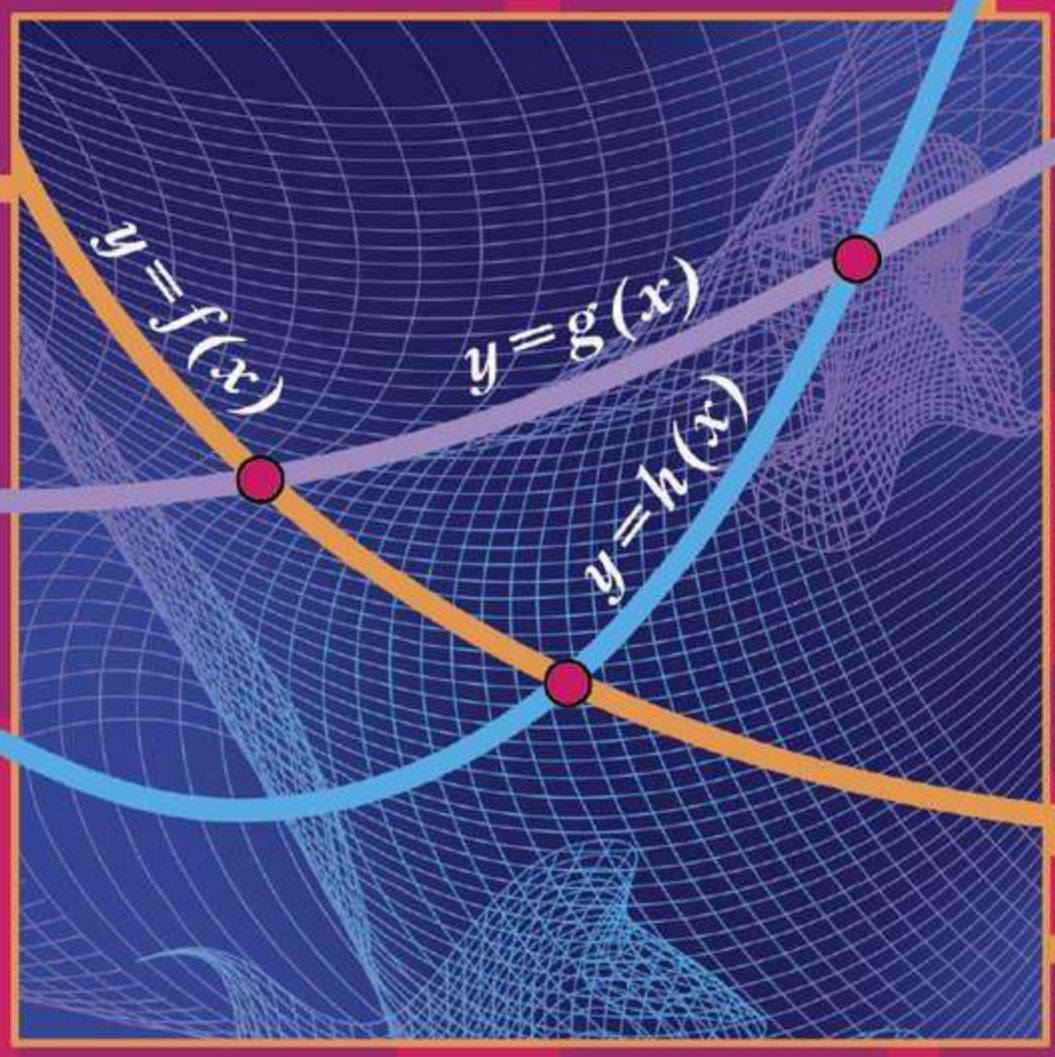
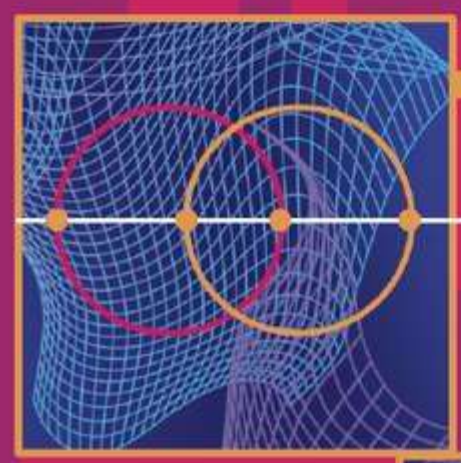
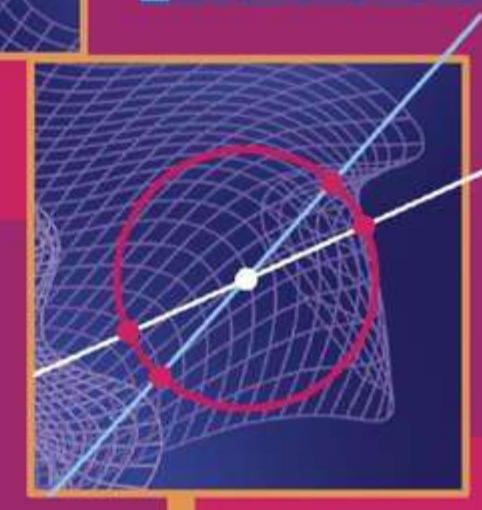
АЛГЕБРА

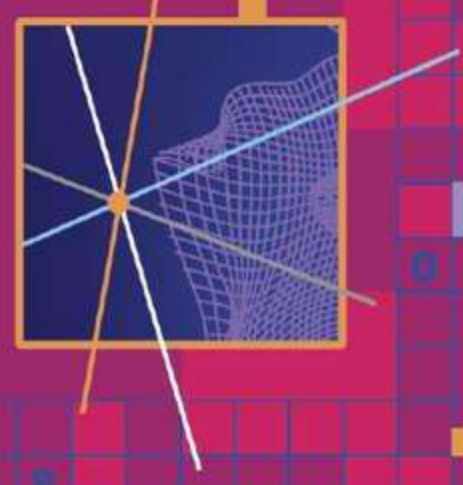


8

А.Г. Мерзляк
В.М. Поляков







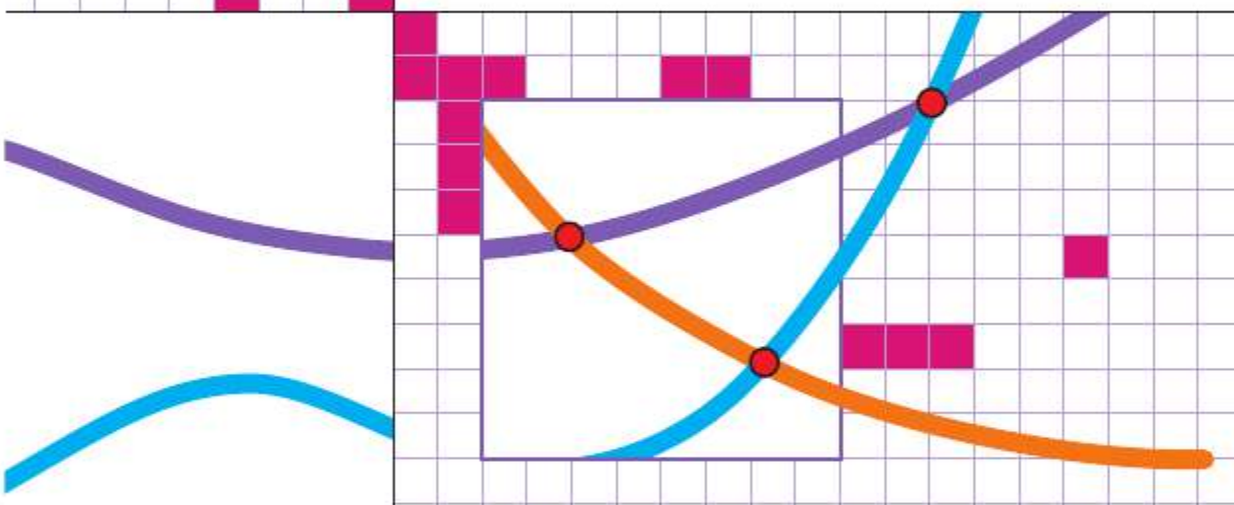
вентана
граф

Алгоритм успеха

Российский учебник

А.Г. Мерзляк
В.М. Поляков

АЛГЕБРА



8 класс

2-е издание,
стереотипное

Учебник для учащихся
общеобразовательных
организаций

Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации

Москва
Издательский центр
«Вентана-Граф»
2019

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
М52

Учебник включён в Федеральный перечень

Мерзляк А.Г.

М52 Алгебра : 8 класс : учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков. — 2-е изд., стереотип. — М. : Вентана-Граф, 2019. — 384 с. : ил. — (Российский учебник).

ISBN 978-5-360-10153-6

Учебник предназначен для углублённого изучения алгебры в 8 классе и входит в комплект из трёх книг: «Алгебра. 7 класс», «Алгебра. 8 класс», «Алгебра. 9 класс» (авт. А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков) системы «Алгоритм успеха».

Содержание учебника соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

РОССИЙСКИЙ УЧЕБНИК

Учебное издание

Мерзляк Аркадий Григорьевич, **Поляков** Виталий Михайлович

Алгебра

8 класс

Учебник для учащихся общеобразовательных организаций

Редактор *Е.В. Буцко.* Художественный редактор *Д.Э. Буланкин*
Макет *А.Б. Орешиной.* Внешнее оформление: *Д.В. Коротаев*
Рисунки: *Д.В. Мокшин, И.В. Павлова.* Компьютерная вёрстка *О.В. Поповой*
Технический редактор *Е.А. Урвачева.* Корректор *О.Ч. Кохановская*

Подписано в печать 14.12.18. Формат 70×90/16. Гарнитура SchoolBook
Печать офсетная. Печ. л. 24,0. Тираж 8000 экз. Заказ №

ООО Издательский центр «Вентана-Граф». 123308, г. Москва, ул. Зорге, д. 1, эт. 5



росучебник.рф/метод

Предложения и замечания по содержанию и оформлению книги можно отправлять по электронному адресу: expert@rosuchebnik.ru

По вопросам приобретения продукции издательства обращайтесь: тел.: 8-800-700-64-83; e-mail: sales@rosuchebnik.ru

Электронные формы учебников, другие электронные материалы и сервисы: lecta.rosuchebnik.ru, тел.: 8-800-555-46-68

В помощь учителю и ученику: регулярно пополняемая библиотека дополнительных материалов к урокам, конкурсы и акции с поощрением победителей, рабочие программы, вебинары и видеозаписи открытых уроков росучебник.рф/метод

ISBN 978-5-360-10153-6

© Мерзляк А.Г., Поляков В.М., 2014
© Издательский центр «Вентана-Граф», 2014

Условные обозначения

◆

Простые задачи

◆ ◆

Задачи среднего уровня сложности

◆ ◆ ◆

Сложные задачи



Задачи высокой сложности



Ключевые задачи, результат которых можно использовать при решении других задач

Окончание доказательства теоремы

Окончание решения задачи



Задачи, которые можно решать с помощью компьютера

5.5. Задания для устной работы

5.10. Задания, рекомендованные для домашней работы

глава

1 Множества и операции над ними

В этой главе вы повторите знакомое вам из курса алгебры 7 класса понятие множества. Расширите свои знания о способах задания множества. Научитесь выполнять операции над множествами, устанавливать взаимно однозначное соответствие между множествами.

§ 1 Множество. Подмножества данного множества

Часто в повседневной жизни объединённые по некоторому признаку объекты мы называем *группой, объединением, коллекцией, совокупностью* и т. п. Для этих слов в математике существует синоним **множество.**

Приведём несколько примеров множеств:

- множество учеников вашей школы;
- множество учеников вашей школы, являющихся призёрами школьной олимпиады по математике;
- множество федеральных округов России;
- множество двузначных чисел;
- множество пар чисел $(x; y)$, являющихся решениями уравнения $x^2 + y^2 = 1$.

Отдельные множества в математике имеют названия:

- множество точек плоскости — **геометрическая фигура**;
- множество точек, обладающих заданным свойством, — **геометрическое место точек (ГМТ);**
- множество значений аргумента функции f — **область определения функции** f, которую обозначают $D(f)$;
- множество значений функции f — **область значений функции** f, которую обозначают $E(f)$.

Множества, элементами которых являются числа, называют **числовыми множествами.** Для некоторых числовых множеств используют специальные обозначения:

- множество натуральных чисел, обозначают буквой $\boldsymbol{N}$;
- множество целых чисел, обозначают буквой $\boldsymbol{Z}$;
- множество рациональных чисел, обозначают буквой $\boldsymbol{Q}$.

Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут $a \in A$ (читают: «a принадлежит множеству A»). Если элемент b не принадлежит множеству A, то пишут $b \notin A$ (читают: «b не принадлежит множеству A»).

Например, $12 \in \boldsymbol{N}$, $-3 \notin \boldsymbol{N}$, $\frac{2}{3} \in \boldsymbol{Q}$, $\frac{2}{3} \notin \boldsymbol{Z}$, $a \in \{a, b, c\}$.

Чаще всего множество задают одним из двух способов.

Первый способ. Множество задают перечислением всех его элементов.

Например, если M — множество натуральных чисел, меньших 5, то пишут $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

Второй способ. Указывается **характеристическое свойство** элементов множества, т. е. свойство, которым обладают все элементы данного множества и только они.

Например, если x — произвольный элемент множества A, которое задано с помощью характеристического свойства его элементов, то пишут $A = \{x \mid \ldots\}$. После вертикальной черты указывают условие, которому должен удовлетворять элемент x, чтобы принадлежать множеству A.

Рассмотрим несколько примеров.

- $\{x \mid x = 3n, n \in \boldsymbol{N}\}$ — множество натуральных чисел, кратных 3.
- $\{x \mid x(x^2 - 1) = 0\}$ — множество корней уравнения $x(x^2 - 1) = 0$. Это множество равно множеству $\{-1, 0, 1\}$, которое, в свою очередь, можно задать с помощью другого характеристического свойства: $\{x \mid x \in \boldsymbol{Z}, |x| < 2\}$. Имеем: $\{x \mid x(x^2 - 1) = 0\} = \{x \mid x \in \boldsymbol{Z}, |x| < 2\}$.
- $\{x \mid [x] = 0\}$[1] — множество чисел таких, что $0 \leqslant x < 1$. Понятно, что $\{x \mid [x] = 0\} = \{x \mid 0 \leqslant x < 1\}$.
- Пусть $(x; y)$ — координаты точки. Тогда множество точек $\{(x; y) \mid y = 2x - 1, x$ — любое число$\}$ — прямая, являющаяся графиком функции $y = 2x - 1$.

Вообще для точек координатной плоскости множество $\{(x; y) \mid y = f(x), x \in D(f)\}$ — это график функции f.

В геометрии, задавая множество точек с помощью характеристического свойства, мы тем самым задаём ГМТ.

- Если A, B — заданные точки плоскости, а X — произвольная точка этой плоскости, то множество $\{X \mid XA = XB\}$ — серединный перпендикуляр отрезка AB.

Пример 1. Докажите, что множество A всех чётных натуральных чисел равно множеству B чисел, которые можно представить в виде суммы двух нечётных натуральных чисел.

Решение. Пусть $x \in A$. Тогда можно записать, что $x = 2m$, где m — натуральное число. Имеем: $x = 2m = (2m - 1) + 1$. Следовательно, $x \in B$.

---

[1] См. пример 3 § 25 учебника «Алгебра. 7 класс. Для классов с углублённым изучением математики».

Теперь предположим, что $x \in B$. Тогда $x = (2n - 1) + (2k - 1)$, где n и k — натуральные числа. Имеем: $x = 2n - 1 + 2k - 1 = 2(n + k - 1)$. Следовательно, $x \in A$.

Таким образом: если $x \in A$, то $x \in B$, и наоборот, если $x \in B$, то $x \in A$. Отсюда $A = B$. ■

Рассмотрим множество цифр десятичной системы счисления $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Выделим из множества A его элементы, являющиеся чётными цифрами. Получим множество $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, все элементы которого являются элементами множества A.

Определение

Множество B называют подмножеством множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A.

Это записывают так: $B \subset A$ или $A \supset B$ (читают: «множество B — подмножество множества A» или «множество A содержит множество B»).

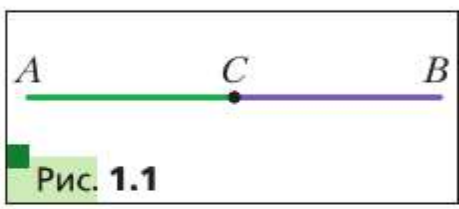


Рис. 1.1

Рассмотрим примеры:

- $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Q} \supset \boldsymbol{N}$;
- $\{x \mid 2x - 1 = 0\} \subset \left\{x \mid x^2 = \frac{1}{4}\right\}$;
- $\{a\} \subset \{a, b\}$;
- множество учащихся вашего класса является подмножеством множества учащихся вашей школы;
- множество млекопитающих является подмножеством множества позвоночных;
- множество точек луча CB является подмножеством множества точек прямой AB (рис. 1.1).

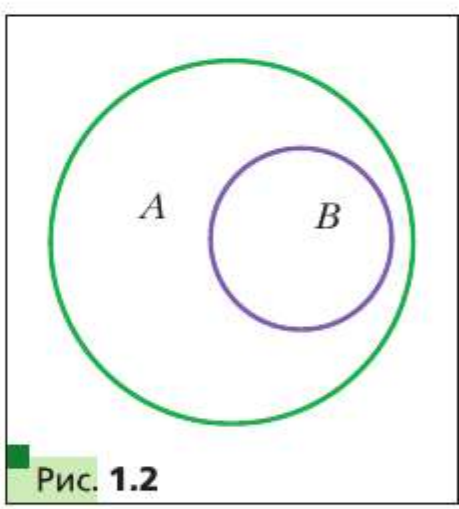


Рис. 1.2

Для иллюстрации соотношений между множествами пользуются схемами, называемыми **диаграммами Эйлера**.

На рисунке 1.2 изображены множество A (больший круг) и множество B (меньший круг, полностью содержащийся в большем). Эта схема означает, что $B \subset A$ (или $A \supset B$).

На рисунке 1.3 с помощью диаграмм Эйлера показано соотношение между множествами $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{Q}$.

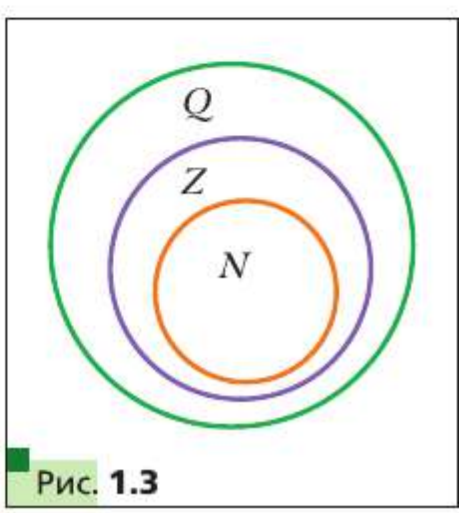


Рис. 1.3

Если $B \subset A$, то с помощью рисунка 1.2 можно сделать такие выводы:

1) для того чтобы элемент x принадлежал множеству A, достаточно, чтобы он принадлежал множеству B;

2) для того чтобы элемент x принадлежал множеству B, необходимо, чтобы он принадлежал множеству A.

Например, если A — множество натуральных чисел, кратных 5, а B — множество натуральных чисел, кратных 10, то очевидно, что $B \subset A$. Поэтому, для того чтобы натуральное число n было кратным 5 ($n \in A$), достаточно, чтобы оно было кратным 10 ($n \in B$). Для того чтобы натуральное число n было кратно 10 ($n \in B$), необходимо, чтобы оно было кратно 5 ($n \in A$).

Из определений подмножества и равенства множеств следует, что *если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$.*

Если в множестве B нет элемента, не принадлежащего множеству A, то множество B является подмножеством множества A. В силу этого условия пустое множество считают подмножеством любого множества. Действительно, пустое множество не содержит ни одного элемента, следовательно, в нём нет элемента, который не принадлежит данному множеству A. Поэтому для любого множества A справедливо утверждение: $\varnothing \subset A$.

Любое множество A является подмножеством самого себя, т. е. $A \subset A$.

Определение

Если $B \subset A$ и $B \neq A$, то множество B называют собственным подмножеством множества A.

Например, множество $\boldsymbol{Z}$ является собственным подмножеством множества $\boldsymbol{Q}$.

Пример 2. Сколько подмножеств имеет множество $A = \{a, b, c\}$?

Решение. Выпишем все подмножества данного множества: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$, $\varnothing$. Всего получили 8 подмножеств. ■

В курсе алгебры 9 класса будет доказано, что *количество подмножеств n-элементного множества равно 2^n.*

1. Приведите примеры множеств.

2. Как обозначают множество и его элементы?

3. Как обозначают множества натуральных, целых и рациональных чисел?

4. Как записать, что элемент a принадлежит множеству A? Не принадлежит множеству A?
5. Какие существуют способы задания множеств?
6. Какое множество называют подмножеством данного множества?
7. Как наглядно иллюстрируют соотношение между множествами?
8. Какое множество является подмножеством любого множества?
9. Какое множество называют собственным подмножеством данного множества?

Упражнения

1.1. Как называют множество львов, подчиняющихся одному вожаку?

1.2. Назовите какое-нибудь множество военнослужащих, объединённых в одно подразделение.

1.3. Поставьте вместо звёздочки знак $\in$ или $\notin$ так, чтобы получилось верное утверждение:

1) $5 * \boldsymbol{N}$; 3) $-5 * \boldsymbol{Q}$; 5) $3{,}14 * \boldsymbol{Q}$;

2) $0 * \boldsymbol{N}$; 4) $-\frac{1}{2} * \boldsymbol{Z}$; 6) $\pi * \boldsymbol{Q}$.

1.4. Дана функция $f(x) = x^2 + 1$. Поставьте вместо звёздочки знак $\in$ или $\notin$ так, чтобы получилось верное утверждение:

1) $3 * D(f)$; 3) $\frac{1}{2} * E(f)$;

2) $0 * D(f)$; 4) $1{,}01 * E(f)$.

1.5. Задайте с помощью перечисления элементов множество:

1) $A = \{x \mid x \in \boldsymbol{N},\ x^2 - 1 = 0\}$;
2) $B = \{x \mid x \in \boldsymbol{Z},\ |x| < 3\}$;
3) $C = \{x \mid x \in \boldsymbol{N},\ x \leqslant 15,\ x = 7k,\ k \in \boldsymbol{Z}\}$.

1.6. Задайте с помощью перечисления элементов множество:

1) $A = \{x \mid x \in \boldsymbol{Z},\ x(2\ |x| - 1) = 0\}$;
2) $B = \{x \mid x \in \boldsymbol{N},\ -3 \leqslant x < 2\}$.

1.7. Пусть O — данная точка плоскости. Что представляет собой множество точек M этой плоскости:

1) $\{M \mid OM = 3$ см$\}$; 3) $\{M \mid OM \leqslant 5$ см$\}$?
2) $\{M \mid OM > 5$ см$\}$;

1.8. Пусть A, B, C — три данные точки плоскости. Что представляет собой множество точек M этой плоскости $\{M \mid MA = MB = MC\}$?

1.9. Назовите какие-нибудь геометрические фигуры, которые являются подмножествами множества точек прямой.

1.10. Назовите какие-нибудь геометрические фигуры, которые являются подмножествами множества точек круга.

1.11. Пусть A — множество букв слова «координата». Множество букв какого из слов является подмножеством множества A:

1) нора; 5) нитки; 9) ордината;
2) трактор; 6) корка; 10) дорога;
3) картина; 7) дар; 11) корона;
4) крокодил; 8) подарок; 12) кардинал?

1.12. Пусть A — множество цифр числа 1958. Является ли множество цифр числа x подмножеством множества A, если:

1) $x = 98$; 3) $x = 519$; 5) $x = 195\,888$;
2) $x = 9510$; 4) $x = 5858$; 6) $x = 91\,258$?

1.13. Пусть $A \neq \varnothing$. Какие два разных подмножества имеет множество A?

◆ ◆

1.14. Равны ли множества A и B:

1) $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 1\}$;
2) $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}\}$;
3) $A = \{(0; 1)\}$, $B = \{(1; 0)\}$;
4) $A = \{x \mid x \leqslant 3, x \in \boldsymbol{Z}\}$, $B = \{x \mid x < 4, x \in \boldsymbol{Z}\}$;
5) $A = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, x$ кратно 2 и 3$\}$, $B = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, x$ кратно 6$\}$;
6) $A = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, x \leqslant 15, x = 19k, k \in \boldsymbol{Z}\}$, $B = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, 3 < x < 4\}$?

1.15. Укажите равные множества:

$A = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, x = 6n - 3, n \in \boldsymbol{N}\}$;
$B = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, x = 3n, n \in \boldsymbol{N}\}$;
$C = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, x$ кратно 3 и не кратно 2$\}$;
$D = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, x = 6n + 3, n \in \boldsymbol{N}\}$.

1.16. Какие из следующих множеств равны пустому множеству:

1) $A = \{x \mid x \neq x\}$;
2) $B = \{x \mid x \in \boldsymbol{Z}, \frac{1}{2}x - 2 = 0\}$;
3) $C = \{x \mid x \in \boldsymbol{Z}, |x| < 1\}$;
4) $D = \{x \mid 3x^4 + 5x^2 + 7 = 0\}$;
5) $E = \{x \mid x > |x|\}$?

1.17. Какое из следующих утверждений верно:

1) $\{a\} \in \{a, b\}$; 3) $a \subset \{a, b\}$;
2) $\{a\} \subset \{a, b\}$; 4) $\{a, b\} \in \{a, b\}$?

1.18. Докажите, что если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$.

1.19. Расположите данные множества в такой последовательности, чтобы каждое следующее множество было подмножеством предыдущего:

1) A — множество восьмиклассников вашей школы;
B — множество восьмиклассников вашей школы, которые учатся в математическом классе;

C — множество учащихся вашей школы, которые не младше 10 лет;
D — множество учащихся 8 класса, являющихся призёрами районной математической олимпиады;
2) A — множество всех млекопитающих;
B — множество всех псовых;
C — множество всех позвоночных;
D — множество всех волков;
E — множество всех хищных млекопитающих.

1.20. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера соотношение между множествами:
1) A — множество всех неотрицательных рациональных чисел;
$B = \{0\}$;
$\boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел;
2) $\boldsymbol{Z}$ — множество целых чисел;
A — множество натуральных чисел, кратных 6;
B — множество натуральных чисел, кратных 3.

1.21. Запишите с помощью символа $\subset$ соотношение между множествами:
$A = \{x \mid x = 2n,\ n \in \boldsymbol{N}\}$; $C = \{x \mid x = 10n,\ n \in \boldsymbol{N}\}$;
$B = \{x \mid x = 50n,\ n \in \boldsymbol{N}\}$; $D = \{x \mid x = 5n,\ n \in \boldsymbol{N}\}$.

1.22. Какое из утверждений $A \subset B$ или $B \subset A$ является верным для данных множеств:
$A = \{x \mid x = 4n + 2,\ n \in \boldsymbol{N}\}$; $B = \{x \mid x = 8n + 2,\ n \in \boldsymbol{N}\}$?

1.23. Даны множества $\{7\}$, $\{11\}$, $\{19\}$, $\{7, 11\}$, $\{7, 19\}$, $\{11, 19\}$, $\varnothing$, являющиеся всеми собственными подмножествами некоторого множества A. Запишите множество A.

1.24. Назовите все подмножества множества $\{1, 2\}$.

1.25. На языке «необходимо и достаточно» опишите принадлежность элемента x множествам A, B и C (рис. 1.4).

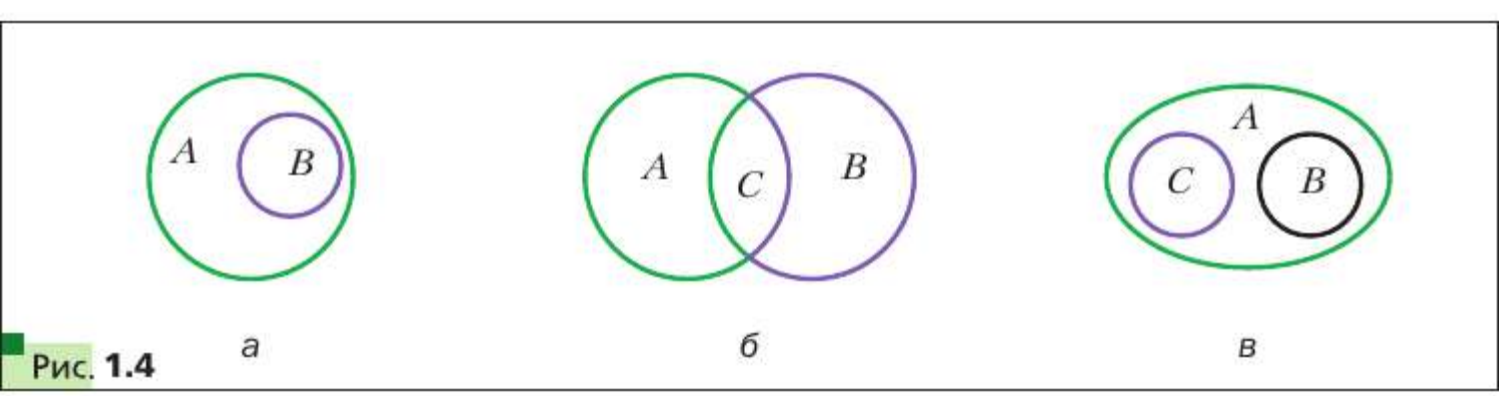


Рис. **1.4**

1.26. Вместо многоточия поставьте одно из слов — «необходимо» или «достаточно»:
1) для того чтобы треугольник был равносторонним, ... , чтобы два его угла были равны;

2) для того чтобы число делилось нацело на 3, ... , чтобы оно делилось нацело на 9;

3) для того чтобы последняя цифра десятичной записи натурального числа была 0, ... , чтобы число было кратно 5.

1.27. Известно, что для любого множества B множество A является его подмножеством. Найдите множество A.

1.28. Приведите пример такого одноэлементного множества, что его элемент является одновременно подмножеством данного множества.

◆ ◆ ◆

1.29. Докажите, что $\{x \mid x = 3k - 1,\ k \in \boldsymbol{Z}\} = \{x \mid x = 3n + 2,\ n \in \boldsymbol{Z}\}$.

1.30. Докажите, что $\{x \mid x = 4n - 1,\ n \in \boldsymbol{Z}\} = \{x \mid x = 4m + 3,\ m \in \boldsymbol{Z}\}$.

Упражнения для повторения

1.31. Решите уравнение:

1) $(0{,}6x - 3)(2x + 1) = 0$;
2) $x^2 - 16 = 0$;
3) $3x^2 + 15x = 0$;
4) $16x^2 - 8x + 1 = 0$;
5) $x(x + 2)(5x - 1) = 0$;
6) $(3x - 1)^2 - 25x^2 = 0$;
7) $(2x + 1)^2 = (x + 2)^2$.

1.32. Известно, что $4x^2y = 3$. Найдите значение выражения:

1) $6x^2y$; 2) $4x^4y^2$; 3) $-3x^6y^3$.

1.33. Задайте формулой функцию, если значения функции:

1) противоположны соответствующим значениям аргумента;
2) равны удвоенным соответствующим значениям аргумента;
3) на 2 меньше квадратов соответствующих значений аргумента.

§ 2 Операции над множествами

Пусть A — множество решений уравнения $x + y = 5$, а B — множество решений уравнения $x - y = 3$. Тогда множество C решений системы уравнений

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 3 \end{cases}$$

состоит из всех элементов, принадлежащих и множеству A, и множеству B. В этом случае говорят, что множество C является **пересечением множеств** A и B.

Определение

Пересечением множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих и множеству A, и множеству B.

Пересечение множеств A и B обозначают так: $A \cap B$. Из определения следует, что

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Легко убедиться, что решением рассмотренной выше системы является пара (4; 1). Этот факт можно записать так:

$\{(x; y) \mid x + y = 5\} \cap \{(x; y) \mid x - y = 3\} = \{(4; 1)\}$.

Если множества A и B не имеют общих элементов, то их пересечением является пустое множество, т. е. $A \cap B = \varnothing$. Также заметим, что $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Из определения пересечения двух множеств следует, что *если* $A \subset B$, *то* $A \cap B = A$, в частности, *если* $B = A$, *то* $A \cap A = A$.

Например:

$\boldsymbol{Z} \cap \boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}$,

$\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}$.

Пересечение множеств удобно иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера-Венна. На рисунке 2.1 заштрихованная фигура изображает множество $A \cap B$.

