Расчет цилиндрических винтовых пружин на прочность и жесткость.

Цилиндрические винтовые пружины относятся к упругим элементам, широко применяемым в машиностроении и приборостроении. Их используют в качестве амортизаторов или аккумуляторов механической энергии, в установках передачи сил давления и в механизмах возврата детали в исходное положение.
Здесь кратко рассмотрены некоторые расчетные формулы винтовых пружин растяжения

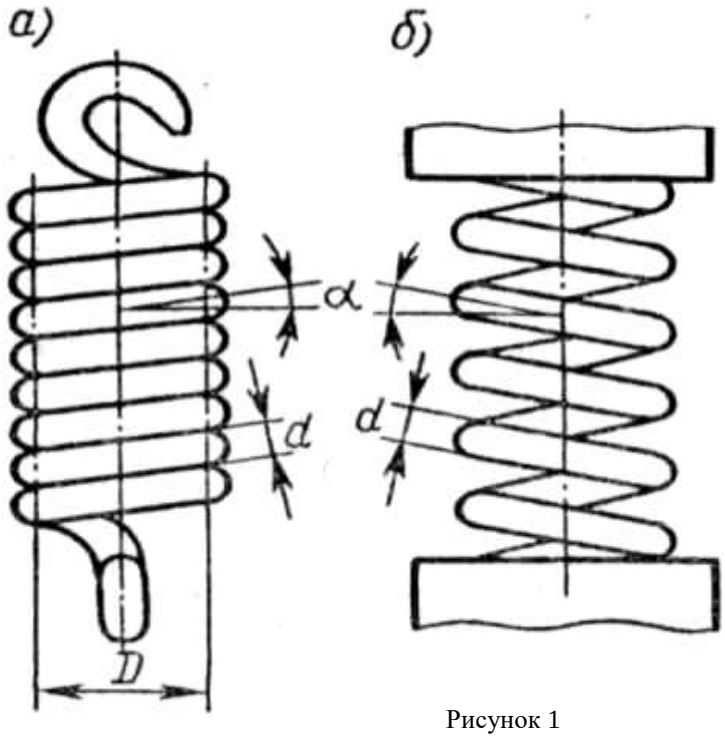


Рисунок 1

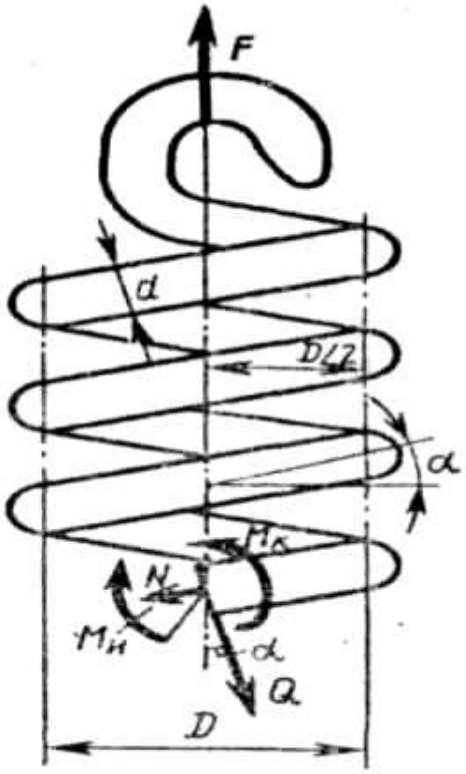


Рисунок 2

(рис. 1, *а)* и сжатия (рис. 1, *б*).
Эти пружины можно рассматривать как *пространственно изогнутые брусья*.

Они характеризуются следующими параметрами:
диаметром проволоки ***d***, из которой навита пружина,
средним диаметром витка ***D***, т. е. диаметром винтовой линии, образуемой осью проволоки,
числом витков ***i***,
углом подъема витков ***α***.

Винтовые пружины растяжения навиваются без просветов между витками, пружины сжатия — с просветами.
Если рассечь один из витков растянутой пружины поперечным сечением
(рис. 2) и отбросить нижнюю часть пружины, то увидим, что внешняя сила **F** уравновешивается четырьмя внутренними силовыми факторами, нормальной
$N=F\sin\alpha$, поперечной $Q=F\cos\alpha$ силами, изгибающим $M_и=(FD/2)\sin\alpha$ и крутящим $M_к=(FD/2)\cos\alpha$ моментами. На практике чаще всего используют пружины с небольшим углом подъема $\alpha\leq10°$. Для таких пружин нормальная сила и изгибающий момент не имеют существенного значения и расчет ведется только по касательным напряжениям, считая, что поперечная сила $Q=F$ и крутящий момент $M_к=FD/2$ (принимая, что при $\alpha\leq10°$ $\cos\alpha\approx1$).

