ЧИСТЫЙ ИЗГИБ

Деформации при чистом изгибе

При чистом изгибе в сечении возникает только один внутренний силовой фактор — изгибающий момент.

Рассмотрим деформацию бруса, нагруженного внешней парой сил с моментом ***m*** (рис. 1а). при чистом изгибе выполняются *гипотезы плоских сечений и ненадавливаемости слоев.*

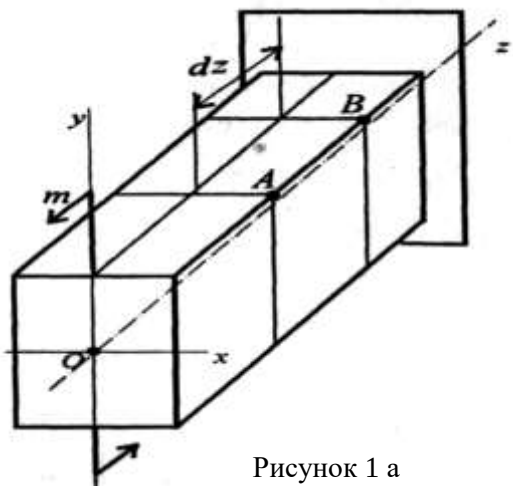


Рисунок 1 а

Сечения бруса, плоские и перпендикулярные продольной оси, после деформации остаются плоскими и перпендикулярными продольной оси.

Продольные волокна не давят друг на друга, поэтому слои испытывают простое растяжение или сжатие.

Действуют только нормальные напряжения.

Поперечные размеры сечений не меняются.

Продольная ось бруса после деформации изгиба искривляется и образует дугу окружности радиуса ***ρ*** (рис. 1б).

Материал подчиняется закону Гука.

Можно заметить, что слои, расположенные выше продольной оси, растянуты, расположенные ниже оси — сжаты (рис.1б). Так как деформации по высоте сечения меняются непрерывно, имеется слой, в котором нормальные напряжения ***σ*** равны нулю; такой слой называют ***нейтральным слоем (НС)***.

Доказано, нейтральный слой проходит через центр тяжести сечения; ***ρ*** — радиус кривизны нейтрального слоя.

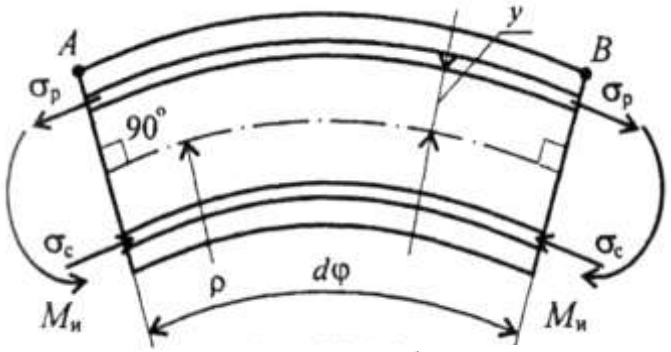


Рисунок 2 б

Рассмотрим деформацию слоя, расположенного на расстоянии ***y*** от нейтральной оси (участок АВ, рис. 1).

Длина участка до деформации равна длине нейтральной оси:

$$l_0 = \rho\, d\varphi.$$

Абсолютное удлинение слоя

$$\Delta l = (\rho + y)\, d\varphi - \rho\, d\varphi = y\, d\varphi$$

Относительное удлинение

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0};\ \varepsilon = \frac{y\, d\varphi}{\rho\, d\varphi} = \frac{y}{\rho}.$$

Относительное удлинение прямо пропорционально расстоянию слоя до нейтральной оси.

