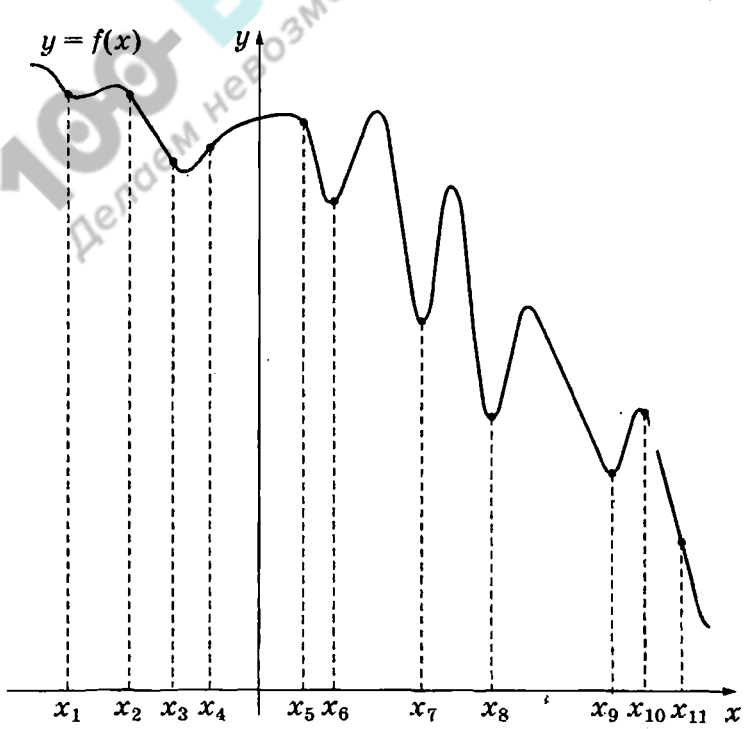
Ответ:_____.

6 Площадь треугольника ABC равна 8. DE — средняя линия. Найдите площадь треугольника CDE.



Ответ:_____.

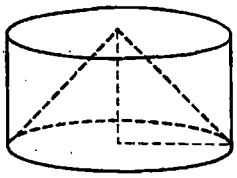
7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и одиннадцать точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

8 Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём конуса равен 16. Найдите объём цилиндра.



Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите $28\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}7$.

Ответ:_____.

10 В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1 = 25$ Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление задаётся формулой $R_{общ} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 20 Ом. Ответ дайте в омах.

Ответ:_____.

11 Расстояние между пристанями А и В равно 96 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через 1 час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот проплыл 44 км. Найдите скорость моторной лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:_____.

12 Найдите точку минимума функции $y = 5x - 5\ln(x+7) + 7$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $125 \cdot 625^{\sin x} - 30 \cdot 25^{\sin x} + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2};\ 5\pi\right]$.

14 На ребре SA правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ отмечена точка M, причём $SM : MA = 1 : 2$. Точки P и Q — середины рёбер BC и AD соответственно.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MPQ является равнобедренной трапецией.

б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость MPQ разбивает пирамиду.

15 Решите неравенство $\frac{2}{\log_2 x} + \frac{5}{\log_2^2 x - \log_2 x^3} \le \frac{\log_2 x}{\log_2\left(\frac{x}{8}\right)}$.

16 В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза меньше основания BC. Внутри трапеции взяли точку M так, что углы BAM и CDM прямые.

а) Докажите, что $BM = CM$.
б) Найдите угол ABC, если угол BCD равен 57°, а расстояние от точки M до прямой BC равно стороне AD.

17 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 600 000 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на r % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найдите r, если известно, что кредит будет полностью погашен за два года, причём в первый год будет выплачено 360 000 рублей, а во второй год — 330 000 рублей.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2-5x}\cdot\ln\left(36x^2-a^2\right)=\sqrt{2-5x}\cdot\ln(6x+a)$$

имеет ровно один корень.

19 На доске написано 38 различных натуральных чисел, каждое из которых либо чётное, либо его десятичная запись оканчивается на цифру 5. Сумма написанных чисел равна 1255.

а) Может ли на доске быть ровно 31 чётное число?
б) Могут ли ровно три числа на доске оканчиваться на 5?
в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 5, может быть на доске?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 23

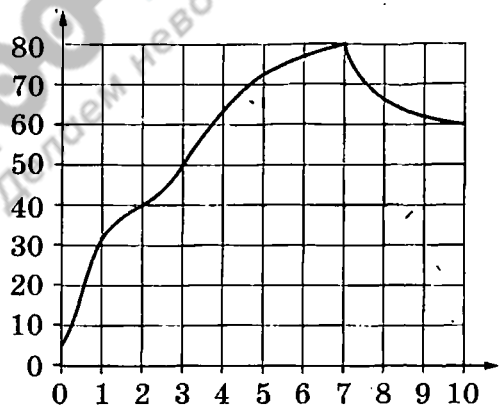
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Когда на русский язык переводили фантастический роман Жюля Верна «20 000 льё под водой», перевели и единицы расстояния тоже. Переводчики использовали почтовое льё, в котором примерно 4 километра. В результате получился роман «80 000 километров под водой». Но в 1 морском льё не 4 километра, а примерно 5,557 км. На сколько километров больше получилось бы у переводчиков, если бы они использовали не почтовое льё, а морское?

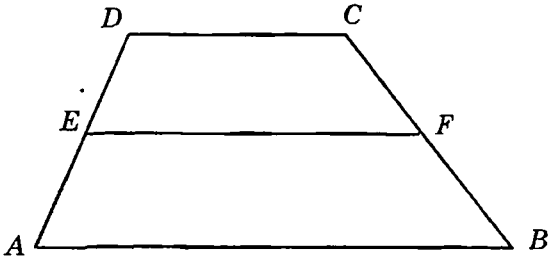
Ответ:_____.

2 На графике изображена зависимость температуры от времени в процессе разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее от запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, сколько минут двигатель нагревался до температуры 50 °C.



Ответ:_____.

3 Средняя линия трапеции равна 18, а меньшее основание равно 10. Найдите большее основание трапеции.



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

4 Какова вероятность того, что последние три цифры телефонного номера случайного абонента совпадают?

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{5x-7}{2}}=3$.

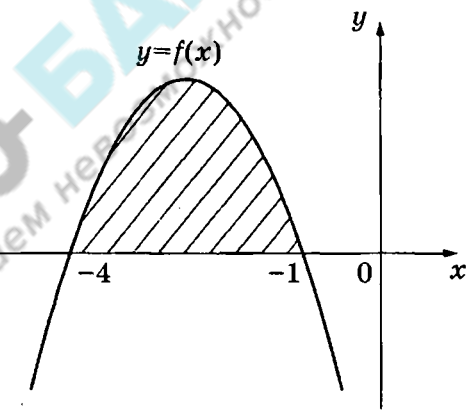
Ответ:_____.

6 В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB=15$, $\operatorname{tg}A=\frac{1}{3}$. Найдите высоту CH.

Ответ:_____.

7 На рисунке изображён график некоторой функции $y=f(x)$. Одна из первообразных этой функции равна $F(x)=-\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2-4x+2$.

Найдите площадь заштрихованной фигуры.



Ответ:_____.

8 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, A_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 9, а боковое ребро равно 8.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Часть 2

9 Найдите значение выражения $-42\sqrt{3}\sin 840°$.

Ответ:_____.

10 Высота деревянного стеллажа для книг равна $h=(a+b)n+a$ миллиметров, где a — толщина одной доски (в мм), b — высота одной полки (в миллиметрах), n — число таких полок. Найдите высоту книжного стеллажа из 8 полок, если $a=18$ мм, $b=310$ мм. Ответ выразите в миллиметрах.

Ответ:_____.

11 Расстояние между городами А и В равно 490 км. Из города А в город В со скоростью 50 км/ч выехал первый автомобиль, а через два часа после этого навстречу ему из города В выехал со скоростью 80 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города А автомобили встретятся? Ответ дайте в километрах.

Ответ:_____.

12 Найдите наибольшее значение функции $y=(x+20)^2 e^{-18-x}$ на отрезке $[-19;-17]$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\log_{0,5}(\cos x+\sin 2x+4)=-2$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

14 На ребре SA правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ отмечена точка M, причём $SM : MA = 3 : 4$. Точки P и Q — середины рёбер BC и AD соответственно.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MPQ является равнобедренной трапецией.

б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость MPQ разбивает пирамиду.

15 Решите неравенство $\log_5^2\left(25-x^2\right)-3\log_5\left(25-x^2\right)+2\geq 0$.

16 В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = 60°$, $\angle ABC = 45°$. Продолжения высот треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках M, N, P.

а) Докажите, что треугольник MNP прямоугольный.

б) Найдите площадь треугольника MNP, если известно, что $BC = 6$.

17 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 640 000 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на r % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найдите r, если известно, что кредит будет полностью погашен за два года, причём в первый год будет выплачено 320 000 рублей, а во второй год — 450 000 рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax+\sqrt{5-4x-x^2}=3a+3$$

имеет единственный корень.

19 На доске написано более 35, но менее 49 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно 5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 14, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно −7.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 24

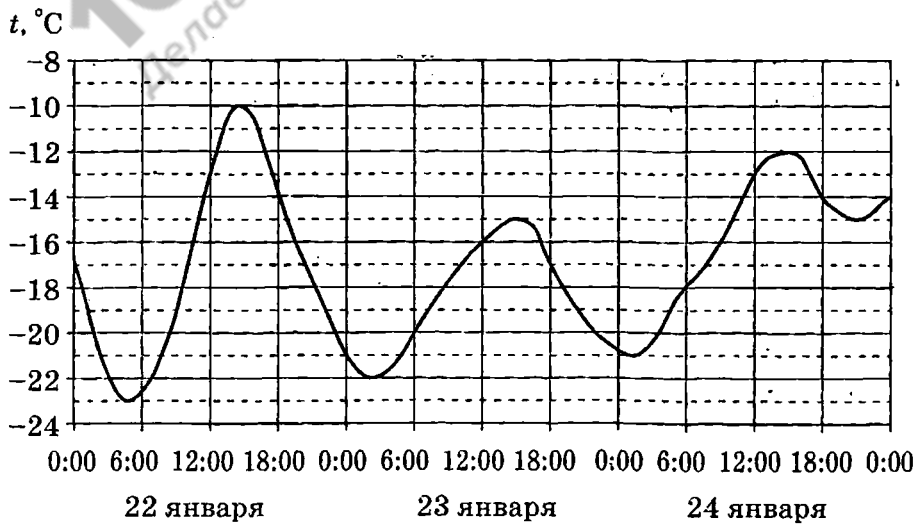
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Чайные клиперы — самые быстрые парусные корабли. Некоторые из них могли развивать скорость до 20 узлов. Переведите в километры в час скорость клипера, который делает 15 узлов. 1 узел равняется 1 морской миле в час. 1 морская миля равняется 1852 метрам. Результат округлите до целого числа километров в час.

Ответ:_____.

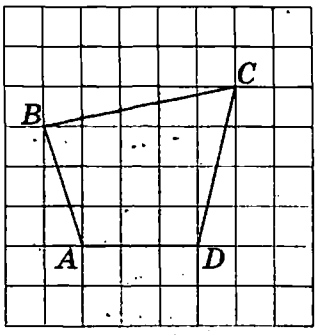
2 На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 24 января. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён четырёхугольник $ABCD$. Найдите диагональ BD.



Ответ:_____.

4 Какова вероятность того, что последние две цифры телефонного номера случайного абонента в сумме дают 10?

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{7x-9}{3}}=2$.

Ответ:_____.

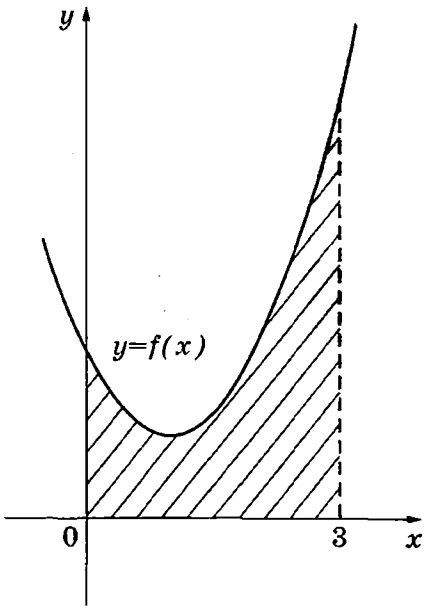
6 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB=82$, $\operatorname{tg} A=\frac{4}{5}$. Найдите высоту CH.

Ответ:_____.

7 На рисунке изображён график некоторой функции $y=f(x)$. Одна из первообразных этой функции равна

$$F(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x-3.$$

Найдите площадь заштрихованной фигуры.



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

8 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, C, A_1, B_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 9, а боковое ребро равно 3.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{-11\sin 42^\circ}{\cos 21^\circ \cdot \cos 69^\circ}$.

Ответ:_____.

10 Высота деревянного стеллажа для книг равна $h=(a+b)n+a$ миллиметров, где a — толщина одной доски (в мм), b — высота одной полки (в миллиметрах), n — число таких полок. Найдите высоту книжного стеллажа из 7 полок, если $a=21$ мм, $b=320$ мм. Ответ выразите в миллиметрах.

Ответ:_____.

11 Путешественник переплыл океан на яхте со средней скоростью 26 км/ч. Обратно он летел на самолёте со скоростью 312 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ:_____.

12 Найдите наибольшее значение функции $y=5\cos x-9x+27$ на отрезке $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\left(2x^2-5x-12\right)(2\cos x+1)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

14 В пирамиде $ABCD$ рёбра DA, DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB = BC = AC = 14$.

а) Докажите, что эта пирамида правильная.

б) На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём $DM : MA = DN : NC = 6 : 1$. Найдите площадь сечения MNB.

15 Решите неравенство $2\cdot 16^{-x}-17\cdot 4^{-x}+8\le 0$.

16 В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = 60°$, $\angle ABC = 45°$. Продолжения высот треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках M, N, P.

а) Докажите, что треугольник MNP прямоугольный.

б) Найдите площадь треугольника MNP, если известно, что $BC = 10$.

17 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 545 000 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 40 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$10a + \sqrt{-7 + 8x - x^2} = ax + 3$$

имеет единственный корень.

19 На доске написано более 55, но менее 65 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно 7, среднее арифметическое всех положительных из них равно 15, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -5.

а) Сколько чисел написано на доске?
б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

100 БАЛЛОВ Делаем невозможное возможным 100ballov.com

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 25

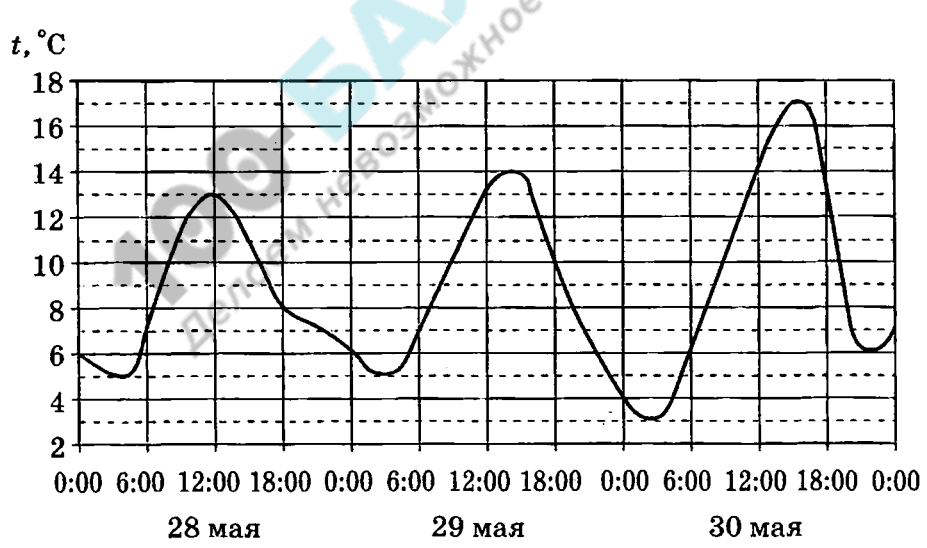
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Призёрами городской олимпиады по математике стали 7 учеников, что составило 5 % от числа участников. Сколько человек участвовало в олимпиаде?

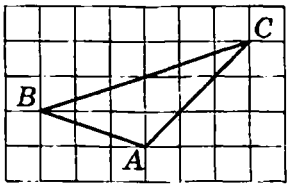
Ответ:_____.

2 На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указываются дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 28 мая. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ:_____.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его биссектрисы, проведённой из вершины B.



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

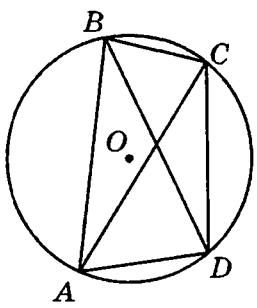
4 За круглый стол на 21 стул в случайном порядке рассаживаются 19 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что девочки не окажутся на соседних местах.

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $(x-5)^3=216$.

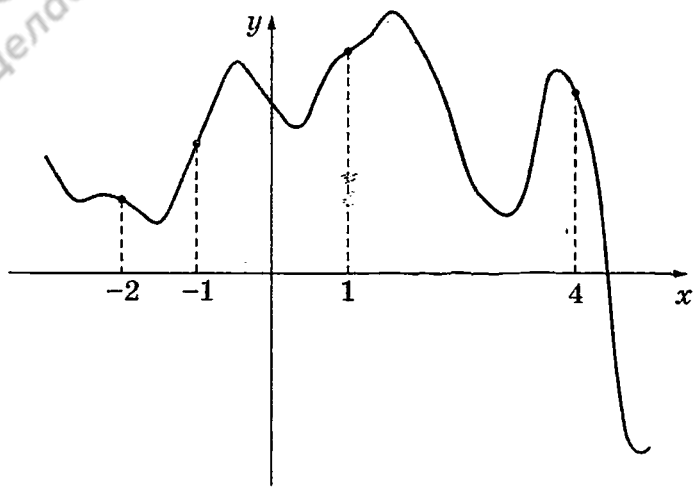
Ответ:_____.

6 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 25°, угол CAD равен 41°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.



Ответ:_____.

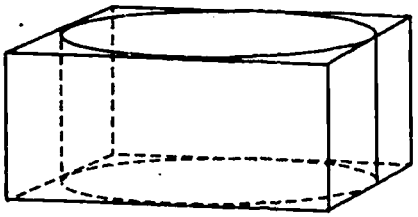
7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки -2, -1, 1, 4. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

8 Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 5. Найдите объём параллелепипеда.



Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $3\sqrt{2}\cos^2\frac{13\pi}{8}-3\sqrt{2}\sin^2\frac{13\pi}{8}$.

Ответ:_____.

10 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m=m_0\cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 44 мг. Период его полураспада составляет 6 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 11 мг.

Ответ:_____.

11 Моторная лодка прошла против течения реки 112 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 11 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:_____.

12 Найдите точку минимума функции $y=(x^2-7x+7)e^{x-17}$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\cos 4x + \cos 2x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{3}\right]$.

14 В пирамиде $ABCD$ рёбра DA, DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB = BC = AC = 9\sqrt{2}$.

а) Докажите, что эта пирамида правильная.

б) На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём $DM : MA = DN : NC = 2 : 7$. Найдите площадь сечения MNB.

15 Решите неравенство $1 + \dfrac{9}{\log_2 x - 5} + \dfrac{18}{\log_2^2 x - \log_2\left(\dfrac{x^{10}}{4}\right) + 23} \geq 0$.

16 Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, AC и BC в точках C_1, B_1 и A_1 соответственно. Биссектриса угла A пересекает эту окружность в точке Q, лежащей внутри треугольника AB_1C_1.

а) Докажите, что C_1Q — биссектриса угла AC_1B_1.

б) Найдите расстояние от точки O до центра окружности, вписанной в треугольник AC_1B_1, если известно, что $BC = 15$, $AB = 13$, $AC = 14$.

17 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 928 200 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(7x-6)\cdot\ln(x+a)=(7x-6)\cdot\ln(4x-a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\ 1]$.

19 Маша и Наташа делали фотографии несколько дней подряд. В первый день Маша сделала m фотографий, а Наташа — n фотографий. В каждый следующий день каждая из девочек делала на одну фотографию больше, чем в предыдущий день. Известно, что Наташа за всё время сделала суммарно на 935 фотографий больше, чем Маша, и что фотографировали они больше одного дня.

а) Могли ли они фотографировать в течение 5 дней?
б) Могли ли они фотографировать в течение 6 дней?
в) Какое наибольшее суммарное число фотографий могла сделать Наташа за все дни фотографирования, если известно, что в последний день Маша сделала меньше 50 фотографий?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 26

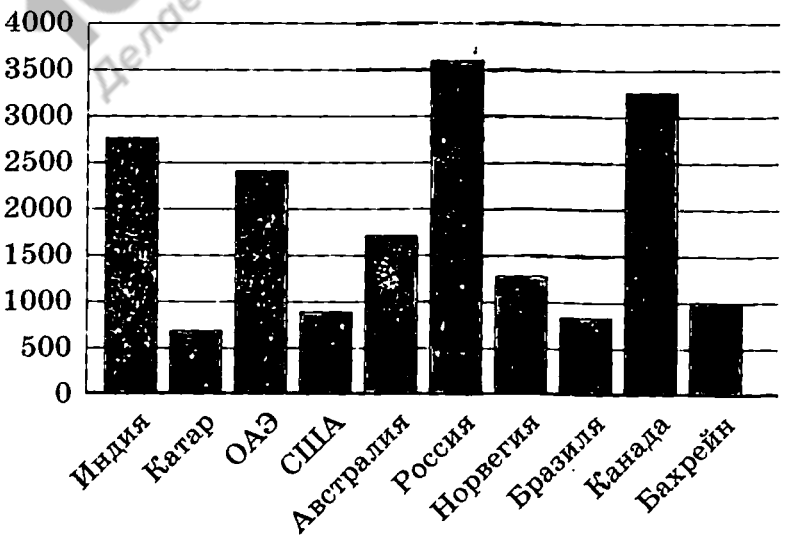
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Призёрами городской олимпиады по математике стали 20 учеников, что составилс 10 % от числа участников. Сколько человек участвовало в олимпиаде?

Ответ:_____.

2 На диаграмме показано распределение выплавки алюминия в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2016 год. Среди представленных стран первое место по выплавке алюминия занимала Россия, десятое место занимал Катар. Какое место занимала Норвегия?

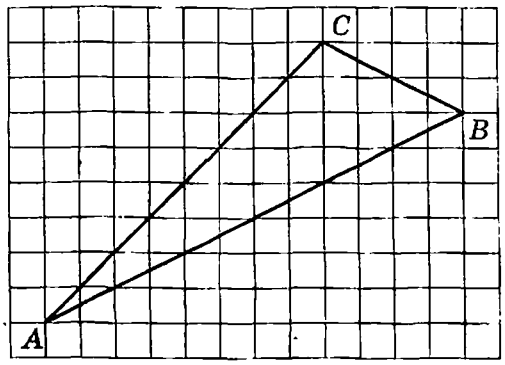


Ответ:_____

100БАЛЛОВ 100ballov.com Делаем невозможное возможным

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его биссектрисы, проведённой из вершины B.



Ответ:_____.

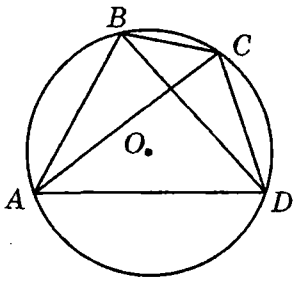
4 За круглый стол на 11 стульев в случайном порядке рассаживаются 9 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что девочки окажутся на соседних местах.

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $(x-4)^3 = 729$.

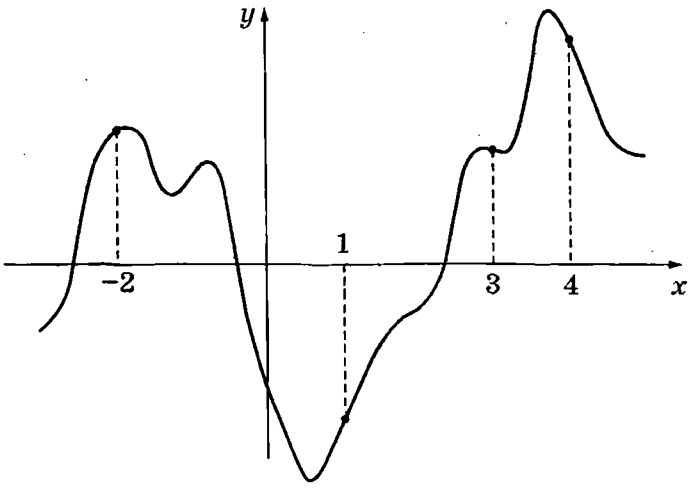
Ответ:_____.

