УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Понятие об устойчивом и неустойчивом равновесии

Относительно короткие и массивные стержни рассчитывают сжатие, т.к. они выходят из строя в результате разрушения и остаточных деформаций. Длинные стержни небольшого поперечно сечения под действием осевых сжимающих сил изгибаются и теряют равновесие. Такие стержни работают на изгиб и сжатие.

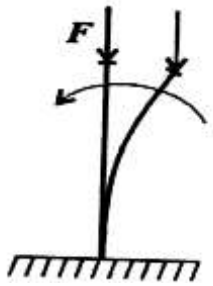


Рисунок 1

Равновесие считают устойчивым, если за счет сил упругости после снятия внешней отклоняющей силы стержень восстановит первоначальную форму (рис.1).

Если упругое тело после отклонения от равновесного положения не возвращается к исходному состоянию, то говорят, что произошла потеря устойчивости, а равновесие было неустойчивым.

Потерю устойчивости под действием центрально приложенной продольной сжимающей силы называют ***продольным изгибом.***

На устойчивость равновесия влияет величина сжимающей силы.

Наибольшее значение сжимающей силы, при которой прямолинейная форма стержня сохраняет устойчивость, называют ***критической силой.*** Даже при небольшом превышении критического значения силы стержень недопустимо деформируется и разрушается.

Расчет на устойчивость

Расчет на устойчивость заключается в определении допускаемой сжимающей силы и в сравнении с ней силы действующей

$$F \leqslant [F]; \quad [F] = \frac{F_{кр}}{[s_y]}; \quad F \leqslant \frac{F_{кр}}{[s_y]},$$

где ***F*-** действующая сжимающая сила;

[F] – допускаемая сжимающая сила, обеспечивает некоторый запас устойчивости;

$F_{кр}$ – критическая сила;

$[s_y]$ – допускаемый коэффициент запаса устойчивости;

Обычно для сталей $[s_y]$= 1,8÷3; для чугуна $[s_y]$=5; для дерева $[s_y]$≈2,8.

Способы определения критической силы

Расчет по формуле Эйлера

Задачу определения критической силы математически решил Л. Эйлер в 1744 г.

Для шарнирно закрепленного с обеих сторон стержня (рис. 2) формула Эйлера имеет вид

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{l^2},$$

где ***E*** — модуль упругости;

J_{min} — минимальный осевой момент инерции стержня;

l— длина стержня.



Рисунок 2

Потеря устойчивости происходит *в плоскости наименьшей жесткости,* поэтому в формулу входит минимальный из осевых моментов инерции сечения (J_x или J_y).

Формулу распространили на другие формы закрепления стержней, рассмотрев форму потери устойчивости в каждом случае.

Длина стержня заменяется ее приведенным значением, учитывающим форму потери устойчивости в каждом случае: $l_{прив} = \mu l$ где μ— коэффициент приведения длины, зависящий от способа закрепления стержня (рис. 3).

Формула для расчета критической силы для всех случаев

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu l)^2}.$$

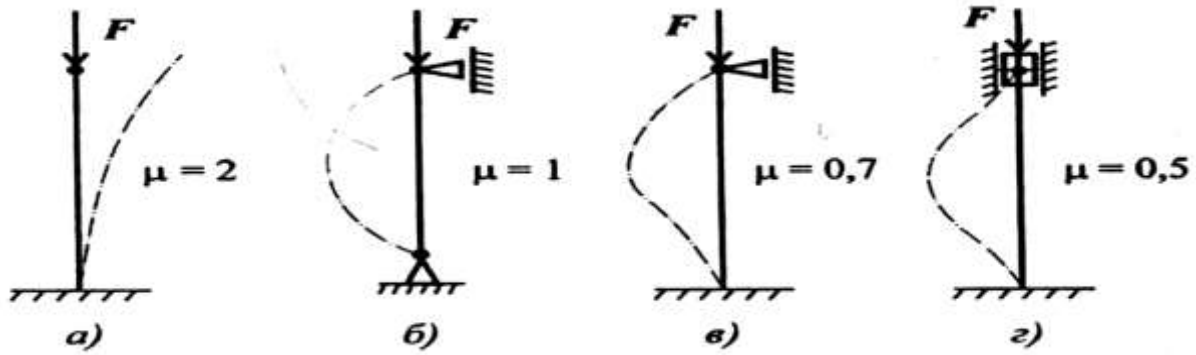


Рисунок 3

Критические напряжения.

Критическое напряжение — напряжение сжатия, соответствующее критической силе.

Напряжение от сжимающей силы определяется по формуле

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu l)^2 A},$$

где $\sigma_{кр}$ — напряжение сжатия, при котором стержень еще устойчив.

Корень квадратный из отношения минимального момента инерции сечения к площади поперечного сечения принято называть ***минимальным радиусом инерции*** i_{min}:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}}; \quad \frac{J_{min}}{A} = i_{min}^2.$$

Тогда формула для расчета критического напряжения перепишется в виде

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E i_{min}^2}{(\mu l)^2}.$$

Отношение $\mu l / i_{min}$ носит название *гибкости стержня* λ.