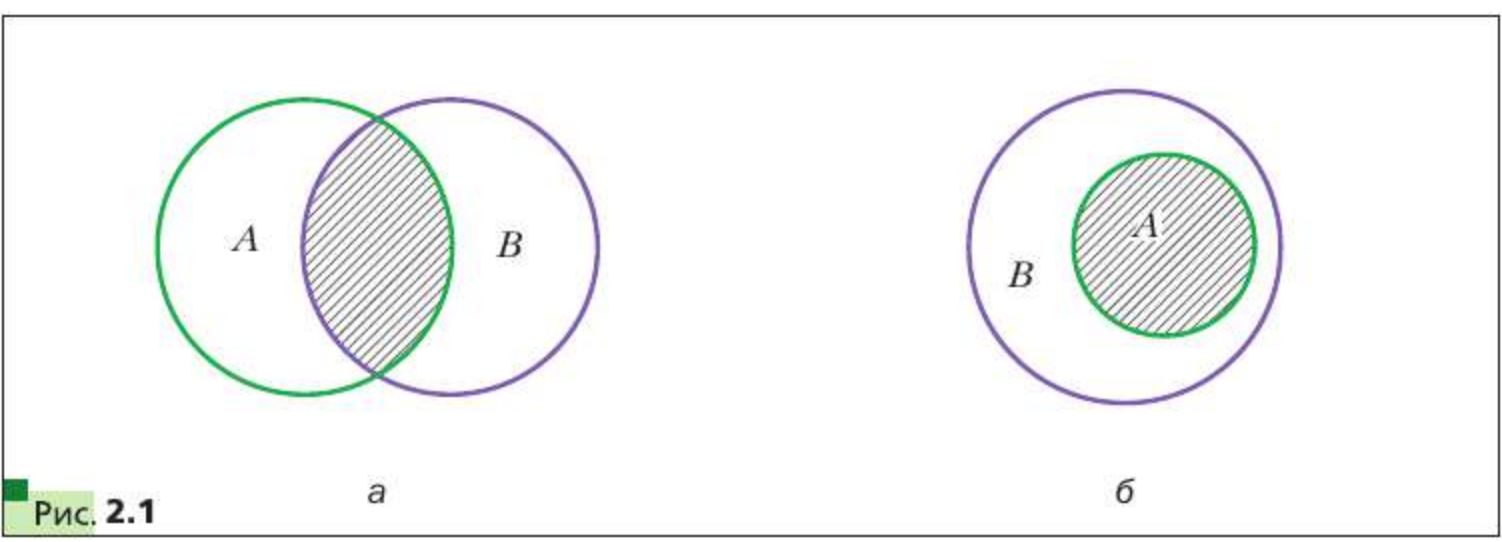


Рис. **2.1**

Для того чтобы решить уравнение $(x^2 - x)(x^2 - 1) = 0$, надо решить каждое из уравнений $x^2 - x = 0$ и $x^2 - 1 = 0$.

Имеем: $A = \{0, 1\}$ — множество корней первого уравнения, $B = \{-1, 1\}$ — множество корней второго уравнения. Множество $C = \{-1, 0, 1\}$, каждый элемент которого принадлежит или множеству A, или множеству B, является множеством корней исходного уравнения. Множество C называют **объединением множеств** A и B.

Определение

Объединением множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств: или множеству A, или множеству B.

Объединение множеств A и B обозначают так: $A \cup B$. Из определения следует, что

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Если требуется найти объединение множеств решений уравнений, то говорят, что требуется решить **совокупность уравнений**.

Совокупность записывают с помощью квадратной скобки. Так, чтобы решить уравнение $(x^2 - x)(x^2 - 1) = 0$, нужно решить совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - x = 0, \\ x^2 - 1 = 0. \end{array}\right.$$

Заметим, что для любого множества A выполняется равенство $A \cup \varnothing = A$.

Из определения объединения двух множеств следует, что *если* $A \subset B$, *то* $A \cup B = B$, в частности, *если* $B = A$, *то* $A \cup A = A$.

Объединение множеств удобно иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера-Венна. На рисунке 2.2 заштрихованная фигура изображает множество $A \cup B$.

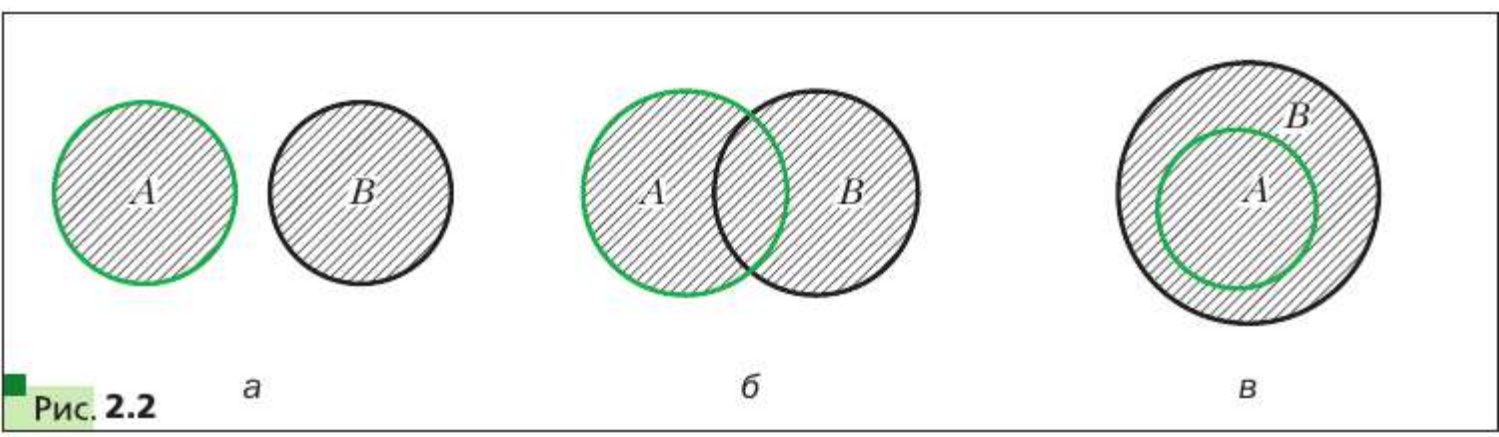


Рис. **2.2**

Часто приходится рассматривать пересечение и объединение трёх и более множеств.

Пересечение множеств A, B и C — это множество всех элементов, принадлежащих и множеству A, и множеству B, и множеству C (рис. 2.3).

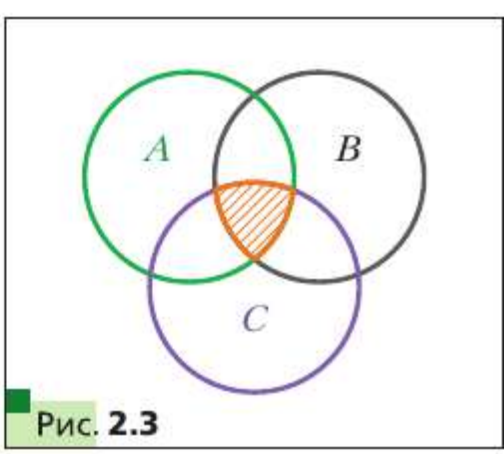


Рис. **2.3**

Например, чтобы решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 17, \end{cases}$$

надо найти пересечение трёх множеств: $\{(x; y) \mid x + y = 5\}$, $\{(x; y) \mid x - y = 3\}$ и $\{(x; y) \mid x^2 + y^2 = 17\}$.

Объединение множеств A, B и C — это множество всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств: или множеству A, или множеству B, или множеству C (рис. 2.4).

Например, объединение множеств остроугольных, тупоугольных и прямоугольных треугольников — это множество всех треугольников.

Если из множества $\boldsymbol{Z}$ исключить множество $\boldsymbol{N}$, то получим множество целых неположительных чисел. Оно состоит из всех элементов множества $\boldsymbol{Z}$, которые не принадлежат множеству $\boldsymbol{N}$. Говорят, что множество целых неположительных чисел является **разностью множеств $\boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{N}$.**

Определение

Разностью множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих множеству A, но не принадлежащих множеству B.

Разность множеств A и B обозначают так: $A \setminus B$. Из определения следует, что

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Заметим, что для любого множества A выполняется равенство $A \setminus \varnothing = A$.

Из определения разности двух множеств следует, что *если* $A \subset B$, *то* $A \setminus B = \varnothing$, в частности, *если* $B = A$, *то* $A \setminus A = \varnothing$.

Разность множеств удобно иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера-Венна. На рисунке 2.5 заштрихованная фигура изображает множество $A \setminus B$.

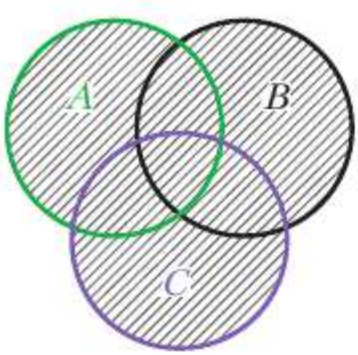
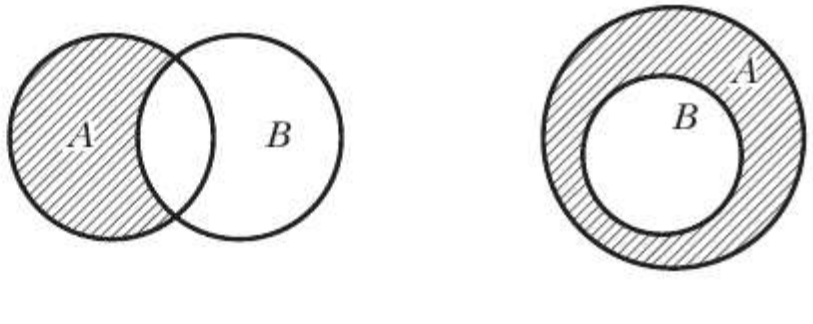


Рис. 2.4



а б

Рис. 2.5

Пример 1. Найдите пересечение множеств A и B, если:

1) $A = \{x \mid x = 5k,\ k \in \boldsymbol{N}\}$, $B = \{x \mid x = 3n,\ n \in \boldsymbol{N}\}$;

2) $A = \{x \mid x > 3\}$, $B = \{x \mid x \leqslant 4\}$;

3) $A = \{x \mid x = 2m,\ m \in \boldsymbol{N}\}$, B — множество простых чисел.

Решение.

1) A — множество натуральных чисел, кратных 5.

B — множество натуральных чисел, кратных 3.

Тогда множество $A \cap B$ состоит из всех натуральных чисел, кратных 5 и 3 одновременно, т. е. из всех натуральных чисел, кратных 15. Следовательно, $A \cap B = \{x \mid x = 15m,\ m \in \boldsymbol{N}\}$.

2) $A \cap B = \{x \mid 3 < x \leqslant 4\}$.

3) A — множество чётных натуральных чисел. Поскольку множество простых чисел содержит только одно чётное число (число 2), то $A \cap B = \{2\}$. ■

Пример 2. Найдите объединение множеств A и B, если:

1) $A = \{x \mid x = 2k - 1,\ k \in \boldsymbol{N}\}$, $B = \{x \mid x = 2n,\ n \in \boldsymbol{N}\}$;

2) $A = \{x \mid x = 2k - 1,\ k \in \boldsymbol{N}\}$, $B = \{x \mid x = 4n + 1,\ n \in \boldsymbol{N}\}$;

3) $A = \{X \mid OX < 3\}$, $B = \{X \mid OX = 3\}$, где O и X — точки плоскости, O — данная точка.

Решение.

1) A — множество нечётных натуральных чисел, B — множество чётных натуральных чисел. Тогда $A \cup B$ — это множество натуральных чисел, т. е. $A \cup B = \boldsymbol{N}$.

2) A — множество нечётных натуральных чисел. Элементами множества B являются только нечётные числа. Следовательно, $B \subset A$. Тогда $A \cup B = A = \{x \mid x = 2k - 1,\ k \in \boldsymbol{N}\}$.

3) Очевидно, что $A \cup B = \{X \mid OX \leqslant 3\}$. Следовательно, $A \cup B$ — это круг с центром в точке O и радиусом 3. ■

Пример 3. Найдите разность множеств A и B, если:

1) $A = \{x \mid x = 2k - 1,\ k \in \boldsymbol{N}\}$, $B = \{x \mid x = 2n + 1,\ n \in \boldsymbol{N}\}$;

2) $A = \{X \mid OX \leqslant 3\}$, $B = \{X \mid OX < 3\}$, где O и X — точки плоскости, O — данная точка.

Решение.

1) A — множество нечётных натуральных чисел, B — множество нечётных натуральных чисел, больших 1. Тогда $A \setminus B = \{1\}$.

2) Очевидно, что $A \setminus B = \{X \mid OX = 3\}$. Следовательно, $A \setminus B$ — это окружность с центром O и радиусом 3. ■

?

1. Что называют пересечением двух множеств?
2. Что называют объединением двух множеств?
3. Как находят пересечение трёх и более множеств? Объединение трёх и более множеств?
4. Что называют разностью двух множеств?

5. Как с помощью диаграмм Эйлера иллюстрируют пересечение, объединение и разность двух множеств?

Упражнения

2.1. Найдите пересечение множеств цифр, используемых в записи чисел:
1) 555 288 и 82 223; 2) 470 713 и 400 007.

2.2. Пусть A — множество двузначных чисел, B — множество простых чисел. Принадлежит ли множеству $A \cap B$ число: 5, 7, 11, 31, 57, 96?

2.3. Найдите множество общих делителей чисел 30 и 45.

2.4. Найдите объединение множеств цифр, используемых в записи чисел:
1) 27 288 и 56 383; 2) 55 555 и 777 777.

2.5. Какое из следующих утверждений верно:
1) $\{a, b\} \cap \{a\} = a$; 3) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$;
2) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{a, b\}$; 4) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{b\}$?

2.6. Найдите пересечение множеств A и B, если:
1) A — множество равнобедренных треугольников, B — множество равносторонних треугольников;
2) A — множество прямоугольных треугольников, B — множество равносторонних треугольников;
3) A — множество двузначных чисел, B — множество натуральных чисел, кратных 19;
4) A — множество однозначных чисел, B — множество простых чисел.

2.7. Найдите пересечение множеств A и B, если:
1) $A = \{x \mid x < 19\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x > 11\}$;
2) $A = \{x \mid x = 4n, n \in \mathbf{N}\}$, $B = \{x \mid x = 6n, n \in \mathbf{N}\}$;
3) $A = \{(x, y) \mid 2x - y = 1\}$, $B = \{(x, y) \mid x + y = 5\}$.

2.8. Начертите два треугольника так, чтобы их пересечением была геометрическая фигура: 1) отрезок; 2) точка; 3) треугольник; 4) пятиугольник; 5) шестиугольник.

2.9. Какие фигуры могут быть пересечением двух лучей, лежащих на одной прямой?

2.10. Известно, что для любого множества B выполняется равенство $A \cap B = A$. Найдите множество A.

2.11. Какое из следующих утверждений верно:
1) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{a, b\}$; 3) $\{a, b\} \cup \{a\} = \{a\}$;
2) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{b\}$; 4) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{\{b\}\}$?

2.12. Найдите объединение множеств A и B, если:

1) A — множество равнобедренных треугольников, B — множество равносторонних треугольников;

2) A — множество простых чисел, B — множество составных чисел;

3) A — множество простых чисел, B — множество нечётных чисел.

2.13. Найдите объединение множеств A и B, если:

1) $A = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$, $B = \{x \mid (x - 1)(x - 2) = 0\}$;

2) $A = \{x \mid 2x + 3 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 + 3 = 2\}$;

3) $A = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, x < 5\}$, $B = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, x < 7\}$.

2.14. Начертите два треугольника так, чтобы их объединением был: 1) четырёхугольник; 2) треугольник; 3) шестиугольник. Может ли объединение треугольников быть отрезком?

2.15. Какие фигуры могут быть объединением двух лучей, лежащих на одной прямой?

2.16. Известно, что для любого множества B выполняется равенство $A \cup B = B$. Найдите множество A.

2.17. Какое из следующих утверждений верно:

1) $\{a, b\} \setminus \{a\} = a$;

2) $\{a, b\} \setminus \{a\} = \{a, b\}$;

3) $\{a, b\} \setminus \{a\} = \{a\}$;

4) $\{a, b\} \setminus \{a\} = \{b\}$?

2.18. Найдите разность множеств A и B, если:

1) $A = \boldsymbol{N}$, $B = \{x \mid x = 2n, n \in \boldsymbol{N}\}$;

2) A — множество однозначных чисел, B — множество простых чисел;

3) A — множество равносторонних треугольников, B — множество равнобедренных треугольников.

2.19. Найдите подмножества A и B множества C, где $C \neq \varnothing$, такие, что для любого подмножества X множества C выполняется равенство $X \cap A = X \cup B$.

Упражнения для повторения

2.20. Решите уравнение $(7x - 1)(x + 5) = (3 + 7x)(x + 3)$.

2.21. Упростите выражение:

1) $(-a^3b^2)^3 \cdot 7a^5b^4$;

2) $(3m^6n^3)^4 \cdot \left(-\frac{1}{81}m^8n^2\right)$;

3) $-2\frac{2}{5}c^6d^{11} \cdot \left(-\frac{1}{2}cd^2\right)^2$;

4) $-(-3m^4n^2)^5 \cdot \left(-\frac{1}{3}mn^3\right)^6$.

2.22. Вынесите за скобки общий множитель (n — натуральное число):

1) $x^{n+3} + x^n$; 3) $z^{3n} - z^n$;

2) $y^{n+2} - y^{n-2}$, $n > 2$; 4) $5^{n+4} + 2 \cdot 5^{n+2} - 3 \cdot 5^{n+1}$.

2.23. Каждому числу поставили в соответствие расстояние от точки, изображающей это число на координатной прямой, до начала отсчёта. Объясните, почему описанное правило является функцией. Найдите её область определения и область значений. Обозначив эту функцию буквой f, найдите $f(2)$, $f(-5)$, $f(0)$. Какая из данных формул задаёт функцию f:

1) $y = x$; 2) $y = -x$; 3) $y = |x|$; 4) $y = x^2$?

§ 3 Формула включения-исключения. Взаимно однозначное соответствие

Если множество содержит конечное количество элементов, то его называют **конечным**, а если в нём бесконечно много элементов, то **бесконечным**. Пустое множество считают конечным.

Например, множество учащихся вашего класса — конечное множество, а множество натуральных чисел — бесконечное множество.

Если A — конечное множество, то количество его элементов обозначают так: $n(A)$. Понятно, что $n(\varnothing) = 0$.

Например, если A — это множество дней недели, то $n(A) = 7$; если B — это множество двузначных чисел, то $n(B) = 90$.

Пусть A и B — такие конечные множества, что $A \cap B = \varnothing$. Тогда очевидно, что

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B). \qquad (1)$$

Если A и B — конечные множества, причём $A \cap B \neq \varnothing$ (рис. 3.1), то в сумму $n(A) + n(B)$ дважды входит количество элементов их пересечения, т. е. дважды учитывается число $n(A \cap B)$. Следовательно, в этом случае

$$\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)} \qquad (2)$$

Если $A \cap B = \varnothing$, то $n(A \cap B) = 0$. Поэтому формула (2) является обобщением формулы (1).

Пример 1. В математическом классе 25 учащихся, и все они любят математику. Известно, что 23 ученика любят алгебру, а 21 — геометрию. Сколько учащихся этого класса любят и алгебру, и геометрию?

Решение. Пусть A — множество учащихся, которые любят алгебру, B — множество учащихся, которые любят геометрию. Тогда $n(A) = 23$,

$n(B) = 21$, $n(A \cup B) = 25$. Вместе с тем $A \cap B$ — множество учащихся, которые любят и алгебру, и геометрию. Из формулы (2) получаем $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 23 + 21 - 25 = 19$.

Ответ: 19 учащихся. ■

Выясним, как найти количество элементов множества $A \cup B \cup C$, где A, B и C — конечные множества.

Если $A \cap B \cap C = \varnothing$ (рис. 3.2), то

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A). \quad (3)$$

Если $A \cap B \cap C \neq \varnothing$ (рис. 3.3), то в правой части формулы (3) не учтено количество общих элементов множеств A, B и C. Следовательно, в этом случае формула принимает вид:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) \quad (4)$$

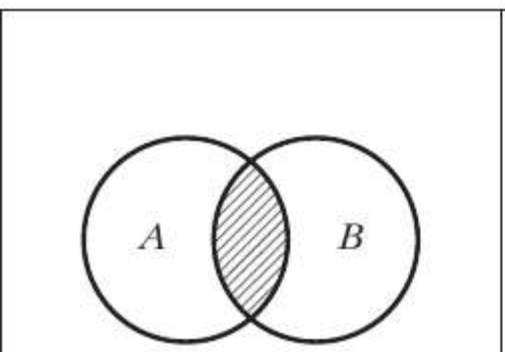


Рис. 3.1

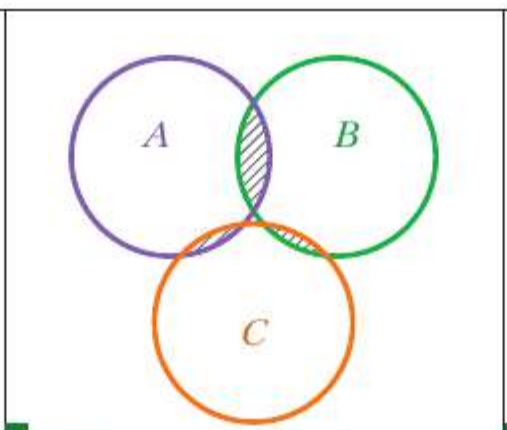


Рис. 3.2

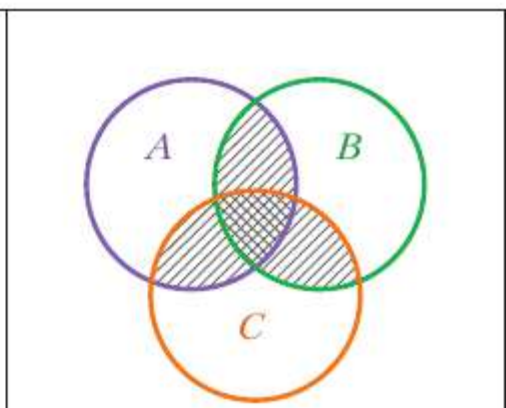


Рис. 3.3

Аналогичную формулу можно получить для любого количества множеств. Её называют **формулой включения-исключения.**

Пример 2. В спортивной школе есть три секции: акробатики, баскетбола, волейбола. Известно, что школу посещают 200 школьников, а каждую из секций — 80 школьников. Докажите, что найдётся не менее 14 школьников, которые посещают одни и те же две секции.

Решение. Обозначим множества школьников, посещающих секции акробатики, баскетбола и волейбола, буквами A, $Б$ и B соответственно. Тогда $n(A \cup Б \cup B) = 200$, $n(A) = n(Б) = n(B) = 80$. Подставим указанные значения в формулу (4):

$$200 = 80 + 80 + 80 - n(A \cap Б) - n(Б \cap B) - n(B \cap A) + n(A \cap Б \cap B).$$

Отсюда $n(A \cap Б) + n(Б \cap B) + n(B \cap A) = 40 + n(A \cap Б \cap B)$. Тогда $n(A \cap Б) + n(Б \cap B) + n(B \cap A) \geqslant 40$.

Если предположить, что каждое из чисел $n\,(A \cap Б)$, $n\,(Б \cap B)$, $n\,(B \cap A)$ не превосходит 13, то их сумма не превосходит 39. Получили противоречие. ■

Нам нередко приходится сравнивать количества элементов конечных множеств.

Как узнать, хватит ли в школьной библиотеке учебников по алгебре для восьмиклассников? Конечно, можно посчитать учащихся и отдельно пересчитать учебники. А можно выдать учебники учащимся. И если, например, всем учебников хватило, а в библиотеке не осталось ни одного учебника, то это означает, что восьмиклассников и учебников по алгебре одинаковое количество.

Так же, чтобы узнать, хватит ли стульев в классе, совсем не обязательно их пересчитывать. Достаточно попросить учащихся сесть на стулья. И если, например, мест хватило не всем, то это означает, что количество учащихся больше, чем количество стульев.

В этих примерах, сравнивая количество элементов двух множеств A и B, мы рассматриваем пары вида $(a; b)$, где $a \in A$ и $b \in B$. Воспользуемся этим приёмом в следующем примере.

Пример 3. Сравните количество элементов множества A двузначных чисел и множества B трёхзначных чисел, десятичная запись которых оканчивается цифрой 1.

Решение. Поставим в соответствие каждому двузначному числу то трёхзначное число, которое получается из него приписыванием справа цифры 1. Получим:

10,	11,	12,	...,	98,	99
⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕
101,	111,	121,	...,	981,	991

Таким образом, каждому элементу множества A мы поставили в соответствие единственный элемент множества B. Заметим, что при таком соответствии каждый элемент множества B оказался «соответствующим единственному элементу множества A». Действительно, если в числе вида $\overline{ab1}$ зачеркнуть последнюю цифру, то получим двузначное число $\overline{ab}$.

Установленное соответствие между элементами множеств A и B позволяет сделать вывод, что $n\,(A) = n\,(B)$. ■

Определение

Если каждому элементу множества A поставлен в соответствие единственный элемент множества B и при этом любой элемент множе-

ства B оказывается соответствующим некоторому единственному элементу множества A, то говорят, что между множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие.

Так, в примере 3 между множествами A и B было установлено взаимно однозначное соответствие.

Любопытно, что с детства каждому из нас неоднократно приходилось устанавливать взаимно однозначные соответствия. Ребёнок, произнося «один», «два», «три» и при этом последовательно показывая на кубики, тем самым устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством своих кубиков и множеством $\{1, 2, 3\}$.

Если между конечными множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие, то $n(A) = n(B)$. И наоборот, если $n(A) = n(B)$, то между конечными множествами A и B можно установить взаимно однозначное соответствие.

Заметим, что если в классе все ученики сидят и при этом есть свободные стулья, то между множеством учеников и множеством стульев взаимно однозначного соответствия не установлено.

Вообще, между конечными множествами с разным количеством элементов невозможно установить взаимно однозначное соответствие.

Можно сформулировать такое правило.

Если $C \subset B$ и $C \neq B$, а между множествами A и C установлено взаимно однозначное соответствие, то $n(A) < n(B)$.

Пример 4. Каких шестизначных чисел больше: нечётных, сумма цифр которых равна 47, или чётных, сумма цифр которых равна 45?

Решение. Обозначим множества чисел, о которых говорится в условии, буквами A и B соответственно.

Заметим, что если в записи шестизначного числа есть цифра 0, то сумма его цифр не превосходит $9 \cdot 5 = 45$. Следовательно, если $a \in A$, то в записи числа a нет цифры 0.

Каждому числу $a \in A$ поставим в соответствие число $b \in B$ по следующему правилу: уменьшим на 1 каждую из двух последних цифр числа a (это можно сделать, так как в десятичной записи числа a нет нулей).

Теперь рассмотрим число 999 990, принадлежащее множеству B. Это число не может быть получено из элемента множества A с помощью указанного правила.

Таким образом, мы установили взаимно однозначное соответствие между множеством A и собственным подмножеством множества B. Следовательно, $n(B) > n(A)$. ■

1. Как найти количество элементов множества $A \cup B$?
2. Как найти количество элементов множества $A \cup B \cup C$?
3. В каком случае говорят, что между двумя множествами установлено взаимно однозначное соответствие?

Упражнения

3.1. Каждый из 32 учащихся класса изучает по крайней мере один иностранный язык. Из них 20 изучают английский язык и 18 — французский. Сколько учащихся изучают и английский, и французский языки?

3.2. Известно, что 26 жильцов дома содержат кошек и собак, у 16 из них есть кошки, а у 15 — собаки. Сколько жильцов дома содержат и собаку, и кошку?

3.3. Из анкетирования, проведённого в классе, выяснилось, что из 30 учащихся класса у 18 есть брат, у 14 — сестра, а у 10 учащихся есть сестра и брат. Есть ли в этом классе учащиеся, у которых нет ни сестры, ни брата?

3.4. В декабре было 10 ясных и безветренных дней, 15 дней был ветер и 12 дней шёл снег. Сколько дней в декабре была вьюга (снег и ветер)?

3.5. Установлено ли взаимно однозначное соответствие между множествами A и B (рис. 3.4)? Точками на рисунке изображены элементы множеств.

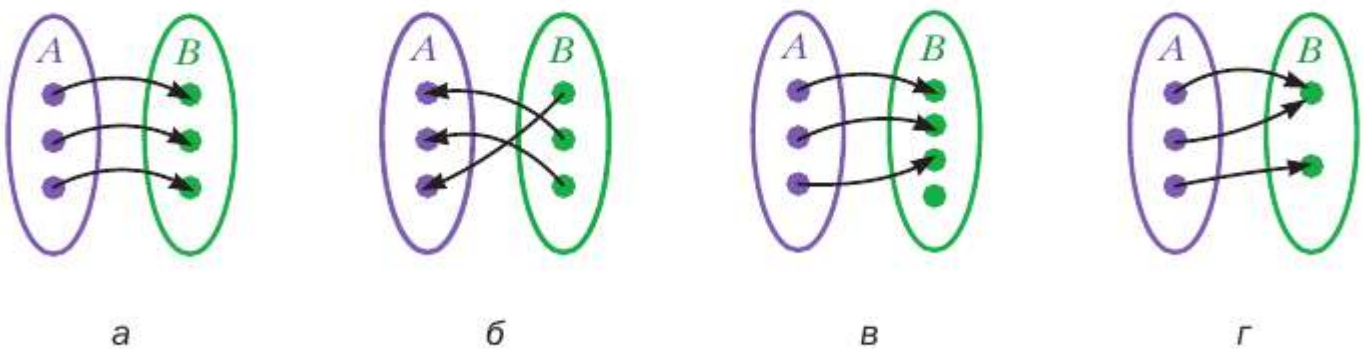


Рис. 3.4

3.6. Одиннадцать игроков футбольной команды получили футболки с номерами от 1 до 11. Между какими множествами установлено взаимно однозначное соответствие?

3.7. В результате жеребьёвки каждая из 20 пар фигуристов получила порядковый номер её выступления. Между какими множествами установлено взаимно однозначное соответствие?

3.8. Каждый зритель, пришедший в кинотеатр, купил билет с указанными рядом и местом. Между какими множествами установлено взаимно однозначное соответствие?

◆ ◆

3.9. Между первыми n натуральными числами и правильными дробями со знаменателем 7 установлено взаимно однозначное соответствие. Найдите n.

3.10. Каждому элементу множества $\{n, n+1, n+2\}$, где $n \in \boldsymbol{N}$, поставили в соответствие остаток от деления этого элемента на 3. Установлено ли таким образом взаимно однозначное соответствие между множествами $\{n, n+1, n+2\}$ и $\{0, 1, 2\}$?

◆ ◆ ◆

3.11. Каких пятизначных чисел больше: все цифры которых чётные или все цифры которых нечётные?

3.12. Каких пятизначных чисел больше: тех, у которых цифры записаны в порядке возрастания, или тех, у которых цифры записаны в порядке убывания?

3.13. В выпуклом n-угольнике ($n \geqslant 4$) никакие три диагонали не пересекаются[1] в одной точке. Докажите, что количество всех точек пересечения диагоналей равно количеству четырёхугольников, все вершины которых являются вершинами данного n-угольника.

3.14. На каждой из двух параллельных прямых отметили по 100 точек. Каждые две точки, лежащие на разных прямых, соединили отрезками. Каких пар отрезков больше: не имеющих общих точек или имеющих общую внутреннюю точку?

3.15. Рассматриваются шестизначные числа $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. Каких чисел больше: тех, у которых $a_2 > a_1$, $a_4 > a_3$, $a_6 > a_5$, или тех, у которых $a_2 < a_1$, $a_4 < a_3$, $a_6 < a_5$?

3.16. Рассматриваются все прямоугольники, длины сторон которых выражены натуральными числами. Каких прямоугольников больше: с периметром, равным 1000, или с периметром, равным 1002?

3.17. Множество A содержит 101 элемент. Докажите, что количество его подмножеств, содержащих чётное количество элементов, равно количеству подмножеств, содержащих нечётное количество элементов.

3.18. Множество A содержит 100 элементов. Докажите, что количество его подмножеств, содержащих чётное количество элементов, равно количеству подмножеств, содержащих нечётное количество элементов.

[1] Считают, что диагонали выпуклого многоугольника пересекаются, если у них есть общая точка, отличная от вершины многоугольника.

3.19. В олимпиаде приняли участие 46 учащихся. Им было предложено 3 задачи. После подведения итогов оказалось, что каждый из участников решил хотя бы одну задачу, причём первую и вторую задачу решили 11 участников, вторую и третью — 8 участников, первую и третью — 5 участников, а все три задачи решили только 2 участника. Докажите, что одну из задач решили не менее половины участников.

3.20. Каких трёхзначных чисел больше: тех, у которых вторая цифра в десятичной записи больше первой и третьей, или тех, у которых вторая цифра меньше первой и третьей?

3.21. Автобусные билеты имеют номера от 000 000 до 999 999. Билет называют «счастливым», если сумма первых трёх цифр его номера равна сумме последних трёх цифр. Докажите, что количество всех «счастливых» билетов чётно.

3.22. Рассматриваются треугольники, длины сторон которых выражены натуральными числами. Каких треугольников больше: с периметром, равным 997, или с периметром, равным 1000?

3.23. На окружности отметили 100 точек: A_1, A_2, ..., A_{100}. Каких многоугольников с вершинами в отмеченных точках больше: тех, в которых точка A_1 является вершиной, или тех, в которых точка A_1 не является вершиной?

3.24. Каких пятизначных чисел больше: тех, у которых каждая следующая цифра больше предыдущей (считая слева направо), или тех, у которых каждая следующая цифра не меньше предыдущей и каждая цифра не больше 5?

3.25. Докажите, что количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 = n$ ($n \in \mathbf{N}$), равно количеству пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 = 2n$.

Упражнения для повторения

3.26. Известно, что $3x^3y = 4$ и $x^2z^3 = -3$. Найдите значение выражения:

1) $4x^5yz^3$; 2) $\frac{1}{2}x^8y^2z^3$; 3) $-x^9z^9y$.