6 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 72°, угол CAD равен 58°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.



Ответ:_____.

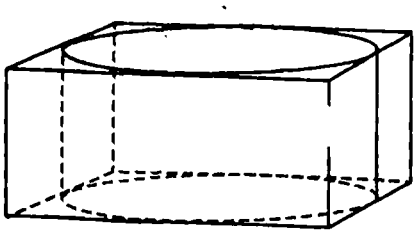
7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки -2, 1, 3, 4. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

8 Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 7. Найдите объём параллелепипеда.



Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $2\sqrt{3}\cos^2\frac{17\pi}{12}-2\sqrt{3}\sin^2\frac{17\pi}{12}$.

Ответ:_____.

10 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m=m_0\cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 52 мг. Период его полураспада составляет 9 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 13 мг.

Ответ:_____.

11 Моторная лодка прошла против течения реки 143 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 12 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:_____.

12 Найдите точку минимума функции $y=(2x^2-26x+26)e^{x-17}$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $2\sin^2 x+\cos x-1=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi;\ -4\pi\right]$.

14 В пирамиде $ABCD$ рёбра DA, DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB = BC = AC = 10$.

а) Докажите, что эта пирамида правильная.

б) На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём $DM : MA = DN : NC = 3 : 2$. Найдите площадь сечения MNB.

15 Решите неравенство $1+\dfrac{13}{\log_3 x-4}+\dfrac{42}{\log_3^2 x-\log_3\left(\dfrac{x^8}{81}\right)+12}\geq 0$.

16 Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, AC и BC в точках C_1, B_1 и A_1 соответственно. Биссектриса угла A пересекает эту окружность в точке Q, лежащей внутри треугольника AB_1C_1.

а) Докажите, что C_1Q — биссектриса угла AC_1B_1.

б) Найдите расстояние от точки O до центра окружности, вписанной в треугольник AB_1C_1, если известно, что $BC = 7$, $AB = 15$, $AC = 20$.

17 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 427 000 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 25 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование», © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(9x-4)\cdot\ln(x+a)=(9x-4)\cdot\ln(2x-a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\ 1]$.

19 Маша и Наташа делали фотографии несколько дней подряд. В первый день Маша сделала m фотографий, а Наташа — n фотографий. В каждый следующий день каждая из девочек делала на одну фотографию больше, чем в предыдущий день. Известно, что Наташа за всё время сделала суммарно на 1131 фотографию больше, чем Маша, и что фотографировали они больше одного дня.

а) Могли ли они фотографировать в течение 13 дней?
б) Могли ли они фотографировать в течение 12 дней?
в) Какое наибольшее суммарное число фотографий могла сделать Наташа за все дни фотографирования, если известно, что в последний день Маша сделала меньше 35 фотографий?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

100 БАЛЛОВ Делаем невозможное возможным obbalnik.com

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 27

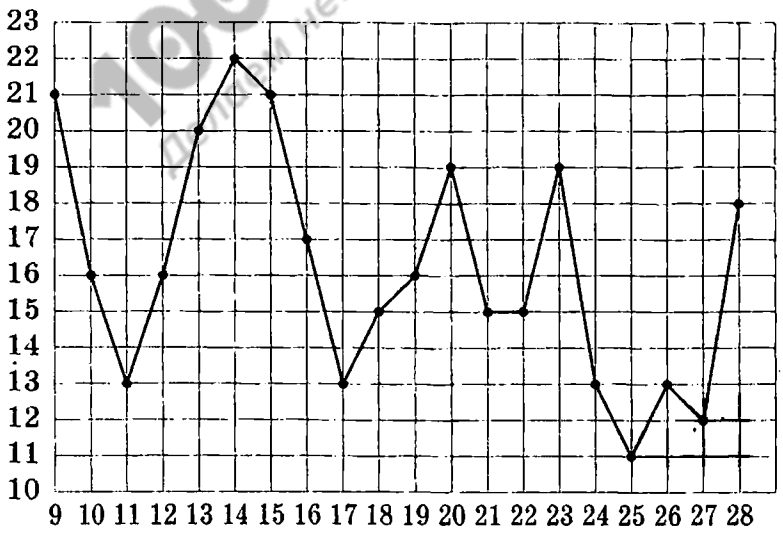
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Для ремонта квартиры требуется 59 рулонов обоев. Сколько пачек обойного клея нужно купить, если одна пачка клея рассчитана на 8 рулонов?

Ответ:_____.

2 На рисунке жирными точками показана средняя температура воздуха в Калининграде во все дни с 9 по 28 апреля 2018 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Для наглядности точки на рисунке соединены линией.

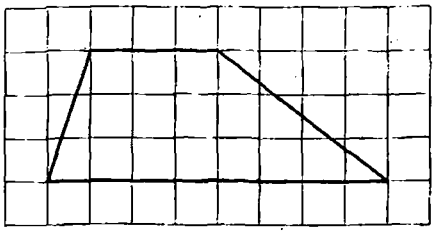


Определите, какой была средняя температура в Калининграде 16 апреля 2018 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.

Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите её площадь.



Ответ:_____.

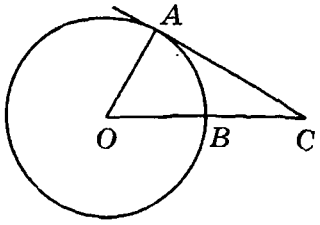
4 В фирме такси в наличии 60 легковых автомобилей; 27 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на боках, остальные — жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $\log_2(7-x)=5$.

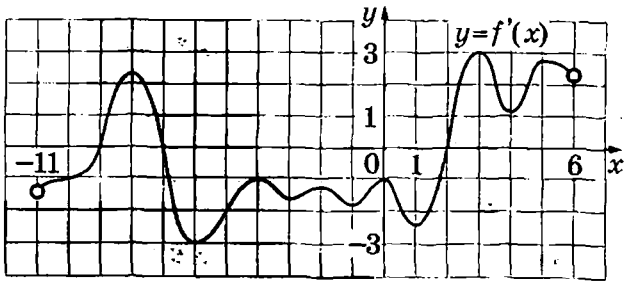
Ответ:_____.

6 Угол ACO равен 27°, где O — центр окружности. Его сторона CA касается окружности. Сторона CO пересекает окружность в точке B (см. рис.). Найдите величину меньшей дуги AB окружности. Ответ дайте в градусах.



Ответ:_____.

7 На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-11;6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6;4]$.



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО».
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

8 В цилиндрический сосуд налили 500 куб. см воды. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде увеличился в 1,2 раза. Найдите объём детали. Ответ выразите в куб. см.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $20^{-3,9} \cdot 5^{2,9} : 4^{-4,9}$.

Ответ:_____.

10 Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $\nu = 2$ моля воздуха объёмом $V_1 = 10$ л, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объёма V_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, вычисляется по формуле $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{V_1}{V_2}$, где $\alpha = 13{,}3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ — постоянная, а $T = 300$ К — температура воздуха. Найдите, какой объём V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии воздуха была совершена работа в 15 960 Дж.

Ответ:_____.

11 От пристани А к пристани В, расстояние между которыми равно 153 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 8 ч после этого следом за ним со скоростью на 8 км/ч большей отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт В оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:_____.

12 Найдите точку максимума функции $y = (x-5)^2 \cdot e^{x-7}$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $2\cos 2x + 4\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5 : 1, считая от точки C.

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

15 Решите неравенство $\frac{2^x}{2^x - 3} + \frac{2^x + 1}{2^x - 2} + \frac{5}{4^x - 5\cdot 2^x + 6} \le 0$.

16 В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD, вторая — боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P. Докажите, что $\frac{AP}{PD} = \sin D$.

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны $\frac{4}{3}$ и $\frac{1}{3}$.

17 15 января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30 % больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+20x+y^2-20y+75=\left|x^2+y^2-25\right|, \\ x-y=a \end{cases}$$

имеет более одного решения.

19 На доске было написано 30 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14?

б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?

в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

100 БАЛЛОВ Делаем невозможное возможным 100balllik.com

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 28

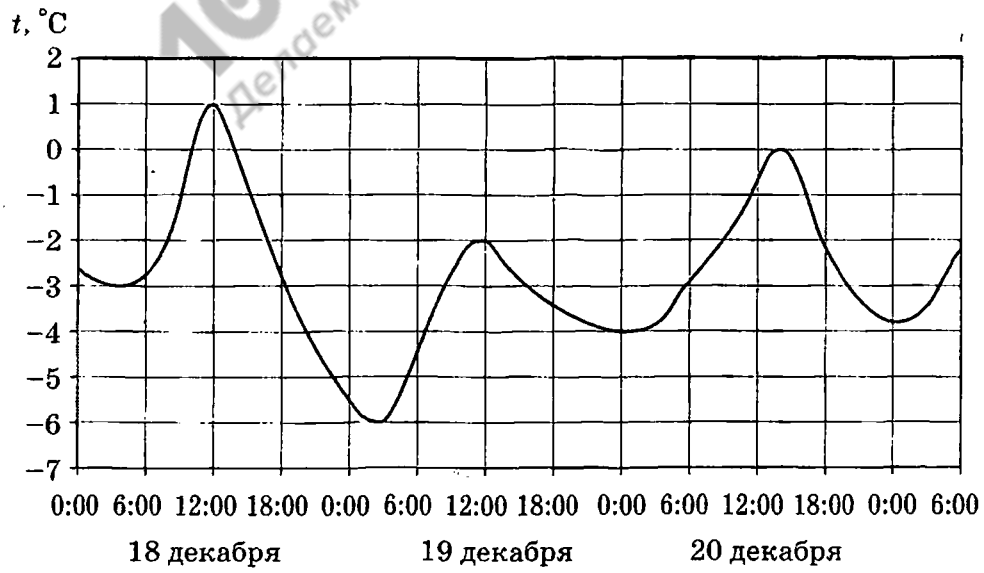
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Тетрадь стоит 13 рублей. Сколько рублей заплатит покупатель за 40 тетрадей, если при покупке больше 30 тетрадей магазин делает скидку 10% от стоимости всей покупки?

Ответ:_____.

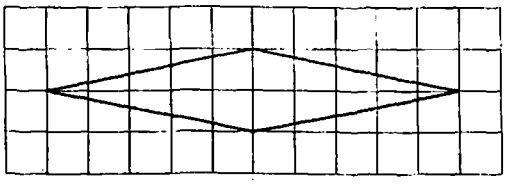
2 На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указываются дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей температурами воздуха 20 декабря. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён ромб. Найдите его площадь.



Ответ:_____.

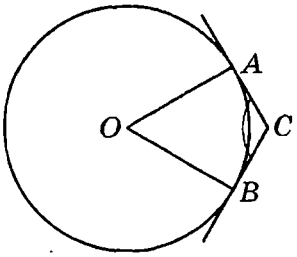
4 Из множества натуральных чисел от 28 до 47 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 3?

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $\log_7(9-x)=3\log_7 3$.

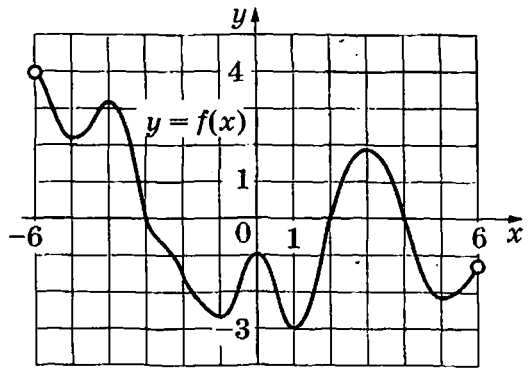
Ответ:_____.

6 Через концы A и B дуги окружности с центром O проведены касательные AC и BC. Меньшая дуга AB равна 64°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



Ответ:_____.

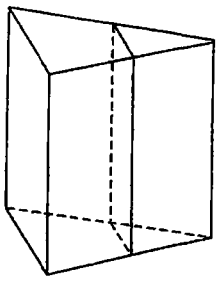
7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x)=0$ на отрезке $[-3,5; 4,5]$.



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

8 Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы равна 79. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.



Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[9]{11}\cdot 11\cdot \sqrt[18]{11}}{\sqrt[6]{11}}$.

Ответ:_____.

10 Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f=30$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 25 до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 90 до 120 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение $\dfrac{1}{d_1}+\dfrac{1}{d_2}=\dfrac{1}{f}$.

Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы нужно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ:_____.

11 Расстояние между городами A и B равно 300 км. Из города A в город B выехал автомобиль, а через 1 час следом за ним со скоростью 90 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе C и повернул обратно. Когда он вернулся в A, автомобиль прибыл в B. Найдите расстояние от A до C. Ответ дайте в километрах.

Ответ:_____.

12 Найдите наибольшее значение функции $y=\ln(x+5)^4-4x$ на отрезке $[-4{,}5;\ 0]$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\left(\frac{1}{81}\right)^{\cos x}=9^{2\sin 2x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB=4$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P:PB_1=3:1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.

15 Решите неравенство $\frac{3^x-1}{3^x-3}\le 1+\frac{1}{3^x-2}$.

16 Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P, причём $BC=CD$.

а) Докажите, что $AB:BC=AP:PD$.

б) Найдите площадь треугольника COD, где O — центр окружности, вписанной в треугольник ABD, если дополнительно известно, что BD — диаметр описанной около четырёхугольника $ABCD$ окружности, $AB=5$, а $BC=5\sqrt{2}$.

17 15 января планируется взять кредит в банке на сумму 1,8 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму нужно вернуть банку в течение первого года кредитования?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых множество решений неравенства $\frac{a-\left(a^2-2a\right)\cos 2x+2}{3-\cos 4x+a^2}<1$ содержит отрезок $\left[-2\pi;\ -\frac{7\pi}{6}\right]$.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

19 Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу).

а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трёх значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?

б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифметических?

в) Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из получаемых трёх средних арифметических.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

100balnik.com 100 БАЛЛОВ Делаем невозможное возможным

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 29

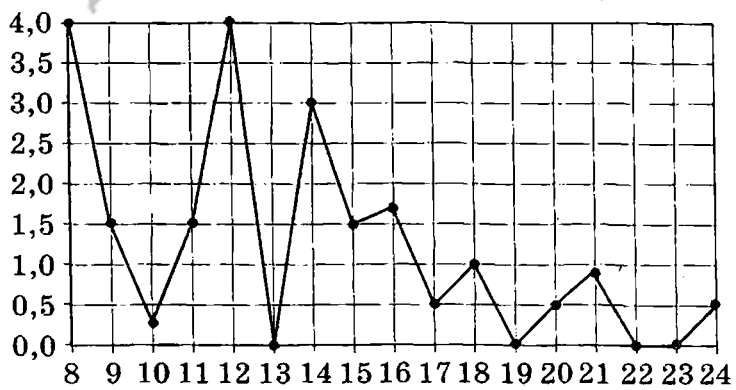
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Для приготовления абрикосового варенья на 1 кг абрикосов нужно 1,2 кг сахара. Какое наименьшее количество килограммовых упаковок сахара нужно, чтобы сварить варенье из 14 кг абрикосов?

Ответ:_____.

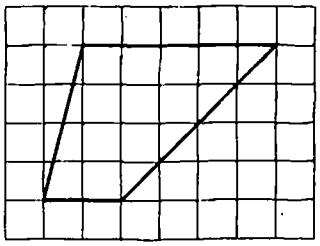
2 На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Томске с 8 по 24 января 2005 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа в Томске впервые выпало ровно 0,5 миллиметра осадков.



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображена трапеция. Найдите её площадь.



Ответ:_____.

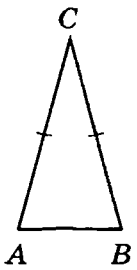
4 Гигрометр измеряет влажность в помещении картинной галереи. Вероятность того, что влажность окажется выше 40 %, равна 0,82. Вероятность того, что влажность окажется ниже 56 %, равна 0,74. Найдите вероятность того, что влажность находится в пределах от 40 % до 56 %.

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-7} = 3^x$.

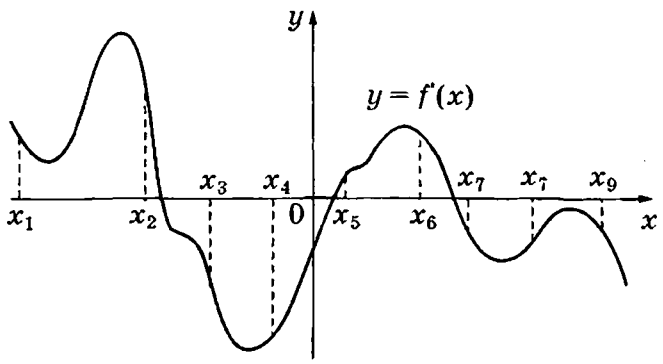
Ответ:_____.

6 Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30°. Боковая сторона треугольника равна 12. Найдите площадь этого треугольника.



Ответ:_____.

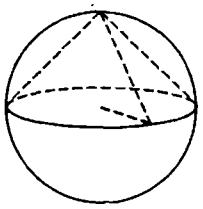
7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

8 Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $7\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.



Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\log_{11} 24{,}2 + \log_{11} 5$.

Ответ:_____.

10 Водолазный ко́локол, содержащий $\nu = 2{,}5$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1{,}25$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 13{,}3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атм.) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 19 950 Дж.

Ответ:_____.

11 Имеется два сплава. Первый содержит 25 % никеля, второй — 30 % никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 150 кг, содержащий 28 % никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

Ответ:_____.

12 Найдите наибольшее значение функции $y = 27x + 25\cos x - 14$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$.

14 Радиус основания конуса равен 12, а высота конуса равна 5.

а) Постройте сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса и взаимно перпендикулярные образующие.

б) Найдите расстояние от плоскости сечения до центра основания конуса.

15 Решите неравенство $\left(\log_2^2 x - 2\log_2 x\right)^2 + 36\log_2 x + 45 < 18\log_2^2 x$.

16 Точка B лежит на отрезке AC. Прямая, проходящая через точку A, касается окружности с диаметром BC в точке M и второй раз пересекает окружность с диаметром AB в точке K. Продолжение отрезка MB пересекает окружность с диаметром AB в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника DBC, если $AK = 3$ и $MK = 12$.

17 В начале 2001 года Алексей приобрёл ценную бумагу за 11 000 рублей. В конце каждого года цена бумаги возрастает на 4000 рублей. В начале любого года Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В начале какого года Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через пятнадцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых множество значений функции $y = \dfrac{\sqrt{a+1} - 2\cos 3x + 1}{\sin^2 3x + a + 2\sqrt{a+1} + 2}$ содержит отрезок $[2; 3]$.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

19 а) Приведите пример четырёхзначного числа, произведение цифр которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.

б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?

в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

100balnik.com 100 БАЛЛОВ Делаем невозможное возможным

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 30

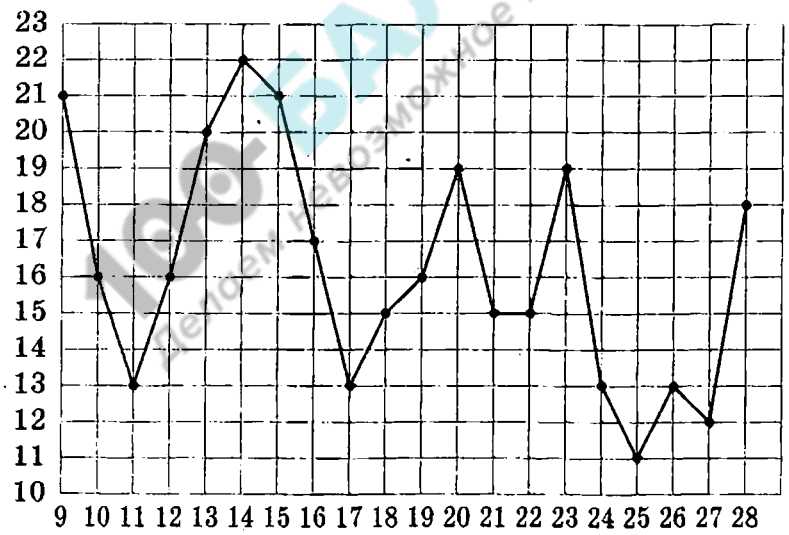
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 В доме, в котором живёт Игорь, один подъезд. На каждом этаже по шесть квартир. Игорь живёт в квартире 47. На каком этаже живёт Игорь?

Ответ:_____.

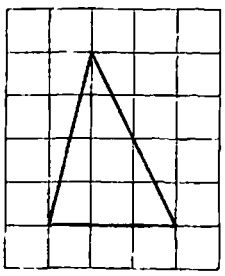
2 На рисунке жирными точками показана средняя температура воздуха в Калининграде во все дни с 9 по 28 апреля 2018 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Для наглядности точки на рисунке соединены линией.



Определите, какого числа средняя температура в Калининграде впервые за данный период составляла ровно 15 градусов Цельсия.

Ответ:_____.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

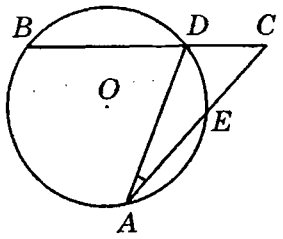
4 Миша, Олег, Настя и Галя бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должна будет не Галя.

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $(6x-13)^2=(6x-11)^2$.

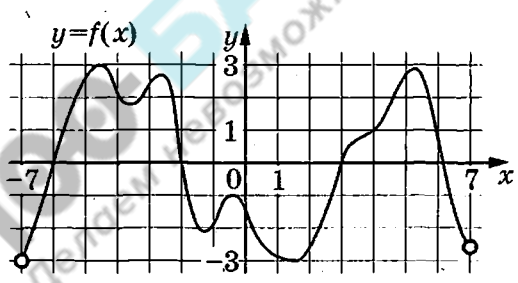
Ответ:_____

6 Угол ACB равен 54°. Градусная мера дуги AB окружности, не содержащей точек D и E, равна 138°. Найдите угол DAE. Ответ дайте в градусах.



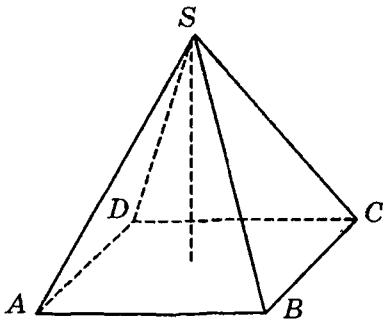
Ответ:_____.

7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-7;7)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



Ответ:_____.

8 В правильной четырёхугольной пирамиде боковое ребро равно 7,5, а сторона основания равна 10. Найдите высоту пирамиды.



Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\sqrt{108}\cos^2\frac{\pi}{12}-\sqrt{27}$.

Ответ:_____.

10 Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_п = 25$ °C, через радиатор пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0{,}3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x, вода охлаждается от начальной температуры $T_в = 57$ °C до температуры T, причём $x = \alpha\cdot\frac{cm}{\gamma}\cdot\log_2\frac{T_в - T_п}{T - T_п}$, где $c = 4200\frac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 63\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot{}^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, $\alpha = 1{,}4$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 56 м.

Ответ:_____.

11 Расстояние между городами A и B равно 630 км. Из города A в город B выехал первый автомобиль, а через три часа после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 70 км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 350 км от города A. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:_____.

12 Найдите наибольшее значение функции $y = 20\operatorname{tg}x - 20x + 5\pi - 6$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $6\sin^2 x + 5\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi;\ -\frac{7\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5:1$, считая от точки C.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C, а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α.

15 Решите неравенство $\frac{13 - 5\cdot 3^x}{9^x - 12\cdot 3^x + 27} \geq 0{,}5$.

16 Две окружности касаются внутренним образом в точке K, причём меньшая проходит через центр большей. Хорда MN большей окружности касается меньшей в точке C. Хорды KM и KN пересекают меньшую окружность в точках A и B соответственно, а отрезки KC и AB пересекаются в точке L.

а) Докажите, что $CN : CM = LB : LA$.

б) Найдите MN, если $LB : LA = 2:3$, а радиус малой окружности равен $\sqrt{23}$.

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 16 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 38 млн рублей?