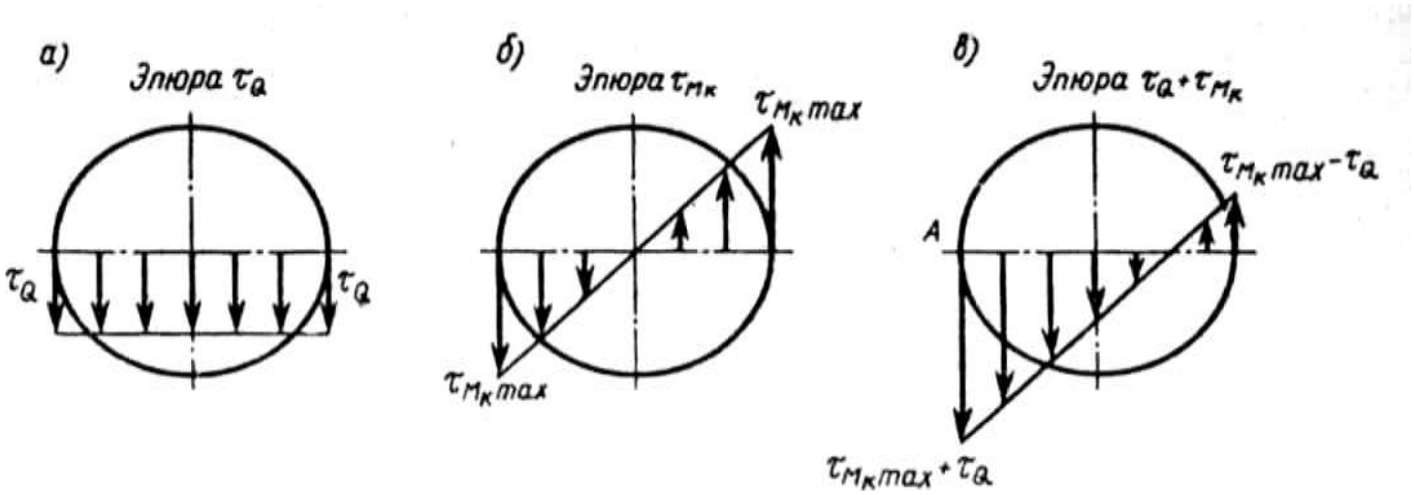


Рисунок 3

Касательные напряжения, обусловленные поперечной силой ***Q***, распределены по сечению равномерно, их эпюра изображена на рис. 3, а. Касательные напряжения, обусловленные крутящим моментом, достигают наибольшего значения у края сечения, их эпюра изображена на рис. 3, б.

Из суммарной эпюры касательных напряжений (рис. 3, в) видно, что максимальное напряжение возникает в точках сечения, расположенных ближе к оси пружины, т. е. на внутренней части контура сечения витка:

$$\tau_{max} = \tau_{M_к max} + \tau_Q = \frac{M_к}{W_p} + \frac{Q}{A}.$$

Имея в виду, что в данном случае

$$M_к = FD/2,$$
$$W = \pi d^3/16,$$
$$Q=F \text{ и } A = \pi d^2/4,$$

получим

$$\tau_{max} = \frac{8FD}{\pi d^3} + \frac{4F}{\pi d^2} = \frac{8FD}{\pi d^3}\left(1 + \frac{d}{2D}\right)$$

Отношение $D/d = c$ называется **индексом пружины**: введя эту величину в последнее равенство, получим

$$\tau_{max} = \frac{8FD}{\pi d^3}\left(1 + \frac{1}{2c}\right).$$

При обычных значениях индекса c в пределах 4... 12 отношение $1/(2c) \leq 0{,}125$, поэтому вторым слагаемым в скобках можно пренебречь, т. е. учитывать лишь напряжения кручения и вести расчет по приближенной формуле

$$\tau_{max} = \frac{8FD}{\pi d^3} = \frac{8Fc}{\pi d^2}.$$

Кроме индекса c прочность пружины зависит от угла подъема ее витков. Желая учесть и это, в формулу вводят коэффициент

$$k = 1 + \frac{1{,}5}{c},$$

и тогда условие прочности пружины можно записать так:

$$\tau_{max} = \frac{k8Fc}{\pi d^2} \leqslant [\tau],$$

Условие прочности пружины, свитой из прутка квадратного сечения

$$\tau_{max} = k_1 \frac{FD}{2\beta b^3} \leqslant \tau_{adm},$$

Коэффициент $\beta = 0{,}208$.