3.27. Упростите выражение (n — натуральное число):

1) $x^{n+1}(x^{n+6} - 1) - x^{n+2}(x^{n+5} - x^3)$;

2) $x(4x^{n+1} + 2x^{n+4} - 7) - x^{n+2}(4 + 2x^3 - x^n)$.

3.28. График уравнения $3x + 2y = 14$ проходит через точку $A\,(a; 4)$. Чему равно значение a?

В предыдущем параграфе мы рассмотрели конечные множества, между которыми установлено взаимно однозначное соответствие, и выяснили, что такие множества имеют одинаковое количество элементов.

Руководствуясь принципом «часть меньше целого», приходим к выводу, что если B — собственное подмножество конечного множества A, то $n(B) < n(A)$. Следовательно, *между конечным множеством и его собственным подмножеством невозможно установить взаимно однозначное соответствие*.

Пусть M — множество чётных чисел. Множество M является собственным подмножеством множества N. Казалось бы, можно считать, что натуральных чисел больше, чем чётных. Однако это не так.

Каждому элементу $n \in \boldsymbol{N}$ поставим в соответствие единственный элемент $2n \in M$:

1,	2,	3,	4,	...,	n,	...,
⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕
2,	4,	6,	8,	...,	$2n$,	...,

При этом каждое чётное число будет соответствовать единственному натуральному числу. Тем самым между множествами $\boldsymbol{N}$ и M установлено взаимно однозначное соответствие, а поэтому нельзя считать, что в множестве $\boldsymbol{N}$ содержится больше элементов, чем в его собственном подмножестве — множестве чётных чисел.

Этот пример показывает, что представления о конечных множествах нельзя переносить на бесконечные множества.

Математики доказали, что *в любом бесконечном множестве A можно выделить собственное подмножество A_1 таким образом, что между множествами A и A_1 можно установить взаимно однозначное соответствие*. Это принципиальное отличие бесконечных множеств от конечных.

Если множества A и B конечны и между ними установлено взаимно однозначное соответствие, то $n(A) = n(B)$. Если же взаимно однозначное соответствие установлено между бесконечными множествами A и B, то в математике не принято говорить, что эти множества имеют одинаковое количество элементов. Говорят, что множества A и B имеют одинаковую **мощность**. Другими словами, для бесконечных множеств слово «мощность» означает то же самое, что для конечных множеств «количество элементов».

Определение

Два множества называют равномощными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Порой, выявляя свойства объектов, мы руководствуемся интуицией или жизненным опытом. Однако, когда мы определяем свойства бесконечных множеств, опыт и интуиция могут подвести.

Например, имеет место следующий удивительный факт: множество точек прямой равномощно множеству точек **открытого отрезка** (отрезка, у которого «выколоты» концы), т. е. прямая содержит столько же точек, сколько их содержит открытый отрезок.

На рисунке 4.1 изображена прямая MN, которая касается полуокружности с центром в точке O и диаметром AB, параллельным прямой MN. Удалим из полуокружности точки A и B. Такую полуокружность называют **открытой**.

Каждой точке X открытой полуокружности поставим в соответствие точку X_1 прямой MN, лежащую на луче OX. Понятно, что точке X соответствует единственная точка прямой MN, и наоборот, каждая точка прямой MN является соответствующей единственной точке открытой полуокружности. Следовательно, установлено взаимно однозначное соответствие между множеством точек прямой и множеством точек открытой полуокружности.

На рисунке 4.2 показано, как установить взаимно однозначное соответствие между множеством точек открытого отрезка и множеством точек открытой полуокружности. Следовательно, множество точек открытого отрезка AB равномощно множеству точек прямой MN.

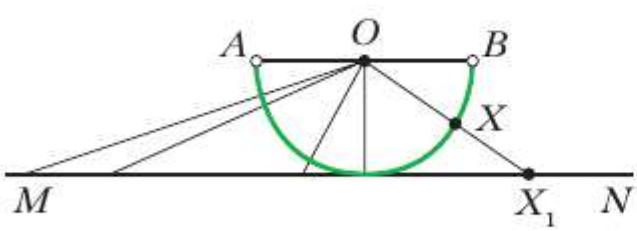


Рис. 4.1

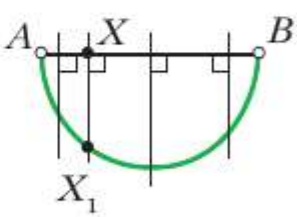


Рис. 4.2

В рассказе на с. 29 вы узнаете ещё об одном факте, в который тоже трудно поверить, полагаясь лишь на интуицию: множество точек стороны квадрата равномощно множеству точек квадрата.

Определение

Множество, равномощное множеству натуральных чисел, называют счётным множеством.

Выше мы показали, что множество чётных чисел счётно.

Натуральное число n, соответствующее элементу a счётного множества A, называют *номером этого элемента*. Если элемент a имеет номер n, то пишут: a_n. Когда устанавливают взаимно однозначное соответствие между множествами A и $\boldsymbol{N}$, каждый элемент множества A получает свой номер, и эти элементы можно расположить последовательно (или расположить в виде последовательности[1]):

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots .$$

Так, если элементы множества P простых чисел[2] расположить в порядке возрастания 2, 3, 5, 7, 11, ..., то все элементы этого множества можно пронумеровать:

2,	3,	5,	7,	11,	...
⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕
1	2	3	4	5	...

Тем самым мы установили взаимно однозначное соответствие между множествами P и $\boldsymbol{N}$.

Таким способом можно показать, что *любое бесконечное подмножество множества* $\boldsymbol{N}$ *является счётным* (сделайте это самостоятельно).

На первый взгляд кажется, что поскольку $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$, то элементы множества $\boldsymbol{Z}$ пронумеровать нельзя: не хватит номеров, так как все они будут «потрачены» на множество $\boldsymbol{N}$.

Однако если элементы множества $\boldsymbol{Z}$ расположить в виде последовательности 0, 1, –1, 2, –2, 3, –3, ..., то можно каждому целому числу присвоить номер:

0,	1,	–1,	2,	–2,	3,	–3,	...
⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	...

Тем самым мы доказали, что множество $\boldsymbol{Z}$ является счётным.

? **1.** Какие множества называют равномощными?
2. Какое множество называют счётным?

[1] Более подробно с понятием последовательности вы познакомитесь в курсе алгебры 9 класса.

[2] В § 20 будет доказано, что множество простых чисел бесконечно.

Упражнения

4.1. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел и множеством натуральных чисел, кратных 3.

4.2. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел и множеством чисел вида $4n + 1$ ($n \in \boldsymbol{N}$).

4.3. Докажите, что множества чётных и нечётных чисел равномощны.

4.4. Докажите, что множество чисел вида 2^n ($n \in \boldsymbol{N}$) счётно.

4.5. Докажите, что множество чисел вида $\frac{1}{n}$ ($n \in \boldsymbol{N}$) счётно.

4.6. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством чисел вида 2^n ($n \in \boldsymbol{N}$) и множеством десятичных дробей вида 0,1; 0,01; 0,001; ... .

4.7. Докажите, что множества точек стороны и диагонали квадрата равномощны.

4.8. Докажите, что множества точек любых двух концентричных окружностей равномощны.

4.9. Докажите, что любое подмножество счётного множества или конечно, или счётно.

4.10. Рассмотрим множество отрезков, которые принадлежат координатной прямой, попарно не пересекаются и длина каждого из них не меньше 1. Докажите, что это множество является или конечным, или счётным.

4.11. Докажите, что множество точек прямой и множество точек окружности с выколотой точкой равномощны.

4.12. На координатной прямой отметили точки $O(0)$, $A(1)$, $B(5)$. Докажите, что: 1) множество точек отрезка OA равномощно множеству точек отрезка OB; 2) множество точек отрезка OA с выколотой точкой O равномощно множеству точек луча AB.

4.13. Покажите, что множества точек любых двух отрезков равномощны.

4.14. Докажите, что множество точек $(x; y)$ координатной плоскости таких, что числа x и y — целые, является счётным.

4.15. На плоскости задано некоторое множество квадратов, сторона каждого из которых равна 10, причём квадраты не пересекаются. Докажите, что это множество конечно или счётно.

4.16. На плоскости задано некоторое множество непересекающихся окружностей, радиусы которых равны 1. Докажите, что это множество конечно или счётно.

Упражнения для повторения

4.17. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения с осями координат графика уравнения:

1) $x + y = 4$; 2) $x^3 - y = 1$; 3) $x^2 + y^2 = 16$; 4) $|x| - y = 6$.

4.18. Решите уравнение:

1) $ax = 1$; 2) $bx = b$.

4.19. На рисунке 4.3 изображён график функции. Найдите:

1) область определения функции;

2) область значений функции;

3) значения аргумента, при которых значения функции равны нулю;

4) значения аргумента, при которых функция принимает положительные значения;

5) значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения.

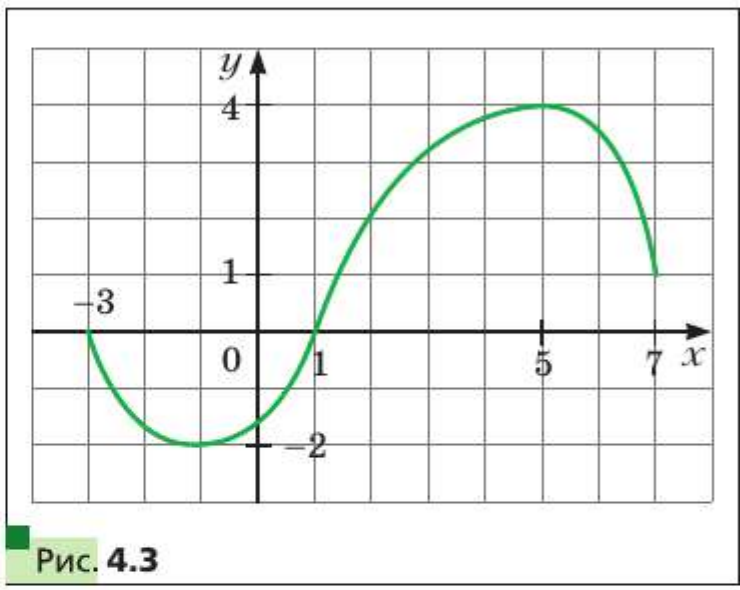


Рис. 4.3

4.20. Докажите, что данное выражение принимает положительные значения при всех значениях x; укажите, какое наименьшее значение принимает это выражение и при каком значении x:

1) $x^2 - 10x + 27$; 2) $9x^2 + 12x + 7$; 3) $2x^2 - x + 1$.

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

«Я вижу это, но никак не могу этому поверить!»

Докажем, что множество $\boldsymbol{Q}$ является счётным.

Каждое рациональное число можно представить в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$. Назовём число $h = |m| + |n|$ высотой рационального числа. Например, $\left\{\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{-3}{1}\right\}$ — множество рациональных чисел, высота которых равна 4.

Договоримся число 0 представлять в виде дроби $\frac{0}{1}$. Тогда высота числа 0 равна $h = |0| + |1| = 1$.

Множество рациональных чисел с заданной высотой h является конечным.

Теперь будем последовательно нумеровать все несократимые дроби (т. е. рациональные числа), взяв сначала дроби с высотой $h = 1$, потом дроби с высотой $h = 2$, высотой $h = 3$ и т. д.:

	$h = 1$		$h = 2$			$h = 3$					$h = 4$					
$Q =$	$\left\{\frac{0}{1}\right\}$	$\cup$	$\left\{\frac{1}{1}, \right.$	$\left.\frac{-1}{1}\right\}$	$\cup$	$\left\{\frac{1}{2}, \right.$	$\frac{-1}{2}$,	$\frac{2}{1}$,	$\left.\frac{-2}{1}\right\}$	$\cup$	$\left\{\frac{1}{3}, \right.$	$\frac{-1}{3}$,	$\frac{3}{1}$,	$\left.\frac{-3}{1}\right\}$	$\cup$	...
	⇕		⇕	⇕		⇕	⇕	⇕	⇕		⇕	⇕	⇕	⇕		
	1		2	3		4	5	6	7		8	9	10	11		...

Мы показали, что все элементы множества Q можно пронумеровать, следовательно, это множество является счётным.

Не всякое бесконечное множество является счётным.

Рассмотрим множество A, элементами которого являются все бесконечные последовательности, составленные из нулей и единиц. Вот несколько элементов множества A:

1, 1, 1, 1, 1, 1, ...
0, 1, 1, 1, 0, 0, ...
0, 0, 1, 0, 1, 1, ...

Докажем, что множество A является несчётным. Предположим, что это не так. Тогда элементы этого множества можно пронумеровать. Расположим элементы множества A в столбик в порядке возрастания номеров. Например:

первый элемент (первая последовательность):	1,	1,	0,	1,	0,	...
второй элемент (вторая последовательность):	0,	0,	0,	1,	1,	...
третий элемент (третья последовательность):	0,	0,	0,	0,	0,	...
четвёртый элемент (четвёртая последовательность):	1,	1,	1,	1,	1,	...
пятый элемент (пятая последовательность):	1,	0,	1,	0,	1,	...
...						

Эта запись должна содержать все элементы множества A. Если удастся построить последовательность из нулей и единиц, которой в этой записи нет, то тем самым мы опровергнем предположение о счётности множества A.

Выделим красным цветом числа, стоящие на «диагонали». Получим последовательность:

1, 0, 0, 1, 1, ...

Заменим в этой последовательности единицы на нули, а нули — на единицы:

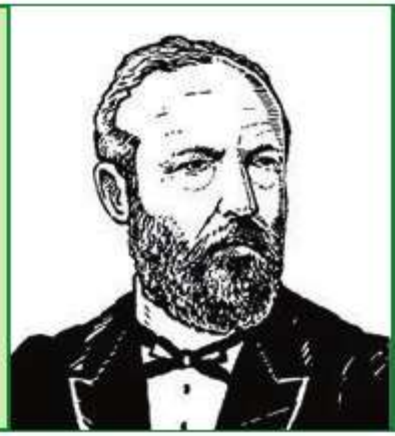
0, 1, 1, 0, 0, ...

Этой последовательности в записи нет. Действительно, она отличается от первой последовательности числом, стоящим на первом месте, от второй последовательности — числом, стоящим на втором месте, от третьей — числом, стоящим на третьем месте, и т. д.

Слова, приведённые в названии этого рассказа, принадлежат выдающемуся математику, основателю теории множеств Георгу Кантору. Они свидетельствуют о том, что даже гению порой бывает сложно примирить свою интуицию с формальным результатом.

Георг Кантор (1845–1918)

Немецкий математик, наиболее известный как создатель теории множеств. Он ввёл понятие взаимно однозначного соответствия между множествами, дал определения бесконечного и вполне упорядоченного множеств.



Наверное, и вы испытывали подобный дискомфорт, когда логика размышлений заставила вас согласиться с тем, что на любом, даже очень маленьком отрезке столько же точек, сколько их на всей прямой.

А можно ли поверить в то, что множество точек квадрата равномощно множеству точек его стороны? Наверное, нет. Этому не верил и сам великий Кантор.

В 1874 г. в одном из своих писем математику Р. Дедекинду (1831–1916) Кантор писал: «Можно ли сопоставить поверхность (например, квадратную площадку, включая её границы) с отрезком прямой таким образом, чтобы каждой точке поверхности соответствовала одна точка на этом отрезке и наоборот?»

Кантор полагал, что ответ должен быть отрицательным, и пытался это доказать в течение трёх лет. Однако в 1877 г. он получает неожидан-

ный результат: строит взаимно однозначное соответствие между множеством точек квадрата и множеством точек его стороны.

Ознакомимся с идеей доказательства Кантора.

Рассмотрим на координатной плоскости квадрат с вершинами $A(0; 0)$, $B(0; 1)$, $C(1; 1)$, $D(1; 0)$ (рис. 4.4).

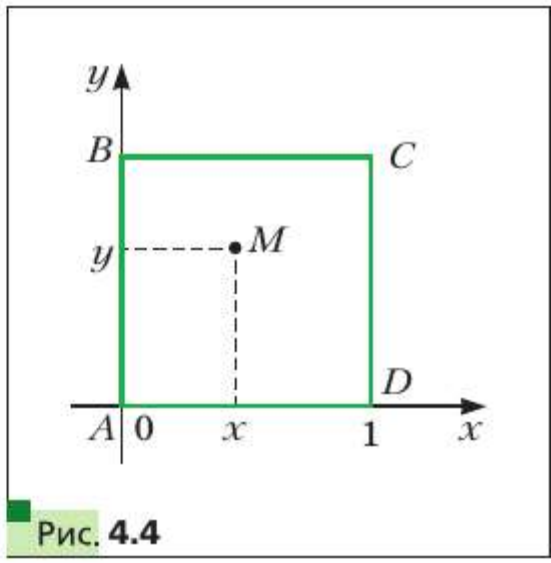


Рис. 4.4

Пусть точка $M(x; y)$ принадлежит квадрату. Координаты x и y удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$. Поэтому числа x и y можно представить в виде бесконечных десятичных дробей:

$x = 0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$,

$y = 0,\beta_1\beta_2\beta_3\ldots$.

Заметим, что если $x = 1$ или $y = 1$, то координату можно записать в виде дроби $0,999\ldots$[1].

С помощью этих записей сконструируем новую десятичную дробь, записывая десятичные знаки в записи чисел x и y через один:

$z = 0,\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3\ldots$.

Точке $M(x; y)$ поставим в соответствие точку $K(z; 0)$. Очевидно, что точка K принадлежит стороне AD квадрата.

Разные точки квадрата имеют разные координаты. Поэтому при таком соответствии разным точкам квадрата соответствуют разные точки его стороны AD[2].

После сказанного вы, наверное, уже не будете удивляться тому, что, например, множество точек куба равномощно множеству точек его ребра.

Множества, равномощные множеству точек отрезка, называют множествами мощности **континуума** (от лат. *continuum* — «непрерывный»).

[1] О возможности такого представления вы узнаете в курсе алгебры 9 класса.

[2] Некоторые числа имеют две десятичные записи. Например, дробям $0,7000\ldots$ и $0,6999\ldots$ соответствует одно и то же число. Так как идея доказательства Кантора связана с десятичной записью числа, то в строгом доказательстве должно быть показано, как решается проблема неоднозначности записи числа при установлении взаимно однозначного соответствия.

Итоги главы 1

Подмножество

Множество B называют подмножеством множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A.

Собственное подмножество

Если $B \subset A$ и $B \neq A$, то множество B называют собственным подмножеством множества A.

Пересечение множеств

Пересечением множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих и множеству A, и множеству B.

Объединение множеств

Объединением множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств: или множеству A, или множеству B.

Разность множеств

Разностью множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих множеству A, но не принадлежащих множеству B.

Формула включения-исключения

$$n\,(A \cup B \cup C) = n\,(A) + n\,(B) + n\,(C) - n\,(A \cap B) - n\,(B \cap C) - n\,(C \cap A) + n\,(A \cap B \cap C).$$

Взаимно однозначное соответствие

Если каждому элементу множества A поставлен в соответствие единственный элемент множества B и при этом любой элемент множества B оказывается соответствующим некоторому единственному элементу множества A, то говорят, что между множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие.

Равномощные множества

Два множества называют равномощными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Счётное множество

Множество, равномощное множеству натуральных чисел, называют счётным множеством.

глава

2 Рациональные выражения

- В этой главе вы познакомитесь с дробями, числитель и знаменатель которых — выражения с переменными; научитесь складывать, вычитать, умножать и делить такие дроби, познакомитесь с уравнениями, содержащими такие дроби.
- Вы узнаете, с помощью каких правил можно заменить данное уравнение на более простое.
- Вы расширите свои представления о понятии «степень», научитесь возводить числа в степень с целым отрицательным показателем.
- Вы научитесь строить математические модели процессов, в которых увеличение (уменьшение) одной величины в несколько раз приводит к уменьшению (увеличению) другой величины в то же количество раз.

§ 5 Рациональные дроби

В курсе алгебры 7 класса были рассмотрены целые выражения, т. е. такие, которые составлены из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения и деления на отличное от нуля число.

Вот примеры целых выражений: $x - y$, $\frac{a+b}{5}$, $m^2 + 2m + n^2$, $\frac{1}{3}x - 4$, $x^n - y^n$, $\frac{c}{4} + \frac{d}{7}$, $x : 5$, y, 7.

В 8 классе мы рассмотрим **дробные выражения**.

Дробные выражения отличаются от целых тем, что они *содержат деление на выражение с переменными*.

Приведём примеры дробных выражений: $2x + \frac{a}{b}$; $(x - y) : (x + y)$; $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$; $\frac{5}{x}$.

Объединением множеств целых и дробных выражений является множество **рациональных выражений**.

Если в рациональном выражении заменить переменные числами, то получим числовое выражение. Однако *эта замена возможна только тогда, когда она не приводит к делению на нуль*.

Например, выражение $2 + \frac{a+2}{a-1}$ при $a = 1$ не имеет смысла, т. е. числового значения этого выражения при $a = 1$ не существует. При всех других значениях a это выражение имеет смысл.

Определение

Областью определения выражения с одной переменной называют множество значений переменной, при которых это выражение имеет смысл.

Элементы этого множества называют допустимыми значениями переменной.

Например, в рассмотренном выше примере областью определения выражения является множество $\{a \mid a \neq 1\}$.

Подмножеством множества рациональных выражений является множество **рациональных дробей**. Это дроби, числителями и знаменателями которых являются многочлены[1]. Так, рациональные выражения $\frac{x}{7}$; $\frac{x^2 - 2xy}{x + y}$; $\frac{12}{a}$; $\frac{a + b}{5}$ являются примерами рациональных дробей.

Заметим, что рациональная дробь может быть как целым выражением, так и дробным.

Знаменатель рациональной дроби не может быть **нулевым многочленом**, т. е. многочленом, тождественно равным нулю.

Схема, изображённая на рисунке 5.1, иллюстрирует связь между понятиями, рассмотренными в этом параграфе.



Рис. 5.1

Пример. Найдите область определения выражения $\frac{1}{x} + \frac{3}{x - 5}$.

Решение. Дробь $\frac{1}{x}$ имеет смысл при всех значениях x, кроме $x = 0$, а дробь $\frac{3}{x - 5}$ имеет смысл при всех значениях x, кроме $x = 5$.

[1] Напомним, что числа и одночлены считают отдельными видами многочленов.

Следовательно, областью определения выражения является множество $\{x \mid x \neq 0 \text{ и } x \neq 5\}$.

Ответ: $\{x \mid x \neq 0 \text{ и } x \neq 5\}$. ■

?

1. Чем отличаются дробные выражения от целых?
2. Какое множество является объединением множеств целых и дробных выражений?
3. Что называют областью определения выражения?
4. Опишите, что представляет собой множество рациональных дробей.
5. Какой многочлен не может быть знаменателем рациональной дроби?

Упражнения

5.1. Какие из выражений $\frac{3a^2}{4b^3}$, $\frac{5x^2}{4}+\frac{x}{7}$, $\frac{8}{6n+1}$, $3a-\frac{b^2}{c^4}$, $\frac{t^2-6t+15}{2t}$, $\frac{x-2}{x+2}$, $\frac{1}{6}m^3n^5$, $(y-4)^3+\frac{1}{y}$, $\frac{m^2-3mn}{18}$ являются:

1) целыми выражениями; 2) дробными выражениями; 3) рациональными дробями?

5.2. Найдите область определения выражения:

1) $\frac{x-5}{9}$;
2) $\frac{9}{x-5}$;
3) $\frac{1}{x^2+4}$;
4) $\frac{5}{x^2-4}$;
5) $\frac{5}{|x|-4}$;
6) $\frac{2}{x-2}+\frac{3x}{x+1}$;
7) $\frac{x+4}{x(x-6)}$;
8) $\frac{x}{|x|+1}$;
9) $\frac{7}{x^3-25x}$.

5.3. Найдите область определения выражения:

1) $\frac{9}{y}$;
2) $\frac{x+7}{x+9}$;
3) $\frac{m-1}{m^2-9}$;
4) $\frac{x}{|x|-3}$;
5) $\frac{4}{x-8}+\frac{1}{x-1}$;
6) $\frac{2x-3}{(x+2)(x-10)}$.

5.4. Найдите область определения функции:

1) $y=\frac{1}{4-\frac{4}{x}}$;
2) $y=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$;
3) $y=\frac{1}{x-\frac{1}{x}}$;
4) $y=\frac{9}{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-2}}$;
5) $y=\frac{2}{|x|+x}$;
6) $y=\frac{2}{x^2+\frac{1}{x}}$.

5.5. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1) $\dfrac{x}{x-\dfrac{9}{x}}$; 2) $\dfrac{x+2}{|x|-x}+\dfrac{1}{x+1}$; 3) $\dfrac{1}{x^2-\dfrac{1}{x}}$?

5.6. Запишите рациональную дробь, областью определения которой является множество:

1) $\{x \mid x \neq 7\}$;
2) $\{y \mid y \neq -1\}$;
3) $\{a \mid a \neq 2$ и $a \neq -2\}$;
4) всех чисел.

5.7. Запишите рациональную дробь, областью определения которой является множество:

1) $\{x \mid x \neq 5\}$;
2) $\{x \mid x \neq -2$ и $x \neq 0\}$;
3) $\{x \mid x \neq 3$, $x \neq -3$ и $x \neq 6\}$;
4) всех чисел.

5.8. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной x значение дроби:

1) $\dfrac{x^2+1}{6x-9-x^2}$ отрицательное;
2) $\dfrac{2}{x^2+2x+2}$ положительное;
3) $\dfrac{1}{2x-x^2-2}$ отрицательное;
4) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+x+1}$ неотрицательное.

5.9. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной x значение дроби:

1) $\dfrac{-x^2}{x^2+5}$ неположительное;
2) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-2x+1}$ неотрицательное;
3) $\dfrac{x^4+4x^2+4}{x^2-14x+49}$ положительное;
4) $\dfrac{1}{x-|x|}$ отрицательное.

5.10. Известно, что $5x-15y=1$. Найдите значение выражения:

1) $x-3y$;
2) $\dfrac{7}{2x-6y}$;
3) $\dfrac{18y-6x}{11}$;
4) $\dfrac{1}{x^2-6xy+9y^2}$.

5.11. Известно, что $4a+8b=10$. Найдите значение выражения:

1) $2b+a$;
2) $\dfrac{5}{a+2b}$;
3) $\dfrac{a^2+4ab+4b^2}{2a+4b+5}$.

5.12. В коробке лежит 42 карандаша, из них 14 карандашей — красные, 16 карандашей — синие, а остальные — зелёные. Какова вероятность того, что наугад взятый карандаш не будет ни красным, ни синим?

5.13. Благодаря мероприятиям по экономии электроэнергии за первый месяц её расход был уменьшен на 20 %, за второй — на 10 % по сравнению с предыдущим, а за третий — на 5 % по сравнению с предыдущим. На сколько процентов в итоге был уменьшен расход электроэнергии?

5.14. Из пункта A в пункт B автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, а возвращался из пункта B в пункт A со скоростью 70 км/ч другой дорогой, которая на 15 км короче первой. На обратный путь автомобиль затратил на 30 мин меньше, чем на путь из пункта A в пункт B. За какое время он доехал из пункта A в пункт B?

5.15. Докажите тождество:
$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$

§ 6 Основное свойство рациональной дроби

Равенство $3a - 1 + 2a + 5 = 5a + 4$ является тождеством, так как оно выполняется при любых значениях a.

Равенство $\dfrac{3a - 1 + 2a + 5}{a + 1} = \dfrac{5a + 4}{a + 1}$ также естественно считать тождеством. Но оно выполняется не при любых значениях a. При $a = -1$ рациональные дроби, входящие в данное равенство, не имеют смысла.

Уточним принятые в курсе алгебры 7 класса определения тождества и тождественно равных выражений.

Определение

Равенство, которое выполняется при любых допустимых значениях входящих в него переменных, называют тождеством.

Определение

Выражения, соответствующие значения которых равны при любых допустимых значениях входящих в них переменных, называют тождественно равными.

Например, равенство $\frac{a-2}{a-2}=1$ является тождеством, так как оно выполняется при всех допустимых значениях a, т. е. при всех a, кроме $a=2$.

В курсе алгебры 7 класса рассматривались тождественные преобразования целых выражений. Теперь рассмотрим тождественные преобразования дробных выражений.

Как вы знаете, основное свойство отношения выражается следующим равенством:

$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$, где a, b и m — некоторые числа, причём $b\neq 0$ и $m\neq 0$.

Рациональные дроби обладают свойством, аналогичным основному свойству отношения.

Если числитель и знаменатель рациональной дроби умножить на один и тот же ненулевой многочлен, то получим дробь, тождественно равную данной.

Это свойство называют **основным свойством рациональной дроби** и записывают:

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot C}{B\cdot C},$$

где A, B и C — многочлены, причём многочлены B и C ненулевые.

Согласно этому свойству выражение $\frac{A\cdot C}{B\cdot C}$ можно заменить на тождественно равную дробь $\frac{A}{B}$. Такое тождественное преобразование называют **сокращением дроби** на множитель C.

Пример 1. Сократите дробь:

1) $\frac{6a^3b^2}{24a^2b^4}$; 2) $\frac{3x+15y}{3x}$; 3) $\frac{y^2+4y+4}{y^2+2y}$.

Решение.

1) Одночлены $6a^3b^2$ и $24a^2b^4$ имеют общий множитель $6a^2b^2$. Получаем:

$$\frac{6a^3b^2}{24a^2b^4}=\frac{a\cdot 6a^2b^2}{4b^2\cdot 6a^2b^2}=\frac{a}{4b^2}.$$

2) Разложим числитель данной дроби на множители:

$$\frac{3x+15y}{3x}=\frac{3(x+5y)}{3x}.$$

Следовательно, числитель и знаменатель данной дроби имеют общий множитель 3, сократив на который получаем:

$$\frac{3(x+5y)}{3x} = \frac{x+5y}{x}.$$

3) Разложив предварительно числитель и знаменатель данной дроби на множители и сократив на общий множитель $y + 2$, получаем:

$$\frac{y^2+4y+4}{y^2+2y} = \frac{(y+2)^2}{y(y+2)} = \frac{y+2}{y}. \blacksquare$$

Из основного свойства дроби следует, что

$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} \text{ и } \frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}.$$

Каждую из дробей $\frac{-A}{B}$ и $\frac{A}{-B}$ можно записать в виде выражения $-\frac{A}{B}$, т. е.

$$\frac{-A}{B} = \frac{A}{-B} = -\frac{A}{B}.$$

Пример 2. Сократите дробь $\frac{4a-20}{5a-a^2}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{4a-20}{5a-a^2} = \frac{4(a-5)}{a(5-a)} = \frac{4(a-5)}{-a(a-5)} = -\frac{4}{a}. \blacksquare$$

Пример 3. Приведите к общему знаменателю дроби:

1) $\frac{2m}{9a^2b^6}$ и $\frac{5n^2}{6a^4b^3}$; 2) $\frac{1}{a+b}$ и $\frac{1}{a-b}$; 3) $\frac{4a^2}{a^2-36}$ и $\frac{6}{a^2+6a}$.

Решение.

1) Произведение знаменателей данных дробей, равное $9a^2b^6 \cdot 6a^4b^3 = 54a^6b^9$, можно принять за их общий знаменатель. Однако удобнее в качестве общего знаменателя взять одночлен $18a^4b^6$, полученный таким образом: его коэффициент 18 является наименьшим общим кратным коэффициентов 9 и 6 данных знаменателей, а каждая из переменных a и b взята в степени с наибольшим показателем степени из тех, с которыми она входит в знаменатели данных дробей.

Так как $18a^4b^6 = 9a^2b^6 \cdot 2a^2$, то дополнительным множителем для дроби $\frac{2m}{9a^2b^6}$ является одночлен $2a^2$. Учитывая, что $18a^4b^6 = 6a^4b^3 \cdot 3b^3$, получаем, что дополнительным множителем для дроби $\frac{5n^2}{6a^4b^3}$ является одночлен $3b^3$. Следовательно,

$$\frac{2m}{9a^2b^6} = \frac{2m \cdot 2a^2}{9a^2b^6 \cdot 2a^2} = \frac{4a^2m}{18a^4b^6};$$

$$\frac{5n^2}{6a^4b^3} = \frac{5n^2 \cdot 3b^3}{6a^4b^3 \cdot 3b^3} = \frac{15b^3n^2}{18a^4b^6}.$$

2) Общий знаменатель данных дробей равен произведению их знаменателей. Имеем:

$$\frac{1}{a+b} = \frac{a-b}{(a+b)(a-b)} = \frac{a-b}{a^2-b^2},$$

$$\frac{1}{a-b} = \frac{a+b}{(a-b)(a+b)} = \frac{a+b}{a^2-b^2}.$$

3) Для нахождения общего знаменателя рациональных дробей целесообразно предварительно разложить их знаменатели на множители:

$a^2 - 36 = (a+6)(a-6)$, $a^2 + 6a = a(a+6)$.

Следовательно, общим знаменателем данных дробей служит выражение $a(a+6)(a-6)$.

Тогда $\dfrac{4a^2}{a^2-36} = \dfrac{4a^2 \setminus a}{(a+6)(a-6)} = \dfrac{4a^3}{a(a+6)(a-6)} = \dfrac{4a^3}{a^3-36a}$;

$$\frac{6}{a^2+6a} = \frac{6 \setminus a-6}{a(a+6)} = \frac{6a-36}{a(a+6)(a-6)} = \frac{6a-36}{a^3-36a}. \blacksquare$$

Пример 4. Известно, что $\dfrac{3a+4b}{2a-b} = 2$. Найдите значение дроби $\dfrac{a^3-6a^2b-ab^2+12b^3}{18b^3+a^3-6a^2b}$.