Используем закон Гука при растяжении:

$$\sigma = E\varepsilon.$$

Получим зависимость нормального напряжения при изгибе от положения слоя:

$$\sigma_и = \frac{Ey}{\rho}.$$

Формула для расчета нормальных напряжений при изгибе

Рассмотрим изогнутый участок бруса ***dz*** (рис. 2).

dN — элементарная продольная сила в точке сечения;

dA — площадь элементарной площадки;

dm — элементарный момент, образованный силой относительно нейтрального слоя.

$$dN = \sigma_и\, dA;\quad dm = \sigma_и y\, dA.$$

Суммарный изгибающий момент сил упругости в сечении

$$M_и = \int_A \sigma_и y\, dA = \int_A \frac{Ey}{\rho} y\, dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2\, dA.$$

$\int_A y^2\, dA = J_x$ - осевой момент инерции сечения.

Таким образом, $M_и = \frac{E}{\rho} J_x$.

Откуда $E/\rho = M_и / J_x$.

Ранее получено $\sigma_и = \frac{Ey}{\rho}$.

После ряда преобразований получим формулу для определения нормальных напряжений в любом слое поперечного сечения бруса:

$$\sigma_и = \frac{M_и y}{J_x},$$

где J_x — геометрическая характеристика сечения при изгибе.

Эпюра распределения нормальных напряжений при изгибе изображена на рис. 3

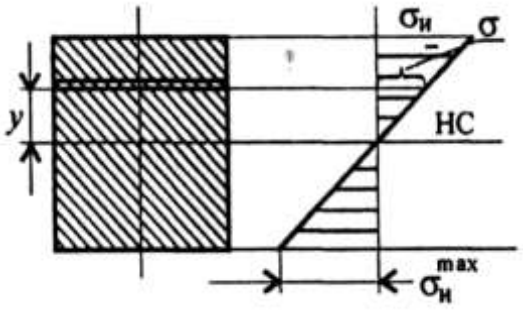


Рисунок 3

По эпюре распределения нормальных напряжений видно, что *максимальное напряжение возникает на поверхности.*

Подставим в формулу напряжения значение $y = y_{max}$.

Получим $\sigma_и^{max} = \frac{M_и}{W_x}$.

Отношение $\frac{J_x}{y_{max}}$ принято обозначать W_x: $W_x = \frac{J_x}{y_{max}}$.

Эта величина называется ***моментом сопротивления*** сечения при изгибе, или осевым моментом сопротивления.

Размерность — мм^3.

W_x характеризует влияние формы и размеров сечения на прочность при изгибе.

Напряжение на поверхности $\sigma_и = \frac{M_и y_{max}}{J_x}$.

Рациональные сечения при изгибе

Определим рациональные сечения при изгибе, для этого сравним моменты сопротивления простейших сечений.

Осевой момент инерции прямоугольника (рис.4) равен:

$$J_x = \frac{bh^3}{12}.$$

Осевой момент сопротивления прямоугольника $W_x = \frac{J_x}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$.

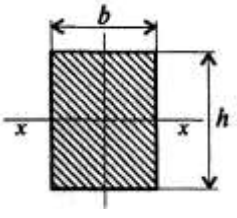


Рисунок 4

Сравним сопротивление изгибу двух прямоугольных сечений (рис. 5).

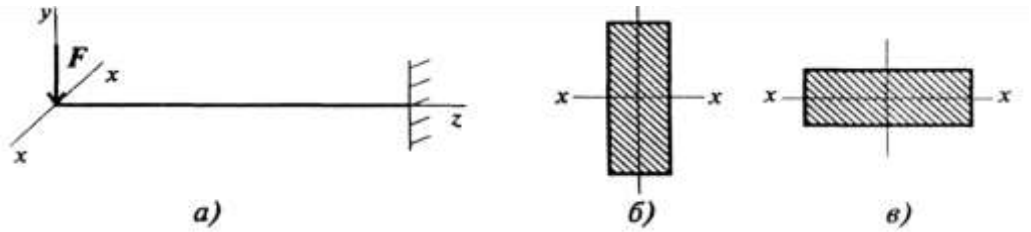


Рисунок 5

Вариант на рис. 5б обладает большим сопротивлением изгибу при прочих равных условиях.