Гибкость стержня — величина безразмерная, чем больше гибкость, тем меньше напряжение:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}}. \qquad \sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Заметим, что гибкость не зависит от материала, а определяется только геометрией стержня.

Пределы применимости формулы Эйлера

Формула Эйлера выполняется только в пределах упругих деформаций.

Таким образом, *критическое напряжение должно быть меньше предела упругости материала.*

Предел упругости при расчетах можно заменять пределом пропорциональности. Таким образом, $\sigma_{кр} \leq \sigma_y \approx \sigma_{пц}$, где σ_y — предел упругости; $\sigma_{пц}$ — предел пропорциональности материала;

$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leqslant \sigma_{пц}$. Откуда гибкость стержня: $\lambda \geqslant \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}$;

$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}$ - предельная гибкость.

Предельная гибкость зависит от материала стержня.

В случае, если $\lambda < \lambda_{пред}$ в материале стержня возникают остаточные деформации. Поскольку в реальных конструкциях могут возникать пластические деформации, не приводящие к потере работоспособности, созданы эмпирические формулы для расчетов в этих случаях.

Расчет критического напряжения по формуле Ф. О. Ясинского для стальных стержней

Таблица 1

Материал	a, МПа	b, МПа	λ_0	$\lambda_{пред}$
Сталь Ст2	264	0,70	60	105
Сталь Ст3	310	1,14	60	100
Сталь 20, Ст4	328	1, 15	60	96
Сталь 45	449	1,67	52	85
Дюралюмин Д16Т	406	1, 83	30	53
Сосна, ель	29,3	0,194	—	70

Критическое напряжение определяется по формуле $\sigma_{кр} = a - b\lambda$, где a и b — коэффициенты, зависящие от материала; их значения представлены в таблице.

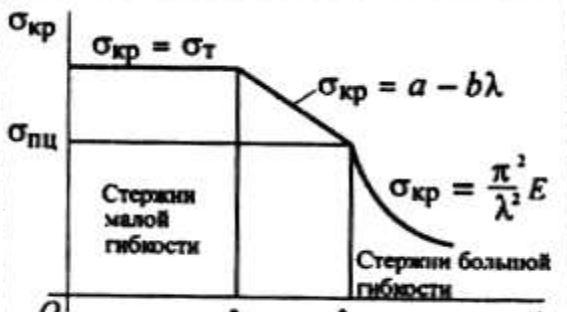


Рисунок 4

На рис. 4 представлена зависимость критического напряжения от гибкости стержня.

Для стержней малой гибкости проводится расчет на сжатие $\sigma_{сж} \le [\sigma]_{сж}$. Для стержней средней гибкости расчет проводят по формуле Ясинского $\sigma_{кр} = a - b\lambda$.

Для стержней большой гибкости расчет проводят по формуле Эйлера $\sigma_{кр} = \pi^2 E/\lambda^2$.

Критическую силу при расчете критического напряжения по формуле Ясинского можно определить как

$$F_{кр} = \sigma_{кр} A = (a - b\lambda) A.$$

Условие устойчивости:

$$F \leqslant \frac{F_{кр}}{[s_y]}.$$

Порядок выполнения расчета на устойчивость

1. Получение сведений о материале стержня для определения предельной гибкости стержня расчетным путем или по таблице:

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}.$$

2. Получение сведений о геометрических размерах поперечного сечения, длине и способах закрепления концов для определения категории стержня в зависимости от гибкости:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}},$$

где А – площадь сечения; J_{min} – минимальный момент инерции (из осевых);

$$\lambda = \mu l / i_{min}$$

μ- коэффициент приведенной длины.

3. Выбор расчетных формул для определения критической силы и критического напряжения.

При $\lambda_0 < \lambda < \lambda_{пред}$ – расчет по эмпирическим формулам.

При $\lambda > \lambda_{пред}$ – расчет по формуле Эйлера.

4. Проверка и обеспечение устойчивости.

При расчете по формуле Эйлера условие устойчивости:

$$F \leqslant \frac{F_{кр}}{[s_y]}; \quad F_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu l)^2},$$

F — действующая сжимающая сила; $[s_y]$ — допускаемый коэффициент запаса устойчивости.

При расчете по формуле Ясинского $\sigma_{кр} = a - b\lambda$, где a, b— расчетные коэффициенты, зависящие от материала (величины коэффициентов приводятся в таблице 1).

$$F_{кр} = \sigma_{кр} A; \quad F \leqslant \frac{F_{кр}}{[s_y]}.$$

В случае невыполнения условий устойчивости необходимо увеличить площадь поперечного сечения.

Иногда необходимо определить запас устойчивости при заданном нагружении:

$$s_y = \frac{F_{кр}}{F}.$$

При проверке устойчивости сравнивают расчетный запас выносливости с допускаемым:

$$s_y \leqslant [s_y].$$

Пример 1. Рассчитать гибкость стержня. Круглый стержень диаметром 20 мм закреплен так, как показано на рис. 5.