Решение. Если $b = 0$, то $\dfrac{3a+4b}{2a-b} = \dfrac{3a}{2a} = \dfrac{3}{2}$, что противоречит условию. Следовательно, $b \neq 0$.

Из условия $\dfrac{3a+4b}{2a-b} = 2$ следует, что $3a + 4b = 4a - 2b$; $a = 6b$. Тогда

$$\frac{a^3-6a^2b-ab^2+12b^3}{18b^3+a^3-6a^2b} = \frac{216b^3-216b^3-6b^3+12b^3}{18b^3+216b^3-216b^3} = \frac{1}{3}. \blacksquare$$

Пример 5. Постройте график функции $y = \dfrac{x^2-1}{x-1}$.

Решение. Областью определения данной функции является множество $D(y) = \{x \mid x \neq 1\}$. Имеем:

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1, \text{ т. е. } y = x+1,$$

где $x \neq 1$.

Следовательно, искомым графиком является прямая $y = x + 1$, за исключением одной точки, абсцисса которой равна 1 (рис. 6.1). $\blacksquare$

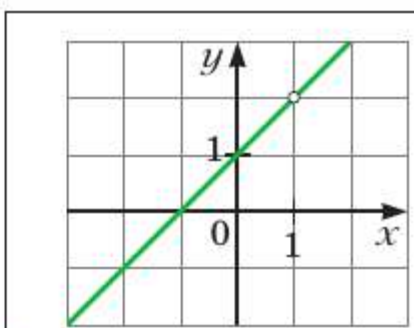


Рис. 6.1

Пример 6. Для каждого значения a решите уравнение $(a^2 - 9)x = a + 3$.

Решение. Запишем данное уравнение в виде $(a + 3)(a - 3)x = a + 3$ и рассмотрим три случая.

1) $a = -3$.

В этом случае получаем уравнение $0x = 0$, корнем которого является любое число.

2) $a = 3$.

Тогда получаем уравнение $0x = 6$, не имеющее корней.

3) $a \neq -3$ и $a \neq 3$.

Тогда $x = \dfrac{a+3}{(a+3)(a-3)} = \dfrac{1}{a-3}$.

Ответ: если $a = -3$, то корнем является любое число; если $a = 3$, то уравнение не имеет корней; если $a \neq 3$ и $a \neq -3$, то $x = \dfrac{1}{a-3}$. ■

1. Какие выражения называют тождественно равными?

2. Что называют тождеством?

3. Сформулируйте основное свойство рациональной дроби.

Упражнения

6.1. Сократите дробь:

1) $\dfrac{14a^3}{21a}$; 3) $\dfrac{4abc}{16ab^4}$; 5) $\dfrac{-10n^{10}}{5n^4}$;

2) $\dfrac{24x^2y^2}{32xy}$; 4) $\dfrac{56m^5n^7}{42m^5n^{10}}$; 6) $\dfrac{3p^4q^6}{-9p^8q^7}$.

6.2. Сократите дробь:

1) $\dfrac{3x}{21y}$; 3) $\dfrac{5c^4}{10c^5}$; 5) $\dfrac{12a^8}{-42a^2}$;

2) $\dfrac{5x^2}{6x}$; 4) $\dfrac{63x^5y^4}{42x^4y^5}$; 6) $\dfrac{-13a^5b^5}{26a^4b^3}$.

6.3. Восстановите равенства:

1) $\dfrac{a}{3} = \dfrac{\quad}{6a} = \dfrac{\quad}{9a^3} = \dfrac{\quad}{5b} = \dfrac{4a^2c^3}{\quad}$;

2) $\dfrac{m}{n} = \dfrac{4m}{\quad} = \dfrac{\quad}{2n^2} = \dfrac{\quad}{mnp} = \dfrac{3m^4n^3}{\quad}$.

6.4. Сократите дробь:

1) $\frac{2a+2b}{7(a+b)}$;
2) $\frac{4(a-6)^2}{(a-6)^3}$;
3) $\frac{12a+18b}{12a}$;
4) $\frac{7x-21y}{5x-15y}$;
5) $\frac{a-5b}{a^2-5ab}$;
6) $\frac{c^2-6c+9}{c^2-9}$;
7) $\frac{m^3+1}{m^2-m+1}$;
8) $\frac{3x-6y}{4y-2x}$;
9) $\frac{m^2-5mn}{15n-3m}$;
10) $\frac{7a^4-a^3b}{b^4-7ab^3}$;
11) $\frac{x^2-25}{5x^2-x^3}$;
12) $\frac{y^2-12y+36}{36-y^2}$.

6.5. Сократите дробь:

1) $\frac{3m-3n}{7m-7n}$;
2) $\frac{5a+25b}{2a^2+10ab}$;
3) $\frac{4x-16y}{16y}$;
4) $\frac{x^2-49}{6x+42}$;
5) $\frac{12a^2-6a}{3-6a}$;
6) $\frac{9b^2-1}{9b^2+6b+1}$;
7) $\frac{b^5-b^4}{b^5-b^6}$;
8) $\frac{7m^2+7m+7}{m^3-1}$;
9) $\frac{64-x^2}{3x^2-24x}$.

6.6. Представьте данные дроби в виде дробей с одинаковыми знаменателями:

1) $\frac{1}{8ab}$ и $\frac{1}{2a^3}$;
2) $\frac{3x}{7m^3n^3}$ и $\frac{4y}{3m^2n^4}$;
3) $\frac{a+b}{a-b}$ и $\frac{2}{a^2-b^2}$;
4) $\frac{3d}{m-n}$ и $\frac{8p}{(m-n)^2}$;
5) $\frac{x}{2x+1}$ и $\frac{x}{3x-2}$;
6) $\frac{a-b}{3a+3b}$ и $\frac{a}{a^2-b^2}$;
7) $\frac{3a}{4a-4}$ и $\frac{2a}{5-5a}$;
8) $\frac{7a}{b-3}$ и $\frac{c}{9-b^2}$.

6.7. Приведите к общему знаменателю дроби:

1) $\frac{4}{15x^2y^2}$ и $\frac{1}{10x^3y}$;
2) $\frac{c}{6a^4b^5}$ и $\frac{d}{9ab^2}$;
3) $\frac{x}{y-5}$ и $\frac{z}{y^2-25}$;
4) $\frac{m+n}{m^2-mn}$ и $\frac{2m-3n}{m^2-n^2}$;
5) $\frac{x+1}{x^2-xy}$ и $\frac{y-1}{xy-y^2}$;
6) $\frac{6a}{a-2b}$ и $\frac{3a}{a+b}$;
7) $\frac{1+c^2}{c^2-16}$ и $\frac{c}{4-c}$;
8) $\frac{2m+9}{m^2+5m+25}$ и $\frac{m}{m-5}$.

6.8. Сократите дробь:

1) $\dfrac{(3a+3b)^2}{a+b}$;

2) $\dfrac{(6x-18y)^2}{x^2-9y^2}$;

3) $\dfrac{xy+x-5y-5}{4y+4}$;

4) $\dfrac{a^2-ab+2b-2a}{a^2-4a+4}$.

6.9. Сократите дробь:

1) $\dfrac{2m^2-72n^2}{(4m+24n)^2}$;

2) $\dfrac{a^3-8}{ab-a-2b+2}$;

3) $\dfrac{a^3+2a^2b+ab^2}{a^3-ab^2}$.

6.10. Сократите дробь (n — натуральное число):

1) $\dfrac{100^n}{2^{2n+3}\cdot 5^{2n+1}}$;

2) $\dfrac{2^{2n+1}\cdot 7^{n+1}}{6\cdot 28^n}$;

3) $\dfrac{5^{n+1}-5^n}{2\cdot 5^n}$.

6.11. Сократите дробь (n — натуральное число):

1) $\dfrac{18^n}{3^{2n+2}\cdot 2^{n+1}}$;

2) $\dfrac{41\cdot 9^n}{9^{n+2}+9^n}$.

6.12. Приведите к общему знаменателю дроби:

1) $\dfrac{2p}{5p-15}$ и $\dfrac{1}{p^3-27}$;

2) $\dfrac{3a+1}{9a^2-6a+1}$ и $\dfrac{a-2}{9a^2-1}$;

3) $\dfrac{a}{a^2-7a}$ и $\dfrac{a+3}{a^2-14a+49}$;

4) $\dfrac{2x}{x^2-1}$, $\dfrac{3x}{x^2-2x+1}$ и $\dfrac{4}{x^2+2x+1}$;

5) $\dfrac{a^2}{a^2-ab-ac+bc}$, $\dfrac{b}{2a-2b}$ и $\dfrac{ab}{4a-4c}$.

6.13. Запишите в виде дробей с одинаковыми знаменателями дроби:

1) $\dfrac{3a}{3a-2}$, $\dfrac{a}{9a+6}$ и $\dfrac{a^2}{9a^2b-4b}$;

2) $\dfrac{1}{a-5b}$, $\dfrac{1}{a^2+7ac}$ и $\dfrac{1}{a^2+7ac-5ab-35bc}$.

6.14. Найдите значение выражения $\dfrac{2xy-y^2}{3xy+x^2}$, если $\dfrac{x}{y}=2$.

6.15. Найдите значение выражения $\dfrac{4a^2-ab}{ab+14b^2}$, если $\dfrac{a}{b}=5$.

6.16. Известно, что $2a-6b=1$. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{8}{a-3b}$;

2) $\dfrac{a^2-9b^2}{0{,}5a+1{,}5b}$.

6.17. Найдите значение выражения $\dfrac{2m-1,5n}{32m^2-18n^2}$, если $4m+3n=8$.

6.18. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{a^2-3ab-b^2}{a^2-b^2}$, если $\dfrac{3a+2b}{4a-b}=1$; 2) $\dfrac{m^3+2m^2n}{n^3-mn^2}$, если $\dfrac{5m-n}{3m+2n}=2$.

6.19. Какая фигура является графиком функции $y=\dfrac{x^3-2x^2+4x-8}{x^2+4}$?

6.20. Постройте график функции:

1) $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$; 3) $y=\dfrac{x^2-10x+25}{x-5}-\dfrac{2x^2-4x}{x}$;

2) $y=\dfrac{x-3}{3-x}$; 4) $y=\dfrac{2}{x+4}-\dfrac{2}{x+4}$.

6.21. Постройте график функции:

1) $y=\dfrac{x^2-8x+16}{x-4}$; 2) $y=x-\dfrac{x}{x}$; 3) $y=\dfrac{x^2-3x}{x}-\dfrac{2x^2-2}{x^2-1}$.

6.22. Постройте график функции:

1) $y=\dfrac{|x|}{x}$; 2) $y=\dfrac{x^2-1}{|x|-1}$.

6.23. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x+1}{x+1}=1$; 2) $\dfrac{x^2-25}{x-5}=10$; 3) $\dfrac{x+6}{|x|-6}=0$.

6.24. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x^2-16}{x+4}=-8$; 2) $\dfrac{|x|-7}{x-7}=0$.

◆ ◆ ◆

6.25. Для каждого значения a решите уравнение:

1) $ax=1$; 3) $(a-6)x=a^2-12a+36$;

2) $ax=a$; 4) $(a^2-4)x=a-2$.

6.26. Для каждого значения a решите уравнение:

1) $(a+3)x=3$; 2) $(a^2-9a)x=a^2-18a+81$.

6.27. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение дроби:

1) $\dfrac{a^3-a^2-a+1}{a^3+a^2+a+1}$ неотрицательное;

2) $\dfrac{2x-4}{x^3-2x^2+x-2}$ положительное;

3) $\dfrac{(x-1)^3}{x^3-x^2+4x-4}$ неотрицательное;

4) $\dfrac{x^2-4}{12+x^2-x^4}$ отрицательное.

6.28. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение дроби:

1) $\dfrac{x-1}{x^3-x^2+2x-2}$ положительное;

2) $\dfrac{(x-2)^3}{x^3-2x^2+x-2}$ неотрицательное;

3) $\dfrac{x^2-1}{4-3x^2-x^4}$ отрицательное.

6.29. Известно, что $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\ldots=\dfrac{a_n}{b_n}=k$. Докажите, что если $b_1+b_2+\ldots+b_n\neq 0$, то $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=k$.

6.30. Сократите дробь:

1) $\dfrac{2x+4}{x^2+x-2}$;

2) $\dfrac{a^2-4a+3}{a^2+2a-3}$;

3) $\dfrac{2b^3+3b^2+3b+1}{2b+1}$;

4) $\dfrac{x+3}{x^3+6x^2+12x+9}$;

5) $\dfrac{a^4+4}{a^2+2a+2}$;

6) $\dfrac{n^4+4n^3+8n^2}{n^4+64}$;

7) $\dfrac{y^4+y^2+1}{y^2-y+1}$;

8) $\dfrac{m^2+m+3}{m^4+5m^2+9}$;

9) $\dfrac{b^{47}+b^{46}+\ldots+b+1}{b^{23}+b^{22}+\ldots+b+1}$;

10) $\dfrac{a^{38}-a^{37}+a^{36}-\ldots-a+1}{a^{12}-a^{11}+a^{10}-\ldots-a+1}$.

6.31. Сократите дробь:

1) $\dfrac{3y+9}{y^2+y-6}$;

2) $\dfrac{x^2+6x+5}{x^2+3x+2}$;

3) $\dfrac{2x^3-9x^2+27x-27}{4x^2-9}$;

4) $\dfrac{z^4+7z^2+16}{z^2+z+4}$;

5) $\dfrac{y^{55}+y^{54}+\ldots+y+1}{y^{27}+y^{26}+\ldots+y+1}$;

6) $\dfrac{a^{59}-a^{58}+a^{57}-\ldots+a-1}{a^{19}-a^{18}+a^{17}-\ldots+a-1}$.

6.32. Известно, что $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{x_2}{x_3}=\dfrac{x_3}{x_4}$. Докажите, что $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{x_2+x_3+x_4}\right)^3=\dfrac{x_1}{x_4}$.

6.33. Для положительных чисел a, b и c выполняется равенство $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b}$. Найдите значение выражения $\frac{(a+b)^2}{c^2} + \frac{(a+c)^2}{b^2} + \frac{(b+c)^2}{a^2}$.

6.34. Для положительных чисел a, b и c выполняется равенство $\frac{a}{b+c+d} = \frac{b}{a+c+d} = \frac{c}{a+b+d} = \frac{d}{a+b+c}$. Найдите значение выражения $\frac{a+b+c}{d} + \frac{a+b+d}{c} + \frac{a+c+d}{b} + \frac{b+c+d}{a}$.

6.35. Известно, что $a^3 + 7a - 9 = 0$. Найдите значение выражения:

1) $\frac{2a^3 + 3a}{11a - 18}$; 2) $\frac{2a^4 + 14a^2 - 17a + 3}{2a + 6}$.

6.36. Сократите дробь $\frac{x^5 + x + 1}{x^2 + x + 1}$.

6.37. Разложите на множители многочлен $a^8 + a^6 + a^4 + a^2 + 1$.

Упражнения для повторения

6.38. Упростите выражение:

1) $(a + 5)(a - 2) + (a + 4)(a - 5)$;
2) $(y - 8)(2y + 1) - (3y + 1)(y - 6)$;
3) $(2x - 3y)(2x + 3y) + (3x + 2y)(3x - 2y)$;
4) $(x + 1)^2 - (x - 3)(x + 3)$;
5) $(y - 4)(y + 3) - (y - 6)^2$.

6.39. Какое наименьшее значение и при каких значениях a и b принимает выражение $(a - 2)(a + 2) + 4b(b - a)$?

6.40. Расстояние от села Вишнёвое до железнодорожной станции на 14 км меньше расстояния от села Яблоневое до той же станции. Время, за которое автобус преодолевает расстояние от села Вишнёвое до станции, составляет 45 мин, а время, за которое легковой автомобиль проезжает от села Яблоневое до станции, на 5 мин больше, причём скорость автомобиля на 12 км/ч больше скорости автобуса. Найдите скорость автобуса и скорость легкового автомобиля.

§ 7 Сложение и вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями

Вы знаете правила сложения и вычитания обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями. Их можно выразить такими равенствами:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c},\ \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

Аналогично складывают и вычитают рациональные дроби с одинаковыми знаменателями.

Суммой двух рациональных дробей с одинаковыми знаменателями является рациональная дробь, числитель которой равен сумме числителей данных дробей, а знаменатель — знаменателю этих дробей.

Разностью двух рациональных дробей с одинаковыми знаменателями является рациональная дробь, числитель которой равен разности числителей данных дробей, а знаменатель — знаменателю этих дробей.

Пример 1. Выполните вычитание:

1) $\frac{y^2+2y}{y^2-25}-\frac{12y-25}{y^2-25}$; 2) $\frac{4}{2a-1}-\frac{2a-3}{1-2a}$.

Решение. 1) $\frac{y^2+2y}{y^2-25}-\frac{12y-25}{y^2-25}=\frac{y^2+2y-(12y-25)}{y^2-25}=$

$=\frac{y^2+2y-12y+25}{y^2-25}=\frac{y^2-10y+25}{y^2-25}=\frac{(y-5)^2}{(y+5)(y-5)}=\frac{y-5}{y+5}.$

2) $\frac{4}{2a-1}-\frac{2a-3}{1-2a}=\frac{4}{2a-1}-\frac{2a-3}{-(2a-1)}=\frac{4}{2a-1}+\frac{2a-3}{2a-1}=\frac{4+2a-3}{2a-1}=$

$=\frac{2a+1}{2a-1}.$ ■

Пример 2. Известно, что $\frac{m}{n}=-3$. Найдите значение выражения $\frac{2m+n}{m}$.

Решение. Представим данную дробь в виде суммы целого и дробного выражений:

$$\frac{2m+n}{m}=\frac{2m}{m}+\frac{n}{m}=2+\frac{n}{m}.$$

Если $\frac{m}{n} = -3$, то $\frac{n}{m} = -\frac{1}{3}$. Следовательно, $\frac{2m+n}{m} = 2 + \frac{n}{m} = 2 - \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}$.

Ответ: $1\frac{2}{3}$. ■

Пример 3. Найдите все натуральные значения n, при которых значение выражения $\frac{2n^2 + 3n - 15}{n}$ является целым числом.

Решение. Представим данную дробь в виде разности целого и дробного выражений:

$$\frac{2n^2 + 3n - 15}{n} = \frac{2n^2}{n} + \frac{3n}{n} - \frac{15}{n} = 2n + 3 - \frac{15}{n}.$$

Выражение $2n + 3$ принимает натуральные значения при любом натуральном n. Поэтому выражение $2n + 3 - \frac{15}{n}$ принимает целые значения, если значения выражения $\frac{15}{n}$ являются целыми числами. Это возможно только при таких натуральных значениях n: 1, 3, 5, 15.

Ответ: {1, 3, 5, 15}. ■

Пример 4. При каких целых значениях n значение дроби $\frac{3n^2 + 5n - 13}{n + 2}$ является целым числом?

Решение. Имеем:

$$\frac{3n^2 + 5n - 13}{n + 2} = \frac{3n^2 + 6n - n - 2 - 11}{n + 2} = \frac{3n(n + 2) - (n + 2) - 11}{n + 2} =$$

$$= \frac{3n(n + 2)}{n + 2} - 1 - \frac{11}{n + 2} = 3n - 1 - \frac{11}{n + 2}.$$

Дробь $\frac{11}{n + 2}$ принимает целые значения только тогда, когда её знаменатель принимает одно из четырёх значений: –1, 1, –11, 11. Отсюда n принимает такие значения: –3, –1, –13, 9.

Ответ: {–3, –1, –13, 9}. ■

Выполненные в примерах 2–4 преобразования рациональной дроби называют **выделением целой части из дроби.**

? **1.** Какая дробь является суммой двух рациональных дробей с одинаковыми знаменателями?

2. Какая дробь является разностью двух рациональных дробей с одинаковыми знаменателями?

Упражнения

7.1. Выполните действия:

1) $\frac{x}{6}+\frac{y}{6}$; 3) $\frac{m}{n}+\frac{4m}{n}$; 5) $\frac{2a-3b}{6ab}+\frac{9b-2a}{6ab}$;

2) $\frac{a}{3}-\frac{b}{3}$; 4) $\frac{m+n}{6}-\frac{m-2n}{6}$; 6) $\frac{8m+3}{10m^2}-\frac{2m+3}{10m^2}$.

7.2. Представьте в виде дроби выражение:

1) $\frac{a-b}{2b}-\frac{a}{2b}$; 3) $\frac{10a+6b}{11a^3}-\frac{6b-a}{11a^3}$;

2) $-\frac{a-12b}{27a}+\frac{a+15b}{27a}$; 4) $\frac{x^2-xy}{x^2y}+\frac{2xy-3x^2}{x^2y}$.

7.3. Упростите выражение:

1) $\frac{a^2}{a+3}-\frac{9}{a+3}$; 3) $\frac{m^2}{(m-5)^2}-\frac{25}{(m-5)^2}$;

2) $\frac{t}{t^2-16}-\frac{4}{t^2-16}$; 4) $\frac{b^2}{b+10}+\frac{20b+100}{b+10}$.

7.4. Упростите выражение:

1) $\frac{c^2}{c-9}-\frac{81}{c-9}$; 3) $\frac{3x+5}{x^2-4}-\frac{2x+7}{x^2-4}$;

2) $\frac{a^2}{(a-6)^2}-\frac{36}{(a-6)^2}$; 4) $\frac{y^2}{y-2}-\frac{4y-4}{y-2}$.

7.5. Выполните действия:

1) $\frac{a+b}{c-7}+\frac{a}{7-c}$; 3) $\frac{81b^2}{9b-a}+\frac{a^2}{a-9b}$;

2) $\frac{2x-4y}{x-3y}-\frac{4x-14y}{3y-x}$; 4) $\frac{y^2}{y-1}-\frac{1-2y}{1-y}$.

7.6. Упростите выражение:

1) $\frac{3c}{c-d}+\frac{3d}{d-c}$;

2) $\frac{b^2}{2b-14}+\frac{49}{14-2b}$.

7.7. Найдите значение выражения:

1) $\frac{a^2-48}{a-8}-\frac{16}{a-8}$ при $a=32$; 2) $\frac{c^2+3c+7}{c^3-8}+\frac{c+3}{8-c^3}$ при $c=-3$.

7.8. Найдите значение выражения:

1) $\frac{5x+3}{x^2-16}+\frac{6x-1}{16-x^2}$ при $x=-4{,}1$; 2) $\frac{a^2+a}{a^2-9}-\frac{7a-9}{a^2-9}$ при $a=7$.

7.9. Упростите выражение:

1) $\frac{5n-1}{20n}-\frac{7n-8}{20n}-\frac{8n+7}{20n}$;

2) $\frac{9m+2}{m^2-4}-\frac{m-9}{4-m^2}+\frac{1-7m}{m^2-4}$;

3) $\frac{3k}{k^3-1}+\frac{4k+1}{1-k^3}+\frac{k^2}{1-k^3}$.

7.10. Упростите выражение:

1) $\frac{6a-1}{16a-8}+\frac{4a-7}{16a-8}+\frac{-2a-2}{8-16a}$;

2) $\frac{2a^2+12a}{a^2-25}+\frac{8a-9}{25-a^2}-\frac{a^2+14a-16}{a^2-25}$.

7.11. Выполните действия:

1) $\frac{15-8a}{(a-1)^2}-\frac{14-7a}{(1-a)^2}$;

2) $\frac{3b^2+12}{(b-2)^3}+\frac{12b}{(2-b)^3}$;

3) $\frac{m^2-8n}{(m-2)(n-5)}-\frac{2m-8n}{(2-m)(5-n)}$;

4) $\frac{x^2}{(x-3)^2}-\frac{6x-9}{(3-x)^2}$.

7.12. Представьте в виде дроби выражение:

1) $\frac{x^2-16x}{(x-7)^4}+\frac{2x+49}{(7-x)^4}$;

2) $\frac{a^3}{(a-2b)^3}+\frac{8b^3}{(2b-a)^3}$;

3) $\frac{y^2+y}{(y-6)(y+2)}+\frac{y+36}{(6-y)(2+y)}$;

4) $\frac{2-b^2}{(b-5)^6}-\frac{7-3b}{(b-5)^6}+\frac{7b-20}{(b-5)^6}$.

7.13. Докажите тождество:

1) $\frac{(a+b)^2}{4ab}-\frac{(a-b)^2}{4ab}=1$;

2) $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}+\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}=2$.

7.14. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной x значение выражения $\frac{12x-25}{20x-15}+\frac{8x+10}{20x-15}$ не зависит от значения x.

7.15. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной y значение выражения $\frac{17y+5}{21y-3}-\frac{9-11y}{21y-3}$ не зависит от значения y.

7.16. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной выражение $\frac{a^2-6}{(a-2)^4}-\frac{7a-4}{(a-2)^4}+\frac{3a+6}{(a-2)^4}$ принимает положительные значения.

7.17. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной выражение $\frac{2-b^2}{(b-5)^6}-\frac{7-3b}{(b-5)^6}+\frac{7b-20}{(b-5)^6}$ принимает отрицательные значения.

7.18. Представьте данную дробь в виде суммы или разности целого и дробного выражений:

1) $\frac{x+3}{x}$;

2) $\frac{a^2-2a-5}{a-2}$.

7.19. Представьте данную дробь в виде суммы или разности целого и дробного выражений:

1) $\frac{4a-b}{a}$; 2) $\frac{b^2+7b+3}{b+7}$.

7.20. Известно, что $\frac{x}{y}=4$. Найдите значение выражения:

1) $\frac{y}{x}$; 2) $\frac{2x-3y}{y}$; 3) $\frac{x^2+y^2}{xy}$.

7.21. Известно, что $\frac{a}{b}=-2$. Найдите значение выражения:

1) $\frac{a-b}{a}$; 2) $\frac{4a+5b}{b}$; 3) $\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}$.

7.22. Найдите все натуральные значения n, при которых значение выражения является целым числом:

1) $\frac{n+6}{n}$; 2) $\frac{3n^2-4n-14}{n}$; 3) $\frac{4n+7}{2n-3}$.

7.23. Найдите все натуральные значения n, при которых значение выражения является целым числом:

1) $\frac{8n-9}{n}$; 2) $\frac{n^2+2n-8}{n}$; 3) $\frac{9n-4}{3n-5}$.



7.24. Докажите, что при любом натуральном значении n значение дроби не является целым числом:

1) $\frac{n^2+n+1}{n+1}$; 2) $\frac{n^3-2n^2+n-1}{n^2+1}$.

7.25. При каких целых значениях n значение дроби является целым числом:

1) $\frac{2n^2+7n-4}{n+3}$; 2) $\frac{4n^2-11n+23}{n-2}$?



7.26. Докажите, что при любом натуральном значении n значение дроби является целым числом:

1) $\frac{n^3-2n+1}{n^2+n-1}$; 2) $\frac{n^3-4n-3}{n^2-n-3}$.

7.27. Числа a, b и c таковы, что значения выражений $a+b+c$ и $\frac{ab+bc+ac}{a+b+c}$ являются целыми числами. Докажите, что значение выражения $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$ также является целым числом.

7.28. Из двух сёл, расстояние между которыми 9 км, одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста и встретились через 20 мин. Если бы велосипедисты ехали в одном направлении, то один из них догнал бы другого через 3 ч. Найдите скорость каждого велосипедиста.

7.29. Докажите, что выражение $(a + 4)(a - 8) + 4(2a + 9)$ при всех значениях a принимает неотрицательные значения.

7.30. Виктор и Галина ехали в одном поезде. Виктор ехал в седьмом вагоне от головы поезда, а Галина — в восемнадцатом вагоне от хвоста поезда. Однако они ехали в одном вагоне. Сколько вагонов в поезде?

7.31. Докажите, что значение выражения $999 \cdot 1001 \cdot 1002 + 1001 \cdot 1003$ является кубом натурального числа.

§ 8 Сложение и вычитание рациональных дробей с разными знаменателями

Применяя основное свойство рациональной дроби, сложение и вычитание дробей с разными знаменателями можно свести к сложению и вычитанию дробей с одинаковыми знаменателями.

Пусть надо сложить две рациональные дроби $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$.

Можно записать: $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D}$; $\frac{C}{D} = \frac{C \cdot B}{D \cdot B}$.

Тогда $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D} + \frac{C \cdot B}{D \cdot B} = \frac{A \cdot D + C \cdot B}{B \cdot D}$.

Здесь в качестве **общего знаменателя** выбрано выражение, равное произведению знаменателей данных дробей.

Заметим, что произведение знаменателей данных дробей не всегда является наиболее удобным общим знаменателем.

Напомним, что при нахождении общего знаменателя обыкновенных дробей мы находили наименьшее общее кратное знаменателей, раскладывая их на простые множители. Аналогично для нахождения общего знаменателя рациональных дробей может оказаться удобным предварительно разложить знаменатели на множители.

Пример 1. Упростите выражение:

1) $\dfrac{b+1}{abc}+\dfrac{1-a}{a^2c}$;

2) $\dfrac{m}{7m+7n}-\dfrac{n}{7m-7n}$;

3) $\dfrac{10n+14}{n^2-49}+\dfrac{6}{7-n}$;

4) $\dfrac{2a}{25-10a+a^2}-\dfrac{1}{3a-15}$;

5) $\dfrac{x}{x-4}-\dfrac{x+2}{x-2}$.

Решение. 1) Общим знаменателем данных дробей является одночлен a^2bc. Следовательно,

$$\frac{b+1}{abc}{\scriptstyle \backslash a}+\frac{1-a}{a^2c}{\scriptstyle \backslash b}=\frac{ab+a+b-ab}{a^2bc}=\frac{a+b}{a^2bc}.$$

2) Разложив предварительно знаменатели данных дробей на множители, получаем:

$$\frac{m}{7m+7n}-\frac{n}{7m-7n}=\frac{m}{7(m+n)}{\scriptstyle \backslash m-n}-\frac{n}{7(m-n)}{\scriptstyle \backslash m+n}=$$

$$=\frac{m(m-n)-n(m+n)}{7(m+n)(m-n)}=\frac{m^2-mn-mn-n^2}{7(m^2-n^2)}=\frac{m^2-2mn-n^2}{7(m^2-n^2)}.$$

3) $$\frac{10n+14}{n^2-49}+\frac{6}{7-n}=\frac{10n+14}{(n-7)(n+7)}-\frac{6}{n-7}{\scriptstyle \backslash n+7}=\frac{10n+14-6(n+7)}{(n-7)(n+7)}=$$

$$=\frac{10n+14-6n-42}{(n-7)(n+7)}=\frac{4n-28}{(n-7)(n+7)}=\frac{4(n-7)}{(n-7)(n+7)}=\frac{4}{n+7}.$$

4) $$\frac{2a}{25-10a+a^2}-\frac{1}{3a-15}=\frac{2a}{(5-a)^2}-\frac{1}{3(a-5)}=\frac{2a}{(a-5)^2}{\scriptstyle \backslash 3}-\frac{1}{3(a-5)}{\scriptstyle \backslash a-5}=$$

$$=\frac{6a-a+5}{3(a-5)^2}=\frac{5a+5}{3(a-5)^2}.$$

5) В этом случае общий знаменатель данных дробей равен произведению их знаменателей. Тогда

$$\frac{x}{x-4}{\scriptstyle \backslash x-2}-\frac{x+2}{x-2}{\scriptstyle \backslash x-4}=\frac{x(x-2)-(x+2)(x-4)}{(x-4)(x-2)}=\frac{8}{(x-4)(x-2)}.$$ ■

Пример 2. Представьте в виде дроби выражение $\dfrac{21c^2}{7c-2}-3c$.

Решение. Представив выражение $3c$ в виде дроби со знаменателем 1, получаем:

$$\frac{21c^2}{7c-2}-3c=\frac{21c^2}{7c-2}-\frac{3c}{1}{\scriptstyle \backslash 7c-2}=\frac{21c^2-21c^2+6c}{7c-2}=\frac{6c}{7c-2}.$$ ■

Заметим, что *сумма и разность двух рациональных дробей являются рациональными дробями.*

1. Как выполнить сложение и вычитание рациональных дробей с разными знаменателями?
2. Что является суммой и разностью двух рациональных дробей?

Упражнения

8.1. Упростите выражение:

1) $\frac{5m-n}{14m}-\frac{m-6n}{7m}$;
2) $\frac{a+b}{ab}+\frac{a-c}{ac}$;
3) $\frac{k+4}{k}-\frac{3k-4}{k^2}$;
4) $\frac{x-y}{x^3}-\frac{y-x^2}{x^2y}$;
5) $\frac{2m-3n}{m^2n}+\frac{7m-2n}{mn^2}$;
6) $\frac{c+d}{cd^4}-\frac{c^2-8d}{c^3d^3}$.

8.2. Выполните вычитание дробей:

1) $\frac{4d+7}{7d}-\frac{d-6}{6d}$;
2) $\frac{m-n}{mn}-\frac{p-n}{np}$;
3) $\frac{6a+2}{ab}-\frac{2a+4}{a^2b}$;
4) $\frac{c^2-16}{c^6}-\frac{c-9}{c^5}$;
5) $\frac{1}{x^3}-\frac{1+x^2}{x^5}$;
6) $\frac{1-ab}{abc}-\frac{1-ad}{acd}$.