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2-8x+y^2+4y+15=4|2x-y-10|, \\ x+2y=a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

19 На доске было написано 20 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) на доске написали числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?

б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 34?

в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 31

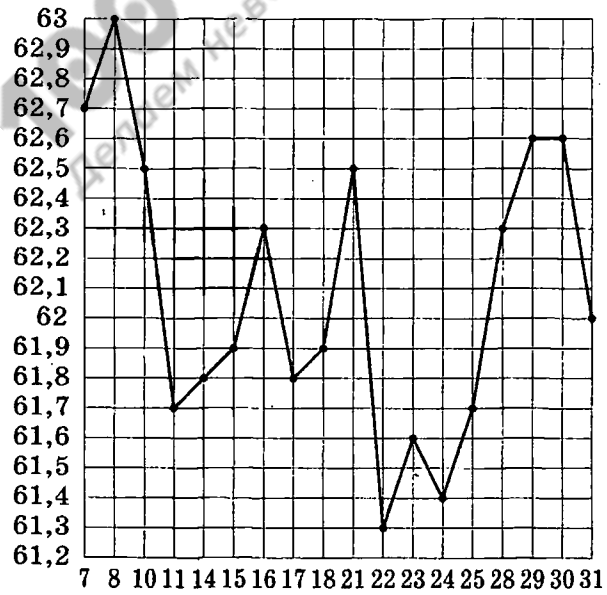
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 В городе N живёт 150 000 жителей. Среди них 15% детей и подростков. Среди взрослых 45% не работают (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т. п.). Сколько взрослых жителей работает?

Ответ:_____.

2 На графике жирными точками показан курс доллара, установленный Центробанком РФ, на все рабочие дни с 7 по 31 мая 2018 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена доллара в рублях. Для наглядности точки соединены линиями.

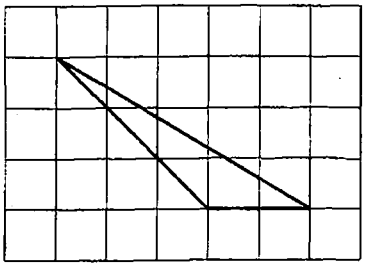


Определите наименьший и наибольший курсы доллара в рублях в указанный период. Запишите в ответ разность найденных значений.

Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



Ответ:_____.

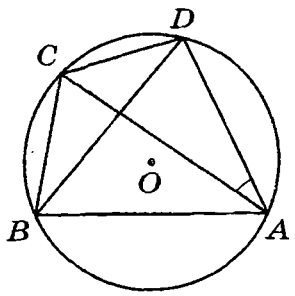
4 В роддоме измеряют вес новорождённого. Вероятность того, что вес окажется больше 3 кг, равна 0,87, вероятность того, что вес окажется меньше 3 кг 600 г, равна 0,93. Найдите вероятность того, что вес случайно выбранного новорождённого окажется в пределах от 3 кг до 3 кг 600 г.

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $\dfrac{1}{3x-1} = 5$.

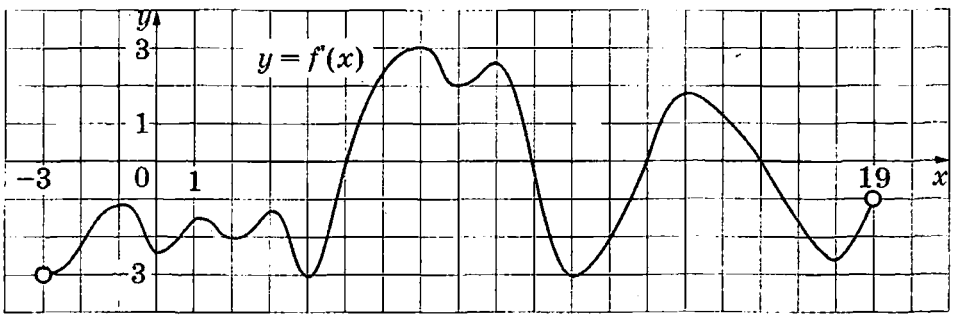
Ответ:_____.

6 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 82°, угол ABD равен 47°. Найдите угол CAD. Ответ дайте в градусах.



Ответ:_____.

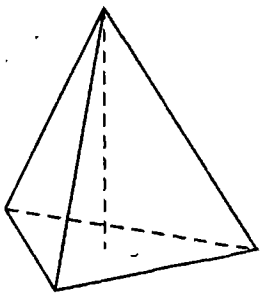
7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 19)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-2; 15]$.



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

8 В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 7, а сторона основания равна 10,5. Найдите высоту пирамиды.



Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $7\sqrt{2}\sin\frac{15\pi}{8}\cdot\cos\frac{15\pi}{8}$.

Ответ:_____.

10 Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1V_1^{1,4} = p_2V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях соответственно, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях соответственно. Изначально объём газа равен 294,4 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

Ответ:_____.

11 Первая труба пропускает на 8 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 180 литров она заполняет на 8 минут дольше, чем вторая труба?

Ответ:_____.

12 Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 6x - 5$ на отрезке $[9; 36]$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $3\cos 2x - 5\sin x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 4. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5 : 1, считая от точки C.

б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

15 Решите неравенство $\dfrac{3}{\left(2^{2-x^2}-1\right)^2} - \dfrac{4}{2^{2-x^2}-1} + 1 \geq 0$.

16 Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причём меньшая проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке P. Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках K и M соответственно.

а) Докажите, что прямые KM и BC параллельны.

б) Пусть L — точка пересечения отрезков KM и AP. Найдите AL, если радиус большей окружности равен 10, а $BC = 16$.

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4,5 млн рублей на срок 9 лет. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r, если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит не более 1,4 млн рублей, а наименьший — не менее 0,6 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2 = \left|x^2 + y^2 - 1\right|, \\ y = a(x-1) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

19 Ученики одной школы писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 83 баллов. Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 5 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, не сдавших тест, понизился?

б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, сдавших тест, понизился, и средний балл участников, не сдавших тест, тоже понизился?

в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 90, средний балл участников, сдавших тест, составил 100, а средний балл участников, не сдавших тест, составил 75. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 103, а не сдавших тест — 79. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

100 БАЛЛОВ Делаем невозможное возможным 100balllov.com

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 32

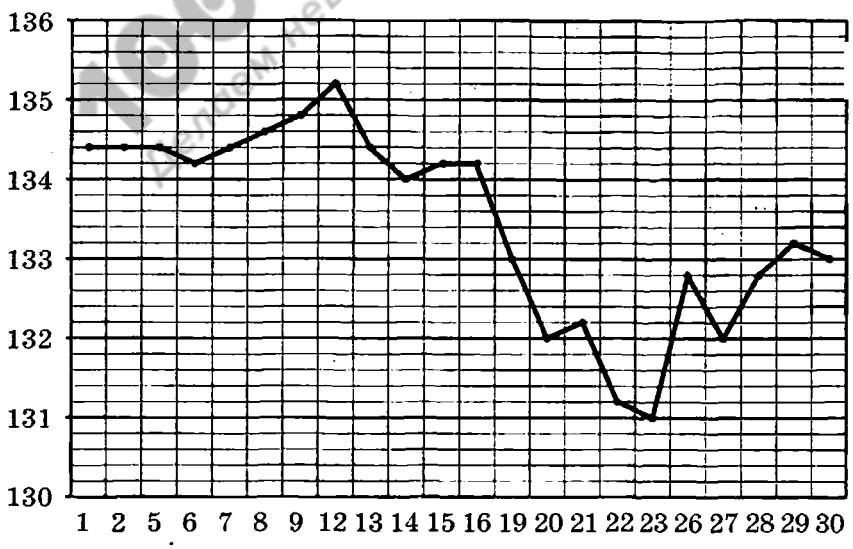
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Для покраски потолка требуется 270 г краски на 1 м^2. Краска продаётся в банках по 3 кг. Сколько банок краски нужно купить для покраски потолка площадью 37 м^2?

Ответ:_____.

2 На рисунке показан курс армянского драма, установленный Центробанком РФ на все рабочие дни марта 2019 года. По горизонтали указаны числа месяца, по вертикали — цена 1000 армянских драмов в рублях. Для наглядности точки соединены отрезками.

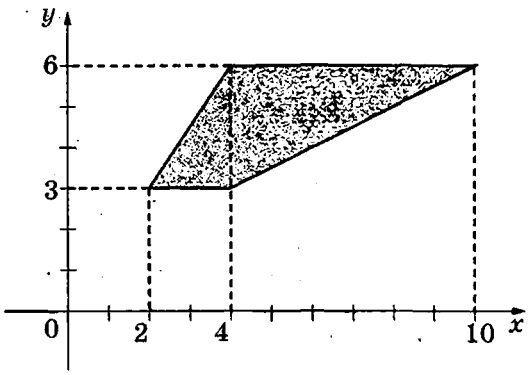


Определите, на сколько рублей стала ниже цена 1000 армянских драмов на конец марта по сравнению с началом марта 2019 года.

Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

3 Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



Ответ:_____.

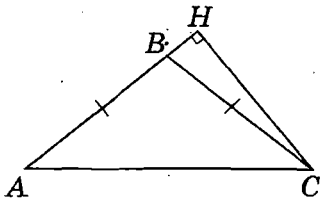
4 На складе на одном стеллаже лежат в случайном порядке 50 запакованных клавиатур: 30 чёрных, 10 белых и 10 серых. На другом стеллаже лежат в случайном порядке 50 запакованных компьютерных мышей: 30 чёрных, 10 белых и 10 серых. Найдите вероятность того, что случайно выбранные клавиатура и мышь будут чёрного цвета.

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $2^{1-3x} = 128$.

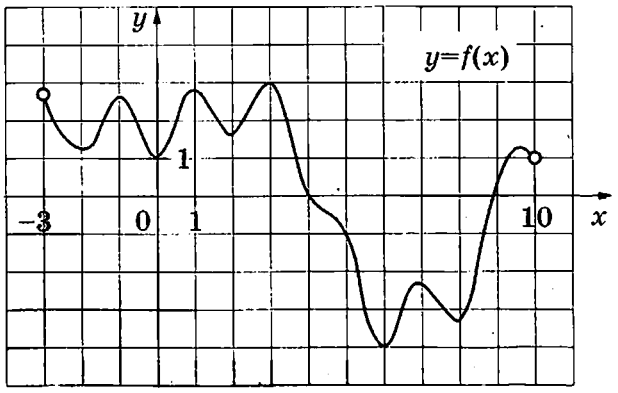
Ответ:_____.

6 В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 16$, высота CH равна 4. Найдите синус угла ACB.



Ответ:_____.

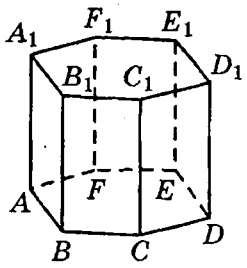
7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3;10)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

8 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины D, E, F, D_1, E_1, F_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 10, а боковое ребро равно 12.



Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\log_8 144 - \log_8 2{,}25$.

Ответ:_____.

10 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 299 МГц. Скорость спуска батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле $v = c\dfrac{f - f_0}{f + f_0}$, где c = 1500 м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов (в МГц), f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отражённого сигнала f, если скорость погружения батискафа не должна превышать 5 м/с. Ответ дайте в МГц.

Ответ:_____.

11 Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 54 килограммов изюма, если виноград содержит 90 % воды, а изюм содержит 5 % воды?

Ответ:_____.

12 Найдите наибольшее значение функции $y = x^5 - 5x^3 - 20x$ на отрезке $[-3; 1]$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020.. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\cos^2 x - \cos 2x = 0{,}75$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 1 : 2$.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и BED_1.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

15 Решите неравенство $\frac{2}{7^x - 7} \geq \frac{5}{7^x - 4}$.

16 Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол $30°$. Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC = 120°$.

а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.

б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K. Найдите EK, если известно, что $BE = 40$ и $CE = 24$.

17 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 9 282 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Алексей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{7}{x} - 4\right| = ax - 3$ на промежутке $(0; +\infty)$ имеет более двух корней.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

19 Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{3}{10}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{5}{12}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 8 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 16 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 16 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов *а* и *б*?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

100БАЛЛОВ Делаем невозможное возможным 100balnik.com

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 33

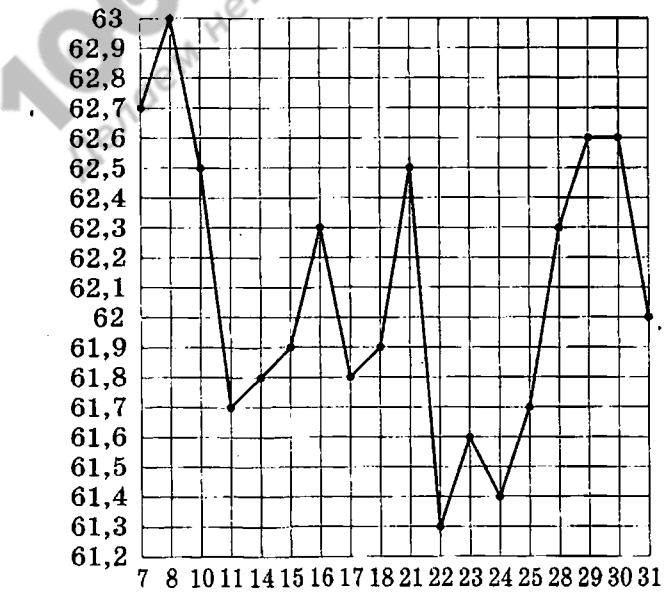
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Рост Джимми 4 фута 7 дюймов. Выразите рост Джимми в сантиметрах, если в 1 футе 12 дюймов, а в 1 дюйме 2,54 сантиметра. Результат округлите до целого числа сантиметров.

Ответ:_____.

2 На графике жирными точками показан курс доллара, установленный Центробанком РФ, на все рабочие дни с 7 по 31 мая 2018 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена доллара в рублях. Для наглядности точки соединены линиями.

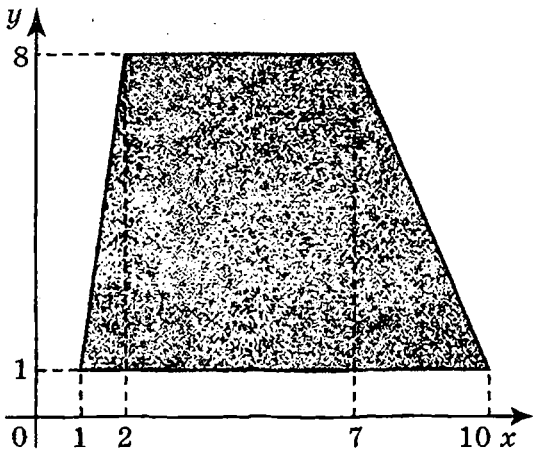


Определите наибольший курс доллара в рублях в период с 14 по 28 мая.

Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

3 Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (1; 1), (10; 1), (7; 8), (2; 8).



Ответ:_____.

4 На складе на одном стеллаже лежат в случайном порядке 50 запакованных клавиатур: 30 чёрных, 10 белых и 10 серых. На другом стеллаже лежат в случайном порядке 50 запакованных компьютерных мышей: 30 чёрных, 10 белых и 10 серых. Найдите вероятность того, что случайно выбранные клавиатура и мышь будут одинакового цвета.

Ответ:_____.

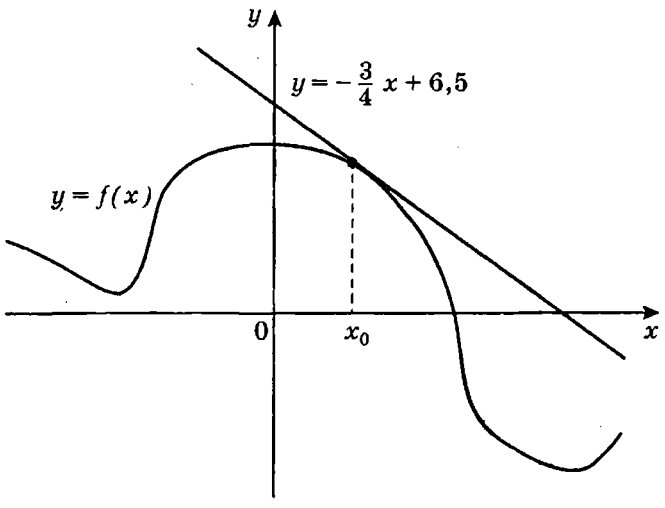
5 Найдите корень уравнения $2^{2-3x} = 32$.

Ответ:_____.

6 В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos A = 0{,}41$. Найдите $\sin B$.

Ответ:_____.

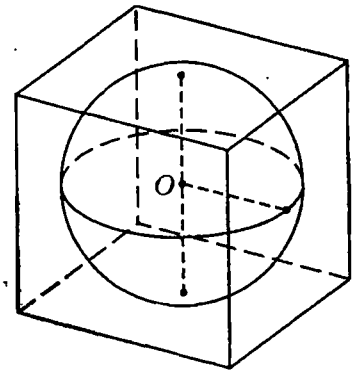
7 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0. Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции $g(x) = 4f(x) - 3$ в точке x_0.



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

8 Шар, объём которого равен 36π, вписан в куб. Найдите объём куба.



Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{5,6}\cdot\sqrt{3,5}}{\sqrt{0,4}}$.

Ответ:_____.

10 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t)=2+13t-5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 10 м?

Ответ:_____.

11 Два гонщика участвуют в гонках. Им предстоит проехать 68 кругов по кольцевой трассе протяжённостью 6 км. Оба гонщика стартовали одновременно, а на финиш первый пришёл раньше второго на 15 минут. Чему равнялась средняя скорость второго гонщика, если известно, что первый гонщик в первый раз обогнал второго на круг через 60 минут? Ответ дайте в км/ч.

Ответ:_____.

12 Найдите наименьшее значение функции $y=(x-22)e^{x-21}$ на отрезке [20; 22].

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $2\sin 2x - 4\cos x + 3\sin x - 3 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

14 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{21}$, $SB = \sqrt{85}$, $SD = \sqrt{57}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD.

15 Решите неравенство $5^{x+1} + 3 \cdot 5^{-x} \le 16$.

16 Вневписанная окружность равнобедренного треугольника касается его боковой стороны.

а) Докажите, что радиус этой окружности равен высоте треугольника, опущенной на основание.

б) Известно, что радиус этой окружности в 4 раза больше радиуса вписанной окружности треугольника. В каком отношении точка касания вписанной окружности с боковой стороной треугольника делит эту сторону?

17 15 января планируется взять кредит в банке на 21 месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что на 11-й месяц кредитования нужно выплатить 44,4 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $f(x) = |a + 2|\sqrt[3]{x}$ имеет 4 решения, где f — чётная периодическая функция с периодом $T = \frac{16}{3}$, определённая на всей числовой прямой, причём $f(x) = ax^2$, если $0 \le x \le \frac{8}{3}$.

19 а) Приведите пример трёхзначного числа, у которого ровно 5 натуральных делителей.

б) Существует ли такое трёхзначное число, у которого ровно 15 натуральных делителей?

в) Сколько существует таких трёхзначных чисел, у которых ровно 20 натуральных делителей?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

100БАЛЛОВ 100ballov.com Делаем невозможное возможным

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 34

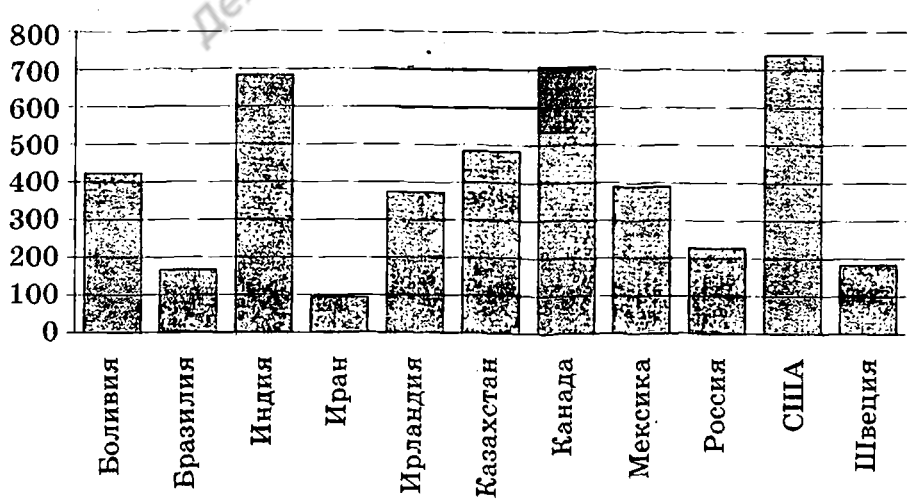
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 18% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,35 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте четырёх месяцев и весом 8 кг в течение суток?

Ответ:_____.

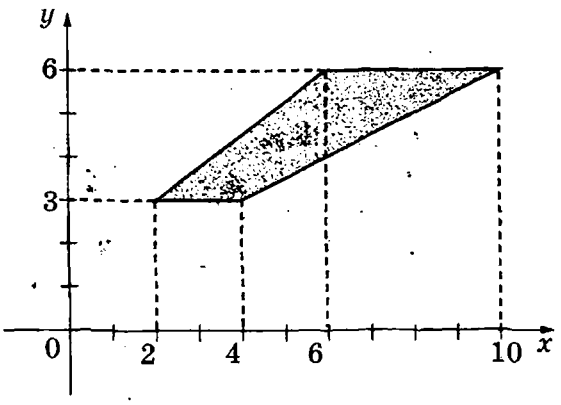
2 На диаграмме показано распределение выплавки цинка в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год. По горизонтали указываются страны, по вертикали — количество цинка в тысячах тонн. Среди представленных стран первое место по выплавке цинка занимали США, одиннадцатое место — Иран. Какое место занимала Россия?



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦИМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

3 Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



Ответ:_____.

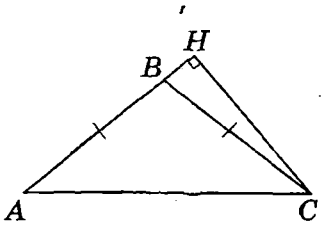
4 Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 18 пассажиров, равна 0,95. Вероятность того, что окажется меньше 12 пассажиров, равна 0,6. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 12 до 17.

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $\log_4 2^{2x+5} = 4$.

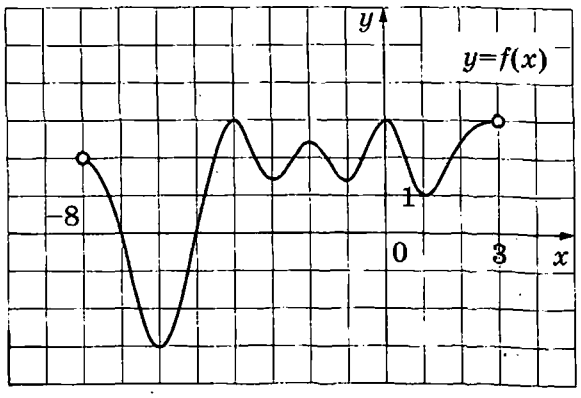
Ответ:_____.

6 В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 8$, высота CH равна 6. Найдите синус угла ACB.



Ответ:_____.

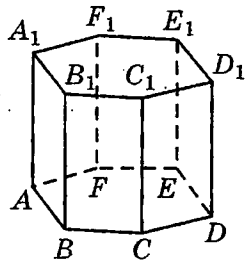
7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 3)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО».
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

8 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C, A_1, B_1, C_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 12, а боковое ребро равно 5.



Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\log_4 40 - \log_4 2{,}5$.

Ответ:_____.

10 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 499 МГц. Скорость спуска батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле $v = c\dfrac{f - f_0}{f + f_0}$, где c = 1500 м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов (в МГц), f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отражённого сигнала f, если скорость погружения батискафа не должна превышать 3 м/с. Ответ дайте в МГц.

Ответ:_____.

11 Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 58 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды?

Ответ:_____.

12 Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{x^2 + 400}{x}$ на отрезке $[-28; -2]$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\cos^2 x - \cos 2x = 0{,}5$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 8. На ребре AC находится точка D, на ребре AB находится точка E, а на ребре AM — точка L. Известно, что $CD = BE = AL = 2$.

а) Докажите, что отрезок DE содержит центр основания пирамиды.

б) Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки E, D и L.

15 Решите неравенство $\dfrac{567 - 9^{-x}}{81 - 3^{-x}} \geq 7$.