где допускаемое напряжение $[\tau] = 400...\ 1000$ Н/мм^2, так как для изготовления пружин применяют высококачественные углеродистые и легированные марки сталей.

Диаметр пружины *d* из условия прочности выражается формулой

$$d = \sqrt{\frac{8kFc}{\pi[\tau]}} = 1{,}6\sqrt{\frac{(c+1{,}5)F}{[\tau]}}.$$

Под действием нагрузки *F* пружина растяжения удлиняется, а пружина сжатия укорачивается. Удлинение или укорочение (осадка) пружины определяется по формуле, приводимой без вывода:

$$\lambda = \frac{8FD^3 i}{Gd^4} = \frac{8Fc^3 i}{Gd},$$

где ***i*** — число витков пружины.

Изменение высоты пружины

$$\lambda = \frac{FD^3 \pi n}{4G\alpha b^4},$$

где α=0,141

Полная потенциальная энергия, накопленная пружиной в результате закручивания ее витков при статическом нагружении, вычисляется по формуле

$$U = \frac{F\lambda}{2},\ \text{Дж}.$$

Пример 1. Размеры пружины конусной фрикционной муфты: D = 75 мм, d= 10 мм, i = 4. Проверить прочность пружины, если в рабочем состоянии она сжата на 30 мм; $[\tau]$=450Н/мм^2; G= 0,8×10^5 Н/мм^2.

Решение:

1. Находим индекс пружины: $c = \boldsymbol{D/d} = 75/10 = 7{,}5$.
2. Полагая $\lambda = 30$ мм, находим силу, сжимающую пружину:

$$F = \frac{\lambda Gd}{8c^3 i} = \frac{30 \cdot 0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 10}{8 \cdot 7.5^3 \cdot 4} = 1{,}78 \cdot 10^3\ \text{Н}.$$

3. Определяем значение коэффициента *k:*

$$k = 1 + \frac{1{,}5}{c} = 1 + \frac{1{,}5}{7{,}5} = 1{,}2.$$

4. Находим максимальное напряжение, возникающее в пружине:

$$\tau_{max} = k\frac{8Fc}{\pi d^2} = \frac{1{,}2 \cdot 8 \cdot 1{,}78 \cdot 10^3 \cdot 7{,}5}{\pi \cdot 10^2} = 408\ \text{Н/мм}^2.$$

5. τ_{max} = 408 Н/мм^2 < $[\tau]$ = 450 Н/мм^2, следовательно, пружина недогружена на

$$\frac{450-408}{450}\,100\% \approx 9{,}3\%.$$

Ответ: пружина недогружена на 9,3%

Пример 2. Винтовая стальная пружина из прутка квадратного сечения 15х15 мм имеет 16 витков и средний диаметр ***D***= 12 см. Определить допускаемое значение осевой нагрузки ***F*** если τ_{adm} = 300 МПа. Вычислить осадку пружины при нагрузке, равной допускаемой, ***G*** = 8 $\times 10^4$ МПа. k_1=1,16

Решение:

Величину допускаемой нагрузки найдем из условия прочности

$$\tau_{max} = k_1 \frac{FD}{2\beta b^3} \leqslant \tau_{adm},$$

откуда

$$F_{adm} \leqslant \frac{2\beta b^3 \tau_{adm}}{k_1 D} = \frac{2 \cdot 0{,}208 \cdot 15^3 \cdot 300}{1{,}16 \cdot 120} = 3026 \text{ Н}.$$

Принимаем F_{adm}=*3 кН*

$$\beta = 0{,}208; \text{ при } \frac{D}{b} = \frac{120}{15} = 8, \; k_1 = 1{,}16.$$

Определяем осадку пружины

$$\lambda = \frac{F_{adm} D^3 \pi n}{4G\alpha b^4} = \frac{3000 \cdot 120^3 \cdot \pi \cdot 16}{4 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 0{,}141 \cdot 15^4} = 115 \text{ мм} = 11{,}5 \text{ см}.$$

Ответ: 11,5 см.