8.3. Выполните действия:

1) $\frac{m}{n}-\frac{m}{m+n}$;
2) $\frac{a}{a-3}-\frac{3}{a+3}$;
3) $\frac{c}{3c-1}-\frac{c}{3c+1}$;
4) $\frac{x}{2y+1}-\frac{x}{3y-2}$.

8.4. Представьте в виде дроби выражение:

1) $\frac{a}{a-b}+\frac{a}{b}$;
2) $\frac{4}{x}-\frac{5x+4}{x+2}$;
3) $\frac{b}{b-2}-\frac{2}{b+2}$.

8.5. Выполните сложение или вычитание дробей:

1) $\frac{18}{b^2+3b}-\frac{6}{b}$;
2) $\frac{2}{c+1}-\frac{c-1}{c^2+c}$;
3) $\frac{m+1}{3m-15}+\frac{1-m}{2m-10}$;
4) $\frac{m-2n}{6m+6n}-\frac{m-3n}{4m+4n}$;
5) $\frac{a^2+2}{a^2+2a}-\frac{a+4}{2a+4}$;
6) $\frac{3x-4y}{x^2-2xy}+\frac{x-3y}{xy-2y^2}$.

8.6. Упростите выражение:

1) $\frac{2}{m}-\frac{16}{m^2+8m}$;
2) $\frac{a-2}{2a-6}-\frac{a-1}{3a-9}$;
3) $\frac{a^2+b^2}{2a^2+2ab}+\frac{b}{a+b}$;
4) $\frac{b+4}{ab-b^2}-\frac{a+4}{a^2-ab}$.

8.7. Выполните действия:

1) $\frac{3}{x+3}+\frac{x+4}{x^2-9}$;
2) $\frac{6b}{9b^2-4}-\frac{1}{3b-2}$;
3) $\frac{3a+b}{a^2-b^2}+\frac{1}{a+b}$;
4) $\frac{b}{a+b}-\frac{b^2}{a^2+b^2+2ab}$.

8.8. Упростите выражение:

1) $\frac{4x-y}{x^2-y^2}+\frac{1}{x-y}$;

2) $\frac{y^2}{y^2-81}-\frac{y}{y+9}$;

3) $\frac{10a}{25a^2-9}-\frac{1}{5a+3}$;

4) $\frac{n}{n-7}-\frac{n^2}{n^2-14n+49}$.

8.9. Представьте в виде дроби выражение:

1) $\frac{x}{y}-x$;

2) $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+2$;

3) $\frac{9}{p^2}-\frac{4}{p}+3$;

4) $\frac{3b+4}{b-2}-3$;

5) $6m-\frac{12m^2+1}{2m}$;

6) $\frac{20b^2+5}{2b-1}-10b$.

8.10. Выполните действия:

1) $a-\frac{4}{a}$;

2) $\frac{1}{x}+x-2$;

3) $\frac{m}{n^3}-\frac{1}{n}+m$;

4) $\frac{2k^2}{k-5}-k$;

5) $3n-\frac{9n^2-2}{3n}$;

6) $5-\frac{4y-12}{y-2}$.

◆ ◆

8.11. Упростите выражение:

1) $\frac{a^2+1}{a^2-2a+1}+\frac{a+1}{a-1}$;

2) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{a+b}$;

3) $\frac{c+7}{c-7}+\frac{28c}{49-c^2}$;

4) $\frac{5a+3}{2a^2+6a}+\frac{6-3a}{a^2-9}$;

5) $\frac{a}{a^2-4a+4}-\frac{a+4}{a^2-4}$;

6) $\frac{2p}{p-5}-\frac{5}{p+5}+\frac{2p^2}{25-p^2}$;

7) $\frac{1}{y}-\frac{y+8}{16-y^2}-\frac{2}{y-4}$;

8) $\frac{2b-1}{4b+2}+\frac{4b}{4b^2-1}+\frac{2b+1}{3-6b}$.

8.12. Упростите выражение:

1) $\frac{m+n}{m-n}-\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$;

2) $\frac{x-y}{x+y}+\frac{y^2}{2xy+x^2+y^2}$;

3) $\frac{2a}{4a^2-1}-\frac{a+4}{2a^2+a}$;

4) $\frac{b-2}{b^2+6b+9}-\frac{b}{b^2-9}$;

5) $\frac{x-6}{x^2+3x}+\frac{x}{x+3}-\frac{x-3}{x}$;

6) $\frac{y+2}{y-2}-\frac{y-2}{y+2}-\frac{16}{y^2-4}$.

8.13. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение данного выражения не зависит от значения переменной:

1) $\frac{2x+1}{2x-4}+\frac{2x-1}{6-3x}-\frac{x+7}{6x-12}$;

2) $\frac{24-2a}{a^2-16}-\frac{a}{2a-8}+\frac{4}{a+4}$.

8.14. Представьте в виде дроби выражение:

1) $1 - a + \dfrac{a^2 - 2}{a + 2}$;

2) $\dfrac{a^2 - b^2}{3a + b} + 3a - b$;

3) $\dfrac{c^2 + 9}{c - 3} - c - 3$;

4) $\dfrac{8m^2}{4m - 3} - 2m - 1$.

8.15. Упростите выражение:

1) $b + 7 - \dfrac{14b}{b + 7}$;

2) $5c - \dfrac{10 - 29c + 10c^2}{2c - 5} + 2$.

8.16. Докажите тождество:

1) $\dfrac{a + b}{a} - \dfrac{a}{a - b} + \dfrac{b^2}{a^2 - ab} = 0$;

2) $\dfrac{a + 3}{a + 1} - \dfrac{a + 1}{a - 1} + \dfrac{6}{a^2 - 1} = \dfrac{2}{a^2 - 1}$.

8.17. Докажите тождество:

1) $\dfrac{1}{6a - 4b} - \dfrac{1}{6a + 4b} - \dfrac{3a}{4b^2 - 9a^2} = \dfrac{1}{3a - 2b}$;

2) $\dfrac{c + 2}{c^2 + 3c} - \dfrac{1}{3c + 9} - \dfrac{2}{3c} = 0$.

8.18. Найдите разность дробей:

1) $\dfrac{a + 1}{a^3 - 1} - \dfrac{1}{a^2 + a + 1}$;

2) $\dfrac{1}{b + 3} - \dfrac{b^2 - 6b}{b^3 + 27}$.

8.19. Упростите выражение:

1) $\dfrac{9m^2 - 3mn + n^2}{3m - n} - \dfrac{9m^2 + 3mn + n^2}{3m + n}$;

2) $1 - \dfrac{2b - 1}{4b^2 - 2b + 1} - \dfrac{2b}{2b + 1}$.

8.20. Докажите тождество: $\dfrac{3a^2 + 24}{a^3 + 8} - \dfrac{6}{a^2 - 2a + 4} - \dfrac{1}{a + 2} = \dfrac{2}{a + 2}$.

8.21. Упростите выражение:

1) $\dfrac{4b}{a^2 - b^2} + \dfrac{a - b}{a^2 + ab} + \dfrac{a + b}{b^2 - ab}$;

2) $\dfrac{1}{x - 2} + \dfrac{1}{x + 2} - \dfrac{x}{x^2 - 4} + \dfrac{x^2 + 4}{8x - 2x^3}$;

3) $\dfrac{1}{(a - 5b)^2} - \dfrac{2}{a^2 - 25b^2} + \dfrac{1}{(a + 5b)^2}$;

4) $\dfrac{x^2 + 9x + 18}{xy + 3y - 2x - 6} - \dfrac{x + 5}{y - 2}$.

8.22. Докажите тождество:

1) $\dfrac{a + 3}{a^2 - 3a} + \dfrac{a - 3}{3a + 9} + \dfrac{12}{9 - a^2} = \dfrac{a - 3}{3a}$;

2) $\dfrac{b - 4}{2a - 1} - \dfrac{b^2 - 2b - 24}{2ab - 4 - b + 8a} = \dfrac{2}{2a - 1}$;

3) $\dfrac{1}{a^2 + 12a + 36} + \dfrac{2}{36 - a^2} + \dfrac{1}{a^2 - 12a + 36} = \dfrac{144}{(a^2 - 36)^2}$.

8.23. Докажите тождество:

1) $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0;$

2) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1.$

8.24. Докажите тождество:

1) $\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1;$

2) $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=a+b+c.$

8.25. Докажите, что при любом натуральном n выполняется равенство $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$. Воспользовавшись этим равенством, найдите значение суммы:

$$\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\frac{9}{4^2\cdot 5^2}+\frac{11}{5^2\cdot 6^2}.$$

8.26. Докажите, что при любом натуральном n выполняется равенство:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=1-\frac{1}{n}.$$

8.27. Упростите выражение:

1) $\frac{1}{(a-1)(a-2)}+\frac{1}{(a-2)(a-3)}+\frac{1}{(a-3)(a-4)};$

2) $\frac{1}{a(a+3)}+\frac{1}{(a+3)(a+6)}+\frac{1}{(a+6)(a+9)}+\frac{1}{(a+9)(a+12)}.$

8.28. Упростите выражение:

1) $\frac{1}{(a-1)(a-3)}+\frac{1}{(a-3)(a-5)}+\frac{1}{(a-5)(a-7)};$

2) $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}.$

8.29. Докажите тождество:

$$\frac{2}{x^2-1}+\frac{4}{x^2-4}+\frac{6}{x^2-9}+\frac{8}{x^2-16}=$$

$$=5\left(\frac{1}{(x-1)(x+4)}+\frac{1}{(x-2)(x+3)}+\frac{1}{(x-3)(x+2)}+\frac{1}{(x-4)(x+1)}\right).$$

8.30. Докажите тождество:

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}+\frac{16}{1+a^{16}}=\frac{32}{1-a^{32}}.$$

8.31. Докажите тождество:

$$\frac{3}{1-a^2}+\frac{3}{1+a^2}+\frac{6}{1+a^4}+\frac{12}{1+a^8}+\frac{24}{1+a^{16}}=\frac{48}{1-a^{32}}.$$

8.32. Докажите, что если $\frac{a-c}{b+c}+\frac{b-a}{a+c}+\frac{c-b}{a+b}=1$, то $\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+c}+\frac{a+c}{a+b}=4$.

8.33. Докажите, что если $\frac{a+b+c}{a+b-c}=\frac{a-b+c}{a-b-c}$, то $b=0$ или $c=0$.



8.34. Числа a, b и c таковы, что $\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Докажите, что $\frac{1}{a^3+b^3+c^3}=\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}$.

8.35. Найдите значение выражения $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{2}{xy+1}$, если $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}=\frac{2}{xy+1}$ и $x\neq y$.

8.36. Числа a, b и c таковы, что $\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}=0$. Докажите, что одно из слагаемых в левой части равенства равно 0.

8.37. Числа a, b и c таковы, что $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=-\frac{1}{30}$. Найдите значение выражения:

1) $\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}$; 2) $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$.

8.38. Числа a, b и c таковы, что $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}=\frac{3}{2}$. Найдите значение выражения $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}$.

8.39. Числа a, b и c таковы, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. Докажите, что $\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}=3$.

8.40. Числа a, b и c таковы, что $\frac{b+c-a}{a}=\frac{a+c-b}{b}=\frac{b+a-c}{c}$. Какие значения может принимать выражение $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$?

8.41. Найдите значение выражения $\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}$, если $xyz=1$.

8.42. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y = 8, \\ 3x - 2y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 5y = 13, \\ 3x - 5y = -13. \end{cases}$

8.43. За первый день трёхдневной гонки велосипедисты проехали $\frac{4}{15}$ всего маршрута, за второй день — $\frac{2}{5}$ всего маршрута, а за третий — остальные 90 км. Какое расстояние проехали велосипедисты за 3 дня?

8.44. (*Из болгарского фольклора.*) Пятеро братьев хотели разделить 20 овец так, чтобы каждый из них получил нечётное количество овец. Возможно ли это?

8.45. Верно ли утверждение, что при любом натуральном n значение выражения $(5n + 7)^2 - (n - 1)^2$ делится нацело на 48?

8.46. Докажите, что если $xy + z = yz + x = zx + y$, то $(x - y)(y - z)(z - x) = 0$.

§ 9 Умножение и деление рациональных дробей. Возведение рациональной дроби в степень

Вы знаете правила умножения и деления обыкновенных дробей. Их можно выразить следующими равенствами:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Аналогично выполняют умножение и деление рациональных дробей.

Произведением двух рациональных дробей является рациональная дробь, числитель которой равен произведению числителей данных дробей, а знаменатель — произведению их знаменателей.

Частным двух рациональных дробей является рациональная дробь, числитель которой равен произведению числителя делимого и знаменателя делителя, а знаменатель — произведению знаменателя делимого и числителя делителя.

Пример 1. Выполните действия:

1) $(2x - 12) \cdot \dfrac{4x}{x^2 - 12x + 36}$;

2) $\dfrac{a^2+2ab}{a+9} : \dfrac{a^2-4b^2}{3a+27}$;

3) $\dfrac{5c^2-35c}{c+2} : (c-7)$.

Решение. 1) Представив многочлен $2x-12$ в виде дроби со знаменателем 1, получаем:

$$(2x-12)\cdot \frac{4x}{x^2-12x+36} = \frac{2x-12}{1}\cdot\frac{4x}{x^2-12x+36} = \frac{2(x-6)\cdot 4x}{(x-6)^2} = \frac{8x}{x-6}.$$

2) $$\frac{a^2+2ab}{a+9} : \frac{a^2-4b^2}{3a+27} = \frac{a(a+2b)}{a+9}\cdot\frac{3(a+9)}{(a-2b)(a+2b)} = \frac{3a}{a-2b}.$$

3) $$\frac{5c^2-35c}{c+2} : (c-7) = \frac{5c^2-35c}{c+2} : \frac{c-7}{1} = \frac{5c(c-7)}{c+2}\cdot\frac{1}{c-7} = \frac{5c}{c+2}.$$ ■

Правило умножения двух дробей можно обобщить для нахождения произведения трёх и более рациональных дробей. Например, для трёх дробей имеем:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}\cdot\frac{P}{Q} = \frac{A\cdot C}{B\cdot D}\cdot\frac{P}{Q} = \frac{A\cdot C\cdot P}{B\cdot D\cdot Q}.$$

Пример 2. Упростите выражение $\dfrac{2a^5}{15b^3}\cdot\dfrac{10b^2}{7c^4} : \dfrac{4a^2}{9bc^3}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{2a^5}{15b^3}\cdot\frac{10b^2}{7c^4} : \frac{4a^2}{9bc^3} = \frac{2a^5}{15b^3}\cdot\frac{10b^2}{7c^4}\cdot\frac{9bc^3}{4a^2} = \frac{2a^5\cdot 10b^2\cdot 9bc^3}{15b^3\cdot 7c^4\cdot 4a^2} =$$

$$= \frac{2\cdot 10\cdot 9\cdot a^5b^3c^3}{15\cdot 7\cdot 4\cdot a^2b^3c^4} = \frac{3a^3}{7c}.$$ ■

Применяя правило умножения дробей, можно получить правило возведения рациональных дробей в степень. Для натурального n, $n>1$, имеем:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \underbrace{\frac{A}{B}\cdot\frac{A}{B}\cdot\ldots\cdot\frac{A}{B}}_{n\text{ множителей}} = \frac{\overbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}^{n\text{ множителей}}}{\underbrace{B\cdot B\cdot\ldots\cdot B}_{n\text{ множителей}}} = \frac{A^n}{B^n}.$$

Для $n=1$ договорились, что $\left(\dfrac{A}{B}\right)^1 = \dfrac{A}{B}$.

Следовательно,

$\left(\dfrac{A}{B}\right)^n = \dfrac{A^n}{B^n}$, где n — натуральное число.

Чтобы возвести рациональную дробь в степень, надо возвести в эту степень числитель и знаменатель. Первый результат записать как числитель, а второй — как знаменатель дроби.

Пример 3. Представьте в виде дроби выражение $\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3$.

Решение. $\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3 = -\frac{(3a^2)^3}{(2bc^4)^3} = -\frac{27a^6}{8b^3c^{12}}$. ■

1. Какая дробь является произведением двух рациональных дробей?
2. Какая дробь является частным двух рациональных дробей?
3. Как возвести рациональную дробь в степень?

Упражнения

9.1. Выполните умножение:

1) $\frac{2a}{b} \cdot \frac{b}{8a}$;
2) $\frac{x}{yz} \cdot \frac{y^4}{5x}$;
3) $14m^9 \cdot \frac{n^2}{7m^3}$;
4) $\frac{15a^4}{b^{12}} \cdot \frac{b^6}{10a^2}$;
5) $\frac{21c^3}{13p^2} \cdot \frac{39p}{28c^2}$;
6) $\frac{25a^2c}{64b^4} \cdot \frac{77b^6}{10ac^3}$.

9.2. Упростите выражение:

1) $\frac{4m^2}{k^5} \cdot \frac{mk^5}{12}$;
2) $\frac{a}{2b} \cdot 2a$;
3) $15x^{12} \cdot \frac{y^2}{5x^4}$;
4) $\frac{7k^8}{9mp} \cdot \frac{27m^3}{56k^6p^2}$.

9.3. Упростите выражение:

1) $\frac{2mn + n^2}{6m} \cdot \frac{2m}{n}$;
2) $\frac{7a + 7b}{b^6} \cdot \frac{b^3}{a + b}$;
3) $\frac{m - 2}{m^2 - 49} \cdot \frac{m + 7}{m - 2}$;
4) $(a + 4) \cdot \frac{a}{2a + 8}$;
5) $\frac{4a^2 - 4a + 1}{3a + 3} \cdot \frac{a + 1}{2a - 1}$;
6) $\frac{a^2 - 25}{4a} \cdot \frac{4a^2}{a^2 - 5a}$.

9.4. Выполните умножение:

1) $\frac{ab - b^2}{8} \cdot \frac{4a}{b^4}$;
2) $\frac{5x - 5y}{x^6} \cdot \frac{x^3}{x - y}$;
3) $\frac{6}{m^2 - 9n^2} \cdot (m - 3n)$;
4) $\frac{3c - 9}{9c^2 + 6c + 1} \cdot \frac{3c + 1}{c - 3}$.

9.5. Выполните деление:

1) $\frac{3b}{8} : b$;
2) $\frac{6a}{5b} : \frac{3a^2}{20b^2}$;
3) $-\frac{9a}{b^5} : \frac{18a^4}{b^3}$;
4) $a^2 : \frac{a}{b^2c}$;
5) $\frac{36a}{c^3} : (4a^2c)$;
6) $\frac{16x^3y^8}{33z^5} : \left(-\frac{12x^2}{55z^6}\right)$.

9.6. Найдите частное:

1) $\frac{b^9}{8} : \frac{b^3}{48}$; 2) $\frac{27}{m^6} : \frac{36}{m^7n^2}$; 3) $\frac{6x^{10}}{y^8} : (30x^5y^2)$.

9.7. Упростите выражение:

1) $\frac{x^2 - y^2}{x^2} : \frac{6x + 6y}{x^5}$;

2) $\frac{c - 5}{c^2 - 4c} : \frac{c - 5}{5c - 20}$;

3) $\frac{x - y}{xy} : \frac{x^2 - y^2}{3xy}$;

4) $\frac{a^2 - 4a + 4}{a + 2} : (a - 2)$;

5) $(p^2 - 16k^2) : \frac{p + 4k}{p}$;

6) $\frac{a^2 - ab}{a^2} : \frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab}$.

9.8. Выполните деление:

1) $\frac{p + 3}{p^2 - 2p} : \frac{p + 3}{4p - 8}$;

2) $\frac{a^2 - 16}{a - 3} : \frac{a + 4}{a - 3}$;

3) $\frac{y - 9}{y - 8} : \frac{y^2 - 81}{y^2 - 16y + 64}$;

4) $(x^2 - 49y^2) : \frac{x - 7y}{x}$.

9.9. Выполните возведение в степень:

1) $\left(\frac{c}{2d}\right)^5$; 2) $\left(\frac{5a^6}{b^5}\right)^2$; 3) $\left(-\frac{3m^4}{2n^3}\right)^3$; 4) $\left(-\frac{6a^6}{b^7}\right)^2$.

9.10. Представьте в виде дроби выражение:

1) $\left(\frac{a^6}{b^3}\right)^{10}$; 2) $\left(-\frac{4m}{9n^3}\right)^2$; 3) $\left(-\frac{10c^7}{3d^5}\right)^3$; 4) $\left(\frac{2m^3n^2}{kp^8}\right)^6$.

9.11. Выразите переменную x через переменные a и b, если:

1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{a} = b$; 2) $\frac{a}{b} + \frac{x}{4} = \frac{b}{a}$.

9.12. Выразите переменную x через переменные m и n, если:

1) $2x - \frac{m}{n} = 2$; 2) $\frac{1}{m} - \frac{1}{x} = \frac{1}{n}$.

◆ ◆

9.13. Упростите выражение:

1) $\frac{33m^8}{34n^8} : \frac{88m^4}{51n^4} : \frac{21m^6}{16n^2}$;

2) $\frac{36x^6}{49y^5} : \frac{24x^9}{25y^4} \cdot \frac{7x^2}{30y}$;

3) $\left(\frac{2a^5}{y^6}\right)^4 : \left(\frac{4a^6}{y^8}\right)^3$;

4) $\left(-\frac{27x^3}{16y^5}\right)^2 \cdot \left(\frac{8y^3}{9x^2}\right)^3$.

9.14. Упростите выражение:

1) $\frac{3a^4b^3}{10c^5} \cdot \frac{4b^4c^2}{27a^7} : \frac{5b^7}{9a^3c^3}$;

2) $\frac{3a^2}{2b^2c^2} : \frac{7c^8}{6b^3} : \frac{9ab}{14c^{12}}$;

3) $\left(\frac{5a^3}{b^4}\right)^4 \cdot \frac{b^{18}}{50a^{16}}$;

4) $\left(\frac{3x^7}{y^{10}}\right)^4 : \left(\frac{3x^6}{y^8}\right)^3$.

9.15. Замените переменную x таким выражением, чтобы получилось тождество:

1) $\left(\frac{4a^2}{b^3}\right)^2 \cdot x = \frac{6a}{b^2}$; 2) $\left(\frac{2b^4}{3c}\right)^3 : x = \frac{b^6}{12}$.

9.16. Выполните умножение и деление дробей:

1) $\frac{4c-d}{c^2+cd} \cdot \frac{2c^2-2d^2}{4c^2-cd}$;

2) $\frac{b^2-6b+9}{b^2-3b+9} \cdot \frac{b^3+27}{5b-15}$;

3) $\frac{a^3-16a}{3a^2b} \cdot \frac{12ab^2}{4a+16}$;

4) $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2} \cdot \frac{7a-7b}{a^2-ab+b^2}$;

5) $\frac{m+2n}{2-3m} : \frac{m^2+4mn+4n^2}{3m^2-2m}$;

6) $\frac{a^3+8}{16-a^4} : \frac{a^2-2a+4}{a^2+4}$;

7) $\frac{x^2-12x+36}{3x+21} \cdot \frac{x^2-49}{4x-24}$;

8) $\frac{3a+15b}{a^2-81b^2} : \frac{4a+20b}{a^2-18ab+81b^2}$.

9.17. Упростите выражение:

1) $\frac{a^4-1}{a^3-a} \cdot \frac{a}{1+a^2}$;

2) $\frac{a^2-8ab}{12b} : \frac{8b^2-ab}{24a}$;

3) $\frac{5m^2-5n^2}{m^2+n^2} : \frac{15n-15m}{4m^2+4n^2}$;

4) $\frac{mn^2-36m}{m^3-8} : \frac{2n+12}{6m-12}$;

5) $\frac{a^4-1}{a^2-a+1} : \frac{a-1}{a^3+1}$;

6) $\frac{4x^2-100}{6x} : (2x^2-20x+50)$.

9.18. Упростите выражение и найдите его значение:

1) $\frac{x}{4x^2-4y^2} : \frac{1}{6x+6y}$, если $x = 4{,}2$, $y = -2{,}8$;

2) $(3a^2-18a+27) : \frac{3a-9}{4a}$, если $a = 0{,}5$;

3) $\frac{a^6+a^5}{(3a-3)^2} : \frac{a^5+a^4}{9a^2-9a}$, если $a = 0{,}8$.

9.19. Найдите значение выражения:

1) $\frac{1}{a^2-ab} : \frac{b}{b^2-a^2}$, если $a = 2\frac{1}{3}$, $b = -\frac{3}{7}$;

2) $\frac{a^2+4ab+4b^2}{a^2-9b^2} : \frac{3a+6b}{2a-6b}$, если $a = 4$, $b = -5$.

9.20. Упростите выражение (n — натуральное число):

1) $\frac{a^{n+4}b^{3n+2}}{c^{n+5}} : \frac{a^{n+3}b^{3n+1}}{c^{n+8}}$;

2) $\frac{(a^n+b^n)^2-4a^nb^n}{a^{3n}+b^{3n}} : \frac{a^{2n}-b^{2n}}{(a^n-b^n)^2+4a^nb^n}$.

9.21. Упростите выражение (n — натуральное число):

1) $\dfrac{x^{n+3}y^{4n-1}}{z^{n+4}} \cdot \dfrac{z^{2n+5}}{x^{n+1}y^{3n-2}}$;

2) $\dfrac{(x^n-2y^n)^2+8x^ny^n}{x^{3n}-8y^{3n}} : \dfrac{x^{2n}-4y^{2n}}{(x^n+2y^n)^2-8x^ny^n}$.

9.22. Известно, что $x-\dfrac{1}{x}=9$. Найдите значение выражения $x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

9.23. Известно, что $3x+\dfrac{1}{x}=-4$. Найдите значение выражения $9x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

9.24. Дано: $x^2+\dfrac{16}{x^2}=41$. Найдите значение выражения $x+\dfrac{4}{x}$.

9.25. Дано: $x^2+\dfrac{1}{x^2}=6$. Найдите значение выражения $x-\dfrac{1}{x}$.

9.26. Упростите выражение:

1) $\dfrac{a^2-36}{a^2+ab-6a-6b} : \dfrac{a^2+ab+6a+6b}{a^2+2ab+b^2}$;

2) $\dfrac{a^2+a-ab-b}{a^2+a+ab+b} : \dfrac{a^2-a-ab+b}{a^2-a+ab-b}$.

9.27. Выполните действия:

1) $\dfrac{25-5a+5b-ab}{25+5a-5b-ab} \cdot \dfrac{ab-5a-5b+25}{ab+5a+5b+25}$;

2) $\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2-ab-4a+4b} : \dfrac{a^2-ab+4a-4b}{a^2-16}$.

9.28. Докажите тождество:

1) $\dfrac{8a^2}{a-3b} : \dfrac{6a^3}{a^2-9b^2} \cdot \dfrac{3a}{4a+12b} = 1$;

2) $\dfrac{a^4-1000ab^3}{a^2-2ab+b^2} \cdot \dfrac{a^2-b^2}{a^2b-100b^3} : \dfrac{a^3+10a^2b+100ab^2}{ab+10b^2} = \dfrac{a+b}{a-b}$.

9.29. Докажите тождество:

$$\frac{a^2+a}{2a-12} \cdot \frac{6a+6}{2a+12} : \frac{9a^3+18a^2+9a}{a^2-36} = \frac{1}{6}.$$

◆ ◆ ◆

9.30. Упростите выражение:

1) $\dfrac{a^2+2ab+b^2-2a-2b+1}{a^2-2ab+b^2+2a-2b+1} : \dfrac{a+b-1}{a-b+1}$;

2) $\dfrac{x^2-4x-21}{x^2+4x-21} : \dfrac{x^2-14x+49}{x^2+14x+49}$.

9.31. Упростите выражение:

1) $\dfrac{n^2-9}{n^2-1}:\dfrac{n^2+4n+3}{n^2-4n+3}$;

2) $\dfrac{a^5+1}{a^3+a^2+a+1}:\dfrac{a^4-a^3+a^2-a+1}{a^4-1}$.

Упражнения для повторения

9.32. Вместо знака $*$ запишите знак $\cup$ или $\cap$ так, чтобы образовалось верное равенство:

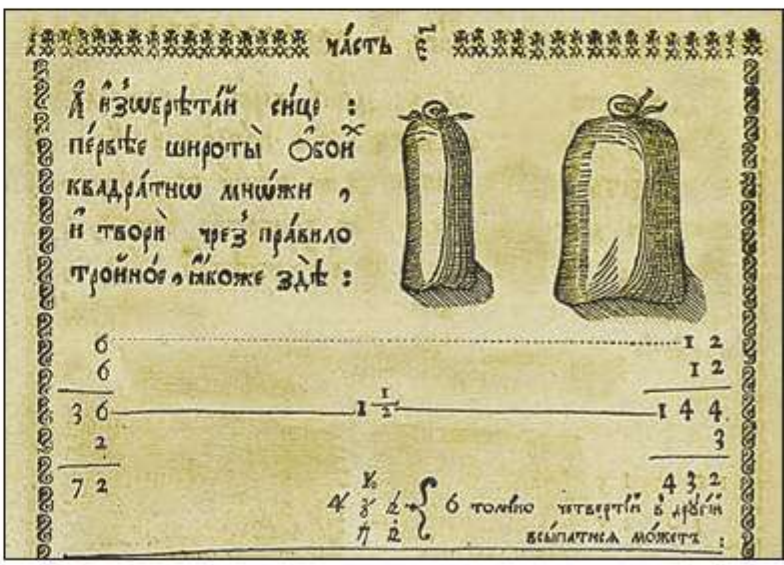
1) $A * \varnothing = A$; 2) $A * \varnothing = \varnothing$.

9.33. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 192 км, со скоростью 60 км/ч выехал мотоциклист. Через 30 мин навстречу ему из пункта B со скоростью 75 км/ч выехал второй мотоциклист. Сколько времени ехал второй мотоциклист до встречи с первым?

9.34. В двух бидонах находится 80 л молока. Если из одного бидона перелить 20 % молока в другой бидон, то в обоих бидонах молока станет поровну. Сколько литров молока было в каждом бидоне сначала?

9.35. (*Из учебника «Арифметика» Л.Ф. Магницкого.*) Двенадцать людей несут 12 хлебов. Каждый мужчина несёт по 2 хлеба, женщина — по половине хлеба, а ребёнок — по четверти хлеба. Сколько было мужчин, женщин и детей?





Титульный разворот и разворот учебника «Арифметика» Л.Ф. Магницкого

9.36. Докажите, что число 1 111 155 556 является квадратом натурального числа.

Правила действий над рациональными дробями позволяют любое рациональное выражение преобразовать в рациональную дробь.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Упростите выражение

$$\left(\frac{3a}{a-2}-\frac{6a}{a^2-4a+4}\right):\frac{a-4}{a^2-4}-\frac{2a^2+8a}{a-2}.$$

Решение. Аналогично нахождению значения числового выражения, содержащего несколько арифметических действий, данное выражение можно упростить, выполняя действия в соответствии с порядком выполнения арифметических действий: сначала — вычитание выражений, стоящих в скобках, затем — деление и наконец — вычитание:

$$1)\ \frac{3a}{a-2}-\frac{6a}{a^2-4a+4}=\frac{3a\ \backslash a-2}{a-2}-\frac{6a}{(a-2)^2}=\frac{3a^2-6a-6a}{(a-2)^2}=\frac{3a^2-12a}{(a-2)^2};$$

$$2)\ \frac{3a^2-12a}{(a-2)^2}:\frac{a-4}{a^2-4}=\frac{3a^2-12a}{(a-2)^2}\cdot\frac{a^2-4}{a-4}=\frac{3a(a-4)}{(a-2)^2}\cdot\frac{(a-2)(a+2)}{a-4}=$$

$$=\frac{3a(a+2)}{a-2}=\frac{3a^2+6a}{a-2};$$

$$3)\ \frac{3a^2+6a}{a-2}-\frac{2a^2+8a}{a-2}=\frac{3a^2+6a-2a^2-8a}{a-2}=\frac{a^2-2a}{a-2}=\frac{a(a-2)}{a-2}=a.$$

Ответ: a. ■

Преобразование рационального выражения можно выполнять не по отдельным действиям, а цепочкой. Проиллюстрируем этот приём на следующем примере.

Пример 2. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения $\frac{3a}{a-3}+\frac{a+5}{18-6a}\cdot\frac{54a}{5a+a^2}$ не зависит от значения a.

Решение. $\frac{3a}{a-3}+\frac{a+5}{18-6a}\cdot\frac{54a}{5a+a^2}=\frac{3a}{a-3}+\frac{a+5}{6(3-a)}\cdot\frac{54a}{a(5+a)}=$

$$=\frac{3a}{a-3}+\frac{9}{3-a}=\frac{3a}{a-3}-\frac{9}{a-3}=\frac{3a-9}{a-3}=\frac{3(a-3)}{a-3}=3.$$

Следовательно, при всех допустимых значениях a значение данного выражения равно 3. ■

Пример 3. Докажите тождество $\left(\frac{a-7}{3a-1}+\frac{a-7}{a+1}\right)\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}=\frac{4}{a+1}$.

Решение. Для преобразования левой части данного равенства целесообразно раскрыть скобки, применяя распределительное свойство умножения:

$$\left(\frac{a-7}{3a-1}+\frac{a-7}{a+1}\right)\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}=\frac{a-7}{3a-1}\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}+\frac{a-7}{a+1}\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}=$$

$$=\frac{1}{a}+\frac{3a-1}{a(a+1)}=\frac{a+1+3a-1}{a(a+1)}=\frac{4a}{a(a+1)}=\frac{4}{a+1}.$$

Тождество доказано. ■

Пример 4. Упростите выражение $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}$.