16 Прямая, параллельная основаниям BC и AD трапеции $ABCD$, пересекает боковые стороны AB и CD в точках M и N соответственно. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Прямая MN пересекает стороны OA и OD треугольника AOD в точках K и L соответственно.

а) Докажите, что $MK = NL$.

б) Найдите MN, если известно, что $BC = 3$, $AD = 8$ и $MK : KL = 1 : 3$.

17 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение первого года кредитования нужно вернуть банку 466,5 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

18 Найдите наименьшее натуральное значение a, при котором расстояние между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $(x-a+4)(x^2-ax+4a-17)=0$ не меньше 9.

19 Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{1}{3}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{7}{19}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 13 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 26 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 26 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов *а* и *б*?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

100БАЛЛОВ 100ballov.com Делаем невозможное возможным

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 35

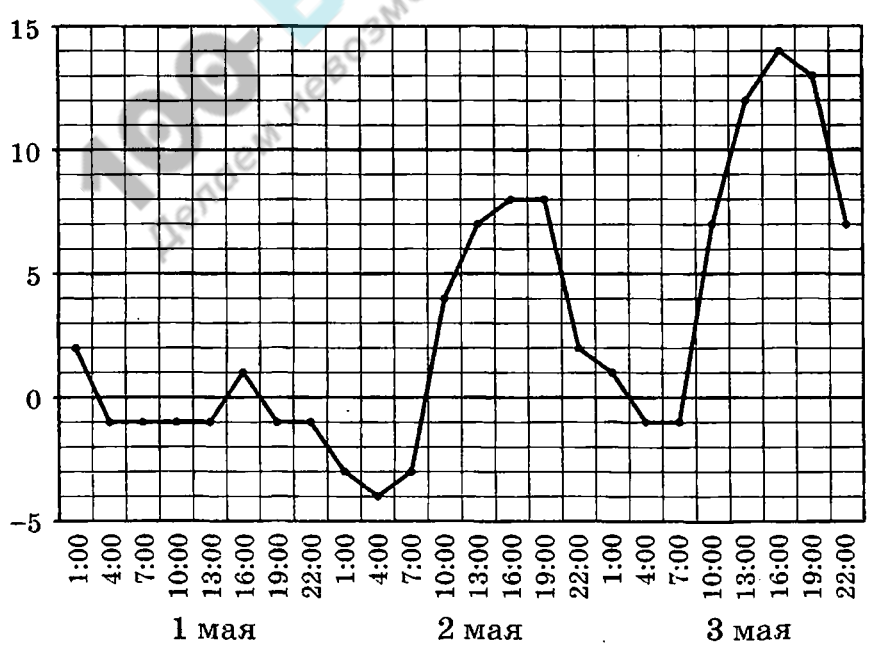
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Поезд Саратов — Москва отправляется в 18:40, а прибывает в 10:40 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

Ответ:_____.

2 На рисунке точками показана температура в Томске с 1 по 3 мая 2019 года. По горизонтали указаны моменты измерений, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности точки соединены отрезками.

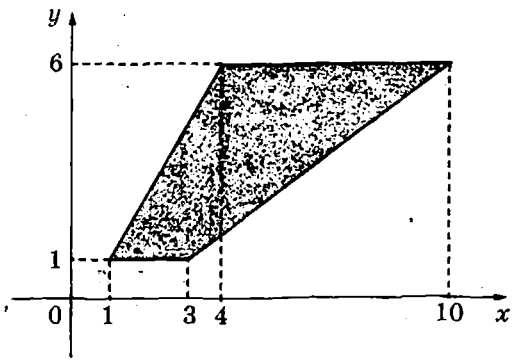


Определите по рисунку значение наименьшей температуры в Томске 3 мая.

Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

3 Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



Ответ:_____.

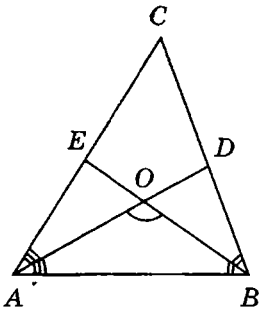
4 Максим с папой решили покататься на колесе обозрения. Всего на колесе 30 кабинок, из них 11 — синие, 7 — зелёные, остальные — оранжевые. Кабинки по очереди подходят к платформе для посадки. Найдите вероятность того, что Максим прокатится в оранжевой кабинке.

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{6}\right)^{4x-6}=\frac{1}{36}$.

Ответ:_____.

6 В треугольнике ABC угол C равен 36°, биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.



Ответ:_____.

7 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{2}t^2+2t-15$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t=7$ с.

Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

8 В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 63 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 3 раза больше диаметра первого? Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{5\sqrt{26}}{26}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ:_____.

10 Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 140 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = pq$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит 400 тыс. руб. Ответ приведите в тысячах рублей.

Ответ:_____.

11 На изготовление 252 деталей первый рабочий затрачивает на 9 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 420 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 1 деталь больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

Ответ:_____.

12 Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 10)^2(x + 1) + 3$ на отрезке $[5; 14]$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\cos x=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-4\pi;-3\pi\right]$.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 5, боковые рёбра равны 2, точка D — середина ребра CC_1.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и ADB_1.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и ADB_1.

15 Решите неравенство $\log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(2x^2+x-1\right)\geq\log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(11x-6-3x^2\right)$.

16 Отрезок, соединяющий середины M и N оснований соответственно BC и AD трапеции $ABCD$, разбиваст её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 4, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 14. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB, основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

17 В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,2 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.
Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}x^2+5x+y^2-y-|x-5y+5|=52,\\ y-2=a(x-5)\end{cases}$$

имеет ровно два решения.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

19 Назовём натуральное число палиндромом, если в его десятичной записи все цифры расположены симметрично (совпадают первая и последняя цифры, вторая и предпоследняя, и т. д.). Например, числа 121 и 953359 являются палиндромами, а числа 10 и 953953 не являются палиндромами.

а) Приведите пример числа-палиндрома, который делится на 15.
б) Сколько существует пятизначных чисел-палиндромов, делящихся на 15?
в) Найдите 37-е по порядку число-палиндром, которое делится на 15.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

100 БАЛЛОВ Делаем невозможное возможным 100balnik.com

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ВАРИАНТ 36

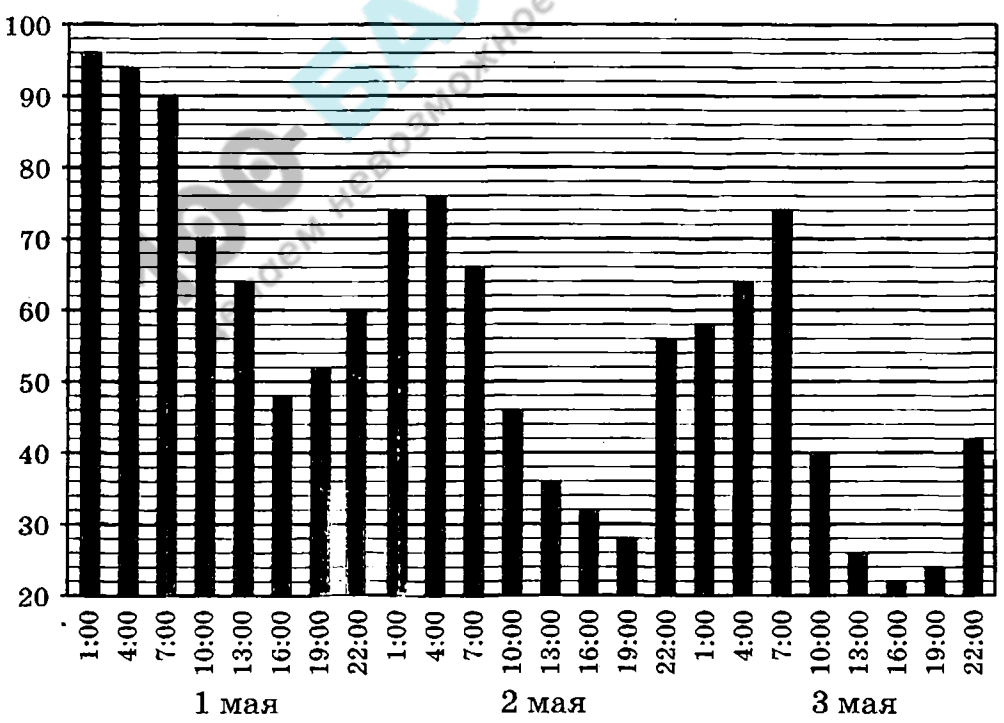
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 В школе испанский язык изучают 117 учащихся, что составляет 15 % от числа всех учащихся школы. Сколько учащихся в школе?

Ответ:_____.

2 На диаграмме показаны значения относительной влажности в Томске с 1 по 3 мая 2019 года. По горизонтали указаны моменты измерений, по вертикали — относительная влажность в процентах.

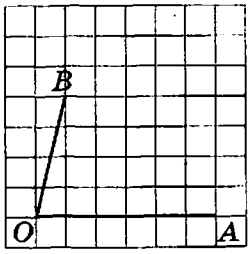


Определите по диаграмме значение наибольшей относительной влажности (в процентах) в Томске 2 мая.

Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол AOB. Найдите тангенс этого угла.



Ответ:_____.

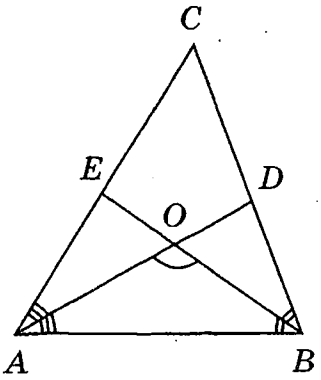
4 В классе 16 учащихся, среди них два друга — Олег и Михаил. Класс случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Олег и Михаил окажутся в одной группе.

Ответ:_____.

5 Найдите корень уравнения $16^{x-9}=\frac{1}{2}$.

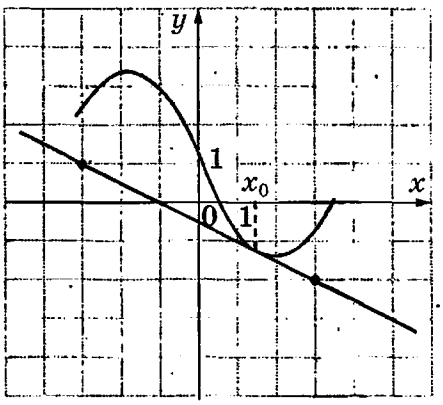
Ответ:_____.

6 В треугольнике ABC угол C равен $52°$, биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.



Ответ:_____.

7 На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:_____.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

8 В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза больше диаметра первого? Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $46\sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

Ответ:_____.

10 Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 170 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = pq$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит 520 тыс. руб. Ответ приведите в тысячах рублей.

Ответ:_____.

11 На изготовление 522 деталей первый рабочий затрачивает на 11 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 609 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 8 деталей больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

Ответ:_____.

12 Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 4e^x + 7$ на отрезке $[-1; 1]$.

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $2\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sqrt{3}\cos x=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-6\pi;-5\pi\right]$.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 3, боковые рёбра равны 1, точка D — середина ребра CC_1.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и ADB_1.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и ADB_1.

15 Решите неравенство $-2\log_{\frac{x}{3}}27\geq\log_3 27x+1$.

16 На отрезке BD взята точка C. Биссектриса BL равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является боковой стороной равнобедренного треугольника BLD с основанием BD.

а) Докажите, что треугольник DCL равнобедренный.

б) Известно, что $\cos\angle ABC=\frac{1}{5}$. В каком отношении прямая DL делит сторону AB?

17 У фермерского хозяйства есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 500 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 500 ц/га.

Фермерское хозяйство может продавать картофель по цене 5000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 8000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермерское хозяйство?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$2x^3+9x+3|x+a-2|+2|2x-a+2|+\sqrt[5]{2x-3}\leq 16$$

выполняется для всех значений $x\in\left[-2;1\right]$.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

19 Моток верёвки режут без остатка на куски длиной не меньше 80 см, но не больше 85 см (назовём такие куски стандартными).

а) Некоторый моток верёвки разрезали на 16 стандартных кусков, среди которых есть куски разной длины. На какое наибольшее число одинаковых стандартных кусков можно было бы разрезать тот же моток верёвки?

б) Можно ли разрезать на стандартные куски моток длиной 700 см?

в) Найдите такое наименьшее число l, что любой моток верёвки, длина которого больше l см, можно разрезать на стандартные куски.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

100 БАЛЛОВ Делаем невозможное возможным 100balnik.com

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

ОТВЕТЫ

Каждое правильно выполненное задание 1–12 оценивается 1 баллом. Задания 1–12 считаются выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Вариант 1

№ задания	Ответ
1	540
2	6
3	28
4	0,3
5	2
6	6,5
7	2
8	54
9	−10
10	25
11	54
12	8
13	а) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{3\pi}{4}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{19\pi}{4}$; $-\frac{17\pi}{4}$
14	$\arccos\frac{31\sqrt{10}}{140}$
15	[−2; 2)
16	$9\sqrt{2}$
17	39
18	$-2<a<-1$; $-1<a<0$; $0<a<3$; $3<a<8$; $a>8$
19	а) нет; б) нет; в) 676 г

Вариант 2

№ задания	Ответ
1	2640
2	26
3	27
4	0,34
5	−2
6	30
7	3
8	27
9	91
10	17
11	12
12	−9
13	а) $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$
14	$\frac{5\sqrt{17}}{8}$
15	(−2; 1); (1; 2)
16	$27\sqrt{3}$
17	1,6 млн рублей
18	$a<0$; $0<a<3$; $3<a<4$; $4<a<5$; $5<a<6$
19	а) нет; б) нет; в) 240 г

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Вариант 3

№ задания	Ответ
1	4320
2	0,3
3	13,5
4	0,4
5	−5
6	72,5
7	3
8	47
9	65
10	8
11	48
12	26
13	а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{21\pi}{4}$; $\frac{23\pi}{4}$; $\frac{25\pi}{4}$
14	$13\sqrt{6}$
15	$\left[-\sqrt{\frac{\log_{2,5}6}{2}};\sqrt{\frac{\log_{2,5}6}{2}}\right]$
16	5 : 7
17	2,58
18	$\left(-\frac{2\sqrt{3}-1}{2};-\frac{\sqrt{10}-1}{2}\right)\cup\left(-\frac{\sqrt{10}-1}{2};-1\right)$; $-\frac{3}{4};\frac{1}{2}$
19	а) нет; б) нет; в) 3

Вариант 4

№ задания	Ответ
1	18 000
2	2420
3	6
4	0,556
5	6
6	68
7	6
8	76
9	16
10	633
11	64
12	−1
13	а) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{10\pi}{3}$; $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$
14	48,5
15	$\left[-\log_{1,25}\frac{3}{2};-1\right]$
16	10 : 11
17	4,05
18	$-\frac{\sqrt{10}+1}{9}$; $\frac{\sqrt{10}-1}{9}$; $[1,4;\ 2)$
19	а) да; б) нет; в) 5

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Вариант 5

№ задания	Ответ
1	84
2	485
3	26
4	0,0595
5	−2
6	21
7	0,5
8	200
9	7,5
10	0,31
11	20
12	9
13	а) πn, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n$, где $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{13\pi}{4}$, -3π, $-\frac{11\pi}{4}$
14	$4\sqrt{3}$
15	$[3-\sqrt{5};\ 2{,}8]\cup[3{,}2;\ 3+\sqrt{5}]$
16	1 : 3 : 1
17	20
18	[−3; 22]
19	а) да; б) 180; в) 546

Вариант 6

№ задания	Ответ
1	13
2	960
3	31,5
4	0,973
5	−5
6	35
7	5,5
8	88
9	2,5
10	1,728
11	756
12	30
13	а) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{14\pi}{3}$, $-\frac{9\pi}{2}$, $-\frac{13\pi}{3}$
14	$6\sqrt{3}$
15	$(-\infty;\ 4-2\sqrt{2}]\cup[3{,}5;\ 4)\cup(4;\ 4{,}5]\cup[4+2\sqrt{2};\ +\infty)$
16	4 : 5 : 4
17	3
18	$(-\infty;-3);\ (-3;\ -1];\ 1;\ [3{,}25;\ +\infty)$
19	а) да; б) 270; в) 17

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Вариант 7

№ задания	Ответ
1	6
2	1,2
3	53
4	0,2
5	1,5
6	13
7	6
8	10,5
9	1
10	0,32
11	5
12	−81
13	а) $-\log_2 3$; $\log_2 1{,}5$; б) $\log_2 1{,}5$
14	$\frac{5\sqrt{17}}{2}$
15	$\left[-\frac{1}{2};\ 0\right)\cup(2;\ 3]$
16	44
17	7 и 12 млн руб.
18	$\left[-2;\ -\frac{4}{3}\right)\cup[2;\ 4)$
19	а) да; б) да; в) 20

Вариант 8

№ задания	Ответ
1	196
2	2,5
3	240
4	0,875
5	0,75
6	165
7	3
8	216
9	−1
10	60
11	3
12	1,5
13	а) $-\log_5 2$; $-\log_5 10$; б) $-\log_5 10$
14	$5\sqrt{5}$
15	$[2;\ +\infty)$ или −3
16	13,5
17	7 и 3 млн руб.
18	$(-\infty;\ -3]\cup(0;\ 3]$
19	а) да; б) да; в) 10

100БАЛЛОВ 100ballnik.com Делаем невозможное возможным

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Вариант 9

№ задания	Ответ
1	26
2	−11
3	20
4	0,09
5	−1
6	2
7	11
8	96
9	9
10	0,006
11	7
12	−8
13	а) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}4+\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}4+3\pi$
14	1
15	$[-1;+\infty)$
16	12
17	5,35
18	$a<-6$; $-6<a<-2$; $-2\leq a<0$; $0<a<\frac{1}{4}$
19	а) да; б) 96; в) 132 или 144

Вариант 10

№ задания	Ответ
1	34 500
2	9
3	6
4	2,5
5	−2
6	10
7	7
8	111
9	10
10	120
11	14
12	−18
13	а) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}-3\pi$
14	$\sqrt{2}$
15	$[-3;1)$
16	9
17	2 и 5 млн руб.
18	$-\frac{17}{4}<a<-2$; $-2<a<2$; $2<a<\frac{17}{4}$
19	а) да; б) да; в) 12

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Вариант 11

№ задания	Ответ
1	6670
2	16
3	5
4	0,26
5	−8,25
6	86
7	−2
8	24
9	81
10	62
11	60
12	31
13	а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n$, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, где $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{13\pi}{4}$, $-\frac{7\pi}{2}$, $-\frac{11\pi}{4}$
14	$\arcsin\frac{3}{\sqrt{17}}$
15	$\left(2\pi k;\ \frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$, $\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ \pi+2\pi k\right)$, где $k\in\mathbb{Z}$
16	$\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$
17	5 000 000 рублей
18	$0<a<\frac{4}{9}$, $a>1$
19	а) да; б) нет; в) 7

Вариант 12

№ задания	Ответ
1	11
2	15
3	8
4	0,48
5	−1,8
6	103
7	7
8	39
9	−20
10	58
11	78
12	13
13	а) πk, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) 4π, 5π, $\frac{13\pi}{3}$
14	$\arcsin\sqrt{\frac{19}{46}}$
15	$\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{3}+2\pi k\right]$, где $k\in\mathbb{Z}$
16	$8\sqrt{3}$
17	5 000 000 рублей
18	$\frac{4}{9}<a<\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{\frac{2}{3}}<a<1$
19	а) да; б) нет; в) 6

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Вариант 13

№ задания	Ответ
1	26 950
2	1678
3	11
4	0,25
5	17
6	73
7	7
8	72
9	27
10	24
11	14
12	6
13	а) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) 3π; $\frac{23\pi}{6}$; 4π
14	$\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$
15	$(\sqrt{2};\ +\infty)$
16	30
17	3
18	$(-3;\ -1)$
19	а) нет; б) да; в) 1347

Вариант 14

№ задания	Ответ
1	24,2
2	4
3	16
4	0,15
5	4
6	28
7	4
8	13
9	16
10	44
11	65
12	40
13	а) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) 2π; $\frac{9\pi}{4}$; 3π
14	$\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$
15	$(-3;\ -1]\cup[9;+\infty)$
16	16
17	1 200 000 рублей
18	$(-\infty;\ 0);(16;\ +\infty)$
19	а) нет; б) да; в) 989

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Вариант 15

№ задания	Ответ
1	19
2	4
3	4
4	0,76
5	3
6	15
7	6
8	4,8
9	10
10	3
11	13
12	−5
13	а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{3}$
14	$\arccos\frac{1}{\sqrt{33}}$
15	$\left(-\infty;\frac{8}{9}\right];\left[\frac{17}{9};+\infty\right)$
16	67,5
17	411 000 рублей
18	$-2<a<-1;\ 1<a<2$
19	а) да; б) нет; в) 26

Вариант 16

№ задания	Ответ
1	188
2	9
3	3
4	0,28
5	87
6	17
7	13
8	61
9	63
10	0,87
11	13
12	−3
13	а) $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3},k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{12};\frac{3\pi}{4}$
14	$\pi-\arccos\frac{9}{11}$
15	$\left(-\infty;1\right];\left[3,+\infty\right)$
16	$42+18\sqrt{5}$
17	9 282 000 рублей
18	$-\sqrt{6}<a<-\sqrt{2};\ \sqrt{2}<a<\sqrt{6}$
19	а) нет; б) нет; в) 16

100БАЛЛОВ 100ballov.com Делаем невозможное возможным

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Вариант 17

№ задания	Ответ
1	145
2	650
3	4
4	0,2
5	5
6	21
7	4
8	72
9	12
10	17
11	11
12	−36
13	а) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{23\pi}{6}$, $-\frac{15\pi}{4}$, $-\frac{17\pi}{4}$
14	$1{,}5\sqrt{6}$
15	$(0;\sqrt{2}]$
16	5
17	1 300 000 рублей
18	$(-0{,}5;\ 1-\sqrt{2});\ (1+\sqrt{2};\ +\infty)$
19	а) нет; б) нет; в) 11,75

Вариант 18

№ задания	Ответ
1	180
2	44,4
3	4
4	0,25
5	58
6	56
7	1,6
8	32
9	64
10	20
11	15
12	5
13	а) $-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{17\pi}{3}$
14	$8\sqrt{2}\pi$
15	[0; 2]
16	7
17	2
18	$(-\infty;\ -3)$
19	а) нет; б) нет; в) $\frac{123}{11}$

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Вариант 19

№ задания	Ответ
1	37,5
2	68,2
3	2,5
4	0,3125
5	5,3
6	7
7	1
8	13
9	3
10	1200
11	75
12	7
13	а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{9\pi}{2}$, $-\frac{31\pi}{6}$
14	$\arcsin\sqrt{\frac{21}{46}}$
15	$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi k\right]$; $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, где $k\in\mathbb{Z}$
16	$\frac{12+8\sqrt{3}}{3}$
17	6
18	$\left(-\infty; 7-2\sqrt{6}\right]$; $\left[7+2\sqrt{6}; 15\right)$; $\left(15; +\infty\right)$
19	а) да; б) нет; в) 6

Вариант 20

№ задания	Ответ
1	61
2	420
3	5
4	0,096
5	3
6	10
7	6
8	18
9	3
10	4974
11	27
12	−1
13	а) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3\sqrt{3}}$; б) $\frac{1}{3}$
14	5
15	$\left(-\infty; 0\right]$; $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$
16	7
17	125 000 рублей
18	$b=-1$, $b\geq 0$
19	а) нет; б) да; в) $6(3^{10}-2^{10})$

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Вариант 21

№ задания	Ответ
1	611
2	1500
3	3,5
4	0,995
5	2
6	38
7	5
8	84
9	−7
10	42
11	18
12	−5
13	а) $-\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{3}$; $-\pi$
14	17 : 127
15	(0;1); 9; (27; +∞)
16	71°
17	20
18	$-\frac{15}{7}<a\le-\frac{1}{2}$; $\frac{8}{7}\le a<\frac{15}{7}$
19	а) да; б) нет; в) 6

Вариант 22

№ задания	Ответ
1	186
2	56
3	4
4	0,996
5	2
6	2
7	6
8	48
9	−0,56
10	100
11	20
12	−6
13	а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{23\pi}{6}$
14	7 : 11
15	(0;1); 2; (8; +∞)
16	78°
17	10
18	$-\frac{12}{5}<a\le-\frac{1}{2}$; $\frac{7}{5}\le a<\frac{12}{5}$
19	а) да; б) нет; в) 5