Осевой момент инерции круга (рис. 6) равен

$$J_x = \frac{\pi d^4}{64}.$$

Осевой момент сопротивления круга

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}.$$

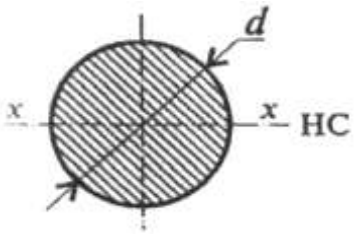


Рисунок 6

Все необходимые расчетные данные (площади, моменты инерции и сопротивления) стандартных сечений приводятся в таблицах стандартов.

Для материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие, выбирают сечения, симметричные относительно оси, вокруг которой совершается изгиб (рис.7).

Пример

Сравним моменты сопротивления двух сечений одинаковой площади: двутавра (рис. 7г) и круга (рис. 7а).

Двутавр № 10 имеет площадь 12 см^2, осевой момент инерции 198 см^4, момент сопротивления 39.7 см^3.

Круг той же площади имеет диаметр $d = \sqrt{4A/\pi} = 4$ см осевой момент инерции $J_x = 25{,}12$ см^4, момент сопротивления $W_x = 6{,}2$ см^3.

$$\frac{W_{x_1}}{W_{x_2}} = \frac{39{,}7}{6{,}2} \approx 6.$$

Сопротивление изгибу у двутавровой балки в 6 раз выше, чем у балки круглого сечения.

Из этого примера можно сделать вывод: сечения прямоугольные, квадратные, круглые и ромбовидные нерациональны (рис. 7а, б).

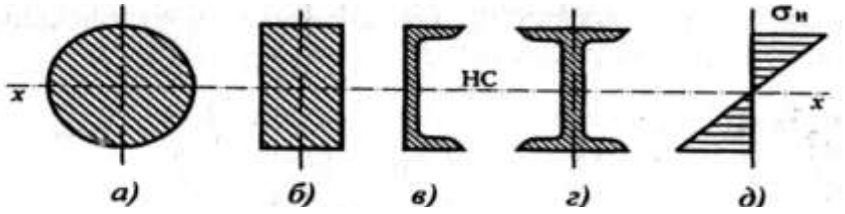


Рисунок 7

Для материалов, обладающих разной прочностью при растяжении и сжатии (хрупкие материалы обладают значительно большей прочностью на сжатие, чем на растяжение), выбирают асимметричные сечения тавр, рельс и др.

Расчет на прочность при изгибе

Рассчитать на прочность — это значит определить напряжение и сравнить его с допустимым.

Условие прочности при изгибе:

$$\sigma_и^{max} = \frac{M_x}{W_x} \leqslant [\sigma_и],$$

где $[\sigma_и]$ — допускаемое напряжение.

По этому неравенству проводят *проверочные расчеты* после окончания конструирования балки.

Для балок из хрупких материалов расчеты ведут по растянутой и сжатой зоне одновременно (рис. 8).

При *проектировочном расчете* определяют потребные размеры поперечных сечений балки или подбирают материал.

Схема нагружения и действующие нагрузки известны.

По условию прочности можно определить *нагрузочную способность балки* $[M_и] = W_р[\sigma]$.

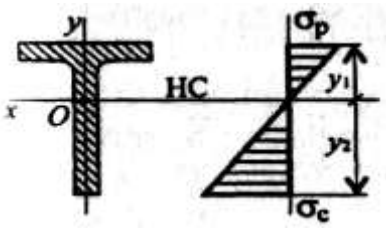


Рисунок 8

$$\sigma_p^{max} = \frac{M_x y_1}{J_x} \leqslant [\sigma_p];$$

$$\sigma_c^{max} = \frac{M_x y_2}{J_x} \leqslant [\sigma_c].$$

Задача

Подобрать размеры сечения балки в виде двутавра. Известна схема нагружения балки (рис. 9), материал — сталь, допускаемое напряжение материала при изгибе $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 160$ МПа.

Решение 1. Для защемленной балки реакции в опоре определять не следует.