Решение. Записав данное выражение в виде частного от деления числителя на знаменатель, получим:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right):\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)=$$

$$=\frac{bc+ac+ab}{abc}:\frac{c+a+b}{abc}=\frac{bc+ac+ab}{abc}\cdot\frac{abc}{c+a+b}=\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}.$$

Данное выражение можно упростить иным способом, используя основное свойство дроби, а именно умножить её числитель и знаменатель на одночлен abc:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)abc}{\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)abc}=\frac{\frac{1}{a}\cdot abc+\frac{1}{b}\cdot abc+\frac{1}{c}\cdot abc}{\frac{1}{ab}\cdot abc+\frac{1}{bc}\cdot abc+\frac{1}{ac}\cdot abc}=$$

$$=\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}.$$

Ответ: $\dfrac{bc+ac+ab}{c+a+b}$. ■

Упражнения

10.1. Выполните действия:

1) $\dfrac{a+2}{a^2-2a+1}:\dfrac{a^2-4}{3a-3}-\dfrac{3}{a-2}$;

2) $\dfrac{b^2+3b}{b^3+9b}\cdot\left(\dfrac{b-3}{b+3}+\dfrac{b+3}{b-3}\right)$;

3) $\left(\dfrac{1}{a^2-4ab+4b^2}-\dfrac{1}{4b^2-a^2}\right):\dfrac{2a}{a^2-4b^2}$;

4) $\left(\dfrac{2x+1}{x^2+6x+9}-\dfrac{x-2}{x^2+3x}\right):\dfrac{x^2+6}{x^3-9x}$.

10.2. Выполните действия:

1) $\dfrac{b+4}{b^2-6b+9}:\dfrac{b^2-16}{2b-6}-\dfrac{2}{b-4}$;

2) $\dfrac{2x}{x^2-y^2}:\left(\dfrac{1}{x^2+2xy+y^2}-\dfrac{1}{y^2-x^2}\right)$;

3) $\left(\dfrac{2a-3}{a^2-4a+4}-\dfrac{a-1}{a^2-2a}\right):\dfrac{a^2-2}{a^3-4a}$.

10.3. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{15}{x-7}-x-7\right)\cdot\dfrac{7-x}{x^2-16x+64}$;

2) $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{a}{b^2}\right)\cdot\dfrac{ab}{a^2-b^2}+\dfrac{2}{b-a}$;

3) $\left(\dfrac{a}{a-1}-\dfrac{a}{a+1}-\dfrac{a^2+1}{1-a^2}\right):\dfrac{a^2+a}{(a-1)^2}$;

4) $\left(\dfrac{x+2y}{x-2y}-\dfrac{x-2y}{x+2y}-\dfrac{16y^2}{x^2-4y^2}\right):\dfrac{4y}{x+2y}$;

5) $\left(\dfrac{3a-8}{a^2-2a+4}+\dfrac{1}{a+2}-\dfrac{4a-28}{a^3+8}\right)\cdot\dfrac{a^2-4}{4}$.

10.4. Упростите выражение:

1) $\dfrac{x^2+14x+49}{x+6}:\left(\dfrac{13}{x+6}-x+6\right)$;

2) $\left(c-\dfrac{2c-9}{c+8}\right):\dfrac{c^2+3c}{c^2-64}+\dfrac{24}{c}$;

3) $\left(\dfrac{36}{x^2-9}-\dfrac{x-3}{x+3}-\dfrac{3+x}{3-x}\right):\dfrac{6}{3-x}$;

4) $\left(\dfrac{2y-1}{y^2+2y+4}+\dfrac{9y+6}{y^3-8}+\dfrac{1}{y-2}\right)\cdot\dfrac{y^2-4}{18}$.

10.5. Докажите тождество:

1) $\left(\frac{ab}{a^2-b^2}+\frac{b}{2b-2a}\right):\frac{2b}{a^2-b^2}=\frac{a-b}{4}$;

2) $\left(\frac{8a}{4-a^2}-\frac{a-2}{a+2}\right):\frac{a+2}{a}+\frac{2}{a-2}=-1$;

3) $\left(\frac{3}{36-c^2}+\frac{1}{c^2-12c+36}\right)\cdot\frac{(c-6)^2}{2}+\frac{3c}{c+6}=2$.

10.6. Докажите тождество:

1) $\left(\frac{b}{a^2-ab}-\frac{2}{a-b}-\frac{a}{b^2-ab}\right):\frac{a^2-b^2}{4ab}=\frac{4}{a+b}$;

2) $\frac{(a-b)^2}{a}\cdot\left(\frac{a}{(a-b)^2}+\frac{a}{b^2-a^2}\right)+\frac{3a+b}{a+b}=3$.

10.7. Зависит ли значение выражения от значения входящей в него переменной:

1) $\left(\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{1}{a^2+a}\right):\frac{3a+3}{a^2-a}$;

2) $\left(\frac{a}{a^2-49}-\frac{1}{a+7}\right):\frac{7a}{a^2+14a+49}-\frac{2}{a-7}$?

10.8. Докажите, что значение выражения не зависит от значения входящей в него переменной:

1) $\frac{3x^2-27}{4x^2+2}\cdot\left(\frac{6x+1}{x-3}+\frac{6x-1}{x+3}\right)$;

2) $\frac{3}{2a-3}-\frac{8a^3-18a}{4a^2+9}\cdot\left(\frac{2a}{4a^2-12a+9}-\frac{3}{4a^2-9}\right)$.

10.9. Упростите выражение:

1) $\dfrac{a-\frac{a^2}{a+1}}{a-\frac{a}{a+1}}$;

2) $\dfrac{a-\frac{6a-9}{a}}{1-\frac{3}{a}}$;

3) $1-\dfrac{1}{1-\frac{a}{1-\frac{1}{a+1}}}$;

4) $\dfrac{\frac{2a-b}{b}+1}{\frac{2a+b}{b}-1}+\dfrac{3-\frac{b}{a}}{\frac{3a}{b}-1}$.

10.10. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\frac{a-b}{a+b}+\frac{b}{a}}{\frac{a}{a+b}-\frac{a-b}{a}}$;

2) $\dfrac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{a+1}}}$.

10.11. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{a^2}{b^3-ab^2}+\dfrac{a-b}{b^2}-\dfrac{1}{b}\right):\left(\dfrac{a+b}{b-a}-\dfrac{b-a}{a+b}+\dfrac{6a^2}{a^2-b^2}\right)$;

2) $\left(\dfrac{a+2}{4a^3-4a^2+a}-\dfrac{2-a}{1-8a^3}\cdot\dfrac{4a^2+2a+1}{2a^2+a}\right):\left(\dfrac{1}{1-2a}\right)^2-\dfrac{8a-1}{2a^2+a}$;

3) $(a^2-b^2)\cdot\left(\dfrac{2a^2b+2ab^2}{7a^3+a^2b+7ab^2+b^3}\cdot\dfrac{7a+b}{a^2-b^2}+\dfrac{a-b}{a^2+b^2}\right)$.

10.12. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{18y^2+3y}{27y^3-1}-\dfrac{3y+1}{9y^2+3y+1}\right):\left(1-\dfrac{3y-1}{y}-\dfrac{5-6y}{3y-1}\right)$;

2) $\left(3+\dfrac{(a+b)^2}{(a-b)^2}\right):\left(3+\dfrac{(a-b)^2}{(a+b)^2}\right)\cdot\dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$.

10.13. Докажите тождество:

1) $\dfrac{16}{(a-2)^4}:\left(\dfrac{1}{(a-2)^2}-\dfrac{2}{a^2-4}+\dfrac{1}{(a+2)^2}\right)-\dfrac{8a}{(a-2)^2}=1$;

2) $\dfrac{a+11}{a+9}-\left(\dfrac{a+5}{a^2-81}+\dfrac{a+7}{a^2-18a+81}\right):\left(\dfrac{a+3}{a-9}\right)^2=1$;

3) $\left(a^2-b^2-\dfrac{4a^2b-4ab^2}{a+b}\right):\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{b}{b-a}-\dfrac{2ab}{a^2-b^2}\right)=(a-b)^2$.

10.14. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной выражение $\dfrac{b^2+9}{3b^2-b^3}+\left(\dfrac{b+3}{b-3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{b-3}+\dfrac{6}{9-b^2}-\dfrac{3}{b^2+3b}\right)$ принимает положительные значения.

◆ ◆ ◆

10.15. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{1}{2-a}+\dfrac{6a-4-a^2}{a^3-8}-\dfrac{2-a}{a^2+2a+4}\right)\cdot\dfrac{a^3+4a^2+8a+8}{4-4a+a^2-a^3}$;

2) $\left(\dfrac{x-2y}{x^3+y^3}+\dfrac{y}{x^3-x^2y+xy^2}\right):\dfrac{x^2+y^2}{x^3-xy^2}+\dfrac{2y^2}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}$;

3) $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b-c}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b-c}}\cdot\left(1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\dfrac{b-a-c}{abc}$.

10.16. Докажите, что значение выражения положительно при всех допустимых значениях переменных:

1) $\dfrac{2}{(a+b)^3}\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)+\dfrac{1}{a^2+b^2+2ab}\cdot\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)$;

2) $\left(\dfrac{a^2}{4b^3}+\dfrac{2}{a}\right):\left(\dfrac{a}{2b^2}-\dfrac{1}{b}+\dfrac{2}{a}\right):\dfrac{(a-2b)^2+8ab}{4+\dfrac{2a}{b}}$.

10.17. Упростите выражение

$$\left(\frac{3(x+2)}{2(x^3+x^2+x+1)}+\frac{2x^2-x-10}{2(x^3-x^2+x-1)}\right):\left(\frac{5}{x^2+1}+\frac{3}{2(x+1)}-\frac{3}{2(x-1)}\right).$$

10.18. Докажите тождество $\dfrac{\left(\dfrac{a^3}{(b-1)^3}+1\right)\left(\dfrac{a}{b-1}-1\right)}{\left(\dfrac{a^2}{(b-1)^2}-1\right)\left(\dfrac{a^2}{(b-1)^2}-\dfrac{a}{b-1}+1\right)}=1.$

10.19. Упростите выражение

$$\frac{1}{(a+b)^3}\cdot\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\right)+\frac{3}{(a+b)^4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{6}{(a+b)^5}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

10.20. Упростите выражение

$$\frac{1}{(a+b)^3}\cdot\left(\frac{1}{a^4}-\frac{1}{b^4}\right)+\frac{2}{(a+b)^4}\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}\right)+\frac{2}{(a+b)^5}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right).$$



10.21. Числа a, b и c таковы, что $a+b+c=7$, $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}=0{,}7$.

Найдите значение выражения $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$.

10.22. Числа a, b и c таковы, что $\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}=0$. Докажите, что $\dfrac{a}{(b-c)^2}+\dfrac{b}{(c-a)^2}+\dfrac{c}{(a-b)^2}=0$.

10.23. Числа a, b и c таковы, что $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=1$. Докажите, что $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}=0$.

10.24. Найдите сумму $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{\ldots+\dfrac{1}{n}}}}}}+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{\ldots+\dfrac{1}{n}}}}}$.

10.25. Докажите, что значение выражения $2^{14} - 2^{12} - 2^{10}$ делится нацело на 11.

10.26. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ делится нацело на 10.

10.27. На первом складе было картофеля в 3 раза больше, чем на втором. Когда с первого склада вывезли 400 кг картофеля, то на нём осталось картофеля в 2 раза меньше, чем было на втором. Сколько килограммов картофеля было на первом складе сначала?

10.28. Куртка стоила на 1500 р. меньше, чем костюм. Во время сезонной распродажи куртка подешевела на 10 %, а костюм — на 20 %, после чего куртку и костюм можно было приобрести за 8000 р. Какова первоначальная цена куртки и какова — костюма?

10.29. Рабочий должен был изготовлять ежедневно 10 деталей. Однако он изготовлял ежедневно 12 деталей, и уже за 2 дня до окончания срока работы ему осталось изготовить 6 деталей. Сколько деталей должен был изготовить рабочий?

10.30. (*Из русского фольклора.*) За 30 монет купили 30 птиц. Сколько купили птиц каждого вида, если за трёх воробьёв платили одну монету, за двух голубей — тоже одну монету, а за одну горлицу — две монеты, при этом купили хотя бы одну птичку каждого вида?

§ 11 Равносильные уравнения. Уравнение-следствие. Рациональные уравнения

Пусть заданы две функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и поставлена задача найти множество значений аргумента x, при которых значения функций f и g равны. В таком случае говорят, что надо решить уравнение $f(x) = g(x)$.

Определение

Областью определения уравнения $f(x) = g(x)$ называют множество значений переменной x, при которых имеют смысл обе части уравнения.

Из определения следует, что областью определения уравнения $f(x) = g(x)$ является множество $D(f) \cap D(g)$.

Рассмотрим несколько примеров:

• областью определения линейного уравнения, т. е. уравнения вида $ax = b$, является множество всех чисел;

• областью определения уравнения $\frac{x^2 - 4}{x + 2} = 0$ является множество $\{x \mid x \neq -2\}$;

• областью определения уравнения $\frac{x + 3}{|x| - x} = 0$ является множество $\{x \mid x < 0\}$.

Несмотря на то что уравнение $x^2 = -2$ не имеет корней, его областью определения является множество всех чисел.

Для того чтобы значение переменной x было корнем уравнения $f(x) = g(x)$, необходимо выполнение условия $x \in D(f) \cap D(g)$. Этот факт иллюстрирует диаграмма Эйлера (рис. 11.1). Например, вы пока не умеете решать уравнение $4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47$. Однако вы с уверенностью можете утверждать, что число 0 не является его корнем.



Рис **11.1**

Рассмотрим два уравнения: $x^2 = 4$ и $|x| = 2$.

Очевидно, что они имеют одни и те же корни: -2 и 2.

В таких случаях говорят, что уравнения $x^2 = 4$ и $|x| = 2$ **равносильны**.

Определение

Уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ называют равносильными, если множества их корней равны.

Из определения следует, что для доказательства равносильности двух уравнений достаточно показать, что каждый корень первого уравнения является корнем второго уравнения, и наоборот, каждый корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

Приведём примеры пар равносильных уравнений:

$$\frac{1}{2}x = 0 \text{ и } 2x = 0;$$

$$2x = 4 \text{ и } 4x - 8 = 0;$$

$$x^2 = 1 \text{ и } (x - 1)(x + 1) = 0;$$

$$x - 1 = 0 \text{ и } (x^2 + 1)(x - 1) = 0;$$

$$(x - 1)^{100} = 0 \text{ и } (x - 1)^{1000} = 0.$$

Множество корней каждого из уравнений $x^2 = -5$ и $|x| = -3$ является пустым, т. е. множества корней этих уравнений равны. Следовательно, по определению эти уравнения являются равносильными.

При решении уравнений важно знать, с помощью каких преобразований можно заменить данное уравнение на равносильное.

Теорема 11.1

Если к обеим частям данного уравнения прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному.

Доказательство.

Докажем, что уравнения

$$f(x) = g(x) \tag{1}$$

и

$$f(x) + c = g(x) + c, \text{ где } c \text{ — некоторое число,} \tag{2}$$

равносильны.

Пусть число a — корень уравнения (1). Тогда верно числовое равенство $f(a) = g(a)$. Следовательно, верным будет и такое числовое равенство: $f(a) + c = g(a) + c$. А это значит, что число a является корнем уравнения (2). Мы показали, что каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2).

С помощью аналогичных рассуждений можно показать, что каждый корень уравнения (2) является корнем уравнения (1).

Итак, уравнения (1) и (2) равносильны. ■

Теорема 11.2

Если какое-либо слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному.

Теорема 11.3

Если обе части уравнения умножить (разделить) на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное данному.

Доказательства теорем 11.2 и 11.3 аналогичны доказательству теоремы 11.1. Проведите доказательство самостоятельно.

Замечание. Из теоремы 11.1 не следует, что если к обеим частям уравнения прибавить выражение с переменной, то получим уравнение, равносильное данному.

Так, если к обеим частям уравнения $\frac{1}{x-5}+x^2=25+\frac{1}{x-5}$ прибавить дробь $\frac{1}{5-x}$, то получим уравнение $x^2=25$, которое не равносильно данному.

Определение

Если множество корней уравнения $f_2(x)=g_2(x)$ содержит множество корней уравнения $f_1(x)=g_1(x)$, то уравнение $f_2(x)=g_2(x)$ называют следствием уравнения $f_1(x)=g_1(x)$.

Например, уравнение $x^2=25$ является следствием уравнения $\frac{1}{x-5}+x^2=25+\frac{1}{x-5}$.

На рисунке 11.2 определение уравнения-следствия проиллюстрировано с помощью диаграммы Эйлера.



Рис. 11.2

Те из корней уравнения-следствия, которые не являются корнями данного уравнения, называют **посторонними корнями** данного уравнения.

Например, уравнение $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)=0$ является следствием уравнения $2x-1=0$. Уравнение-следствие имеет два корня: $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-2$, а данное уравнение имеет один корень $x=\frac{1}{2}$. В этом случае корень $x=-2$ — посторонний корень данного уравнения $2x-1=0$.

Так как пустое множество является подмножеством любого множества, то следствием уравнения, не имеющего корней, является любое уравнение с той же переменной. Например, следствием уравнения $x^2=-5$ является уравнение $x^{101}+x+1=0$. Заметим, что если два уравнения равносильны, то любое из них можно считать следствием другого.

Решая уравнение, надо построить цепочку равносильных уравнений, чтобы получить уравнение, равносильное исходному, корни которого легко найти.

Однако если при решении уравнения равносильность была нарушена и мы перешли к уравнению-следствию, то все корни уравнения-следствия должны быть подвергнуты проверке.

Решим уравнение $\frac{x^2-4}{x+2}=0$. Приравняв числитель дроби к нулю, получим уравнение $x^2-4=0$, корнями которого являются числа -2 и 2. Однако число -2 не принадлежит области определения данного уравнения. А вот число 2 удовлетворяет исходному уравнению и является его единственным корнем.

Решая уравнение $\frac{x^2-4}{x+2}=0$, мы перешли к уравнению-следствию $x^2-4=0$, корни которого были подвергнуты проверке.

При решении уравнений важно понимать, на каком этапе преобразований была нарушена равносильность и что послужило этому причиной.

Так, переходя от уравнения $\frac{x^2-4}{x+2}=0$ к уравнению $x^2-4=0$, мы тем самым расширили область определения исходного уравнения. Таким образом, неучёт ограничения $x\neq -2$ как раз и приводит к появлению постороннего корня $x=-2$.

Заметим, что расширение области определения уравнения не всегда приводит к появлению посторонних корней. Например, переход от уравнения $\frac{x^2-4}{x+1}=0$ к уравнению $x^2-4=0$ является равносильным, хотя при этом расширяется область определения исходного уравнения.

Рассмотренные уравнения $\frac{x^2-4}{x+2}=0$ и $\frac{x^2-4}{x+1}=0$ являются уравнениями вида $\frac{f(x)}{g(x)}=0$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены.

Вы знаете, что *дробь равна нулю тогда и только тогда, когда её числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля*. Поэтому решение уравнения указанного вида сводится к решению уравнения $f(x)=0$ и проверке условия $g(x)\neq 0$. Иными словами, множество корней уравнения $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ равно пересечению множеств $\{x \mid f(x)=0\}$ и $\{x \mid g(x)\neq 0\}$. В таких случаях говорят, что уравнение $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\neq 0. \end{cases}$$

Например, уравнение $\frac{x^2-4}{x+2}=0$ равносильно системе $\begin{cases} x^2-4=0, \\ x+2\neq 0. \end{cases}$

Решением этой системы является число 2. Так как эта система равносильна данному уравнению, то, не выполняя проверки, можно утверждать, что число 2 — единственный корень данного уравнения.

Определение

Уравнение, левая и правая части которого являются рациональными выражениями, называют рациональным.

Как известно, любое рациональное выражение можно представить в виде рациональной дроби. Поэтому любое рациональное уравнение можно свести к уравнению вида $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены.

Пример 1. Решите уравнение $\frac{3x+5}{6x+3} + \frac{1}{4x^2-1} = \frac{x}{2x-1}$.

Решение. Имеем: $\frac{3x+5}{3(2x+1)} + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} - \frac{x}{2x-1} = 0$. Сложив дроби, записанные в левой части уравнения, получим: $\frac{4x-2}{3(2x-1)(2x+1)} = 0$.

Это уравнение равносильно системе $\begin{cases} 4x-2=0, \\ 3(2x-1)(2x+1) \neq 0. \end{cases}$

Отсюда $\begin{cases} x = 0,5, \\ x \neq 0,5, \\ x \neq -0,5. \end{cases}$

Эта система не имеет решений.

Следовательно, исходное уравнение не имеет корней.

Ответ: корней нет. ■

Пример 2. Решите уравнение $\frac{2x^2-4x-16}{x-4} - x = 0$.

Решение. Представим левую часть уравнения в виде дроби:

$$\frac{2x^2-4x-16-x^2+4x}{x-4} = 0.$$

Отсюда $\frac{x^2-16}{x-4} = 0$.

Это уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2-16=0, \\ x-4 \neq 0. \end{cases}$

Следовательно, $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -4, \end{array}\right. \text{ Отсюда } x = -4. \\ x \neq 4. \end{cases}$

Ответ: -4. ■

Рассмотрим задачу, в которой рациональное уравнение является математической моделью реальной ситуации.

Пример 3. Турист проплыл на лодке 3 км по течению реки и 2 км против течения за 30 мин. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения равна 2 км/ч.

Решение. Пусть скорость лодки в стоячей воде равна x км/ч. Тогда её скорость по течению реки равна $(x + 2)$ км/ч, а против течения — $(x - 2)$ км/ч. Турист проплыл 3 км по течению за $\frac{3}{x+2}$ ч, а 2 км против течения — за $\frac{2}{x-2}$ ч. Тогда на весь путь он затратил $\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2}$ ч. Поскольку весь путь был пройден за 30 мин $= \frac{1}{2}$ ч, то $\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2} = \frac{1}{2}$.

Решим полученное уравнение:

$$\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{3x - 6 + 2x + 4}{x^2 - 4} - \frac{1}{2} = 0;$$

$$\frac{10x - 4 - x^2 + 4}{2(x^2 - 4)} = 0;$$

$$\frac{10x - x^2}{2(x^2 - 4)} = 0;$$

$$\begin{cases} 10x - x^2 = 0, \\ 2(x^2 - 4) \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(10 - x) = 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases}$$

$$x = 0 \text{ или } x = 10.$$

Корень $x = 0$ не соответствует смыслу задачи. Следовательно, скорость лодки в стоячей воде равна 10 км/ч.

Ответ: 10 км/ч. ■

1. Что называют областью определения уравнения $f(x) = g(x)$?
2. Какие два уравнения называют равносильными?
3. С помощью каких преобразований данного уравнения можно получить уравнение, равносильное данному?
4. Какое уравнение называют следствием данного?

5. Какие корни называют посторонними корнями данного уравнения?

6. Опишите, как решают уравнение вида $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены.

7. Какое уравнение называют рациональным?

Упражнения

11.1. Равносильны ли уравнения:

1) $x + 2 = 10$ и $3x = 24$;

2) $-2x = -6$ и $\frac{1}{3}x = 1$;

3) $x - 5 = 0$ и $x(x - 5) = 0$;

4) $\frac{6}{x} = 0$ и $x^2 = -4$;

5) $x + 1 = 1 + x$ и $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = 1$;

6) $x^3 = 1$ и $|x| = 1$;

7) $x^{100} = 1$ и $x^{1000} = 1$;

8) $\frac{x}{x} = 1$ и $x = x$;

9) $x^2 + 2x + 1 = 0$ и $x + 1 = 0$;

10) $(x + 1)(x^2 + 1) = 0$ и $x + 1 = 0$;

11) $\frac{x^2 - 1}{x + 1} = 0$ и $x - 1 = 0$;

12) $\frac{x^2 - 9}{x + 2} = 0$ и $x^2 - 9 = 0$?

11.2. Равносильны ли уравнения:

1) $x + 6 = 10$ и $2x - 1 = 7$;

2) $x^2 = x$ и $x = 1$;

3) $x^2 + 1 = 0$ и $\frac{3}{x - 1} = 0$;

4) $\frac{x + 1}{x + 1} = 1$ и $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = 1$;

5) $\frac{x - 2}{x - 2} = 0$ и $2x^2 + 3 = 0$;

6) $x^2 + 4x + 4 = 0$ и $\frac{x + 2}{x - 1} = 0$;

7) $\frac{x^2 - 9}{x - 3} = 0$ и $x + 3 = 0$;

8) $\frac{x + 1}{x + 1} = 0$ и $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} = 0$?

11.3. Обоснуйте равносильность уравнений:

1) $4x - 8 = x + 3$ и $4x - x = 8 + 3$;

2) $x^2 - 1 = 3$ и $x^2 + 5 = 9$;

3) $\frac{3x - 5}{2} - \frac{x}{6} = 1$ и $9x - 15 - x = 6$;

4) $(2x + 1)(x^2 + 1) = 3(x^2 + 1)$ и $2x + 1 = 3$.

11.4. Будет ли уравнение, полученное в результате указанного преобразования, равносильным исходному, если:

1) в уравнении $3(2x - 1) - 5(4x + 2) = 1$ раскрыть скобки и привести подобные слагаемые;

2) в уравнении $x^2 + \frac{1}{x - 7} - \frac{1}{x - 7} = 49$ разность $\frac{1}{x - 7} - \frac{1}{x - 7}$ заменить на нуль;

3) в уравнении $\frac{x^2-1}{x-1}+3x-5=0$ сократить дробь;

4) обе части уравнения $x^3=x$ разделить на x;

5) обе части уравнения $(x+1)(x^2+4)=x^2+4$ разделить на x^2+4;

6) обе части уравнения $\frac{x^2}{x}=2$ умножить на x;

7) обе части уравнения $2x+1=5$ умножить на $x+1$?

11.5. Какое из данных уравнений является следствием другого:

1) $x^2=x$ и $x=1$;

2) $\frac{x}{x}=1$ и $0x=0$;

3) $x^3=1$ и $x^2=1$;

4) $|x|=1$ и $x^3=1$;

5) $\frac{x^2}{x-6}=\frac{36}{x-6}$ и $x^2=36$;

6) $x^2=4$ и $x^2-\frac{1}{x+2}=4-\frac{1}{x+2}$;

7) $\frac{x^2-1}{x+1}=0$ и $x^2-1=0$?

11.6. Какое из данных уравнений является следствием другого:

1) $\frac{x^2}{x}=1$ и $x^2=x$;

2) $x^2+1=1$ и $x(x-1)=0$;

3) $\frac{x^2}{x+8}=\frac{64}{x+8}$ и $x^2=64$;

4) $x^2+\frac{1}{x+3}=9+\frac{1}{x+3}$ и $x^2=9$?

11.7. Составьте пару равносильных уравнений, каждое из которых:

1) имеет один корень;

2) имеет два корня;

3) имеет бесконечно много корней;

4) не имеет корней.

11.8. Как может измениться (расшириться или сузиться) множество корней данного уравнения, если:

1) уравнение $(|x|+3)f(x)=2|x|+6$ заменить на уравнение $f(x)=2$;

2) уравнение $\frac{f(x)}{x^2+1}=0$ заменить на уравнение $f(x)=0$;

3) уравнение $(x+1)f(x)=x+1$ заменить на уравнение $f(x)=1$;

4) уравнение $\frac{f(x)}{x+1}=\frac{g(x)}{x+1}$ заменить на уравнение $f(x)=g(x)$;

5) уравнение $f(x)=g(x)$ заменить на уравнение $(x+1)f(x)=(x+1)g(x)$?

11.9. Решите уравнение:

1) $\frac{5}{x^2-4}+\frac{2x}{x+2}=2$;

2) $\frac{2}{6x+1}+\frac{3}{6x-1}=\frac{30x+9}{36x^2-1}$;

3) $\frac{6x+14}{x^2-9}+\frac{7}{x^2+3x}=\frac{6}{x-3}$;

4) $\frac{2y^2+5}{1-y^2}+\frac{y+1}{y-1}=\frac{4}{y+1}$;

5) $\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{4}{1-4x^2}$;

6) $\frac{7}{(x+2)(x-3)}-\frac{4}{(x-3)^2}=\frac{3}{(x+2)^2}$;

7) $\frac{2x-1}{x+4}-\frac{3x-1}{4-x}=\frac{6x+64}{x^2-16}+4$;

8) $\frac{2x-6}{x^2-36}-\frac{x-3}{x^2-6x}-\frac{x-1}{x^2+6x}=0$.

11.10. Решите уравнение:

1) $\frac{x-2}{x+1}-\frac{5}{1-x}=\frac{x^2+27}{x^2-1}$;

2) $\frac{3x+1}{3x-1}-\frac{3x-1}{3x+1}=\frac{6}{1-9x^2}$;

3) $\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x}=\frac{5}{x-2}$;

4) $\frac{2x^2-2x}{x^2-4}+\frac{6}{x+2}=\frac{x+2}{x-2}$;

5) $\frac{7}{x^2+2x}+\frac{x+1}{x^2-2x}=\frac{x+4}{x^2-4}$;

6) $\frac{x^2-9x+50}{x^2-5x}=\frac{x+1}{x-5}+\frac{x-5}{x}$.

11.11. Моторная лодка проплыла 8 км по течению реки и вернулась обратно, потратив на весь путь 54 мин. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость лодки равна 18 км/ч.

11.12. Теплоход прошёл 28 км против течения реки и вернулся обратно, потратив на обратный путь на 4 мин меньше. Найдите скорость теплохода в стоячей воде, если скорость течения реки равна 1 км/ч.

11.13. Лодка проплыла 6 км против течения реки и 12 км по течению, потратив на весь путь 2 ч. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки составляет 3 км/ч.

11.14. Чтобы наполнить бассейн через одну трубу, надо в 1,5 раза больше времени, чем через другую. Если же открыть одновременно обе трубы, то бассейн наполнится за 6 ч. За сколько часов можно наполнить бассейн через каждую трубу отдельно?

11.15. Два экскаватора выкопали котлован за 8 ч. Первый экскаватор может выкопать такой котлован в 4 раза быстрее, чем второй. За сколько часов может выкопать такой котлован каждый экскаватор, работая самостоятельно?

◆ ◆ ◆

11.16. Решите уравнение:

1) $\frac{x+5}{x^2-5x}-\frac{x-5}{2x^2+10x}=\frac{x+25}{2x^2-50}$;

2) $\dfrac{2}{x^2-9}-\dfrac{1}{2x^2-12x+18}=\dfrac{3}{2x^2+6x}$;

3) $\dfrac{9x+12}{x^3-64}-\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{1}{x^2+4x+16}$.

11.17. Решите уравнение:

1) $\dfrac{4y+24}{5y^2-45}+\dfrac{y+3}{5y^2-15y}=\dfrac{y-3}{y^2+3y}$;

2) $\dfrac{y+2}{8y^3+1}-\dfrac{1}{4y+2}=\dfrac{y+3}{8y^2-4y+2}$.

Упражнения для повторения

11.18. На конец года численность населения города составляла 72 100 жителей. Определите количество жителей в этом городе на начало года, если прирост населения за это время составил 3 %.

11.19. Расстояние между двумя станциями электропоезд проходит за 45 мин. Если его скорость увеличить на 10 км/ч, то он пройдёт это расстояние за 40 мин. Чему равно расстояние между станциями?

11.20. Докажите, что при любом значении переменной данное выражение принимает неотрицательное значение:

1) $(a-5)^2-2(a-5)+1$; 2) $(a-b)(a-b-8)+16$.

11.21. Решите уравнение:

1) $bx=2$; 2) $(a-1)x=a-1$.

11.22. При каких натуральных значениях a корень уравнения является натуральным числом:

1) $(a+2)x=5$; 2) $(a+3)x=6$?

§ 12 Рациональные уравнения с параметрами

Рассмотрим линейное уравнение $ax=1$.

Если $a=0$, то данное уравнение корней не имеет. Если $a\neq 0$, то уравнение имеет единственный корень $x=\dfrac{1}{a}$.

Решая это уравнение, мы придавали буквам a и x разный смысл: буква x играла роль неизвестного числа, а буква a — роль известного числа. В таких случаях говорят, что a является **параметром**, а уравнение называют **уравнением с параметром**.

Подчеркнём двойственную природу параметра: с одной стороны, мы считаем параметр фиксированным числом, с другой — это число не-

известно. Именно это не позволяет, решая уравнение $ax = 1$, записать в ответе $x = \frac{1}{a}$. Мы должны рассматривать два случая: $a = 0$ и $a \neq 0$.

Хотя термин «параметр» для вас новый, ситуации, в которых фиксированное число обозначалось буквой, уже встречались. Например, линейным уравнением называют уравнение вида $ax = b$. Здесь a и b — параметры. Линейную функцию задают формулой $y = kx + b$, где k и b — параметры.

В курсе алгебры 7 класса вам не раз приходилось решать уравнения с параметрами (например, задачи 2.32, 2.33, 2.36). Процесс решения заключался в построении алгоритма, позволяющего для любого значения параметра найти соответствующее множество корней.

Пример 1. Решите уравнение $\frac{x^2 + ax - 2}{x + 2} = x - a$.