100БАЛЛОВ 100ballov.com Для кого невозможное возможным

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Вариант 23

№ задания	Ответ
1	31 140
2	3
3	26
4	0,01
5	5
6	4,5
7	4,5
8	24
9	−63
10	2642
11	250
12	4
13	а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{2}$, $-\frac{17\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{2}$
14	17 : 32
15	$\left(-5;-2\sqrt{5}\right]$; 0; $\left[2\sqrt{5};5\right)$
16	$6\sqrt{3}$
17	12,5
18	$\left[-1{,}5;-0{,}375\right)$; 0
19	а) 42; б) положительных; в) 24

Вариант 24

№ задания	Ответ
1	28
2	−21
3	5
4	0,09
5	3
6	40
7	6
8	9
9	−22
10	2408
11	48
12	32
13	а) $-\frac{3}{2}$; 4; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{3}{2}$; $\frac{2\pi}{3}$
14	$6\sqrt{134}$
15	$\left[-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right]$
16	$\frac{50\sqrt{3}}{3}$
17	1 029 000
18	0; $\left(\frac{1}{3};1\right]$
19	а) 60; б) положительных; в) 36

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Вариант 25

№ задания	Ответ
1	140
2	5
3	4
4	0,9
5	11
6	66
7	−1
8	500
9	−3
10	12
11	3
12	5
13	а) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}, k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}$
14	$\sqrt{166}$
15	$\left(0;\frac{1}{2}\right]; [4;32); (32; +\infty)$
16	4
17	1 171 280
18	$-\frac{6}{7}<a\le 0; a=\frac{9}{7}$; $\frac{3}{2}<a<\frac{24}{7}$
19	а) да; б) нет; в) 1632

Вариант 26

№ задания	Ответ
1	200
2	6
3	6
4	0,2
5	13
6	130
7	1
8	1372
9	−3
10	18
11	1
12	11
13	а) $\frac{2\pi k}{3}, k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{14\pi}{3}; -4\pi$
14	$3\sqrt{59}$
15	$\left(0;\frac{1}{27}\right]; \left[\frac{1}{9};81\right); (81; +\infty)$
16	2
17	656 250
18	$-\frac{4}{9}<a\le 0; a=\frac{2}{9}$; $\frac{1}{2}<a<\frac{8}{9}$
19	а) да; б) нет; в) 1711

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Вариант 27

№ задания	Ответ
1	8
2	17
3	16,5
4	0,55
5	−25
6	63
7	1
8	100
9	0,8
10	2,5
11	9
12	3
13	а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{17\pi}{6}$;
14	44
15	0; $(1;\log_2 3)$
16	$\frac{116}{7}$
17	3
18	$-5\le a<5\sqrt{2}-10$
19	а) да; б) нет; в) 18,5

Вариант 28

№ задания	Ответ
1	468
2	4
3	10
4	0,3
5	−18
6	116
7	4
8	158
9	11
10	40
11	180
12	16
13	а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{2}$
14	$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{26}}{4}$
15	$(-\infty;0]$; $(\log_3 2;1)$
16	$\frac{25\sqrt{3}}{2}$
17	1 233 000 рублей
18	$a>1{,}5$
19	а) да; б) нет; в) $6\frac{1}{7}$

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Вариант 29

№ задания	Ответ
1	17
2	17
3	14
4	0,56
5	3,5
6	36
7	4
8	7
9	2
10	5
11	30
12	11
13	а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{13\pi}{6}$
14	$\frac{5\sqrt{119}}{13}$
15	$\left(\frac{1}{8};\frac{1}{2}\right)$; $(8;32)$
16	30
17	2009
18	$a=-1$
19	а) например, 2529; б) нет; в) число 8655 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр (всего 12 чисел)

Вариант 30

№ задания	Ответ
1	8
2	18
3	6
4	0,75
5	2
6	15
7	8
8	2,5
9	4,5
10	33
11	50
12	14
13	а) $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{2\pi}{3}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{14\pi}{3}$
14	$\frac{80\sqrt{3}}{3}$
15	0; $(1;2)$
16	$\frac{115}{6}$
17	10
18	$-5\sqrt{5}<a\le-5$; $5\le a<5\sqrt{5}$
19	а) да; б) нет; в) $38\frac{1}{7}$

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Вариант 31

№ задания	Ответ
1	70 125
2	1,7
3	3
4	0,8
5	0,4
6	35
7	1
8	3,5
9	−3,5
10	9,2
11	10
12	−77
13	а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}$
14	$8+2\sqrt{2}$
15	$\left(-\infty;-\sqrt{2}\right);\left(-\sqrt{2};-1\right];$ $0;\left[1;\sqrt{2}\right);\left(\sqrt{2};+\infty\right)$
16	$\sqrt{10}$
17	20
18	$1<a<2$
19	а) да; б) да; в) 15

Вариант 32

№ задания	Ответ
1	4
2	1,4
3	12
4	0,36
5	−2
6	0,25
7	10
8	20
9	2
10	301
11	513
12	48
13	а) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{3};-\frac{4\pi}{3};-\frac{2\pi}{3}$
14	$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}$
15	$\left(-\infty;\log_7 4\right);\left(1;\log_7 9\right]$
16	113
17	2 928 200
18	$\frac{12}{7}<a<\frac{7}{4}$
19	а) да; б) 8; в) $\frac{7}{15}$

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Вариант 33

№ задания	Ответ
1	140
2	62,5
3	49
4	0,44
5	−1
6	0,41
7	−3
8	216
9	7
10	0,6
11	96
12	−1
13	а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $\pi-\arccos\frac{3}{4}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; $\arccos\frac{3}{4}+\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ б) $\pi+\arccos\frac{3}{4};\ \frac{5\pi}{2}$
14	$\arccos\frac{14}{55}$
15	$\left[-1;\log_5 3\right]$
16	1 : 2
17	932 400 рублей
18	$-\frac{18}{41};\ \frac{18}{23}$
19	а) 625; б) да; 324; в) 11

Вариант 34

№ задания	Ответ
1	3
2	8
3	9
4	0,35
5	1,5
6	0,75
7	7
8	10
9	2
10	501
11	551
12	−40
13	а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{4};\ -\frac{3\pi}{4}$
14	$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{39}}{9}$
15	$\left(-\infty;-4\right);\ \left[-\log_3 7;+\infty\right)$
16	6
17	600 000 рублей
18	17
19	а) да; б) 13; в) $\frac{12}{25}$

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Вариант 35

№ задания	Ответ
1	16
2	−1
3	20
4	0,4
5	2
6	108
7	9
8	7
9	5
10	10
11	21
12	3
13	а) $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{3\pi}{4}+2\pi m, m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{2}$
14	$\operatorname{arctg}\frac{2}{5}$
15	$1;\left(\frac{3}{2};3\right)$
16	1
17	60 кг
18	$-\frac{7}{4}\le a\le 8$
19	а) 5115; б) 33; в) 59 295

Вариант 36

№ задания	Ответ
1	780
2	76
3	4
4	0,2
5	8,75
6	116
7	−0,5
8	4
9	−23
10	13
11	29
12	3
13	а) $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{2\pi}{3}+2\pi m, m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{2}$
14	$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$
15	$\left(0;\frac{1}{9}\right];\left[\frac{1}{3};3\right)$
16	25 : 24
17	65 000 000 рублей
18	1
19	а) 16; б) нет; в) 1280

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ЗАДАНИЙ 13–19

Количество баллов, выставляемых за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

Вариант 1

13 а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+1=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi;\ -\frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

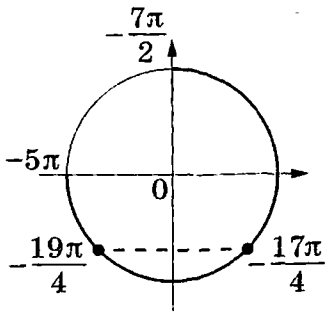
а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$1-2\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x+1=0;\ (2\sin x+\sqrt{2})(\sin x-\sqrt{2})=0.$$

Значит, $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

Уравнение $\sin x=\sqrt{2}$ корней не имеет.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi;-\frac{7\pi}{2}\right]$.



Получим числа $-\frac{19\pi}{4}$, $-\frac{17\pi}{4}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{3\pi}{4}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$;

б) $-\frac{19\pi}{4}$, $-\frac{17\pi}{4}$.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK : KB = SM : MC = 1 : 5$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой BC.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA.

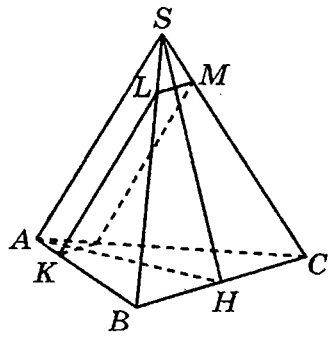
б) Найдите угол между плоскостями α и SBC.

Решение.

а) Пусть плоскость α пересекает ребро SB в точке L. Поскольку прямая BC параллельна плоскости α, прямые LM и BC параллельны, а значит,

$$SL : LB = SM : MC = AK : KB.$$

Следовательно, прямые KL и SA параллельны. Таким образом, плоскость α, содержащая прямую KL, параллельна прямой SA.



б) Пусть точка H — середина ребра BC. Тогда медианы AH и SH треугольников ABC и SBC соответственно являются их высотами, а значит, плоскость ASH перпендикулярна прямой BC.

Следовательно, плоскость ASH перпендикулярна плоскости α, параллельной прямой BC, и плоскости SBC, содержащей прямую BC.

Поскольку плоскость α параллельна прямой SA, лежащей в плоскости ASH, искомый угол равен углу между прямой SA и плоскостью SBC.

Таким образом, угол между плоскостями α и SBC равен углу ASH.

В треугольнике ASH имеем:

$$AS = 7,\ AH = 3\sqrt{3},\ SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{SB^2 - \frac{BC^2}{4}} = 2\sqrt{10}.$$

По теореме косинусов

$$\cos\angle ASH = \frac{SA^2 + SH^2 - AH^2}{2SA \cdot SH} = \frac{49 + 40 - 27}{2 \cdot 7 \cdot 2\sqrt{10}} = \frac{31\sqrt{10}}{140}.$$

Ответ: б) $\arccos\dfrac{31\sqrt{10}}{140}$.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, возможно, с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

15 Решите неравенство $\log_{0,5}(12-6x) \geq \log_{0,5}(x^2-6x+8)+\log_{0,5}(x+3)$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\log_{0,5}(6(2-x)) \geq \log_{0,5}((4-x)(2-x))+\log_{0,5}(x+3);$$

$$\log_{0,5}6+\log_{0,5}(2-x) \geq \log_{0,5}(4-x)+\log_{0,5}(2-x)+\log_{0,5}(x+3).$$

Неравенство определено при $-3 < x < 2$, поэтому при $-3 < x < 2$ неравенство принимает вид:

$$6 \leq (4-x)(x+3);\ 6 \leq 12+x-x^2;\ x^2-x-6 \leq 0,$$

откуда $-2 \leq x \leq 3$. Учитывая ограничение $-3 < x < 2$, получаем: $-2 \leq x < 2$.

Ответ: $[-2; 2)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки -2, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

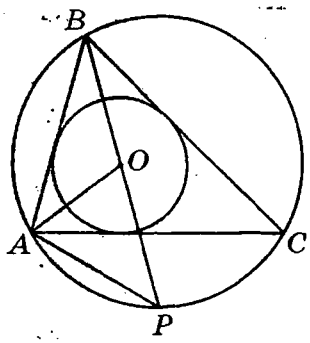
16 Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая BO вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P.

а) Докажите, что $\angle POA = \angle PAO$.

б) Найдите площадь треугольника APO, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 6, $\angle BAC = 75^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Решение.



а) Поскольку точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности, лучи AO и BO являются биссектрисами углов треугольника ABC. Угол POA является внешним углом треугольника AOB. Следовательно,

$$\angle POA = \angle BAO + \angle ABO = \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABC.$$

Углы PAC и PBC равны, поскольку опираются на одну и ту же дугу окружности, описанной около треугольника ABC, поэтому

$$\angle PAO = \angle PAC + \angle OAC = \angle PBC + \angle OAC = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle BAC.$$

Таким образом, $\angle POA = \angle PAO$.

б)) Пусть $R = 10$ — радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Поскольку $\angle POA = \angle PAO$, треугольник APO равнобедренный, следовательно,

$$OP = AP = 2R\sin\angle ABP = 2R\sin 30^\circ = 6.$$

Таким образом, площадь треугольника APO равна

$$\frac{AP\cdot OP\cdot\sin\angle APO}{2} = \frac{AP^2\cdot\sin\angle ACB}{2} = \frac{AP^2\cdot\sin 45^\circ}{2} = 9\sqrt{2}.$$

Ответ: б) $9\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

17 15 января планируется взять кредит в банке на некоторый срок (целое число месяцев). Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20 % больше суммы, взятой в кредит? (Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся.)

Решение.

Пусть сумма кредита равна S, а кредит планируется взять на n месяцев. По условию, долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S;\ \frac{S(n-1)}{n};\ \frac{2S}{n};\ \frac{S}{n};\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 1 %, значит, последовательность размеров долга на 1-е число каждого месяца такова:

$$1{,}01S;\ \frac{1{,}01S(n-1)}{n};\ \ldots;\ \frac{2{,}02S}{n};\ \frac{1{,}01S}{n}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$0{,}01S+\frac{S}{n};\ \frac{0{,}01S(n-1)}{n}+\frac{S}{n};\ \ldots;\ \frac{0{,}02S}{n}+\frac{S}{n};\ \frac{0{,}01S}{n}+\frac{S}{n}.$$

Всего следует выплатить

$$S+0{,}01S\left(\frac{n}{n}+\frac{n-1}{n}+\ldots+\frac{2}{n}+\frac{1}{n}\right)=S\left(1+\frac{0{,}01(n+1)}{2}\right).$$

Общая сумма выплат на 20 % больше суммы, взятой в кредит, поэтому

$$\frac{0{,}01(n+1)}{2}=0{,}2;\ n=39.$$

Ответ: 39.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: – неверный ответ из-за вычислительной ошибки; – верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Корнями исходного уравнения являются корни уравнения $|3x|-2x-2-a=0$, для которых выполнено условие $x^2-2x-a\neq 0$.

При $x\le 0$ уравнение $|3x|-2x-2-a=0$ принимает вид $-5x-2-a=0$ и задаёт на плоскости Oxa луч l_1 с началом в точке $(0;-2)$. При $x\ge 0$ уравнение $|3x|-2x-2-a=0$ принимает вид $x-2-a=0$ и задаёт луч l_2 с началом в точке $(0;-2)$. Значит, уравнение $|3x|-2x-2-a=0$ имеет два корня при $a>-2$, имеет один корень при $a=-2$ и не имеет корней при $a<-2$.

Уравнение $x^2-2x-a=0$ задаёт параболу $a=x^2-2x$.

Координаты точек пересечения параболы $a=x^2-2x$ с лучом l_1 являются решениями системы:

$$\begin{cases}a=x^2-2x,\\ a=-5x-2,\\ x\le 0;\end{cases}\quad\begin{cases}-5x-2=x^2-2x,\\ a=-5x-2,\\ x\le 0;\end{cases}\quad\begin{cases}(x+1)(x+2)=0,\\ a=-5x-2,\\ x\le 0.\end{cases}$$

Значит, парабола $a=x^2-2x$ пересекается с лучом l_1 в точках $(-1;3)$ и $(-2;8)$.

Координаты точек пересечения параболы $a=x^2-2x$ с лучом l_2 являются решениями системы:

$$\begin{cases}a=x^2-2x,\\ a=x-2,\\ x\ge 0;\end{cases}\quad\begin{cases}x-2=x^2-2x,\\ a=x-2,\\ x\ge 0;\end{cases}\quad\begin{cases}(x-1)(x-2)=0,\\ a=x-2,\\ x\ge 0.\end{cases}$$

Значит, парабола $a=x^2-2x$ пересекается с лучом l_2 в точках $(1;-1)$ и $(2;0)$.

Следовательно, условие $x^2-2x-a\neq 0$ выполнено для корней уравнения $|3x|-2x-2-a=0$ при всех a, кроме $a=-1$, $a=0$, $a=3$ и $a=8$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два корня при $-2<a<-1$; $-1<a<0$; $0<a<3$; $3<a<8$; $a>8$.

Ответ: $-2<a<-1$; $-1<a<0$; $0<a<3$; $3<a<8$; $a>8$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точки $a=-2$	3
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения, и получено или множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a=8$, $a=3$ и/или $a=-2$, или множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a=0$, $a=-1$ и/или $a=-2$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Окончание табл.

Содержание критерия	Баллы
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения параболы и лучей (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

19 В ящике лежит 76 фруктов, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два фрукта различной массы, а средняя масса всех фруктов равна 100 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых меньше 100 г, равна 85 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых больше 100 г, равна 124 г.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну фруктов массой меньше 100 г и фруктов массой больше 100 г?

б) Могло ли в ящике оказаться меньше 8 фруктов, масса каждого из которых равна 100 г?

в) Какую наибольшую массу может иметь фрукт в этом ящике?

Решение.

а) Пусть в ящике k фруктов массой меньше 100 г, k фруктов массой больше 100 г и $(76-2k)$ фруктов массой ровно 100 г. Тогда

$$85k+124k+100\cdot(76-2k)=7600;\ 9k=0,$$

но все фрукты не могут быть одной массы, значит, в ящике не могло оказаться поровну фруктов массой меньше 100 г и фруктов массой больше 100 г.

б) Пусть в ящике k фруктов массой меньше 100 г, m фруктов массой ровно 100 г и n фруктов массой больше 100 г. Тогда

$$85k+100m+124n=100\cdot(k+m+n);\ 8n=5k.$$

Поскольку числа 5 и 8 взаимно просты,

$$k=8s,\ n=5t;\ 40s=40t;\ s=t.$$

Таким образом, $k+n=8s+5s=13s$. Следовательно, количество фруктов с массой, отличной от 100 г, делится на 13, и $13s\le 76$, то есть $s\le 5$ и $k+n\le 65$. Значит,

$$m=76-(k+n)\ge 76-65=11.$$

Следовательно, в ящике не могло оказаться меньше 8 фруктов, масса каждого из которых равна 100 г.

в) Пусть масса самого тяжёлого фрукта равна x г, тогда

$$124n\ge x+101\cdot(n-1);\ x\le 23n+101.$$

В пункте *б* было показано, что $n=5s$ и $s\le 5$, значит,

$$n\le 25;\ x\le 23\cdot 25+101;\ x\le 676.$$

Покажем, что масса самого тяжёлого фрукта может быть 676 г. Если в ящике 40 фруктов массой 85 г, 11 фруктов массой 100 г, 24 фрукта массой 101 г и 1 фрукт массой 676 г, то условия задачи выполнены.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 676.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Вариант 7

13 а) Решите уравнение $24\cdot 4^{x-0,5}-11\cdot 2^{x+1}+6=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-1;\,1]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$12\cdot 4^x-22\cdot 2^x+6=0;\ 6\cdot 4^x-11\cdot 2^x+3=0.$$

Сделаем замену: $2^x=t$. Получим: $6t^2-11t+3=0$, откуда $t=\frac{1}{3}$ или $t=\frac{3}{2}$.

Тогда $2^x=\frac{1}{3}$ или $2^x=\frac{3}{2}$, следовательно, $x=-\log_2 3$, или $x=\log_2 1{,}5$.

б) $-\log_2 3<-1$; $0<\log_2 1{,}5<1$, поэтому отрезку $[-1;\,1]$ принадлежит только корень $\log_2 1{,}5$.

Ответ: а) $-\log_2 3$; $\log_2 1{,}5$; б) $\log_2 1{,}5$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

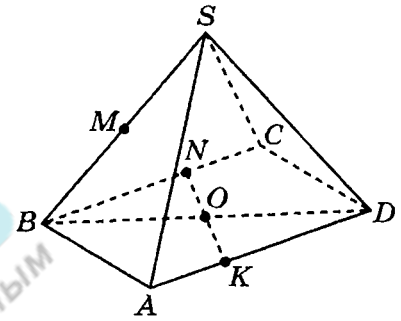
© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

14 Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 15$ и $BC = 25$. Все боковые рёбра пирамиды равны $5\sqrt{17}$. На рёбрах AD и BC отмечены соответственно точки K и N так, что $AK = CN = 8$. Через точки K и N проведена плоскость α, перпендикулярная ребру SB.

а) Докажите, что плоскость α проходит через точку M — середину ребра SB.
б) Найдите расстояние между прямыми DS и KM.

Решение.

а) Пусть точка O — пересечение BD и NK. Отрезки BN и KD равны и параллельны, поэтому точка O — середина BD.



Рассмотрим треугольник BSD:

$$BD^2 = BA^2 + AD^2 = 15^2 + 25^2 = 850 \text{ и}$$

$$BS^2 + SD^2 = 2\cdot\left(5\sqrt{17}\right)^2 = 850.$$

Значит, треугольник BSD прямоугольный с прямым углом BSD.

Плоскость α перпендикулярна ребру BS, поэтому она параллельна прямой SD. Следовательно, плоскость α пересекает плоскость BSD по прямой, параллельной прямой SD, то есть по прямой OM, содержащей среднюю линию треугольника BSD.

б) Искомое расстояние равно расстоянию от прямой SD до параллельной ей плоскости α, содержащей прямую KM. Следовательно, это расстояние равно длине перпендикуляра SM, проведённого от прямой SD к плоскости α.

$$SM = \frac{1}{2}SB = \frac{5\sqrt{17}}{2}.$$

Ответ: б) $\frac{5\sqrt{17}}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, возможно, с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

15 Решите неравенство $\sqrt{x+\frac{1}{2}}\cdot\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2|1-x|\right)\geq 0$.

Решение.

При $x = -\frac{1}{2}$ левая часть неравенства имеет смысл и равна нулю.

При условии $x > -\frac{1}{2}$ получаем неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2|1-x|\right)\geq 0,$$

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

откуда

$$0<\log_2|1-x|\le 1;\ 1<|1-x|\le 2.$$

Следовательно, $-1\le x<0$ или $2<x\le 3$. Учитывая условие $x>-\frac{1}{2}$, находим:

$$-\frac{1}{2}<x<0 \text{ или } 2<x\le 3.$$

Объединяя полученные множества, получаем: $-\frac{1}{2}\le x<0$ или $2<x\le 3$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{2};\ 0\right)\cup(2;\ 3]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки $-\frac{1}{2}$ и/или точки 3, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

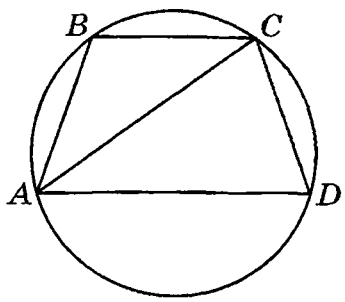
16 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса $R=27$. Известно, что $AB=BC=CD=36$.

а) Докажите, что прямые BC и AD параллельны.

б) Найдите AD.

Решение.

а) Острые углы BCA и CAD равны, поскольку опираются на равные хорды AB и CD. Значит, прямые BC и AD параллельны.



б) Обозначим угол BCA через α. По теореме синусов

$$\sin\alpha=\frac{AB}{2R}=\frac{2}{3}.$$

Треугольник ABC равнобедренный, поэтому $\angle BAC=\angle BCA=\alpha$. Значит, $\angle BAD=\angle BAC+\angle CAD=2\alpha$.

Четырёхугольник $ABCD$ — равнобедренная трапеция, поэтому $\angle CDA=\angle BAD=2\alpha$. Значит,

$$\angle ACD=180^\circ-\angle CAD-\angle CDA=180^\circ-3\alpha.$$

Таким образом, по теореме синусов для треугольников ACD и ACB получаем:

$$\frac{AD}{\sin(180^\circ-3\alpha)}=\frac{AB}{\sin\alpha};\ AD=\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}\cdot AB=\left(3-4\sin^2\alpha\right)AB=44.$$

Ответ: б) 44.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

17 По бизнес-плану четырёхлетний проект предполагает начальное вложение — 25 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 20 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей и в первый, и во второй годы, а также целое число m млн рублей и в третий, и в четвёртый годы. Найдите наименьшее значение n, при котором первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, и наименьшее значение m, такое, что при найденном ранее значении n первоначальные вложения за четыре года вырастут как минимум в четыре раза.

Решение.