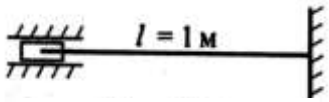


Рисунок 5

Решение.

1. Гибкость стержня определяется по формуле

$$\lambda = \mu l / i_{min}.$$

2. Определяем минимальный радиус инерции для круга.

$$i_{min} = \sqrt{J_{min}/A}.$$

Подставив выражения для J_{min} и A (сечение — круг)

$$J_{min} = \frac{\pi d^4}{64}, \quad A = \frac{\pi d^2}{4},$$

получим

$$i_{min} = \sqrt{\frac{\pi d^4}{64} \cdot \frac{4}{\pi d^2}} = \frac{d}{4}.$$

3. Коэффициент приведения длины для данной схемы крепления $\mu = 0{,}5$.

4. Гибкость стержня будет равна

$$\lambda = \frac{0{,}5 \cdot 1000}{5} = 100.$$

Пример 2. Как изменится критическая сила для стержня, если изменить способ закрепления концов?

Сравнить представленные схемы (рис. 6)

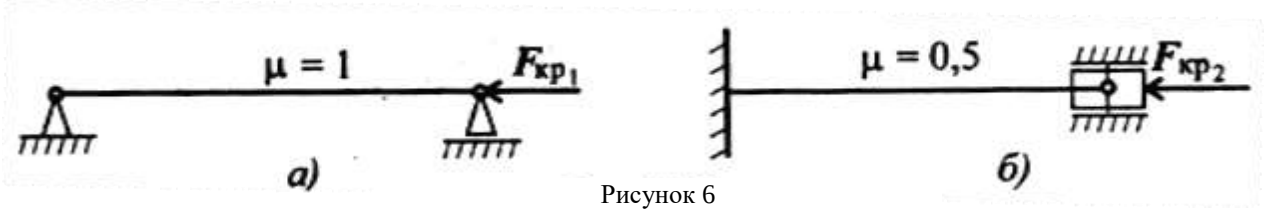


Рисунок 6

Решение.

$$\frac{F_{кр_1}}{F_{кр_2}} = \frac{\pi^2 E \mathcal{J}_{min}(\mu_2 l)^2}{(\mu_1 l)^2 \pi^2 E \mathcal{J}_{min}};$$

$$F_{кр_2} = F_{кр_1}\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2}; \quad F_{кр_2} = F_{кр_1}\frac{1^2}{0{,}5^2}.$$

Критическая сила увеличится в 4 раза

$$F_{кр_2} = 4F_{кр_1}.$$

Пример 3. Как изменится критическая сила при расчете на устойчивость, если стержень двутаврового сечения (рис. 7.а, двутавр № 12) заменить стержнем прямоугольного сечения той же площади (рис. 7.б)? Остальные параметры конструкции не меняются. Расчет выполнить по формуле Эйлера.

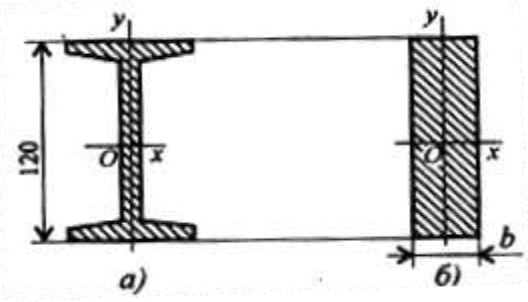


Рисунок 7

1. Определим ширину сечения прямоугольника, высота сечения равна высоте сечения двутавра. Геометрические параметры двутавра № 12 по ГОСТ 8239-89 следующие:

площадь сечения $A_1 = 14{,}7$ см^2;

минимальный из осевых моментов инерции J=27,9 см^4.

По условию площадь прямоугольного сечения равна площади сечения двутавра. Определяем ширину полосы при высоте 12 см.

$$A_2 = bh = 14{,}7\,\text{см}^2; \quad b = \frac{14{,}7}{12} = 1{,}225\,\text{см}.$$

2. Определим минимальный из осевых моментов инерции.

$$\mathcal{J}_{min_2} = \mathcal{J}_{y_2} = \frac{hb^3}{12}; \quad \mathcal{J}_{y_2} = \frac{12(1{,}225)^3}{12} = 1{,}84\,\text{см}^4.$$

3. Критическая сила определяется по формуле Эйлера:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E \mathcal{J}_{min}}{(\mu l)^2}.$$

4. При прочих равных условиях отношение критических сил равно отношению минимальных моментов инерции:

$$\frac{F_{кр_1}}{F_{кр_2}} = \frac{27{,}9}{1{,}84} \cong 15.$$

5. Таким образом, устойчивость стержня с сечением двутавр № 12 в 15 раз выше, чем устойчивость стержня выбранного прямоугольного сечения.