Решение. $\frac{x^2 + ax - 2 - (x + 2)(x - a)}{x + 2} = 0;$

$$\frac{x^2 + ax - 2 - x^2 + ax - 2x + 2a}{x + 2} = 0; \quad \frac{2ax - 2x + 2a - 2}{x + 2} = 0.$$

Полученное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2ax - 2x + 2a - 2 = 0, \\ x \neq -2. \end{cases} \quad \text{Отсюда} \quad \begin{cases} x(a - 1) = 1 - a, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Если $a = 1$, то уравнение системы становится таким: $0x = 0$, и его корнем является любое число. С учётом ограничения $x \neq -2$ приходим к выводу, что при $a = 1$ множеством корней исходного уравнения является $\{x \mid x \neq -2\}$.

Если $a \neq 1$, то получаем:

$$\begin{cases} x = \frac{1 - a}{a - 1}, \\ x \neq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Отсюда $x = -1$.

Ответ: если $a = 1$, то корнем уравнения является любое число, кроме -2; если $a \neq 1$, то $x = -1$. ■

Пример 2. Решите уравнение $\frac{b(x + 1)}{x} + \frac{b + 1}{x - 1} = b$.

Решение. Имеем: $\frac{b(x + 1)(x - 1) + x(b + 1) - bx(x - 1)}{x(x - 1)} = 0;$

$$\frac{bx^2 - b + bx + x - bx^2 + bx}{x(x-1)} = 0;\ \frac{x(2b+1) - b}{x(x-1)} = 0.$$

Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x(2b+1) = b, \\ x(x-1) \neq 0. \end{cases}$$

Если $b = -\frac{1}{2}$, то уравнение системы, а значит, и исходное уравнение не имеет корней.

Если $b \neq -\frac{1}{2}$, то

$$\begin{cases} x = \frac{b}{2b+1}, \\ x(x-1) \neq 0. \end{cases}$$

Найдём те значения параметра b, при которых значение выражения $\frac{b}{2b+1}$ равно 0 или 1.

Равенство $\frac{b}{2b+1} = 0$ выполняется только при $b = 0$, а равенство $\frac{b}{2b+1} = 1$ выполняется только при $b = -1$.

Следовательно, при $b = 0$ или $b = -1$ значение выражения $\frac{b}{2b+1}$ не является корнем исходного уравнения.

Ответ: если $b = -\frac{1}{2}$, или $b = 0$, или $b = -1$, то уравнение корней не имеет; если $b \neq -\frac{1}{2}$, $b \neq 0$ и $b \neq -1$, то $x = \frac{b}{2b+1}$. ■

Этот ответ можно записать иначе: если $b \in \left\{-\frac{1}{2}, 0, -1\right\}$, то корней нет, если $b \notin \left\{-\frac{1}{2}, 0, -1\right\}$, то $x = \frac{b}{2b+1}$.

Пример 3. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{(x-a)(x+2)}{x-1} = 0$ имеет единственное решение?

Решение. Надо найти все значения параметра a, при которых множество корней данного уравнения является одноэлементным.

Переходим к равносильной системе:

$$\begin{cases} (x-a)(x+2) = 0, \\ x - 1 \neq 0. \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = a, \\ x = -2, \end{array}\right. \\ x \neq 1. \end{cases}$

При любом значении параметра a исходное уравнение имеет корень $x = -2$. Для того чтобы этот корень оставался единственным, надо, чтобы корень уравнения $x = a$:

- или был равным уже найденному корню,
- или не удовлетворял условию $x \neq 1$.

Отсюда $a = -2$ или $a = 1$.

Ответ: $a = -2$ или $a = 1$. ■

Пример 4. При каких значениях параметра m уравнения $m(x - 1) = 0$ и $x + m^2 + m = 1$ являются равносильными?

Решение. При любом значении параметра m число 1 является корнем первого уравнения. Для равносильности уравнений необходимо, чтобы число 1 было корнем и второго уравнения. Подставим это значение переменной во второе уравнение:

$$1 + m + m^2 = 1;$$
$$m\,(m + 1) = 0;$$
$$m = 0 \text{ или } m = -1.$$

Теперь можно сделать вывод: если искомые значения параметра m существуют, то их следует искать среди элементов множества $\{-1, 0\}$.

Если $m = -1$, то исходные уравнения принимают вид $(-1)(x - 1) = 0$ и $x + 1 - 1 = 1$. Эти уравнения являются равносильными.

При $m = 0$ имеем: $0(x - 1) = 0$ и $x = 1$. Очевидно, что эти уравнения не равносильны.

Ответ: $m = -1$. ■

1. При изучении каких понятий вы встречались с параметрами?
2. В чём состоит процесс решения уравнения с параметрами?

Упражнения

12.1. Для каждого значения параметра a решите уравнение:

1) $\dfrac{x - a}{x - 1} = 0$;
2) $\dfrac{x + 2}{x - a} = 0$;
3) $\dfrac{a(x - 1)}{x - 1} = 0$;
4) $\dfrac{a(x - a)}{x - 3} = 0$;
5) $\dfrac{x - 2a}{x + a} = 0$;
6) $\dfrac{a(x - 4)}{x - a} = 0$.

12.2. Для каждого значения параметра b решите уравнение:

1) $\frac{x+b}{x-5}=0$;
3) $\frac{x-3b}{x+b+2}=0$;
2) $\frac{x+4}{x-2b}=0$;
4) $\frac{(b-1)x}{x+b}=0$.

12.3. Для каждого значения параметра a решите уравнение:

1) $\frac{x^2-1}{x-a}=0$;
4) $\frac{(x-4)(x+2)}{x-a}=0$;
7) $\frac{x+a}{(x-3a)(x+5)}=0$;
2) $\frac{x(x-a)}{x+2}=0$;
5) $\frac{x-a}{(x-1)(x+3)}=0$;
8) $\frac{(x-a)(x-2)}{x-2a}=0$.
3) $\frac{(x-a)(x-6)}{x-7}=0$;
6) $\frac{x^2-a^2}{x+4}=0$;

12.4. Для каждого значения параметра b решите уравнение:

1) $\frac{(x-2)(x-3)}{x+b}=0$;
3) $\frac{x+2b}{(x-b+1)x}=0$;
2) $\frac{x+b}{(x+1)(x-4)}=0$;
4) $\frac{(x+2b)(x-3)}{x-b}=0$.

◆ ◆ ◆

12.5. Для каждого значения параметра a решите уравнение:

1) $\frac{x-2}{x-a}=a-1$;
4) $\frac{3x+1}{(x-1)(x+a)}+\frac{1}{x+a}=\frac{3}{x-1}$;
2) $\frac{ax-2}{x-1}=a+\frac{1}{x}$;
5) $\frac{a}{x+3}+\frac{3}{x+2}=\frac{a^2+2a}{(x+2)(x+3)}$;
3) $\frac{ax^2-3}{x^2-1}=a+\frac{2}{x-1}$;
6) $\frac{a^2-1}{x-2}-\frac{a^3-x+10}{(x+a)(x-2)}=\frac{4}{x+a}$.

12.6. Для каждого значения параметра b решите уравнение:

1) $\frac{bx+3}{x+2}=b-\frac{1}{x-1}$;
3) $\frac{1}{x+1}+\frac{2b-b^2}{(x+1)(x-2b)}=\frac{b}{2b-x}$;
2) $\frac{bx^2-2}{x^2-4}=b+1+\frac{1-x}{x+2}$;
4) $\frac{b^2}{x+4}-\frac{3b^2+b+39}{(x+4)(3-x)}=\frac{9}{x-3}$.

12.7. При каких значениях параметра a уравнение имеет единственное решение:

1) $\frac{x-1}{x-a}=0$;
4) $\frac{(x-2)(x-a)}{x-2a}=0$;
2) $\frac{(x+1)(x-5)}{x-a}=0$;
5) $\frac{(x-1)(x+3)}{(x-a)(x+3a)}=0$;
3) $\frac{(x-a)(x+3a)}{x-3}=0$;
6) $\frac{x^2-a^2}{(x+1)(x+2)}=0$?

12.8. При каких значениях параметра b уравнение имеет единственное решение:

1) $\dfrac{(x+3)(x-8)}{x+b}=0$;

2) $\dfrac{(x+2b)(x-4b)}{x-2}=0$;

3) $\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x+b)(x-2b)}=0$;

4) $\dfrac{(x+b)(x-5b)}{(x-3)(x+5)}=0$?

12.9. При каких значениях параметра a данные уравнения равносильны:

1) $\dfrac{x-1}{x-a}=0$ и $x-1=0$;

2) $\dfrac{x(x-a)}{x-2}=0$ и $x=0$;

3) $\dfrac{(x-a)(x-3)}{x-2a}=0$ и $x-3=0$;

4) $\dfrac{(x+a)(x-4a)}{x-1}=0$ и $x-4a=0$;

5) $\dfrac{(x-a)(x-2a+1)}{x-1}=0$ и $\dfrac{x-a}{x-1}=0$;

6) $(a^2-1)\,x=a-1$ и $\dfrac{x-1}{x-a}=1$;

7) $(a^2-a)(x-1)=0$ и $2ax+a^2-3a=0$;

8) $a\,(x-1)=0$ и $ax+a^2=2a$?

12.10. При каких значениях параметра b данные уравнения равносильны:

1) $\dfrac{x-4}{x+b}=0$ и $x-4=0$;

2) $\dfrac{(x-1)(x+b)}{x-3}=0$ и $x-1=0$;

3) $\dfrac{(x+b)(x-2b)}{x-3b}=0$ и $\dfrac{x+b}{x-3b}=0$;

4) $\dfrac{(x-b)(x-3b+4)}{x-2}=0$ и $\dfrac{x-b}{x-2}=0$;

5) $(b^2-4)(x+2)=0$ и $bx+2b=4-b^2$?

Упражнения для повторения

12.11. Постройте график функции:

1) $y=\begin{cases}x-3, & \text{если } x\geqslant 0,\\ -2x-3, & \text{если } x<0;\end{cases}$

2) $y = \begin{cases} 4x - 2, & \text{если } x \leqslant 2, \\ 3, & \text{если } x > 2; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} -1, & \text{если } x \neq -1, \\ 1, & \text{если } x = -1. \end{cases}$

12.12. К уравнению $3x - 5y = 8$ подберите второе линейное уравнение так, чтобы получить систему уравнений, которая:

1) имеет единственное решение;

2) имеет бесконечно много решений;

3) не имеет решений.

12.13. В шахматном турнире участвовало 10 игроков, каждый из которых сыграл одну партию с каждым из остальных игроков. Сколько всего партий было сыграно?

12.14. Если Федя идёт вниз по движущемуся эскалатору, то тратит на спуск 1 мин. Если Федя увеличит собственную скорость в 2 раза, то спустится за 45 с. За какое время Федя спустится, стоя на эскалаторе неподвижно?

§ 13 Степень с целым отрицательным показателем

В науке и практике для короткой записи значений величин часто используют степени числа 10.

Например, расстояние от Земли до Полярной звезды равно 4 470 000 000 000 000 км или $4{,}47 \cdot 10^{15}$ км. Масса Солнца равна 1 990 000 000 000 000 000 000 000 000 000 кг или $1{,}99 \cdot 10^{30}$ кг.

Это были примеры из макромира, т. е. мира очень больших физических величин. Приведём примеры из микромира, т. е. мира очень маленьких физических величин.

Масса атома водорода равна 0,00000000000000000000000001673 кг.

Радиус атома кислорода равен 0,0000000066 см.

Для записи этих величин тоже можно использовать степень числа 10. Например:

$$0{,}00000000000000000000000001673 \text{ кг} = \frac{1{,}673}{10^{27}} \text{ кг},$$

$$0{,}0000000066 \text{ см} = \frac{6{,}6}{10^{9}} \text{ см}.$$

Однако если договориться обозначить $\frac{1}{10^{27}}$ и $\frac{1}{10^{9}}$ соответственно 10^{-27} и 10^{-9}, то для рассмотренных величин получим «одноэтажную» форму записи: $\frac{1{,}673}{10^{27}} = 1{,}673 \cdot 10^{-27}$, $\frac{6{,}6}{10^{9}} = 6{,}6 \cdot 10^{-9}$.

Аналогично можно договориться, что, например, $\frac{1}{5^2} = 5^{-2}$, $\frac{1}{(-3)^5} = (-3)^{-5}$, $\frac{1}{0{,}7} = (0{,}7)^{-1}$.

Определение

Для любого числа a, не равного нулю, и натурального числа n выполняется равенство

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Из определения следует, что, например, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$, $(-4)^{-2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = 16$, $(0{,}3)^{-1} = \frac{1}{0{,}3} = \frac{10}{3}$.

Итак, вы умеете возводить число в любую целую степень, кроме нуля.

Определение

Для любого числа a, не равного нулю, $a^0 = 1$.

Например, $5^0 = 1$, $(-17)^0 = 1$, $\left(-\frac{4}{3}\right)^0 = 1$, $\pi^0 = 1$.

Замечание. Выражение 0^n при целых n, меньших или равных нулю, не имеет смысла.

Из данных определений следует, что при любом $a \neq 0$ и $n \in \boldsymbol{Z}$ числа a^n и a^{-n} являются взаимно обратными. Поэтому равенство

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

выполняется при любом целом n.

Например, при $n = -2$ имеем $a^2 = \frac{1}{a^{-2}}$.

Пример 1. Найдите значение выражения: 1) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1}$; 2) $1{,}2^{-2}$; 3) $3^{-3} \cdot 15 + 6^{-2} \cdot 8 - 4{,}3^0$.

Решение. 1) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{4}{7}} = \frac{7}{4}$.

Вообще, **если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то** $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

2) $1{,}2^{-2} = \left(\frac{12}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{6}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{6}\right)^{2} = \frac{25}{36}$.

3) $3^{-3} \cdot 15 + 6^{-2} \cdot 8 - 4{,}3^0 = \frac{1}{3^3} \cdot 15 + \frac{1}{6^2} \cdot 8 - 1 = \frac{1}{27} \cdot 15 + \frac{1}{36} \cdot 8 - 1 =$

$= \frac{5}{9} + \frac{2}{9} - 1 = -\frac{2}{9}$. ■

Пример 2. Представьте выражение $(a - b)^{-2}(a^{-2} - b^{-2})$ в виде рациональной дроби.

Решение. $(a - b)^{-2}(a^{-2} - b^{-2}) = \frac{1}{(a-b)^2} \cdot \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = \frac{1}{(a-b)^2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{a^2b^2} =$

$= \frac{1}{(b-a)^2} \cdot \frac{(b-a)(b+a)}{a^2b^2} = \frac{b+a}{a^2b^2(b-a)} = \frac{b+a}{a^2b^3 - a^3b^2}$. ■

В справочной литературе вы можете найти такую информацию: «Масса Венеры равна $4{,}9 \cdot 10^{24}$ кг. Масса Марса равна $6{,}423 \cdot 10^{23}$ кг. Площадь поверхности Луны равна $3{,}8 \cdot 10^7$ км^2».

Эти числа записаны в виде, который называют **стандартным видом числа**.

Определение

Стандартным видом числа называют его запись в виде произведения $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и $n \in Z$.

Число n называют **порядком числа**, записанного в стандартном виде. Например, порядок числа, выражающего массу Солнца в килограммах, равен 30, а порядок числа, выражающего массу атома водорода в килограммах, равен –27.

В стандартном виде можно записать любое положительное число. Например, $171{,}25 = 1{,}7125 \cdot 10^2$; $0{,}00958 = 9{,}58 \cdot 10^{-3}$. Однако на практике стандартный вид числа используют для записи больших и малых значений величин. При этом порядок числа даёт представление о величине. Например, если порядок числа m равен 3, т. е. $m = a \cdot 10^3$, то с учётом того, что $1 \leqslant a < 10$, получаем: $10^3 \leqslant m < 10^4$.

Пример 3. Запишите в стандартном виде число: 1) 564 000 000; 2) 0,0036.

Решение. 1) $564\,000\,000 = 5{,}64 \cdot 100\,000\,000 = 5{,}64 \cdot 10^8$.

2) $0{,}0036 = 3{,}6 \cdot 0{,}001 = 3{,}6 \cdot \frac{1}{1000} = 3{,}6 \cdot \frac{1}{10^3} = 3{,}6 \cdot 10^{-3}$. ■

1. Чему равно a^{-n}, если a — любое число, отличное от нуля, и $n \in N$?
2. Чему равна нулевая степень любого отличного от нуля числа?
3. Что называют стандартным видом числа?
4. Как в записи числа в стандартном виде $a \cdot 10^n$ называют число n?

Упражнения

13.1. Какому из выражений равно выражение a^{-6}:

1) $-a^6$; 2) $\frac{1}{a^{-6}}$; 3) $\frac{1}{a^6}$; 4) $-\frac{1}{a^6}$?

13.2. Представьте степень в виде дроби:

1) 5^{-6}; 2) d^{-3}; 3) m^{-1}; 4) $(a-b)^{-2}$.

13.3. Замените степень дробью:

1) 14^{-4}; 2) p^{-20}; 3) $(m+n)^{-1}$; 4) $(4c-5d)^{-10}$.

13.4. Представьте дробь в виде степени с целым отрицательным показателем или в виде произведения степеней:

1) $\frac{1}{x^5}$; 2) $\frac{m}{n^3}$; 3) $\frac{x^6}{y^7}$; 4) $\frac{(x-y)^2}{x+y}$.

13.5. Замените дробь степенью с целым отрицательным показателем или произведением степеней:

1) $\frac{1}{k^4}$; 2) $\frac{x^2}{y}$; 3) $\frac{m^6}{n^6}$; 4) $\frac{(2x-y)^3}{(x-2y)^9}$.

13.6. Представьте числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$ в виде степени с основанием: 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$.

13.7. Представьте числа 1, 3, 9, 27, 81, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$ в виде степени с основанием: 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$.

13.8. Представьте в виде степени однозначного натурального числа дробь:

1) $\frac{1}{49}$; 2) $\frac{1}{216}$; 3) $\frac{1}{625}$; 4) $\frac{1}{128}$.

13.9. Представьте в виде степени с основанием 10 число:

1) 0,1; 2) 0,01; 3) 0,0001; 4) 0,000001.

13.10. Вычислите:

1) 5^{-2}; 2) 2^{-4}; 3) $(-9)^{-2}$; 4) $0{,}2^{-3}$; 5) 1^{-24}; 6) $(-1)^{-16}$; 7) $(-1)^{-17}$; 8) $\left(\frac{7}{8}\right)^0$; 9) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$; 10) $\left(-1\frac{1}{6}\right)^{-2}$.

13.11. Найдите значение выражения:

1) 20^{-2}; 3) $(-6)^{-3}$; 5) $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-3}$;

2) $0{,}3^{-1}$; 4) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-2}$; 6) $\left(3\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

13.12. Вычислите значение выражения:

1) $3^{-1} - 4^{-1}$; 3) $0{,}5^{-2} \cdot 4^{-1}$;

2) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1} + (-2{,}3)^0 - 5^{-2}$; 4) $(2^{-1} - 8^{-1} \cdot 16)^{-1}$.

13.13. Чему равно значение выражения:

1) $2^{-2} + 2^{-1}$; 3) $0{,}03^0 + 0{,}7^0$;

2) $3^{-2} - 6^{-1}$; 4) $(9 \cdot 3^{-3} - 12^{-1})^{-1}$?

13.14. Какое из данных чисел записано в стандартном виде:

1) $12 \cdot 10^4$; 2) $1{,}2 \cdot 10^4$; 3) $0{,}12 \cdot 10^4$?

13.15. Запишите число в стандартном виде и укажите порядок числа:

1) 3400; 3) 0,0046; 5) 0,73; 7) $0{,}23 \cdot 10^4$;

2) 15; 4) 0,000008; 6) $250 \cdot 10^2$; 8) $9300 \cdot 10^5$.

13.16. Используя стандартный вид числа, запишите:

1) скорость света в вакууме равна 300 000 км/с;

2) длина реки Лены, самой протяжённой реки России, равна 4400 км;

3) площадь озера Байкал составляет 32 000 км^2;

4) расстояние от Земли до Солнца составляет 149,6 млн км;

5) атмосферное давление на высоте 100 км составляет 0,032 Па;

6) диаметр молекулы воды равен 0,00000028 мм.

13.17. Запишите число в стандартном виде и укажите порядок числа:

1) 45 000; 3) 0,00024; 5) $0{,}059 \cdot 10^8$;

2) 260; 4) 0,032; 6) $526 \cdot 10^4$.

13.18. Данное число представлено в стандартном виде. Запишите его в виде натурального числа или десятичной дроби:

1) $1{,}6 \cdot 10^3$; 2) $5{,}7 \cdot 10^6$; 3) $2{,}1 \cdot 10^{-2}$; 4) $1{,}1 \cdot 10^{-5}$.

13.19. Данное число представлено в стандартном виде. Запишите его в виде натурального числа или десятичной дроби:

1) $2{,}4 \cdot 10^2$; 2) $4{,}8 \cdot 10^5$; 3) $1{,}4 \cdot 10^{-3}$; 4) $8{,}6 \cdot 10^{-4}$.

13.20. Докажите, что $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

13.21. Найдите значение выражения:

1) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot 10^{-1} + 9^0 - (-2)^3 + \left(\frac{2}{9}\right)^{-2} \cdot (-1{,}5)^{-3}$;

2) $(2{,}5)^{-2} - (8^5)^0 + \left(1\frac{2}{3}\right)^{-3} + 0{,}1^{-1}$.

13.22. Расположите в порядке убывания:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^0, \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$; 2) $4^{-1}, 4^3, 4^0, 4^{-2}$.

13.23. Расположите в порядке возрастания:

1) $7^{-2}, 7^2, 7^{-1}, 7^0$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^2, \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}, \left(\frac{1}{3}\right)^0, \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$.

13.24. Сравните значения выражений:

1) 12^0 и $(-6)^0$;
2) $0{,}2^3$ и $0{,}2^{-3}$;
3) 4^6 и $0{,}25^{-6}$;
4) $3^{-1} \cdot 7^{-1}$ и 21^{-1};
5) $5^{-1} - 7^{-1}$ и 2^{-1};
6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ и $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)^{-1}$.

13.25. Сравните значения выражений:

1) 3^{-2} и $(-3)^0$;
2) $3^{-1} + 2^{-1}$ и 5^{-1};
3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ и $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)^{-2}$.

13.26. Представьте в виде дроби выражение:

1) $ab^{-1} + a^{-1b}$;
2) $3a^{-1} + ab^{-2}$;
3) $m^2n^2(m^{-3} - n^{-3})$;
4) $(a + b)^{-1} \cdot (a^{-1} + b^{-1})$;
5) $(c^{-2} - d^{-2}) : (c + d)$;
6) $(xy^{-2} + x^{-2}y) \cdot \left(\frac{x^2 - xy + y^2}{x}\right)^{-1}$.

13.27. Представьте в виде дроби выражение:

1) $a^{-2} + a^{-3}$;
2) $mn^{-4} + m^{-4}n$;
3) $(c^{-1} - d^{-1}) \cdot (c - d)^{-2}$;
4) $(x^{-2} + y^{-2}) \cdot (x^2 + y^2)^{-1}$.

13.28. Докажите, что при любом $n \in \boldsymbol{Z}$:

1) если $a > 0$, то $a^n > 0$;
2) если $a < 0$, то $a^n > 0$ при чётном n и $a^n < 0$ при нечётном n.

13.29. Верно ли неравенство $a^n > a^{-n}$, если:

1) $a > 1$, $n \in \boldsymbol{N}$; 2) $0 < a < 1$, $n \in \boldsymbol{N}$?

13.30. Порядок некоторого натурального числа равен 4. Сколько цифр содержит десятичная запись этого числа?

13.31. Десятичная запись некоторого натурального числа состоит из семи цифр. Чему равен порядок этого числа?

13.32. Какое число больше:

1) $9{,}7 \cdot 10^{11}$ или $1{,}2 \cdot 10^{12}$;
2) $3{,}6 \cdot 10^{-5}$ или $4{,}8 \cdot 10^{-6}$;
3) $2{,}34 \cdot 10^6$ или $0{,}23 \cdot 10^7$;
4) $42{,}7 \cdot 10^{-9}$ или $0{,}072 \cdot 10^{-7}$?

13.33. Какое число меньше:

1) $6{,}1 \cdot 10^{19}$ или $6{,}15 \cdot 10^{18}$;
2) $1{,}5 \cdot 10^{-9}$ или $0{,}9 \cdot 10^{-8}$?

13.34. В таблице приведены расстояния от Солнца до планет Солнечной системы.

Планета	Расстояние, км
Венера	$1{,}082 \cdot 10^8$
Земля	$1{,}495 \cdot 10^8$
Марс	$2{,}280 \cdot 10^8$
Меркурий	$5{,}790 \cdot 10^7$
Нептун	$4{,}497 \cdot 10^9$
Сатурн	$1{,}427 \cdot 10^9$
Уран	$2{,}871 \cdot 10^9$
Юпитер	$7{,}781 \cdot 10^8$

1) Какая планета находится на наименьшем расстоянии от Солнца, а какая — на наибольшем?
2) Какая из планет, Марс или Сатурн, находится дальше от Солнца?
3) Составьте таблицу, записав в левом столбце названия планет в порядке увеличения расстояния от них до Солнца, а в правом — расстояния от них до Солнца, выраженные в миллионах километров.

13.35. В таблице приведены массы атомов некоторых химических элементов.

Химический элемент	Масса атома, кг	Химический элемент	Масса атома, кг
Алюминий	$4{,}48 \cdot 10^{-26}$	Медь	$1{,}05 \cdot 10^{-25}$
Гелий	$6{,}64 \cdot 10^{-27}$	Олово	$1{,}97 \cdot 10^{-25}$
Водород	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$	Натрий	$3{,}81 \cdot 10^{-26}$
Азот	$2{,}32 \cdot 10^{-26}$	Золото	$3{,}27 \cdot 10^{-25}$
Железо	$9{,}28 \cdot 10^{-26}$	Уран	$3{,}95 \cdot 10^{-25}$

1) Масса атома какого из данных элементов наименьшая, а какого — наибольшая?

2) У какого из элементов, меди или натрия, масса атома больше?

3) Составьте таблицу, упорядочив элементы в порядке уменьшения массы их атомов.

13.36. В таблице приведены запасы некоторых веществ в минеральных ресурсах мира.

Вещество	Запасы, т	Вещество	Запасы, т
Алюминий	$1{,}1 \cdot 10^9$	Никель	$6{,}8 \cdot 10^7$
Вольфрам	$1{,}3 \cdot 10^6$	Олово	$4{,}76 \cdot 10^6$
Железо	$8{,}8 \cdot 10^{10}$	Ртуть	$1{,}15 \cdot 10^5$
Золото	$1{,}1 \cdot 10^4$	Хром	$4{,}4 \cdot 10^9$
Медь	$2{,}8 \cdot 10^9$	Цинк	$1{,}12 \cdot 10^8$

1) Запасы какого из данных веществ наибольшие, а какого — наименьшие?

2) Запасы какого из веществ, никеля или цинка, больше?

3) Составьте таблицу минеральных ресурсов, разместив вещества в порядке уменьшения их запасов.

Упражнения для повторения

13.37. Масса чугунной болванки 16 кг. Какое наименьшее количество болванок потребуется, чтобы отлить 41 деталь массой 12 кг каждая?

13.38. В некотором городе на сегодняшний день проживает 88 200 жителей. Сколько жителей было в этом городе два года назад, если ежегодный прирост населения составлял 5 %?

13.39. Упростите выражение:

$$\frac{2a^2+2}{a^2-1}-\frac{a+1}{a-1}+\frac{3a-3}{2a+2}.$$

13.40. Можно ли утверждать, что при любом натуральном n значение выражения $(5n + 6{,}5)^2 - (2n + 0{,}5)^2$ кратно 42?

§ 14 Свойства степени с целым показателем

В курсе алгебры 7 класса вы изучили свойства степени с натуральным показателем. Они остаются справедливыми и для степени с любым целым показателем.

Теорема 14.1

Для любого $a \neq 0$ и любых целых m и n выполняются равенства:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad (1)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}. \quad (2)$$

Теорема 14.2

Для любых $a \neq 0$ и $b \neq 0$ и любого целого n выполняется равенство

$$(ab)^n = a^n b^n. \quad (3)$$

Равенство (1) выражает **основное свойство степени.** Докажем его.

Доказательство.

Для натуральных m и n это равенство уже было доказано в курсе алгебры 7 класса.

Рассмотрим теперь случай, когда m и n — целые отрицательные числа.

Если m и n — целые отрицательные числа, то $-m$ и $-n$ — натуральные числа. Тогда $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m+(-n)} = a^{-m-n}$.

Имеем: $a^m \cdot a^n = \dfrac{1}{a^{-m}} \cdot \dfrac{1}{a^{-n}} = \dfrac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} = \dfrac{1}{a^{-m-n}} = \dfrac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}$.

Для завершения доказательства основного свойства степени следует рассмотреть ещё такие случаи: один из показателей степени m или n отрицательный, а другой — положительный; один или оба показателя равны нулю. Рассмотрите эти случаи самостоятельно.

Равенства (2) и (3) доказывают аналогично. ■

Из основного свойства степени получаем такое важное следствие.

Теорема 14.3

Для любого $a \neq 0$ и любых целых m и n выполняется равенство

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \quad (4)$$

Доказательство.

Имеем: $a^m : a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}$. ■

Из свойств (2) и (3) можно получить ещё одно свойство степени с целым показателем.

Теорема 14.4

Для любых $a \neq 0$ и $b \neq 0$ и любого целого n выполняется равенство

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \qquad (5)$$

Доказательство.

Имеем: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = (a \cdot b^{-1})^n = a^n \cdot (b^{-1})^n = a^n \cdot b^{-n} = \frac{a^n}{b^n}$. ■

Свойства (1)–(5) называют **свойствами степени с целым показателем.**

Пример 1. Представьте в виде степени выражение $(a^{-4})^{-2} \cdot a^{-7} : a^6$.

Решение. Применив последовательно правила возведения степени в степень (свойство (2)), умножения и деления степеней с одинаковыми основаниями (свойства (1) и (4)), получаем:

$(a^{-4})^{-2} \cdot a^{-7} : a^6 = a^{-4 \cdot (-2)} \cdot a^{-7} : a^6 = a^8 \cdot a^{-7} : a^6 = a^{8+(-7)-6} = a^{-5}$. ■

Пример 2. Найдите значение выражения:

1) $16^{-9} \cdot 8^{12}$; 2) $\frac{6^{-3}}{18^{-3}}$; 3) $\left(1\frac{11}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\left(\frac{5}{6}\right)^3\right)^{-5}$.

Решение. 1) Представив числа 16 и 8 в виде степеней с основанием 2, получаем:

$16^{-9} \cdot 8^{12} = (2^4)^{-9} \cdot (2^3)^{12} = 2^{-36} \cdot 2^{36} = 2^0 = 1$.

2) Используя правило возведения дроби в степень (свойство (5)), получаем: $\frac{6^{-3}}{18^{-3}} = \left(\frac{6}{18}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$.

3) $\left(1\frac{11}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\left(\frac{5}{6}\right)^3\right)^{-5} = \left(\frac{36}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \left(\left(\frac{6}{5}\right)^2\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} =$

$= \left(\frac{6}{5}\right)^{-16} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \left(\frac{5}{6}\right)^{16} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \frac{5}{6}$. ■

Пример 3. Упростите выражение: 1) $0{,}6m^2n^{-6} \cdot \frac{1}{3}m^{-4}n^3$;

2) $(a^{-2}+9)(a^{-2}-4) - (a^{-2}+6)(a^{-2}-6)$.

Решение. 1) $0{,}6m^2n^{-6} \cdot \frac{1}{3}m^{-4}n^3 = \left(0{,}6 \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot (m^2 \cdot m^{-4}) \cdot (n^{-6} \cdot n^3) =$
$= 0{,}2m^{-2}n^{-3}$.

2) $(a^{-2} + 9)(a^{-2} - 4) - (a^{-2} + 6)(a^{-2} - 6) = a^{-4} - 4a^{-2} + 9a^{-2} - 36 - a^{-4} +$
$+ 36 = 5a^{-2}$. ■

Пример 4. Выполните умножение $(3{,}4 \cdot 10^{14}) \cdot (7 \cdot 10^{-8})$ и результат запишите в стандартном виде.

Решение. $(3{,}4 \cdot 10^{14}) \cdot (7 \cdot 10^{-8}) = (3{,}4 \cdot 7) \cdot (10^{14} \cdot 10^{-8}) = 23{,}8 \cdot 10^6 =$
$= 2{,}38 \cdot 10 \cdot 10^6 = 2{,}38 \cdot 10^7$. ■

? Сформулируйте свойства степени с целым показателем.

Упражнения

14.1. Найдите значение выражения:

1) $9^5 \cdot 9^{-7}$;
2) $10^{-8} \cdot 10^{12}$;
3) $3^{-18} : 3^{-21}$;
4) $2^{-9} \cdot 2^{-12} : 2^{-22}$;
5) $(17^4)^{-12} \cdot (17^{-6})^{-8}$;
6) $\frac{6^{-5} \cdot (6^{-3})^4}{(6^{-7})^2 \cdot 6^{-3}}$;
7) $3^{-3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$;
8) $\frac{14^{-5}}{7^{-5}}$.

14.2. Найдите значение выражения:

1) $5^{-7} : 5^{-6} \cdot 5^3$;
2) $\frac{4^{-7} \cdot (4^{-5})^3}{(4^{-3})^7}$;
3) $0{,}8^{-4} \cdot \left(1\frac{1}{4}\right)^{-4}$;
4) $\frac{11^{-2}}{22^{-2}}$.