К началу 2-го года получится $1{,}2 \cdot 25 + n = 30 + n$ млн вложений, а к началу 3-го года —

$$1{,}2\,(30 + n) + n = 36 + 2{,}2n.$$

По условию $36 + 2{,}2n \geq 50$. Наименьшее целое решение $n = 7$. Тогда к началу 3-го года получится

$$36 + 15{,}4 = 51{,}4 \text{ млн.}$$

К началу 4-го года имеем $1{,}2 \cdot 51{,}4 + m$ млн, а в конце проекта

$$1{,}2\,(1{,}2 \cdot 51{,}4 + m) + m = 74{,}016 + 2{,}2m.$$

По условию $74{,}016 + 2{,}2m \geq 100$,

откуда $2{,}2m \geq 25{,}984$; $m \geq \dfrac{25{,}984}{2{,}2}$.

Получаем, что $m = 12$ — наименьшее целое решение.

Ответ: 7 и 12 млн руб.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: – неверный ответ из-за вычислительной ошибки; – верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых линии $y=a|x-2|+|a|-2$ и $y=\frac{a}{2}$ ограничивают многоугольник, площадь которого не более 0,5.

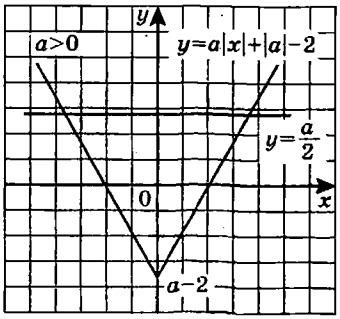
Решение.

1) если линии $y=a|x-2|+|a|-2$ и $y=\frac{a}{2}$ ограничивают фигуру, то её площадь будет равна площади фигуры, ограниченной линиями $y=a|x|+|a|-2$ и $y=\frac{a}{2}$;

2) при $a=0$ линии параллельны и многоугольник не образуют.

а) $a>0$.

Линии $y=a|x|+a-2$ и $y=\frac{a}{2}$ ограничивают фигуру (треугольник) при $\frac{a}{2}>a-2$, откуда $a<4$ (см. рис.).



Найдём абсциссы точек пересечения линий:

$$a|x|+a-2=\frac{a}{2},\ \text{откуда}\ |x|=\frac{2}{a}-\frac{1}{2}.$$

Поэтому площадь полученного треугольника равна

$$\left(\frac{2}{a}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{a}{2}-a+2\right)=\frac{\left(2-\frac{a}{2}\right)^2}{a}.$$

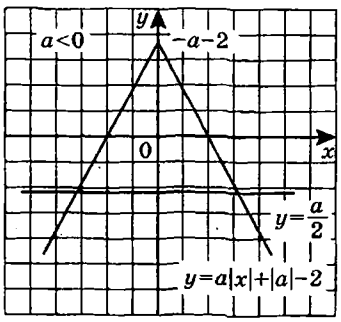
Решим неравенство $\frac{\left(2-\frac{a}{2}\right)^2}{a}\le 0{,}5$; $a^2-10a+16\le 0$.

Получим $2\le a\le 8$.

С учётом условия $0<a<4$ получим $2\le a<4$.

б) $a<0$.

Линии $y=a|x|-a-2$ и $y=\frac{a}{2}$ ограничивают фигуру (треугольник) при $\frac{a}{2}<-a-2$, откуда $a<-\frac{4}{3}$ (см. рис.).



Найдём абсциссы точек пересечения линий:

$$a|x|-a-2=\frac{a}{2},\ \text{откуда}\ |x|=\frac{2}{a}+\frac{3}{2}.$$

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Поэтому площадь полученного треугольника равна

$$\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-a-2-\frac{a}{2}\right)=\frac{\left(2+\frac{3a}{2}\right)^2}{-a}$$

Решим неравенство $\dfrac{\left(2+\frac{3a}{2}\right)^2}{-a}\le 0{,}5$; $9a^2+26a+16\le 0$.

Получим $-2\le a\le -\dfrac{8}{9}$.

С учётом условия $a<-\dfrac{4}{3}$ получим $-2\le a<-\dfrac{4}{3}$.

Ответ: $\left[-2;\ -\dfrac{4}{3}\right)\cup[2;\ 4)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a=-2$ и/или $a=2$	3
В решении верно найдены все граничные точки множества значений a $\left(a=-2,\ a=-\dfrac{4}{3},\ a=2,\ a=4\right)$, но неверно определены промежутки значений a ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения и получен хотя бы один из промежутков $\left[-2;-\dfrac{4}{3}\right)$ или $[2;4)$, возможно, с включением граничных точек ИЛИ задача верно сведена к исследованию взаимного расположения двух лучей с общей вершиной и прямой (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

19 Издательство на выставку привезло несколько книг для продажи (каждую книгу привезли в единственном экземпляре). Цена каждой книги — натуральное число рублей. Если цена книги меньше 100 рублей, на неё приклеивают бирку «выгодно». Однако до открытия выставки цену каждой книги увеличили на 10 рублей, из-за чего количество книг с бирками «выгодно» уменьшилось.

а) Могла ли уменьшиться средняя цена книг с биркой «выгодно» после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг с биркой «выгодно» до открытия выставки?

б) Могла ли уменьшиться средняя цена книг без бирки «выгодно» после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг без бирки «выгодно» до открытия выставки?

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

в) Известно, что первоначально средняя цена всех книг составляла 110 рублей, средняя цена книг с биркой «выгодно» составляла 81 рубль, а средняя цена книг без бирки — 226 рублей. После увеличения цены средняя цена книг с биркой «выгодно» составила 90 рублей, а средняя цена книг без бирки — 210 рублей. При каком наименьшем количестве книг такое возможно?

Решение.

а) Предположим, что продавались всего три книги, которые первоначально стоили 120, 94 и 20 рублей. Средняя цена «выгодных» книг составляет $\frac{94+20}{2}=57$ рублей. После увеличения цены книги стали стоить 130, 104 и 30 рублей. Теперь средняя цена «выгодных» книг составляет 30 рублей.

б) В примере из предыдущего пункта первоначально средняя цена «невыгодных» книг составляет 120 рублей, а после увеличения $\frac{130+104}{2}=117$ рублей.

в) Пусть всего привезли n книг. Первоначально «выгодных» было x книг, после увеличения цены выгодных стало y книг. Средняя цена всех книг после увеличения составляет 120 рублей. Получаем два уравнения:

$$110n=226(n-x)+81x \text{ и } 120n=210(n-y)+90y,$$

откуда $116n=145x$, то есть $4n=5x$, и $90n=120y$, то есть $3n=4y$. Поэтому число n кратно 4 и 5, то есть кратно 20. Таким образом, $n\geq 20$.

Покажем, что возможен случай $n=20$.

Пусть первоначально было 15 книг по 80 рублей, одна книга — по 96 рублей и четыре книги по 226 рублей. Тогда средняя цена всех книг 110 рублей, средняя цена книг с биркой «выгодно» 81 рубль, а средняя цена книг без бирки — 226 рублей. После увеличения цены средняя цена книг с биркой «выгодно» составила 90 рублей, а средняя цена книг без бирки — 210 рублей. Все условия выполнены.

Ответ: а) да; б) да; в) 20.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Вариант 11

13 а) Решите уравнение $\cos x+2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin 2x-1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi;\ -\frac{7\pi}{2}\right]$.

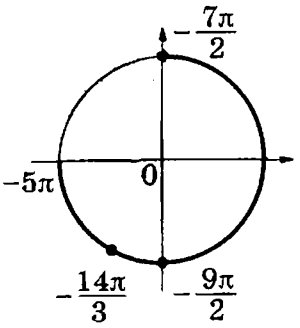
Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$\cos x+\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=\sqrt{3}\sin 2x-1;$$
$$\cos x+2\cos^2 x-1=-1;$$
$$\cos x\cdot(1+2\cos x)=0.$$

Значит, $\cos x=0$ или $\cos x=-\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi;-\frac{7\pi}{2}\right]$.



Получим числа $-\frac{9\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{2}$ и $-\frac{14\pi}{3}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решением линейных неравенств и т. п.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{9\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{2}$, $-\frac{14\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

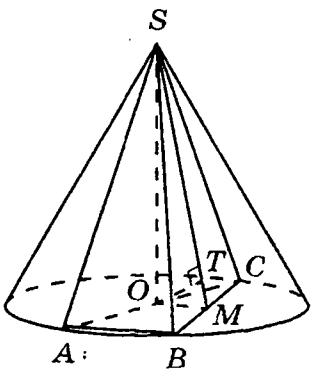
14 Точки A, B и C лежат на окружности основания конуса с вершиной S, причём A и C диаметрально противоположны. Точка M — середина BC.

а) Докажите, что прямая SM образует с плоскостью ABC такой же угол, как и прямая AB с плоскостью SBC.

б) Найдите угол между прямой SA и плоскостью SBC, если $AB=6$, $BC=8$ и $SC=5\sqrt{2}$.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Решение.



а) Проекция точки S на плоскость основания конуса — центр O его основания. Так как $OM \perp BC$ и $SM \perp BC$, угол наклона SM к ABC — это угол SMO. Этот же угол является углом между прямой OM и плоскостью SBC. Угол между прямой AB и SBC такой же, так как прямые OM и AB параллельны.

б) Синусом искомого угла является число $\frac{h}{SA}=\frac{h}{5\sqrt{2}}$, где h — расстояние от точки A до плоскости SBC. Расстояние от точки O до плоскости SBC равно $\frac{h}{2}$ (так как O — середина CA). Это расстояние — высота OT прямоугольного треугольника SOM, которая равна $\frac{SO\cdot OM}{SM}$.

$OM=\frac{AB}{2}=3$, $SM=\sqrt{SC^2-MC^2}=\sqrt{34}$ и $SO=\sqrt{SM^2-MO^2}=5$, поэтому $\frac{h}{2}=\frac{SO\cdot OM}{SM}=\frac{15}{\sqrt{34}}$.

Следовательно, синус искомого угла равен $\frac{h}{5\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{17}}$.

Ответ: б) $\arcsin\frac{3}{\sqrt{17}}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, возможно, с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

15 Решите неравенство $4\log_4^2(\sin^3 x)+8\log_2(\sin x)\geq 1$.

Решение.

Преобразуем выражение $9\log_2^2(\sin x)+8\log_2(\sin x)-1\geq 0$ при условии $\sin x>0$. Пусть $\log_2(\sin x)=t$, тогда $9t^2+8t-1\geq 0$, откуда $t\leq -1$ или $t\geq\frac{1}{9}$.

Следовательно, $0<\sin x\leq 0{,}5$ или $\sin x\geq\sqrt[9]{2}$. Второе неравенство невозможно, а из неравенства $0<\sin x\leq 0{,}5$ получаем:

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

$$2\pi k < x \le \frac{\pi}{6} + 2\pi k \text{ или } \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \le x < \pi + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left(2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $\left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right)$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением множества $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ и / или множества $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

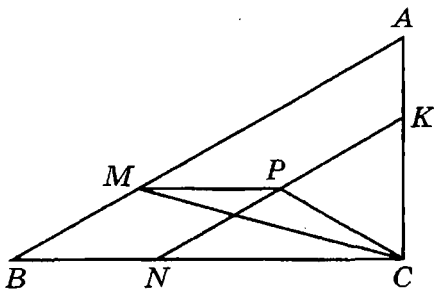
16 На гипотенузе AB и катетах BC и AC прямоугольного треугольника ABC отмечены точки M, N и K соответственно, причём прямая NK параллельна прямой AB и $BM = BN = \frac{1}{2}KN$. Точка P — середина отрезка KN.

а) Докажите, что четырёхугольник $BCPM$ — равнобедренная трапеция.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $BM = 1$ и $\angle BCM = 15°$.

Решение.

а) Поскольку прямая NP параллельна прямой BM и $NP = \frac{1}{2}KN = BM = BN$, четырёхугольник $BNPM$ — ромб. Значит, прямая PM параллельна прямой BC, а так как CP — медиана прямоугольного треугольника KCN, проведённая из вершины прямого угла, то



$$CP = \frac{1}{2}KN = BN = PM = BM.$$

Следовательно, четырёхугольник $BCPM$ — равнобедренная трапеция.

б) Поскольку $CP = \frac{1}{2}KN = BN = PM$, треугольник CPM равнобедренный, поэтому

$$\angle PCM = \angle CMP = \angle BCM.$$

Значит, CM — биссектриса угла BCP. Тогда

$$\angle ABC = \angle MBC = \angle BCP = 2\angle BCM = 2 \cdot 15° = 30°,$$

$$\angle KNC = \angle ABC = 30°, \ CN = KN\cos 30° = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

$$BC = CN + BN = \sqrt{3} + 1, \ AC = BC\,\mathrm{tg}\,30° = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}.$$

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Следовательно,

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}+3}{3}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

17 Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на четыре года. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20 % по сравнению с началом года. В конце 1-го и 2-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 3-го и 4-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика превысит 8 млн рублей.

Решение.

Обозначим размер кредита через S. В конце 1-го и 2-го годов заёмщик выплачивает по $0{,}2S$. Всего $0{,}4S$ за два года.

Рассмотрим погашение кредита за следующие два года. В середине 3-го года долг возрастёт до $1{,}2S$. Обозначим через x размер выплачиваемой суммы в конце 3-го и 4-го годов. После выплаты в конце 3-го года долг равен $1{,}2S-x$, а в середине 4-го года он равен $1{,}2(1{,}2S-x)$. В конце 4-го года весь долг должен быть погашен, то есть последняя выплата равна $1{,}2(1{,}2S-x)$ и по условию равна x. Значит,

$$1{,}2(1{,}2S-x)=x,\ 2{,}2x=1{,}44S,\ x=\frac{144}{220}S=\frac{36}{55}S,$$

и общий размер выплат равен $0{,}4S+\frac{72}{55}S=\frac{94}{55}S$. По условию

$$\frac{94}{55}S>8,\ 94S>440.$$

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

При $S=5$ это неравенство верно, а при $S=4$ оно неверно, как и при меньших S.

Ответ: 5 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: – неверный ответ из-за вычислительной ошибки; – верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(ay-ax+2)(y-x+3a)=0,\\ |xy|=a\end{cases}$$

имеет ровно шесть решений.

Решение.

Из второго уравнения системы получаем: $a\geq 0$.

Если $a=0$, то получаем систему

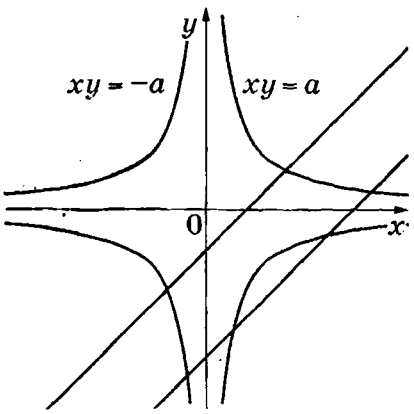
$$\begin{cases}y-x=0,\\ xy=0,\end{cases}$$ откуда $x=y=0$.

Значит, $a>0$. Получим систему

$$\begin{cases}(a(y-x)+2)(y-x+3a)=0,\\ |xy|=a,\end{cases}$$

откуда $y-x=-\dfrac{2}{a}$ или $y-x=-3a$, $xy=\pm a$.

На координатной плоскости мы получаем две параллельные прямые и две гиперболы. Если две прямые совпадают, то шесть различных решений невозможно. Поэтому $\dfrac{2}{a}\neq 3a$, откуда $a\neq\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.



При этом условии гипербола $y=\dfrac{a}{x}$ пересекает каждую из прямых в двух различных точках. Это даёт четыре различных решения данной системы.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Ещё два решения получаются при пересечении прямых гиперболой $y=-\frac{a}{x}$ в двух различных точках. Для этого нужно, чтобы гипербола дважды пересекала ту прямую, что дальше от начала координат, и не имела общих точек с прямой, что ближе к началу координат. Для этого нужно, чтобы из двух квадратных уравнений

$$x^2-\frac{2}{a}x+a=0 \quad \text{и} \quad x^2-3ax+a=0$$

одно имело ровно два различных корня, а другое не имело корней. Дискриминанты этих уравнений должны быть противоположных знаков. Получаем:

$$\left(\frac{4}{a^2}-4a\right)(9a^2-4a)<0.$$

Учитывая, что $a>0$, приходим к неравенству

$$(a^3-1)(9a-4)>0,$$

откуда $a<\frac{4}{9}$ или $a>1$.

Ответ: $0<a<\frac{4}{9}$; $a>1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a=1$, и / или $a=\frac{4}{9}$	3
В решении верно найдены все граничные точки множества значений a $\left(a=1,\ a=\frac{4}{9},\ a=\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, но неверно определены промежутки значений a ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения и получены два промежутка $\left(-\infty;\frac{4}{9}\right)$ и $(1;+\infty)$, возможно, с включением граничных точек ИЛИ задача верно сведена к исследованию взаимного расположения гипербол и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

19 Известно, что в кошельке лежало n монет, каждая из которых могла иметь достоинство 2, 5 или 10 рублей. Аня сделала все свои покупки, расплатившись за каждую покупку отдельно без сдачи только этими монетами, потратив при этом все монеты из кошелька.

а) Могли ли все её покупки состоять из блокнота за 56 рублей и ручки за 29 рублей, если $n = 14$?

б) Могли ли все её покупки состоять из чашки чая за 10 рублей, сырка за 15 рублей и пирожка за 20 рублей, если $n = 19$?

в) Какое наименьшее количество пятирублёвых монет могло быть в кошельке, если Аня купила только альбом за 85 рублей и $n = 24$?

Решение.

а) Да. Например, заплатив за блокнот 5 десятирублёвых монет и 3 двухрублёвые монеты (8 монет), а за ручку 1 десятирублёвую монету, 3 пятирублёвые и 2 двухрублёвые (6 монет).

б) Предположим, что Аня сделала покупки требуемым образом. За чашку чая она заплатила либо 1 десятирублёвую монету, либо 2 пятирублёвые, либо 5 двухрублёвых. За сырок Аня должна была заплатить хотя бы одну пятирублёвую монету, а набрать оставшиеся 10 рублей можно одним из трёх указанных выше способов. Значит, за сырок она заплатила либо 2, либо 3, либо 6 монет. Следовательно, за чай и сырок она заплатила либо 11 монет, либо не более 8 монет.

В первом случае она заплатила за пирожок 8 монет. Они не могли быть все двухрублёвые. Значит, среди них либо была десятирублёвая монета, либо по крайней мере две пятирублёвые монеты. Оставшиеся 10 рублей нельзя набрать 6 или 7 монетами. Пришли к противоречию.

Во втором случае она заплатила за пирожок не менее 11 монет. Это также невозможно, поскольку тогда получилось бы не менее 22 рублей.

Полученные противоречия показывают, что Аня не могла сделать указанные покупки требуемым образом.

в) Пусть Аня купила альбом за 85 рублей, потратив 24 монеты: k двухрублёвых, l пятирублёвых и m десятирублёвых. Тогда $2k + 5l + 10m = 85$ и $k + l + m = 24$. Отсюда получаем $k = 24 - l - m$, $48 - 2l - 2m + 5l + 10m = 85$ и $8m = 37 - 3l$. Значит, $37 - 3l$ делится на 8. Следовательно, число l нечётно. При l равном 1, 3 и 5 выражение $37 - 3l$ равно 34, 28 и 22 соответственно и не делится на 8.

Пример $k = 15$, $l = 7$ и $m = 2$ показывает, что Аня могла заплатить ровно 7 пятирублёвых монет.

Ответ: а) да; б) нет; в) 7.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Вариант 17

13 а) Решите уравнение $\left(2\cos^2 x+3\sin x-3\right)\cdot\log_2\left(\sqrt{2}\cos x\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi;\ -3\pi]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$\left(2-2\sin^2 x+3\sin x-3\right)\cdot\log_2\left(\sqrt{2}\cos x\right)=0;$$

$$\left(2\sin^2 x-3\sin x+1\right)\cdot\log_2\left(\sqrt{2}\cos x\right)=0.$$

Значит, $\log_2\left(\sqrt{2}\cos x\right)=0$ или $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$ при условии $\cos x>0$.

Решая первое уравнение, получаем $\sqrt{2}\cos x=1$, откуда $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

Решая второе уравнение, получаем $\sin x=1$ или $\sin x=\frac{1}{2}$. Учитывая условие $\cos x>0$, получаем: $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

б) Найдём корни, удовлетворяющие неравенству $-5\pi\le x\le-3\pi$. Получаем:

$$-5\pi\le-\frac{\pi}{4}+2\pi k\le-3\pi,\quad -5\pi\le\frac{\pi}{4}+2\pi k\le-3\pi \text{ или } -5\pi\le\frac{\pi}{6}+2\pi k\le-3\pi.$$

Из первого неравенства находим $k=-2$ и при этом $x=-\frac{\pi}{4}-4\pi=-\frac{17\pi}{4}$.

Из второго неравенства: $k=-2$, а $x=\frac{\pi}{4}-4\pi=-\frac{15\pi}{4}$.

Из третьего неравенства: $k=-2$, а $x=\frac{\pi}{6}-4\pi=-\frac{23\pi}{6}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, с помощью единичной окружности и т. п.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{23\pi}{6}$, $-\frac{15\pi}{4}$, $-\frac{17\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

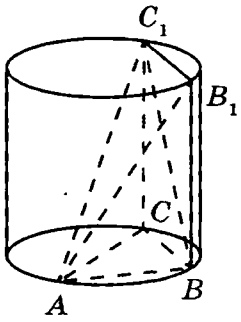
14 В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A, B и C, а на окружности другого основания — точка C_1, причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 45°$, $AB = 3\sqrt{2}$, $CC_1 = 6$.

а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен $60°$.

б) Найдите расстояние от точки B до прямой AC_1.

Решение.

а) Пусть BB_1 — образующая цилиндра. Тогда BB_1C_1C — прямоугольник, поэтому угол между прямыми AC_1 и BC равен углу AC_1B_1.



Угол ABC опирается на диаметр основания цилиндра, поэтому он прямой. Значит, прямая B_1C_1, параллельная прямой BC, перпендикулярна прямым AB и BB_1. Таким образом, прямая B_1C_1 перпендикулярна плоскости ABB_1, а значит, угол AB_1C_1 прямой.

В прямоугольном треугольнике AB_1C_1

$B_1C_1 = BC = AB = 3\sqrt{2}$, $AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{AB^2 + CC_1^2} = 3\sqrt{6}$.

Значит, $\angle AC_1B_1 = 60°$.

б) Прямая AB перпендикулярна прямым BC и BB_1. Таким образом, прямая AB перпендикулярна плоскости BB_1C. Следовательно, треугольник ABC_1 прямоугольный, поэтому искомое расстояние равно его высоте h, проведённой к гипотенузе. Получаем:

$$BC_1 = \sqrt{BC^2 + CC_1^2} = 3\sqrt{6};\ AC_1 = \sqrt{AB^2 + BC_1^2} = 6\sqrt{2};\ h = \frac{AB \cdot BC_1}{AC_1} = 1{,}5\sqrt{6}.$$

Ответ: $1{,}5\sqrt{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, возможно, с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

15 Решите неравенство $\log_5\left(\frac{3}{x}+2\right) - \log_5(x+2) \le \log_5\left(\frac{x+1}{x^2}\right)$.

Решение.

Левая часть неравенства имеет смысл при $-2 < x < -1{,}5$ или $x > 0$, поэтому при этом условии неравенство принимает вид:

$$\frac{2x+3}{x(x+2)} \le \frac{x+1}{x^2};$$

$$\frac{2x^2+3x}{x^2(x+2)} \le \frac{x^2+3x+2}{x^2(x+2)};$$

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

$$x^2-2\le 0;$$
$$(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\le 0.$$

Откуда $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$. Учитывая ограничение $-2<x<-1{,}5$ или $x>0$, получаем: $0<x\le\sqrt{2}$.

Ответ: $(0;\sqrt{2}]$.

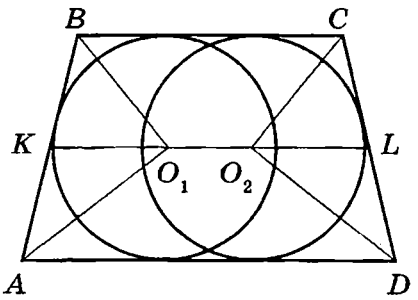
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки $\sqrt{2}$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

16 Окружность с центром O_1 касается оснований BC и AD, а также боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Окружность с центром O_2 касается сторон BC, CD и AD. Известно, что $AB=9$, $BC=8$, $CD=4$, $AD=15$.

а) Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции $ABCD$.

б) Найдите O_1O_2.

Решение.



а) Точка O_1 равноудалена от прямых AD и BC. Значит, точка O_1 лежит на средней линии трапеции $ABCD$. Аналогично, точка O_2 лежит на средней линии трапеции $ABCD$. Следовательно, прямая O_1O_2 содержит среднюю линию трапеции $ABCD$, а значит, прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции $ABCD$.

б) Пусть K — середина стороны AB, а L — середина стороны CD. Точка O_1 равноудалена от прямых AB, BC и AD, поэтому лучи AO_1 и BO_1 являются биссектрисами углов DAB и ABC соответственно. Значит,

$$\angle BAO_1+\angle ABO_1=\frac{\angle BAD+\angle ABC}{2}=90^\circ,$$

то есть $\angle AO_1B=90^\circ$. Следовательно, KO_1 — медиана, проведённая к гипотенузе AB прямоугольного треугольника AO_1B.

Аналогично, треугольник CO_2D прямоугольный, а LO_2 — медиана, проведённая к его гипотенузе CD. Точки K, O_1, O_2 и L лежат на средней линии трапеции $ABCD$. Значит,

$$O_1O_2=KL-KO_1-LO_2=\frac{AD+BC}{2}-\frac{AB}{2}-\frac{CD}{2}=5.$$

Ответ: б) 5.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17. 15 марта планируется взять кредит в банке на 26 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 25-й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

— к 15-му числу 26-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1924 тысячи рублей?

Решение.

Пусть сумма кредита равна A тысяч рублей. По условию долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$A;\ A-40;\ A-80;\ \ldots;\ A-960;\ A-1000;\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 3 %, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

$$1{,}03A;\ 1{,}03(A-40);\ \ldots;\ 1{,}03(A-960);\ 1{,}03(A-1000).$$

Следовательно, выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$0{,}03A+40;\ 0{,}03(A-40)+40;\ \ldots;\ 0{,}03(A-960)+40;\ 1{,}03(A-1000).$$

Всего следует выплатить

$$25\cdot 0{,}03\cdot\frac{2A-960}{2}+1\,000+1{,}03(A-1\,000)=1{,}78A-390 \text{ (тыс. рублей)},$$

откуда $1{,}78A-390=1924$; $1{,}78A=2314$; $A=1300$.

Значит, сумма, которую планируется взять в кредит, равна 1 млн 300 тыс. рублей.

Ответ: 1 миллион 300 тысяч рублей.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: – неверный ответ из-за вычислительной ошибки; – верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^4+y^2=a^2, \\ x^2+y=|a+1| \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

Решение.

Исходная система равносильна системе уравнений:

$$\begin{cases} x^4+\left(|a+1|-x^2\right)^2=a^2, \\ y=|a+1|-x^2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^4-2|a+1|x^2+2a+1=0, \\ y=|a+1|-x^2. \end{cases}$$

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно четыре различных решения тогда и только тогда, когда биквадратное уравнение

$$2x^4-2|a+1|x^2+2a+1=0$$

имеет ровно четыре различных корня. Это выполняется, когда квадратное уравнение

$$2t^2-2|a+1|t+2a+1=0$$

имеет ровно два положительных корня.

Чтобы полученное квадратное уравнение имело два корня, его дискриминант должен быть положительным:

$$4(a+1)^2-8(2a+1)>0;\ a^2-2a-1>0,$$

откуда $a<1-\sqrt{2}$ или $a>1+\sqrt{2}$.

Чтобы корни полученного квадратного уравнения были одного знака, свободный член этого уравнения должен быть положительным:

$$2a+1>0,$$

откуда $a>-0{,}5$.

Чтобы корни квадратного уравнения были положительными, коэффициент при t должен быть отрицательным, то есть $a\neq -1$.

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно четыре решения при $-0{,}5<a<1-\sqrt{2}$ или $a>1+\sqrt{2}$.

Ответ: $\left(-0{,}5;\ 1-\sqrt{2}\right);\ \left(1+\sqrt{2};\ +\infty\right)$.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a=-0{,}5$, $a=1-\sqrt{2}$, и / или $a=1+\sqrt{2}$	3
В решении верно найдены все граничные точки множества значений a $\left(a=1-\sqrt{2},\ a=-0{,}5,\ a=1+\sqrt{2}\right)$, но неверно определены промежутки значений a ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения и получены два промежутка $\left(-\infty;1-\sqrt{2}\right)$ и $\left(1+\sqrt{2};+\infty\right)$, возможно, с включением граничных точек ИЛИ задача верно сведена к исследованию взаимного расположения окружности и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 На доске написано 12 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое семи наименьших из них равно 8, а среднее арифметическое семи наибольших равно 16.

а) Может ли наибольшее из этих двенадцати чисел равняться 18?

б) Может ли среднее арифметическое всех двенадцати чисел равняться 11?

в) Найдите наименьшее значение среднего арифметического всех двенадцати чисел.

Решение.

а) Если наибольшее число равно 18, то сумма семи наибольших чисел не больше $18+17+16+15+14+13+12=105$, а их среднее арифметическое меньше или равно 15.

б) Пусть сумма пяти наименьших чисел равна A, сумма шестого и седьмого по величине чисел равна B, а сумма пяти наибольших чисел равна C. Предположим, что среднее арифметическое всех десяти чисел равно 11. Тогда получаем:

$$A+B=56,\ B+C=112,\ A+B+C=132,$$

откуда $B=36$, $C=76$. Это невозможно, поскольку должно выполняться неравенство $C>2{,}5B$.

в) По условию $A+B=56$, $B+C=112$. Среднее арифметическое будет наименьшим, когда будет наименьшей сумма всех чисел:

$$A+B+C=(A+B)+(B+C)-B=168-B.$$

Значит, нужно найти наибольшее значение B.

Пусть числа, написанные на доске, равны a_1, a_2, ..., a_{12}, причём

$$a_1<a_2<\ldots<a_{12}.$$

Тогда $a_6+2\le a_8$, $a_7+2\le a_9$, $a_6+3\le a_9$, $a_7+3\le a_{10}$, $a_6+4\le a_{10}$, $a_7+4\le a_{11}$, $a_6+5\le a_{11}$, $a_7+5\le a_{12}$, $a_6+6\le a_{12}$, $a_7+1\le a_8$, откуда

$$5a_6+5a_7+35\le 2a_8+2a_9+2a_{10}+2a_{11}+2a_{12};\ 5B+35\le 2C.$$

Значит, $7B\le 2B+2C-35=189$; $B\le 27$.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Покажем, что число B может равняться 27. Например, если на доске написаны числа 2, 3, 6, 8, 10, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, то условия задачи выполнены и $B=27$. Таким образом, наименьшее значение среднего арифметического равно $\frac{A+B+C}{12}=\frac{168-B}{12}=11{,}75$.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 11,75.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Вариант 21

13 а) Решите уравнение $4\cdot 16^{\cos x}-9\cdot 4^{\cos x}+2=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

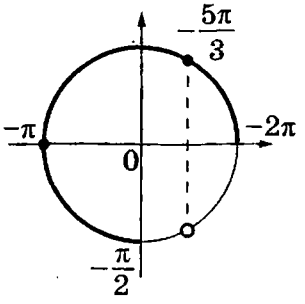
Решение.

а) Пусть $t=4^{\cos x}$, тогда уравнение запишется в виде $4t^2-9t+2=0$, откуда $t=\frac{1}{4}$ или $t=2$.

При $t=\frac{1}{4}$ получаем: $4^{\cos x}=\frac{1}{4}$; $\cos x=-1$, откуда $x=-\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

При $t=2$ получаем: $4^{\cos x}=2$; $\cos x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$.



Получим числа: $-\frac{5\pi}{3};\ -\pi$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решением линейных неравенств и т. п.

Ответ: а) $-\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{3};\ -\pi$.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*2*

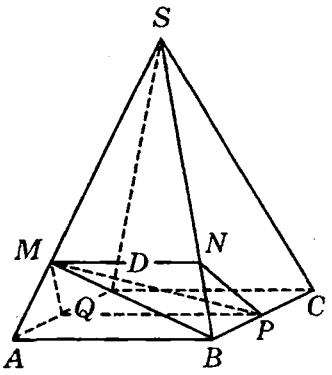
14 На ребре SA правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ отмечена точка M, причём $SM : MA = 5 : 1$. Точки P и Q — середины рёбер BC и AD соответственно.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MPQ является равнобедренной трапецией.

б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость MPQ разбивает пирамиду.

Решение.

а) Пусть N — такая точка на ребре SB, что $SN : NB = 5 : 1$. Треугольники SAB и SMN подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними. Значит, $\angle SAB = \angle SMN$, а прямые AB и MN параллельны, $MN \neq AB$. Прямая PQ также параллельна прямой AB. Значит, отрезки MN и PQ параллельны и не равны, и поэтому сечение пирамиды плоскостью MPQ — это трапеция $MNPQ$.



Треугольники MAQ и NBP равны, поскольку $MA = NB$, $QA = PB$, и $\angle MAQ = \angle NBP$, поэтому $MQ = NP$, а значит, трапеция $MNPQ$ равнобедренная.

б) Пусть объём пирамиды $SABCD$ равен V. Пятигранник $AMQBNP$ состоит из четырёхугольной пирамиды $MABPQ$ с основанием $ABPQ$ и треугольной пирамиды $MBNP$ с основанием BNP.

Расстояние от точки M до плоскости BNP относится к расстоянию от точки A до этой плоскости как $5 : 6$, а площади треугольников BNP и SBC относятся как $1 : 12$. Значит, отношение объёмов пирамид $MBNP$ и $ASBC$ равно $5 : 72$, то есть объём пирамиды $MBNP$ равен $\frac{5V}{144}$.

Площадь прямоугольника $ABPQ$ составляет половину площади квадрата $ABCD$. Расстояние от точки M до плоскости $ABCD$ относится к расстоянию от точки S до этой плоскости как $1 : 6$, поэтому объём пирамиды $MABPQ$ равен $\frac{V}{12}$.

Таким образом, объём $AMQBNP$ равен $\frac{17V}{144}$, то есть отношение объёмов многогранников $AMQBNP$ и $CDSNPQM$ равно $17 : 127$.

Ответ: б) $17 : 127$.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*2*

15 Решите неравенство $\dfrac{\log_3 x}{\log_3\left(\dfrac{x}{27}\right)} \geq \dfrac{4}{\log_3 x} + \dfrac{8}{\log_3^2 x - \log_3 x^3}$.

Решение.

Пусть $t = \log_3 x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{t}{t-3} \geq \frac{4}{t} + \frac{8}{t^2-3t};\ \frac{t^2}{t(t-3)} - \frac{4t-12}{t(t-3)} - \frac{8}{t(t-3)} \geq 0;$$

$$\frac{t^2-4t+4}{t(t-3)} \geq 0;\ \frac{(t-2)^2}{t(t-3)} \geq 0.$$

Откуда $t < 0$; $t = 2$; $t > 3$.
При $t < 0$ получим: $\log_3 x < 0$, откуда $0 < x < 1$.
При $t = 2$ получим: $\log_3 x = 2$, откуда $x = 9$.
При $t > 3$ получим: $\log_3 x > 3$, откуда $x > 27$.
Решение исходного неравенства:

$$0 < x < 1;\ x = 9;\ x > 27.$$

Ответ: $(0;\ 1);\ 9;\ (27;\ +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 9, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

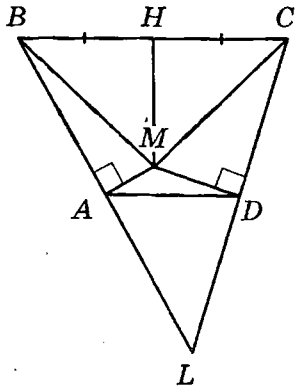
© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

16 В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза меньше основания BC. Внутри трапеции взяли точку M так, что углы BAM и CDM прямые.

а) Докажите, что $BM = CM$.

б) Найдите угол ABC, если угол BCD равен 64°, а расстояние от точки M до прямой BC равно стороне AD.

Решение.



а) Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке L. Тогда треугольники BLC и ALD подобны с коэффициентом подобия 2, поскольку $BC = 2AD$. Значит, A и D — середины BL и CL соответственно. Таким образом, AM и DM — серединные перпендикуляры в треугольнике BLC, а M — центр описанной около этого треугольника окружности, поэтому $BM = CM$ как радиусы этой окружности.

б) Пусть H — середина BC, тогда MH — серединный перпендикуляр к стороне BC. Значит, треугольники BHM и CHM равнобедренные прямоугольные, поэтому $\angle BMC = 90°$. По свойству вписанного угла $\angle BLC = \frac{\angle BMC}{2} = 45°$, откуда $\angle ABC = \angle LBC = 180° - \angle BLC - \angle BCL = 71°$.

Ответ: б) 71°.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

17 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 300 000 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на r % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найдите r, если известно, что кредит будет полностью погашен за два года, причём в первый год будет выплачено 160 000 рублей, а во второй год — 240 000 рублей.

Решение.

Пусть $k=1+\frac{r}{100}$. По условию долг перед банком (в рублях) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$300000,\ 300000k-160000,\ 300000k^2-160000k-240000=0,$$

откуда $15k^2-8k-12=0$; $k=\frac{6}{5}$; $r=20$.

Ответ: 20.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{5-7x}\cdot\ln\left(9x^2-a^2\right)=\sqrt{5-7x}\cdot\ln(3x+a)$$

имеет ровно один корень.

Решение.

Исходное уравнение равносильно уравнению:

$$\sqrt{5-7x}\cdot\left(\ln\left(3x^2-a^2\right)-\ln(9x+a)\right)=0.$$

Рассмотрим два случая.

Первый случай:

$\sqrt{5-7x}=0$ при условии $\begin{cases}3x-a>0,\\3x+a>0.\end{cases}$

Получаем $x=\frac{5}{7}$. Условие принимает вид $\begin{cases}\frac{15}{7}-a>0,\\\frac{15}{7}+a>0,\end{cases}$ откуда $-\frac{15}{7}<a<\frac{15}{7}$.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

То есть в этом случае $x=\frac{5}{7}$ при $-\frac{15}{7}<a<\frac{15}{7}$.

Второй случай:

$\ln\left(9x^2-a^2\right)-\ln(3x+a)=0$ при условии $5-7x\geq 0$.

Получаем:

$\ln\left(9x^2-a^2\right)=\ln(3x+a)$; $\begin{cases}(3x-a)(3x+a)=3x+a,\\ 3x+a>0;\end{cases}$ $\begin{cases}3x-a=1,\\ 3x+a>0,\end{cases}$

откуда $x=\frac{a+1}{3}$, $a>-\frac{1}{2}$. Условие принимает вид $5-\frac{7a+7}{3}\geq 0$,

откуда $a\leq\frac{8}{7}$. То есть в этом случае $x=\frac{a+1}{3}$ при $-\frac{1}{2}<a\leq\frac{8}{7}$.

Корни уравнения $x=\frac{5}{7}$ и $x=\frac{a+1}{3}$ совпадают при $a=\frac{8}{7}$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно один корень при $-\frac{15}{7}<a\leq-\frac{1}{2}$ и $\frac{8}{7}\leq a<\frac{15}{7}$.

Ответ: $-\frac{15}{7}<a\leq-\frac{1}{2}$; $\frac{8}{7}\leq a<\frac{15}{7}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только исключением точек $a=-\frac{1}{2}$ и / или $a=\frac{8}{7}$	3
В решении верно найдены все граничные точки множества значений a $\left(a=-\frac{15}{7},\ a=-\frac{1}{2},\ a=\frac{8}{7},\ a=\frac{15}{7}\right)$, но неверно определены промежутки значений a, ИЛИ верно пройдены все этапы решения, но неверно найдены граничные точки множества значений a из-за вычислительной ошибки	2
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения и получен один из промежутков $\left(-\frac{15}{7};\frac{15}{7}\right)$ или $\left(-\frac{1}{2};\frac{8}{7}\right]$, возможно, с исключением граничной точки выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

19 На доске написано 35 различных натуральных чисел, каждое из которых либо чётное, либо его десятичная запись оканчивается на цифру 3. Сумма написанных чисел равна 1062.

а) Может ли на доске быть ровно 27 чётных чисел?
б) Могут ли ровно два числа на доске оканчиваться на 3?
в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 3, может быть на доске?

Решение.

а) Например, следующий набор чисел удовлетворяет условию задачи:
3, 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 2, 4, ..., 50, 52, 56.

б) Пусть на доске написано ровно два числа, оканчивающихся на 3. Тогда на доске 33 чётных числа. Их сумма не меньше, чем сумма 33 наименьших чётных чисел:

$$2+4+...+66=\frac{68\cdot 33}{2}=1122>1062.$$

Это противоречит тому, что сумма написанных чисел равна 1062.

в) Пусть на доске написано n чисел, оканчивающихся на 3, и $35-n$ чётных чисел. Тогда сумма чисел, оканчивающихся на 3, не меньше

$$3+13+...+(3+\dot{1}0(n-1))=\frac{(6+10(n-1))\cdot n}{2}=5n^2-2n,$$

а сумма чётных чисел не меньше

$$2+4+...+2(35-n)=(35-n)(36-n)=n^2-71n+1260.$$

Таким образом,

$$1062\geq 6n^2-73n+1260;\ 6n^2-73n+198\leq 0,$$

откуда, учитывая, что n — целое, получаем $n\geq 5$.

Если на доске написано пять чисел, оканчивающихся на 3, и 30 чётных чисел, то их сумма нечётна. Значит, чисел, оканчивающихся на 3, больше пяти.

Приведём пример шести чисел, оканчивающихся на 3, и 29 чётных чисел, сумма которых равна 1062:
3, 13, 23, 33, 43, 53, 2, 4, ..., 54, 56, 82.

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Вариант 27

13 а) Решите уравнение $2\cos 2x + 4\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 1 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение.

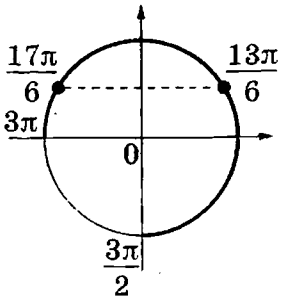
а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2 - 4\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0;\ (2\sin x - 1)(2\sin x + 3) = 0.$$

Значит, $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Уравнение $\sin x = -\frac{3}{2}$ корней не имеет.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.



Получим числа: $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{17\pi}{6}$.

Замечание: Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решением линейных неравенств и т. п.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{17\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*2*

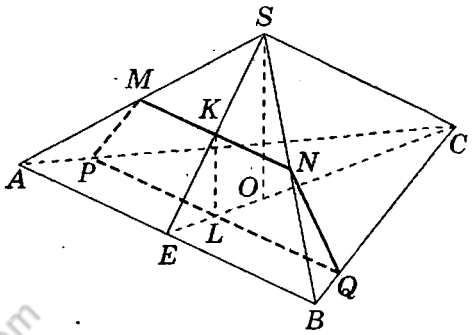
14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5:1$, считая от точки C.

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

Решение.



а) Прямая MN параллельна плоскости ABC, поэтому сечение пересекает плоскость ABC по прямой PQ, параллельной MN. Рассмотрим плоскость SCE. Пусть K — точка пересечения этой плоскости и прямой MN, L — точка пересечения этой плоскости и прямой PQ, O — центр основания пирамиды. Плоскости SCE и MNQ перпендикулярны плоскости ABC, поэтому прямая KL перпендикулярна плоскости ABC, а значит, параллельна прямой SO. Поскольку MN — средняя линия треугольника ASB, точка K является серединой ES. Значит, L — середина EO. Медиана CE треугольника ABC делится точкой O в отношении $2:1$. Значит, $CL:LE=5:1$.

б) В трапеции $MNQP$ имеем:

$$MN=\frac{AB}{2}=6,\ PQ=\frac{5AB}{6}=10,\ KL=\frac{SO}{2}=\frac{\sqrt{SC^2-CO^2}}{2}=\frac{11}{2}.$$

Значит, площадь трапеции $MNQP$ равна $\frac{MN+PQ}{2}\cdot KL=44$.

Ответ: 44.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*2*

15 Решите неравенство $\frac{2^x}{2^x-3}+\frac{2^x+1}{2^x-2}+\frac{5}{4^x-5\cdot 2^x+6}\le 0$.

Решение.

Пусть $t=2^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{t}{t-3}+\frac{t+1}{t-2}+\frac{5}{t^2-5t+6}\le 0;\ \frac{2t^2-4t+2}{t^2-5t+6}\le 0;\ \frac{2(t-1)^2}{(t-2)(t-3)}\le 0,$$

откуда $t=1$; $2<t<3$.

При $t=1$ получим: $2^x=1$, откуда $x=0$.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

При $2 < t < 3$ получим: $2 < 2^x < 3$, откуда $1 < x < \log_2 3$.

Решение исходного неравенства: $x = 0$; $1 < x < \log_2 3$.

Ответ: 0; $(1; \log_2 3)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 0, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*2*

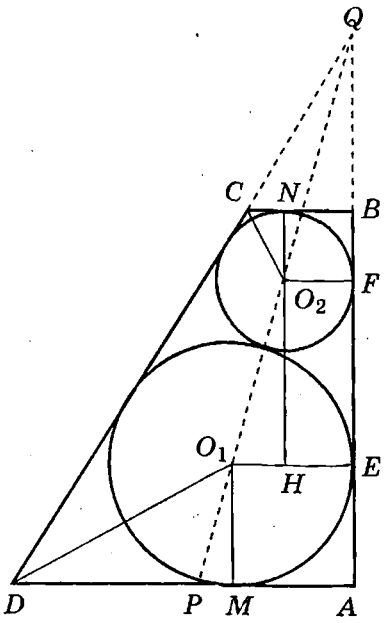
16 В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD, вторая — боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P. Докажите, что $\dfrac{AP}{PD} = \sin D$.

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны $\dfrac{4}{3}$ и $\dfrac{1}{3}$.

Решение.

а) Пусть Q — точка пересечения продолжений боковых сторон. Точка Q, центры окружностей и точка P лежат на одной прямой, причём QP — биссектриса прямоугольного треугольника AQD. Следовательно, по свойству биссектрисы треугольника $\dfrac{AP}{PD} = \dfrac{QA}{QD} = \sin D$.



б) Пусть окружность с центром O_1 радиуса $R = \dfrac{4}{3}$ касается боковой стороны AB в точке E, а основания AD — в точке M; окружность радиуса $r = \dfrac{1}{3}$ с центром O_2 касается боковой стороны AB в точке F, а основания BC — в точке N.

Опустим перпендикуляр O_2H из центра меньшей окружности на отрезок O_1E. Тогда

$$O_1H = O_1E - HE = O_1E - O_2F = R - r = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1,$$

а так как линия центров окружностей проходит через их точку касания,

$$O_1O_2 = R + r = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}.$$

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Значит, $EF = O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = \sqrt{\frac{25}{9} - 1} = \frac{4}{3}$.

Обозначим $\angle AQP = \angle HO_2O_1 = \alpha$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{O_1H}{O_2H} = \frac{3}{4}$. Получаем:

$\angle BQC = 2\alpha$, $\angle BCD = 90^\circ + 2\alpha$, $\angle O_2CN = \frac{1}{2}\angle BCD = 45^\circ + \alpha$.

Из треугольника O_2CN находим:

$$NC = O_2N \operatorname{ctg}(45^\circ + \alpha) = O_2N \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4-3}{4+3} = \frac{1}{21}.$$

Следовательно, $BC = BN + NC = \frac{1}{3} + \frac{1}{21} = \frac{8}{21}$.

Аналогично, $\angle O_1DM = 45^\circ - \alpha$,

$$MD = O_1M \operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha) = O_1M \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4+3}{4-3} = \frac{28}{3};$$

$$AD = AM + MD = \frac{4}{3} + \frac{28}{3} = \frac{32}{3}.$$

Учитывая, что $AB = AE + EF + FB = R + O_2H + r = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = 3$, получаем:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot AB = \frac{1}{2}\left(\frac{32}{3} + \frac{8}{21}\right) \cdot 3 = \frac{116}{7}.$$

Ответ: $\frac{116}{7}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

17 15 января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\,\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30 % больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение.