Проводим расчеты по характерным точкам. Размеры сечения подбираем из расчета по нормальным напряжениям. Эпюру поперечных сил строить необязательно.

Определяем моменты в характерных точках.

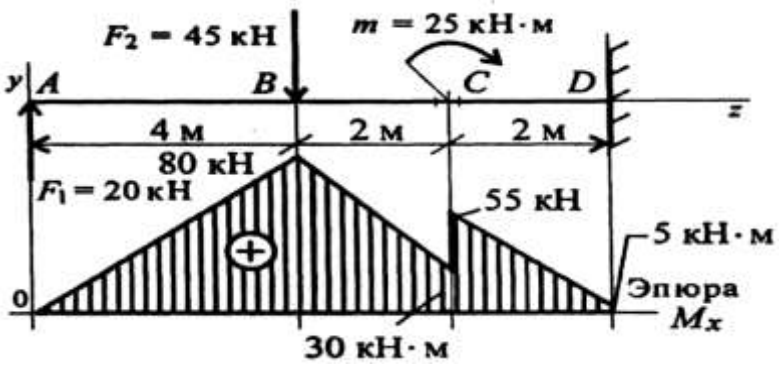


Рисунок 9

$$M_A = 0;\ M_B = F_1 \cdot 4;\ M_B = 20 \cdot 4 = 80\,\text{кН}\cdot$$

В точке *C* приложен внешний момент пары, поэтому расчет проводим для левого сечения (без момента) и для правого — с моментом *m*.

$M_C^{лев} = F_1 \cdot 6 - F_2 \cdot 2;\quad M_C^{лев} = 20 \cdot 6 - 45 \cdot 2 = 30\,\text{кН·м}$. Момент положительный.

$$M_C^{прав} = M_C^{лев} + m;\ M_C^{прав} = 30 + 25 = 55\,\text{кН·м}.$$

Момент в заделке $M_D = F_1 \cdot 8 - F_2 \cdot 4 + m;$

$$M_D = 20 \cdot 8 - 45 \cdot 4 + 25 = 5\,\text{кН·м}.$$

Выбираем соответствующий масштаб по максимальному значению изгибающего момента.

Опасное сечение — сечение балки, где действует максимальный момент. Подбираем размеры балки в опасном сечении по условию прочности

$$\sigma_и^{max} = \frac{M_и}{W_x} \leqslant [\sigma_и];\quad W_x \geqslant \frac{M_B}{[\sigma_и]};$$

$$W_x = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{160} = 500 \cdot 10^3\,\text{мм}^3;\quad W_x = 500\,\text{см}^3.$$

Основываясь на значении $W_x = 500\,\text{см}^3$ по таблице ГОСТ 8239-89 выбираем двутавр №30а: момент сопротивления $W_x = 518\,\text{см}^3$; площадь сечения $A = 49{,}9\,\text{см}^3$.

Для сравнения рассчитаем размеры балки квадратного сечения (рис.10) при том же моменте сопротивления сечения.

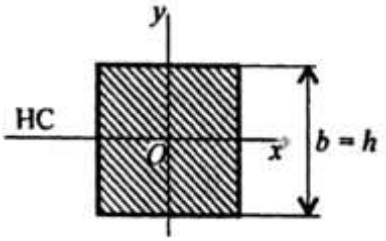
$$W_x = \frac{bh^2}{6};\quad b = h;\quad W_x = \frac{b^3}{6}.$$

$$W_x = 500\,\text{см}^3 = \frac{b^3}{6};\quad b \geqslant \sqrt[3]{6W_x}.$$

Сторона квадрата $b \geqslant \sqrt[3]{6 \cdot 500} \approx 14{,}5\,\text{см}.$

Площадь сечения балки $A = b^2 = 14{,}5^2 = 210{,}2\,\text{см}^2$

$$\frac{A_{квадрата}}{A_{двутавра}} = \frac{210{,}2}{49{,}9} = 4{,}2.$$



Балка квадратного сечения в 4 раза тяжелее.

Рисунок 10