Пусть сумма кредита равна S. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S,\ \frac{18S}{19},\ \ldots,\ \frac{2S}{19},\ \frac{S}{19},\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на $r\,\%$. Пусть $k=1+\frac{r}{100}$, тогда последовательность размеров долга на 1-е число каждого месяца такова:

$$kS,\ \frac{18kS}{19},\ \ldots,\ \frac{2kS}{19},\ \frac{kS}{19}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$(k-1)S+\frac{S}{19},\ \frac{18(k-1)S+S}{19},\ \ldots,\ \frac{2(k-1)S+S}{19},\ \frac{(k-1)S+S}{19}.$$

Всего следует выплатить

$$S+S(k-1)\left(1+\frac{18}{19}+\ldots+\frac{2}{19}+\frac{1}{19}\right)=S\big(1+10(k-1)\big).$$

Общая сумма выплат на 30 % больше суммы, взятой в кредит, поэтому

$$10(k-1)=0{,}3;\ k=1{,}03;\ r=3.$$

Ответ: 3.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: – неверный ответ из-за вычислительной ошибки; – верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+20x+y^2-20y+75=\left|x^2+y^2-25\right|, \\ x-y=a \end{cases}$$

имеет более одного решения.

Решение.

Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

Рассмотрим два случая:

1) Если $x^2+y^2\geq 25$, то получаем уравнение

$$x^2+20x+y^2-20y+75=x^2+y^2-25;$$

$$20x-20y+100=0;$$

$$x-y+5=0.$$

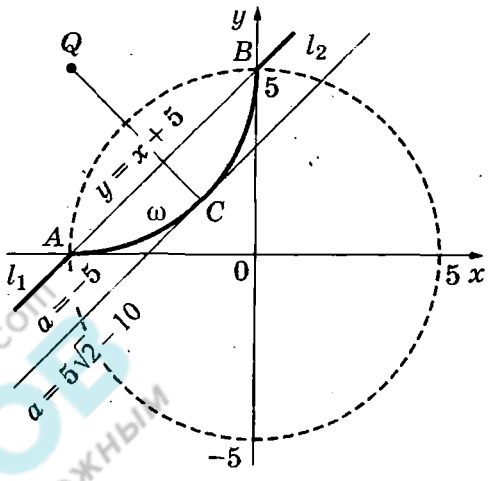
Полученное уравнение задаёт прямую $y=x+5$.

2) Если $x^2+y^2\leq 25$, то получаем уравнение

$$x^2+20x+y^2-20y+75=25-x^2-y^2;\ x^2+10x+y^2-10y+25=0;\ (x+5)^2+(y-5)^2=25.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $Q(-5;5)$ и радиусом 5.

Полученные прямая и окружность пересекаются в двух точках $A(-5;0)$ и $B(0;5)$, лежащих на окружности $x^2+y^2=25$, поэтому в первом случае получаем два луча l_1 и l_2 с концами в точках A и B соответственно, во втором — дугу ω с концами в тех же точках (см. рис.). Заметим, что точка $C\left(-5+\frac{5\sqrt{2}}{2};5-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ лежит на дуге ω и отрезок QC перпендикулярен прямой, полученной в первом случае.



Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую m, параллельную лучам l_1 и l_2 или содержащую их.

При $a=-5$ прямая m содержит лучи l_1 и l_2, то есть исходная система имеет бесконечное число решений.

При $a=5\sqrt{2}-10$ прямая m проходит через точку C, значит, прямая m касается дуги ω и не имеет общих точек с лучами l_1 и l_2, то есть исходная система имеет одно решение.

При $-5<a<5\sqrt{2}-10$ прямая m пересекает дугу ω в двух точках и не имеет общих точек с лучами l_1 и l_2, то есть исходная система имеет два решения.

При $a<-5$ или $a>5\sqrt{2}-10$ прямая m не имеет общих точек с лучами l_1 и l_2 и дугой ω, то есть исходная система не имеет решений.

Значит, исходная система имеет более одного решения при $-5\leq a<5\sqrt{2}-10$.

Ответ: $-5\leq a<5\sqrt{2}-10$.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точки $a = 5\sqrt{2} - 10$	3
При всех значениях a верно найдено количество решений системы в одном из двух случаев, возникающих при раскрытии модуля	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения дуги окружности и прямых (аналитически или графически), ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*4*

19 На доске было написано 30 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14?

б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?

в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Решение.

а) Пусть первоначально на доске было 24 числа, равных 1, и 6 чисел, равных 31. Их среднее арифметическое равно 7. Среднее арифметическое получившихся чисел равно $\frac{6 \cdot 15{,}5}{6} = 15{,}5 > 14$.

б) Пусть с доски было стёрто k чисел, сумма оставшихся была равна S, а стала равна $\frac{S}{2}$. По условию оказались стёрты только числа, получившиеся из 1, поэтому $\frac{S+k}{30} = 7$, то есть $S = 210 - k$. Среднее арифметическое оставшихся чисел равно $\frac{S}{2(30-k)}$, откуда получаем:

$$12 < \frac{210-k}{2(30-k)} < 13;\ 720 - 24k < 210 - k < 780 - 26k;\ 22 < \frac{510}{23} < k < \frac{114}{5} < 23.$$

Таких целых чисел k нет.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

в) Пусть с доски было стёрто k чисел, сумма оставшихся была равна S, а стала равна $\frac{S}{2}$. По условию $\frac{S+k}{30}=7$, то есть $S=210-k$. Необходимо найти наибольшее возможное значение числа $A=\frac{S}{2(30-k)}$.

Имеем:

$$A=\frac{S}{2(30-k)}=\frac{210-k}{2(30-k)}=\frac{1}{2}+\frac{90}{30-k}.$$

Число A будет наибольшим, если число k будет принимать наибольшее возможное значение. Оценим это значение. Каждое из первоначально написанных на доске чисел было не более 40, и на доске осталось $30-k$ чисел, поэтому для суммы S выполняется неравенство

$$210-k=S\le 40(30-k),$$

откуда

$$210-k\le 40(30-k);\ 39k\le 990;\ k\le\frac{330}{13}<26;\ k\le 25.$$

Значит,

$$A\le\frac{1}{2}+\frac{90}{30-25}=18{,}5.$$

Приведём пример, показывающий, что среднее арифметическое оставшихся на доске чисел действительно могло стать равным 18,5. Пусть первоначально на доске было написано 25 единиц и 5 чисел, равных 37. Тогда их среднее арифметическое было равно $\frac{25+185}{30}=7$. Все единицы стёрли с доски, а остальные числа уменьшились в 2 раза. Тогда среднее арифметическое оставшихся чисел равно $\frac{5\cdot 37}{2\cdot 5}=18{,}5$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 18,5.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — в пункте *в* приведён пример, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*4*

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Вариант 32

13 а) Решите уравнение $\cos^2 x - \cos 2x = 0{,}75$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

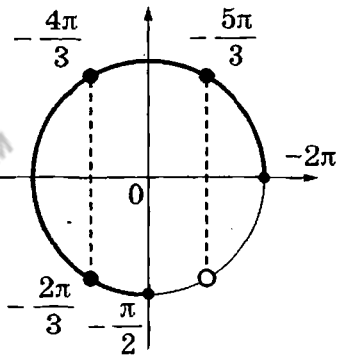
Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$\cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x = 0{,}75;\ \ \sin^2 x = \frac{3}{4}.$$

Значит, $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$.



Получим числа: $-\frac{5\pi}{3};\ -\frac{4\pi}{3};\ -\frac{2\pi}{3}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т. п.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{3};\ -\frac{4\pi}{3};\ -\frac{2\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*2*

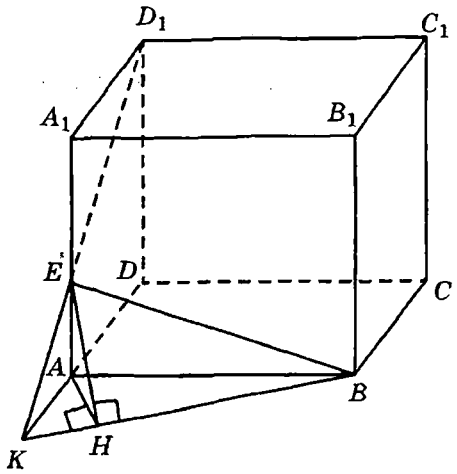
14 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 1 : 2$.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и BED_1.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Решение.



а) Прямая D_1E пересекает прямую AD в точке K. Плоскости ABC и BED_1 пересекаются по прямой KB.

б) Из точки E опустим перпендикуляр EH на прямую KB, тогда отрезок AH (проекция EH) перпендикулярен прямой KB. Угол AHE является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями ABC и BED_1.

Поскольку $AE:EA_1=1:2$, получаем:

$$AE=\frac{AA_1}{3}=1;\ EA_1=AA_1-AE=2.$$

Из подобия треугольников A_1D_1E и AKE находим:

$$AK=\frac{AE}{EA_1}\cdot A_1D_1=1.$$

В прямоугольном треугольнике AKB с прямым углом A: $AB=2$; $AK=1$; $BK=\sqrt{AB^2+AK^2}=\sqrt{5}$, откуда высота

$$AH=\frac{AK\cdot AB}{BK}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Из прямоугольного треугольника AHE с прямым углом A получаем:

$$\operatorname{tg}\angle AHE=\frac{AE}{AH}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\left(\sin\angle AHE=\frac{\sqrt{5}}{3};\cos\angle AHE=\frac{2}{3}.\right)$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*2*

15 Решите неравенство $\frac{2}{7^x-7}\geq\frac{5}{7^x-4}$.

Решение.

Пусть $t=7^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{2}{t-7}\geq\frac{5}{t-4};\ \frac{t-9}{(t-7)(t-4)}\leq 0,$$

откуда $t<4$; $7<t\leq 9$.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

При $t<4$ получим: $7^x<4$, откуда $x<\log_7 4$.

При $7<t\le 9$ получим: $7<7^x\le 9$, откуда $1<x\le\log_7 9$.

Решение исходного неравенства: $x<\log_7 4$; $1<x\le\log_7 9$.

Ответ: $(-\infty;\ \log_7 4)$; $(1;\ \log_7 9]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки $\log_7 9$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*2*

16 Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол 30°. Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC = 120°$.

а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.

б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K. Найдите EK, если известно, что $BE = 40$ и $CE = 24$.

Решение.

а) По теореме о внешнем угле треугольника $\angle BOC = 2\angle BAO = 2\cdot 30° = 60°$. Поэтому $\angle BEC + \angle BOC = 120° + 60° = 180°$.

Значит, точки B, E, C и O лежат на одной окружности. Вписанные в эту окружность углы CBE и COE опираются на одну и ту же дугу, следовательно, $\angle CBE = \angle COE$.

б) По теореме косинусов

$$BC = \sqrt{BE^2 + CE^2 - 2BE\cdot CE\cos 120°} = \sqrt{40^2 + 24^2 - 2\cdot 40\cdot 24\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = 8\sqrt{25+9+15} =$$

$$= 8\cdot 7 = 56.$$

Вписанные углы BEO и CEO опираются на равные хорды BO и CO, значит, EO — биссектриса угла BEC. Пусть M — точка её пересечения со стороной BC. По формуле для биссектрисы треугольника

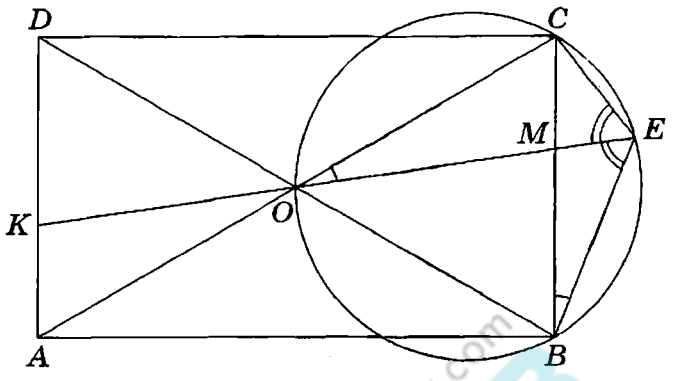
$$EM = \frac{2BE\cdot CE\cos\frac{1}{2}\angle BEC}{BE+CE} = \frac{2\cdot 40\cdot 24\cos 60°}{40+24} = 15.$$

По свойству биссектрисы треугольника $\frac{CM}{BM} = \frac{CE}{BE} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$,

значит, $CM = \frac{3}{8}BC = \frac{3}{8}\cdot 56 = 21$, $BM = 35$.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

По теореме о произведении пересекающихся хорд $EM \cdot MO = BM \cdot CM$, откуда находим, что $MO = \dfrac{BM \cdot CM}{EM} = \dfrac{35 \cdot 21}{15} = 49$. Треугольники COM и AOK равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, поэтому $OK = OM$. Следовательно, $EK = EM + 2OM = 15 + 98 = 113$.



Ответ: 113.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

17 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 9 282 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Алексей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Решение.

Пусть сумма кредита равна S, а годовые составляют $a\%$. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b=1+0{,}1a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1=Sb-X$.

После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2=S_1b-X=(Sb-X)b-X=Sb^2-(1+b)X.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_3=Sb^3-\left(1+b+b^2\right)X=Sb^3-\frac{b^3-1}{b-1}\cdot X.$$

После четвёртой выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_4=Sb^4-\left(1+b+b^2+b^3\right)X=Sb^4-\frac{b^4-1}{b-1}\cdot X.$$

По условию четырьмя выплатами Алексей должен погасить кредит полностью, поэтому $Sb^4-\frac{b^4-1}{b-1}\cdot X=0$, откуда $X=\frac{Sb^4(b-1)}{b^4-1}$.

При $S=9282000$ и $a=10$ получаем: $b=1{,}1$ и $X=\frac{9\,282\,000\cdot 1{,}4641\cdot 0{,}1}{0{,}4641}=$

$=2\,928\,200$ (рублей).

Ответ: 2 928 200 рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Получено верное выражение для суммы платежа, но допущена вычислительная ошибка, приведшая к неверному ответу	2
Получено выражение для ежегодной выплаты, но уравнение не составлено, ИЛИ верный ответ найден подбором	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{7}{x}-4\right|=ax-3$ на промежутке $(0;+\infty)$ имеет более двух корней.

Решение.

Рассмотрим функции $f(x)=ax-3$ и $g(x)=\left|\frac{7}{x}-4\right|$. Исследуем уравнение $f(x)=g(x)$ на промежутке $(0;+\infty)$.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

При $a \le 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $(0;+\infty)$ отрицательны, а все значения функции $g(x)$ — неотрицательны, поэтому при $a \le 0$ уравнение $f(x)=g(x)$ не имеет решений на промежутке $(0;+\infty)$.

При $a>0$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $\left(0;\frac{7}{4}\right]$, поэтому уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $\left(0;\frac{7}{4}\right]$, причём решение будет существовать тогда и только тогда, когда $f\left(\frac{7}{4}\right) \ge g\left(\frac{7}{4}\right)$, откуда получаем $a\cdot\frac{7}{4}-3\ge 0$, то есть $a\ge\frac{12}{7}$.

На промежутке $\left(\frac{7}{4};+\infty\right)$ уравнение $f(x)=g(x)$ принимает вид $ax-3=4-\frac{7}{x}$. Это уравнение сводится к уравнению $ax^2-7x+7=0$. Будем считать, что $a>0$, поскольку случай $a\le 0$ был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения $D=49-28a$, поэтому при $a>\frac{7}{4}$ это уравнение не имеет корней; при $a=\frac{7}{4}$ уравнение имеет единственный корень, равный 2; при $0<a<\frac{7}{4}$ уравнение имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня x_1 и x_2, то есть $0<a<\frac{7}{4}$, то больший корень $x_2=\frac{7+\sqrt{D}}{2a}>\frac{7}{2a}>2>\frac{7}{4}$, поэтому он принадлежит промежутку $\left(\frac{7}{4};+\infty\right)$. Меньший корень x_1 принадлежит промежутку $\left(\frac{7}{4};+\infty\right)$ тогда и только тогда, когда $a\left(x_1-\frac{7}{4}\right)\left(x_2-\frac{7}{4}\right)=a\left(\frac{7}{4}\right)^2-7\cdot\frac{7}{4}+7=\frac{7\cdot(7a-12)}{16}>0$, то есть $a>\frac{12}{7}$.

Таким образом, уравнение $\left|\frac{7}{x}-4\right|=ax-3$ имеет следующее количество корней на промежутке $(0;+\infty)$:

- нет корней при $a\le 0$;
- один корень при $0<a<\frac{12}{7}$ и $a>\frac{7}{4}$;
- два корня при $a=\frac{12}{7}$ и $a=\frac{7}{4}$;
- три корня при $\frac{12}{7}<a<\frac{7}{4}$.

Ответ: $\frac{12}{7}<a<\frac{7}{4}$.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*4*

19 Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{3}{10}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{5}{12}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 8 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 16 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 16 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов *а* и *б*?

Решение.

а) Если группа состоит из 3 мальчиков, посетивших только театр, 5 мальчиков, посетивших только кино, и 8 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 16 учащихся могло быть 8 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 9 или больше. Тогда девочек было 7 или меньше. Театр посетили не более 3 мальчиков, поскольку если бы их было 4 или больше, то доля мальчиков в театре была бы не меньше $\frac{4}{4+7}=\frac{4}{11}$, что больше $\frac{3}{10}$. Аналогично кино посетили не более 5 мальчиков, поскольку $\frac{6}{6+7}=\frac{6}{13}>\frac{5}{12}$, но тогда хотя бы один мальчик не посетил ни театра, ни кино, что противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 16 учащихся могло быть 8 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе — 8.

в) Предположим, что некоторый мальчик сходил и в театр, и в кино. Если бы вместо него в группе присутствовали два мальчика, один из которых посетил только театр, а другой — только кино, то доля мальчиков и в театре, и в кино осталась бы прежней, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек в группе можно считать, что каждый мальчик сходил или только в театр, или только в кино.

© 2020. ООО «Издательство «Национальное образование». © 2020. ЧОУ ДПО «МЦНМО»
Копирование, распространение и использование в коммерческих целях без письменного разрешения правообладателей не допускается

Пусть в группе m_1 мальчиков, посетивших театр, m_2 мальчиков, посетивших кино, и d девочек. Оценим долю девочек в этой группе. Будем считать, что все девочки ходили и в театр, и в кино, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля в театре и в кино не уменьшится.

По условию $\frac{m_1}{m_1+d}\le\frac{3}{10}$, $\frac{m_2}{m_2+d}\le\frac{5}{12}$, значит, $\frac{m_1}{d}\le\frac{3}{7}$, $\frac{m_2}{d}\le\frac{5}{7}$. Тогда $\frac{m_1+m_2}{d}\le\frac{8}{7}$, поэтому доля девочек в группе: $\frac{d}{m_1+m_2+d}=\frac{1}{\frac{m_1+m_2}{d}+1}\ge\frac{1}{\frac{8}{7}+1}=\frac{7}{15}$.

Если группа состоит из 3 мальчиков, посетивших только театр, 5 мальчиков, посетивших только кино, и 7 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено, а доля девочек в группе равна $\frac{7}{15}$.

Ответ: а) да; б) 8; в) $\frac{7}{15}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — в пункте *в* приведён пример, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*4*

100 БАЛЛОВ Делаем невозможное возможным

Издание для дополнительного образования

ЕГЭ. ФИПИ — школе

ЕГЭ. МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ТИПОВЫЕ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВАРИАНТЫ
36 ВАРИАНТОВ

Под редакцией *Ивана Валериевича* ***Ященко***

Главный редактор *И. Федосова*
Ответственный редактор *О. Чеснокова*
Художественный редактор *О. Медведева*
Компьютерная вёрстка *Е. Осипова*
Корректор *М. Вербина*

100БАЛЛОВ 100balnik.com платен не тот, кто может, а тот, кому возможно

НАЦИОНАЛЬНАЯ КОНТРОЛЬНО-ДИАГНОСТИЧЕСКАЯ ЛАБОРАТОРИЯ™

МОДУЛЬНЫЙ ТРИАКТИВ-КУРС

АКТИВНОЕ ОБУЧЕНИЕ — ОТЛИЧНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ ЕГЭ



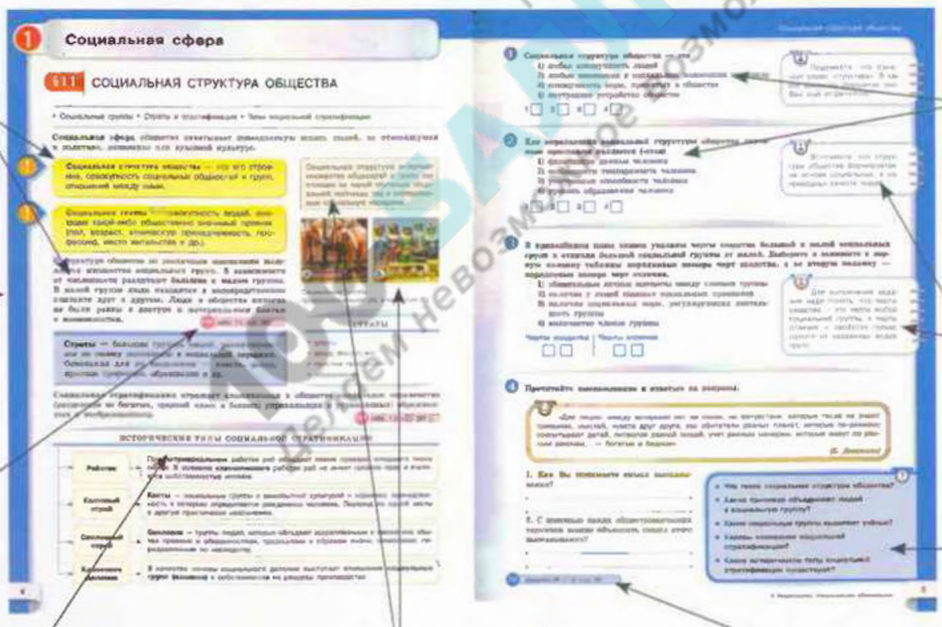
1. Учебно-диагностическая книга
2. Тренировочные задания
3. Итоговые проверочные работы

ТЕОРИЯ

Основной текст с выделением ключевых элементов содержания

Фон поля — навигационный элемент

Ссылки в справочные материалы или на другие параграфы книги



Блок-схемы и таблицы

Дополнительная информация, примеры, иллюстрации

ПРАКТИКА

Обучающие задания в формате ОГЭ/ЕГЭ с полями для фиксации ответов

«Помощники» — рекомендации по выполнению заданий или дополнительная информация к ним

Вопросы на закрепление материала параграфа

Ссылка на тренировочные задания к параграфу

100balnik.com
Репетитор невозможное возможным

- МАТЕМАТИКА. 9 класс
- АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА. 10–11 классы
- ОБЩЕСТВОЗНАНИЕ. 8 класс
- ОБЩЕСТВОЗНАНИЕ. 9 класс
- ОБЩЕСТВОЗНАНИЕ. 10 класс
- ОБЩЕСТВОЗНАНИЕ. 11 класс
- БИОЛОГИЯ. 9 класс
- БИОЛОГИЯ. 10 класс
- БИОЛОГИЯ. 11 класс
- ХИМИЯ. 8–9 классы
- ХИМИЯ. 10 класс
- ХИМИЯ. 11 класс
- ФИЗИКА. 9 класс
- ИСТОРИЯ РОССИИ. 9 класс
- ИСТОРИЯ РОССИИ. 10–11 классы

ПОСОБИЕ ПРОШЛО НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКУЮ ОЦЕНКУ ФГБНУ

ФИПИ ШКОЛЕ

2020

Серия предназначена для диагностики готовности обучающихся к единому государственному экзамену (ЕГЭ), подготовки обучающихся к ЕГЭ в рамках учебного процесса на уроках и дополнительных занятиях, самоподготовки к экзамену.

Данный сборник содержит:

- 36 типовых экзаменационных вариантов, соответствующих проекту демоверсии ЕГЭ 2020 года профильного уровня;
- типовые бланки ответов ЕГЭ;
- ответы и критерии оценивания.

КНИГИ ПО МАТЕМАТИКЕ ИЗДАТЕЛЬСТВА «НАЦИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ» — ЭТО СИСТЕМА КОМПЛЕКСНОЙ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ

ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 10 вариантов

ЕГЭ. Математика. Базовый и профильный уровни: типовые экзаменационные варианты: 20 вариантов

ЕГЭ. Математика. Базовый уровень: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов

ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов

Алгебра и начала анализа. 10–11 классы. Модульный триактив-курс