14.3. Упростите выражение:

1) $3a^{-3} \cdot 4a^{-4}$;
2) $\frac{10b^{-4}}{15b^{-5}}$;
3) $(2c^{-6})^4$;
4) $m^{-2}n \cdot mn^{-2}$;
5) $\frac{kp^{-6}}{k^4p^4}$;
6) $(c^{-6}d^2)^{-7}$;
7) $0{,}2c^{-3}d^5 \cdot 1{,}5c^{-2}d^{-5}$;
8) $4x^8 \cdot (-3x^{-2}y^4)^{-2}$;
9) $\frac{13m^{-10}}{12n^{-8}} \cdot \frac{27n}{26m^2}$;
10) $\frac{18p^{-6}k^2}{7} : \frac{15k^{-2}}{p^6}$.

14.4. Упростите выражение:

1) $2a^{-5}b^2 \cdot 3a^{-2}b^{-5}$;
2) $\left(\frac{1}{2}mn^{-3}\right)^{-2}$;
3) $\frac{3{,}6a^2b}{0{,}9a^3b^{-3}}$;
4) $0{,}8a^{-6}b^8 \cdot 5a^{10}b^{-8}$;
5) $\frac{25x^{-3}}{y^{-4}} \cdot \frac{y^4}{5x^{-7}}$;
6) $28c^3d^{-2} \cdot (2cd^{-1})^{-2}$.

14.5. Найдите значение выражения:

1) $8^{-3} \cdot 2^7$;

2) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-4} \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^{-3}$;

3) $25^{-4} : (0{,}2^{-3})^{-2}$;

4) $\frac{(-36)^{-3} \cdot 6^8}{216^{-5} \cdot (-6)^{18}}$;

5) $\frac{6^{-10}}{81^{-2} \cdot 16^{-3}}$;

6) $\frac{14^5 \cdot 2^{-7}}{28^{-2} \cdot 7^8}$.

14.6. Найдите значение выражения:

1) $9^{-4} \cdot 27^2$;

2) $32^{-5} : 64^{-4}$;

3) $\left(2\frac{7}{9}\right)^{-7} \cdot \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}\right)^5$;

4) $8^{-2} : 0{,}5^4$;

5) $\frac{22^6 \cdot 2^{-8}}{44^{-3} \cdot 11^9}$;

6) $\frac{10^{-2} \cdot 15^{-4}}{30^{-6}}$.

14.7. Выполните действия и приведите полученное выражение к виду, не содержащему степени с отрицательным показателем:

1) $-2{,}4a^{-4}b^3 \cdot (-2a^{-3}c^{-5})^{-3}$;

2) $(-10x^{-2}yz^{-8})^{-2} \cdot (0{,}1yz^{-4})^{-2}$;

3) $1\frac{7}{9}m^{-6}n \cdot \left(1\frac{1}{3}m^{-1}n^{-4}\right)^{-3}$;

4) $\left(-\frac{1}{6}a^{-3}b^{-6}\right)^{-3} \cdot (-6a^2b^9)^{-2}$;

5) $\left(\frac{7p^{-3}}{5k^{-1}}\right)^{-2} \cdot 49m^{-6}n^4$;

6) $\left(\frac{4x^{-5}}{3y^{-2}}\right)^{-3} \cdot (16x^{-6}y^4)^2$.

14.8. Выполните действия и приведите полученное выражение к виду, не содержащему степени с отрицательным показателем:

1) $3{,}6a^{-8}b^4 \cdot (-3a^{-3}b^{-7})^{-2}$;

2) $1\frac{9}{16}x^{-6}y^2 \cdot \left(1\frac{1}{4}x^{-1}y^{-3}\right)^{-3}$;

3) $\left(\frac{5m^{-4}}{6n^{-1}}\right)^{-3} \cdot 125m^{-10}n^2$;

4) $\left(\frac{7a^{-6}}{b^5}\right)^{-2} \cdot (a^{-4}b)^4$.

14.9. Вынесите за скобки степень с основанием a и наименьшим из данных показателей:

1) $a^3 - 2a^4$; 2) $a^{-3} - 2a^{-4}$; 3) $a^3 - 2a^{-4}$.

14.10. Вынесите за скобки степень с основанием b и наименьшим из данных показателей:

1) $b^3 + 3b^2$; 2) $b^{-3} + 3b^{-2}$; 3) $b^{-3} + 3b^2$.

14.11. Представьте в виде произведения выражение:

1) $a^{-2} - 4$;

2) $a^{-4}b^{-6} - 1$;

3) $25x^{-8}y^{-12} - z^{-2}$;

4) $a^{-3} + b^{-3}$;

5) $m^{-4} - 6m^{-2}p^{-1} + 9p^{-2}$;

6) $a^{-8} - 49a^{-2}$.

14.12. Представьте в виде произведения выражение:

1) $x^{-4} - 25$;

2) $m^{-6} - 8n^{-3}$;

3) $a^{-10} + 8a^{-5}b^{-7} + 16b^{-14}$;

4) $a^{-4} - a^{-2}$.

14.13. Выполните вычисления и результат запишите в стандартном виде:

1) $(1{,}8 \cdot 10^4) \cdot (6 \cdot 10^3)$;

2) $(3 \cdot 10^6) \cdot (5{,}2 \cdot 10^{-9})$;

3) $\dfrac{5{,}4 \cdot 10^5}{9 \cdot 10^8}$;

4) $\dfrac{1{,}7 \cdot 10^{-6}}{3{,}4 \cdot 10^{-4}}$.

14.14. Выполните вычисления и результат запишите в стандартном виде:

1) $(1{,}6 \cdot 10^{-5}) \cdot (4 \cdot 10^7)$;

2) $(5 \cdot 10^{-3}) \cdot (1{,}8 \cdot 10^{-1})$;

3) $\dfrac{7 \cdot 10^{-4}}{1{,}4 \cdot 10^{-6}}$;

4) $\dfrac{6{,}4 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-2}}$.

14.15. Расстояние от Земли до Солнца равно $1{,}5 \cdot 10^8$ км, а скорость света — $3 \cdot 10^8$ м/с. За сколько минут свет от Солнца дойдёт до Земли? Ответ округлите до единиц.

14.16. Плотность меди равна $8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3. Найдите массу медной плитки, длина которой $2{,}5 \cdot 10^{-1}$ м, ширина — 12 см, а высота — 0,02 м.

14.17. Масса Земли равна $6 \cdot 10^{24}$ кг, а Луны — $7{,}4 \cdot 10^{22}$ кг. Во сколько раз масса Луны меньше массы Земли? Ответ округлите до единиц.

◆◆

14.18. Докажите тождество:
$a^{-8} - b^{-8} = (a^{-1} - b^{-1})(a^{-1} + b^{-1})(a^{-2} + b^{-2})(a^{-4} + b^{-4})$.

14.19. Упростите выражение:

1) $(a^{-4} + 3)(a^{-4} - 3) - (a^{-4} + 2)^2$;

2) $\dfrac{m^{-2} - n^{-2}}{m^{-1} + n^{-1}}$;

3) $\dfrac{2x^{-2} + y^{-2}}{3x^{-2} - 3x^{-1}y^{-1}} - \dfrac{x^{-1}}{x^{-1} - y^{-1}}$;

4) $\dfrac{a^{-5} + b^{-5}}{a^{-6}} : \dfrac{a^{-3}b^{-5} + a^{-8}}{a^{-4}}$.

14.20. Упростите выражение:

1) $(x^{-2} - 1)^2 - (x^{-2} - 4)(x^{-2} + 4)$;

2) $\dfrac{a^{-2} - 10a^{-1}b^{-1} + 25b^{-2}}{a^{-1} - 5b^{-1}}$;

3) $\dfrac{5m^{-2} + n^{-2}}{4m^{-3} + 4m^{-1}n^{-2}} - \dfrac{m^{-1}}{m^{-2} + n^{-2}}$;

4) $\dfrac{b^{-1} + 3c^{-1}}{c^{-2}} \cdot \dfrac{bc}{b^{-2}c^{-1} + 3b^{-1}c^{-2}}$.

14.21. Постройте график функции:

1) $y = (x + 3)^0$;

2) $y = \left(\dfrac{1}{x - 2}\right)^{-1}$;

3) $y = \left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)^0$;

4) $y = \left(\dfrac{x + 2}{x^2 - 4}\right)^{-1}$;

5) $y = x \cdot \left(\dfrac{x}{x + 3}\right)^{-1}$;

6) $y = \dfrac{(x^2 - 1)^0}{x^{-1}}$.

14.22. Постройте график функции:

1) $y = (x + 2)^0$;

2) $y = \left(\dfrac{x - 3}{x^2 - 9}\right)^{-1}$;

3) $y = (x - 1)\left(\dfrac{x - 1}{x}\right)^{-1}$.

14.23. Назовите порядок числа x, если:

1) $100 \leqslant x < 1000$;
2) $10\,000 \leqslant x < 100\,000$;
3) $0{,}01 \leqslant x < 0{,}1$;
4) $0{,}0001 \leqslant x < 0{,}001$.

14.24. Назовите порядок числа x, если:

1) $10 \leqslant x < 100$;
2) $0{,}001 \leqslant x < 0{,}01$.

14.25. Порядок числа a равен -4. Определите порядок числа:

1) $10a$;
2) $0{,}1a$;
3) $100a$;
4) $0{,}001a$;
5) $10\,000a$;
6) $1\,000\,000a$.

14.26. Порядок числа b равен 3. Определите порядок числа:

1) $10b$;
2) $0{,}01b$;
3) $0{,}0001b$;
4) $1000b$.

14.27. Упростите выражение и запишите результат в виде рационального выражения, не содержащего степени с отрицательным показателем:

1) $\left(\dfrac{a^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}} - \dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}}\right) : \left(\dfrac{b}{a^2}\right)^{-1}$;

2) $\dfrac{b^{-2}-2}{b^{-2}} - \dfrac{b^{-4}-4}{b^{-2}} \cdot \dfrac{1}{b^{-2}-2}$;

3) $\dfrac{5c^{-3}}{c^{-3}-3} - \dfrac{c^{-3}+6}{2c^{-3}-6} \cdot \dfrac{90}{c^{-6}+6c^{-3}}$;

4) $\left(\dfrac{m^{-4}}{m^{-4}-4} - \dfrac{3m^{-4}}{m^{-8}-8m^{-4}+16}\right) \cdot \dfrac{16-m^{-8}}{m^{-4}-7} + \dfrac{8m^{-4}}{m^{-4}-4}$;

5) $\dfrac{(a+b-1)^{-1}+(a-b+1)^{-1}}{2(a+b)} \cdot \left(\dfrac{1}{a^{-2}} - \dfrac{1}{(b-1)^{-2}}\right)$.

14.28. Упростите выражение и запишите результат в виде рационального выражения, не содержащего степени с отрицательным показателем:

1) $\dfrac{a^{-2}+5}{a^{-4}-6a^{-2}+9} : \dfrac{a^{-4}-25}{4a^{-2}-12} - \dfrac{2}{a^{-2}-5}$;

2) $\left(b^{-1} - \dfrac{5b^{-1}-36}{b^{-1}-7}\right) \cdot \left(2b^{-1} + \dfrac{2b^{-1}}{b^{-1}-7}\right)^{-1}$;

3) $\dfrac{(x-1)(x+1)^{-2} - 2x(x^2-1)^{-1} + (x+1)(x-1)^{-2}}{8x(x^4-1)^{-1}}$.

14.29. Порядок числа a равен -4, а порядок числа b равен 3. Каким может быть порядок значения выражения:

1) ab;
2) $a+b$;
3) $a+10b$;
4) $10a+0{,}1b$?

14.30. Порядок числа m равен 2, а порядок числа n равен 4. Каким может быть порядок значения выражения:

1) mn;
2) $0{,}01mn$;
3) $100m+n$;
4) $0{,}01m+n$?

14.31. Докажите тождество:

1) $\dfrac{(xy^{-1}+1)^2}{xy^{-1}-x^{-1}y}\cdot\dfrac{x^3y^{-3}-1}{x^2y^{-2}+xy^{-1}+1}:\dfrac{x^3y^{-3}+1}{xy^{-1}+x^{-1}y-1}=1;$

2) $\dfrac{a^{-1}+(b+c)^{-1}}{a^{-1}-(b+c)^{-1}}\cdot\left(1+\left(\dfrac{2bc}{b^2+c^2-a^2}\right)^{-1}\right)=\dfrac{(a+b+c)^2}{2bc}.$

Упражнения для повторения

14.32. Среднее арифметическое двух натуральных чисел равно 18. При делении большего из этих чисел на меньшее получим неполное частное 3 и остаток 4. Найдите эти числа.

14.33. Для откачивания воды из затопленного помещения были задействованы три насоса. Первый из них может выкачать всю воду за 12 ч, второй — за 15 ч, а третий — за 20 ч. Сначала в течение 3 ч работали первый и второй насосы, а затем подключили третий насос. За какое время была откачана вся вода?

14.34. Тетрадь стоит 19 р. У покупателя имеются монеты только по 5 р., а у продавца — только по 2 р. Может ли покупатель рассчитаться за тетрадь без дополнительного размена денег? В случае утвердительного ответа определите, какое наименьшее количество монет соответствующего достоинства должны иметь покупатель и продавец.

14.35. Известно, что $A \subset B$. Вместо знака $*$ запишите знак $\cup$ или $\cap$ так, чтобы образовалось верное равенство:

1) $A * B = B$; 2) $A * B = A$.

§ 15 Функция $y=\dfrac{k}{x}$ и её график

В курсе математики 6 класса вы познакомились с функциональной зависимостью, которая характеризуется тем, что с увеличением (уменьшением) одной величины в несколько раз другая величина уменьшается (увеличивается) во столько же раз. Такую зависимость называют **обратной пропорциональностью**.

Рассмотрим два примера.

Пусть имеется 500 р. Обозначим через x р. цену 1 кг товара, а через y кг — количество этого товара, которое можно приобрести за 500 р.

Зависимость переменной y от переменной x является обратной пропорциональностью: увеличение цены x в несколько раз приводит к уменьшению количества товара y во столько же раз, и наоборот, уменьшение цены приводит к увеличению количества купленного товара.

Этой функциональной зависимости соответствует функция, заданная формулой $y = \frac{500}{x}$.

• Рассмотрим прямоугольник, площадь которого равна 18 см^2, а стороны — x см и y см. Тогда

$$y = \frac{18}{x}.$$

Увеличение (уменьшение) знаменателя x в несколько раз приводит к уменьшению (увеличению) величины y во столько же раз, т. е. зависимость переменной y от переменной x является обратной пропорциональностью.

В рассмотренных примерах математической моделью реальных ситуаций является функция, которую можно задать формулой вида $y = \frac{k}{x}$.

Определение

Функцию, которую можно задать формулой вида $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называют обратной пропорциональностью.

Так как областью определения выражения $\frac{k}{x}$ является множество $\{x \mid x \neq 0\}$, то областью определения функции $y = \frac{k}{x}$ является такое же множество, т. е. $D(y) = \{x \mid x \neq 0\}$.

Рассмотрим функцию $y = \frac{6}{x}$. В таблице приведены некоторые значения аргумента и соответствующие им значения функции.

x	–6	–4	–3	–2	–1,5	–1	1	1,5	2	3	4	6
y	–1	–1,5	–2	–3	–4	–6	6	4	3	2	1,5	1

Отметим на координатной плоскости точки (рис. 15.1), координаты которых приведены в таблице.

Чем больше точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = \frac{6}{x}$, нам удастся отметить, тем меньше полученная фигура (рис. 15.2) будет отличаться от графика функции $y = \frac{6}{x}$.

Среди отмеченных точек не может быть точки, абсцисса которой равна нулю, поскольку число 0 не принадлежит области определения

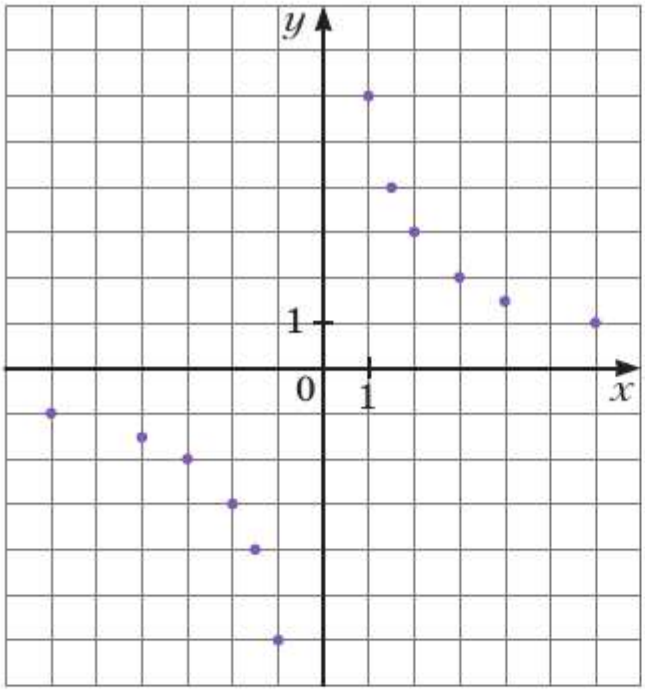


Рис. **15.1**

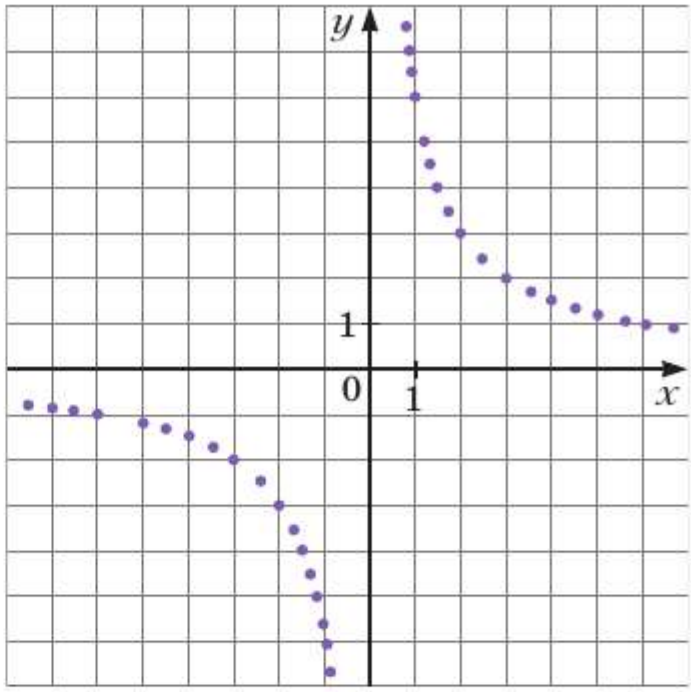


Рис. **15.2**

данной функции. Поэтому график функции $y = \frac{6}{x}$ не имеет общих точек с осью ординат.

Кроме того, этот график не имеет общих точек и с осью абсцисс. Действительно, уравнение $\frac{6}{x} = 0$ не имеет решений. Следовательно, число 0 не принадлежит области значений данной функции.

Если $x > 0$, то $\frac{6}{x} > 0$, т. е. $y > 0$; если $x < 0$, то $y < 0$. Следовательно, точки графика данной функции могут находиться только в I и III координатных четвертях.

Заметим, что с увеличением модуля абсциссы расстояние от точки графика функции $y = \frac{6}{x}$ до оси абсцисс уменьшается и может стать сколь угодно малым, но никогда не будет равным нулю. Действительно, чем больше модуль аргумента, тем меньше модуль соответствующего значения функции.

Аналогично можно установить, что с уменьшением модуля абсциссы расстояние от точек графика до оси ординат уменьшается и может стать сколь угодно малым, но никогда не будет равным нулю.

Если бы удалось отметить на координатной плоскости все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = \frac{6}{x}$, то мы получили бы фигуру, изображённую на рисунке 15.3.

Фигуру, являющуюся графиком функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называют **гиперболой**. На рисунке 15.3 изображена гипербола $y = \frac{6}{x}$.

Гипербола состоит из двух частей — **ветвей гиперболы**.

Заметим, что если верно равенство $y_0 = \frac{k}{x_0}$, то верно равенство $-y_0 = -\frac{k}{x_0}$. Тогда можно сделать такой вывод: если точка $A(x_0; y_0)$ принадлежит гиперболе $y = \frac{k}{x}$, то точка $B(-x_0; -y_0)$ также принадлежит этой гиперболе. Следовательно, гипербола является симметричной фигурой. Начало координат — центр симметрии гиперболы $y = \frac{k}{x}$.

Если $k > 0$, то ветви гиперболы расположены в I и III четвертях, а если $k < 0$ — то во II и IV четвертях.

На рисунке 15.4 изображён график функции $y = -\frac{6}{x}$. Ветви гиперболы $y = -\frac{6}{x}$ расположены во II и IV четвертях.

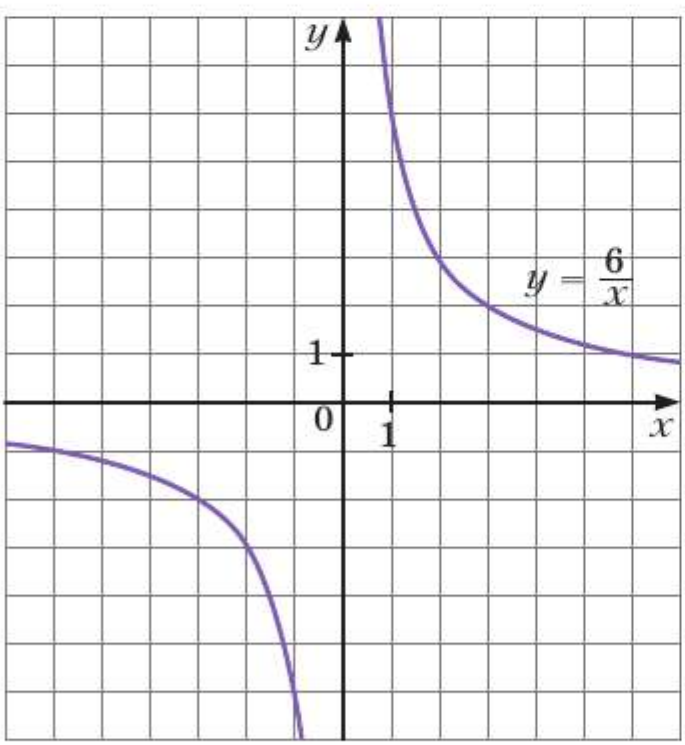


Рис. **15.3**

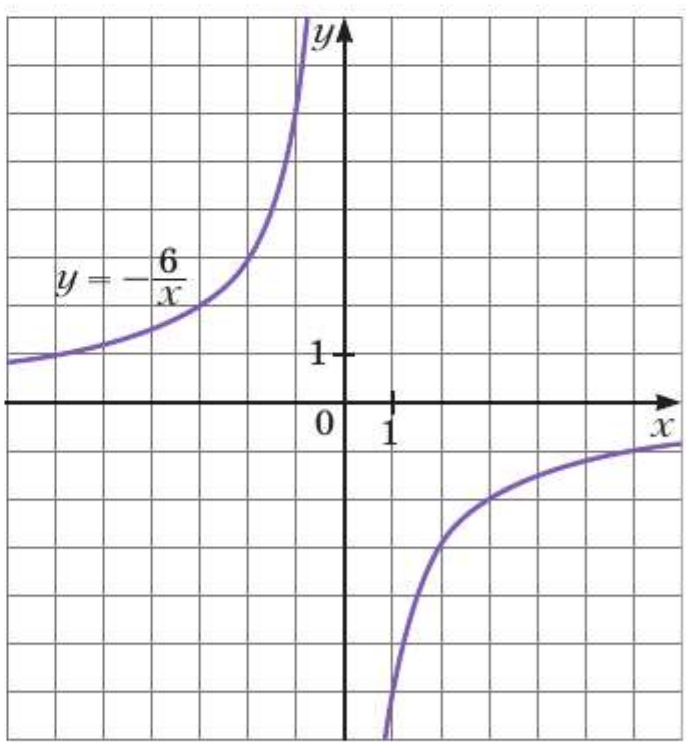


Рис. **15.4**

Заметим, что областью значений функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, является множество $\{y \mid y \neq 0\}$.

В таблице приведены свойства функции $y = \frac{k}{x}$, изученные в этом параграфе.

Область определения	$D(y) = \{x \mid x \neq 0\}$
Область значений	$E(y) = \{y \mid y \neq 0\}$
График	Гипербола
Значение аргумента, при котором значение функции равно 0	Не существует
Свойство графика	Начало координат — центр симметрии фигуры

Покажем, как график функции $y = \frac{k}{x}$ можно использовать при решении уравнений.

Пример. Решите уравнение $\frac{4}{x} = x + 3$.

Решение. Рассмотрим функции $y = \frac{4}{x}$ и $y = x + 3$.

Построим в одной системе координат графики этих функций (рис. 15.5). Они пересекаются в двух точках, абсциссы которых равны 1 и –4. В точках пересечения графиков функций сами функции принимают равные значения. Следовательно, при найденных абсциссах значения выражений $\frac{4}{x}$ и $x + 3$ равны, т. е. числа –4 и 1 являются корнями уравнения $\frac{4}{x} = x + 3$. Проверка это подтверждает. Действительно, $\frac{4}{1} = 1 + 3$ и $\frac{4}{-4} = -4 + 3$.

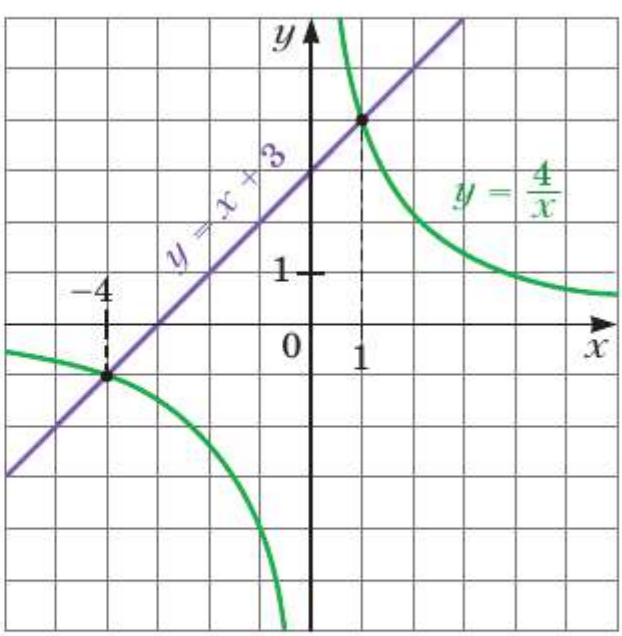


Рис. 15.5

Ответ: –4; 1. ■

Описанный метод решения уравнений называют **графическим**. В курсе алгебры 7 класса вы ознакомились с графическим методом решения систем уравнений и знаете, что этот метод не всегда даёт точные результаты. Поэтому проверка найденных корней является обязательным этапом решения уравнения.

В дальнейшем (§ 36) вы научитесь решать такие уравнения, не используя графический метод.

1. Объясните, какую зависимость между величинами называют обратной пропорциональностью.

2. Какую функцию называют обратной пропорциональностью?

3. Какое множество является областью определения функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$?

4. Как называют фигуру, которая является графиком обратной пропорциональности?

5. Как называют части, из которых состоит гипербола?

6. Какое множество является областью значений функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$?

7. В каких координатных четвертях расположен график функции $y = \frac{k}{x}$, если $k > 0$? Если $k < 0$?

8. Объясните, в чём заключается графический метод решения уравнений.

Упражнения

15.1. Автомобиль проезжает некоторое расстояние за 10 ч. За какое время он проедет это же расстояние, если его скорость:
1) увеличится в 2 раза;
2) уменьшится в 1,2 раза?

15.2. Длина прямоугольника равна 30 см. Какой станет его длина, если при той же самой площади ширину прямоугольника:
1) увеличить в 1,5 раза;
2) уменьшить в 3,2 раза?

15.3. На некоторую сумму денег купили 40 м ткани. Сколько метров ткани купили бы на эту же сумму денег, если бы её цена за 1 м:
1) уменьшилась в 2,6 раза;
2) увеличилась в 1,6 раза?

15.4. Пешеход прошёл 12 км. Заполните таблицу, в первой строке которой указана скорость, а во второй — время движения.

v, км/ч	5		2,4	
t, ч		3		$3\frac{1}{3}$

Задайте формулой зависимость t от v.

15.5. Объём прямоугольного параллелепипеда равен 48 см^3. Заполните таблицу, если S — площадь основания, h — высота.

S, см^2	16		240	
h, см		8		4,8

Задайте формулой зависимость h от S.

15.6. Бригада из семи рабочих с одинаковой производительностью труда может выполнить некоторое производственное задание за 12 дней. Сколько потребуется рабочих с такой же производительностью труда, чтобы выполнить это задание за 4 дня?

15.7. Заготовленных кормов хватит для 24 лошадей на 18 дней. На сколько дней хватит этих кормов для 36 лошадей?

15.8. Среди данных функций укажите обратные пропорциональности:

1) $y = 2x$; 3) $y = \frac{2}{x}$; 5) $y = -\frac{0{,}8}{x}$; 7) $y = \frac{1}{2x}$;

2) $y = \frac{x}{2}$; 4) $y = -\frac{1}{x}$; 6) $y = \frac{2x}{3}$; 8) $y = \frac{2}{3x}$.

15.9. Задана функция $y = \frac{24}{x}$. Найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: –3; 6; 0,2;
2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 12; –6; 100.

15.10. Задана функция $y = -\frac{36}{x}$. Найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: –4; 0,9; 18;
2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 6; –3; 8.

15.11. Постройте график функции $y = -\frac{8}{x}$. Пользуясь графиком, найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: 4; –1;
2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 2; –8;
3) значения аргумента, при которых функция принимает положительные значения.

15.12. Постройте график функции $y = \frac{10}{x}$. Пользуясь графиком, найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: 2; –10;
2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 5; –2;
3) значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения.

15.13. Не выполняя построения графика функции $y = \frac{28}{x}$, определите, проходит ли график через точку:

1) $A(-4; -7)$;
2) $B(14; -2)$;
3) $C(0{,}5; 14)$;
4) $D(0{,}2; 140)$.

15.14. Не выполняя построения графика функции $y = -\frac{48}{x}$, определите, проходит ли график через точку:

1) $A(-6; -8)$;
2) $B(12; -4)$;
3) $C(0{,}3; -16)$;
4) $D(0{,}4; -120)$.

15.15. На рисунке 15.6 изображён график зависимости времени t движения из пункта A в пункт B от скорости v движения. Пользуясь графиком, определите:

1) за какое время можно добраться из пункта A в пункт B, если двигаться со скоростью 8 км/ч; 24 км/ч;
2) с какой скоростью надо двигаться, чтобы добраться из пункта A в пункт B за 3 ч; за 4 ч;
3) чему равно расстояние между пунктами A и B.

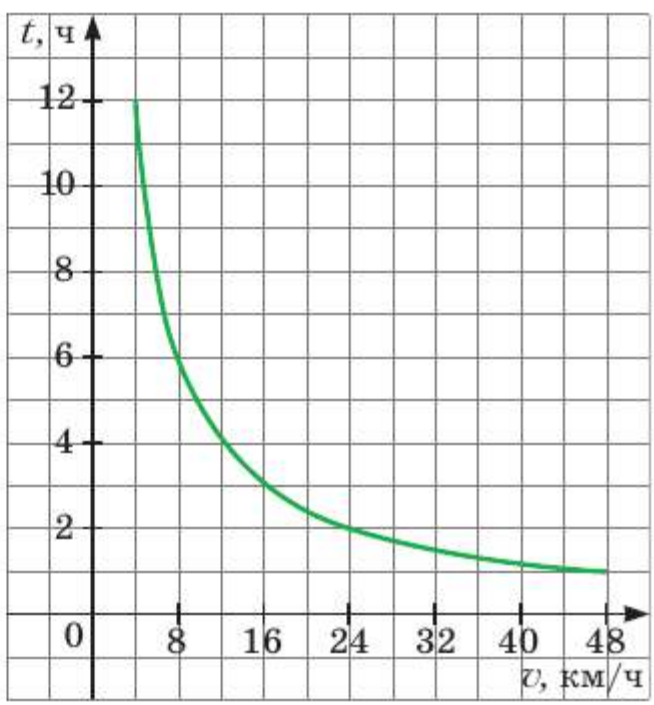
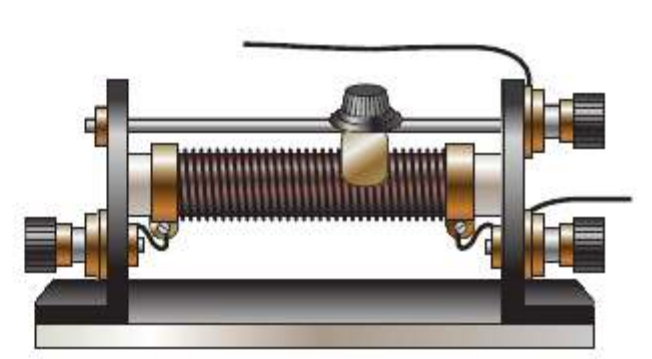


Рис. **15.6**

15.16. Проволочный реостат подключён к блоку питания (рис. 15.7). Сопротивление R реостата зависит от положения ползунка и может изменяться в пределах от 0 до 6 Ом. Пользуясь графиком зависимости силы тока I от


Рис. **15.7**

сопротивления R (рис. 15.8) при условии, что напряжение на концах реостата остаётся неизменным, определите:

1) чему равна сила тока, если сопротивление равно 2 Ом;

2) при каком значении сопротивления сила тока равна 3 А;

3) сколько вольт составляет напряжение на концах реостата.

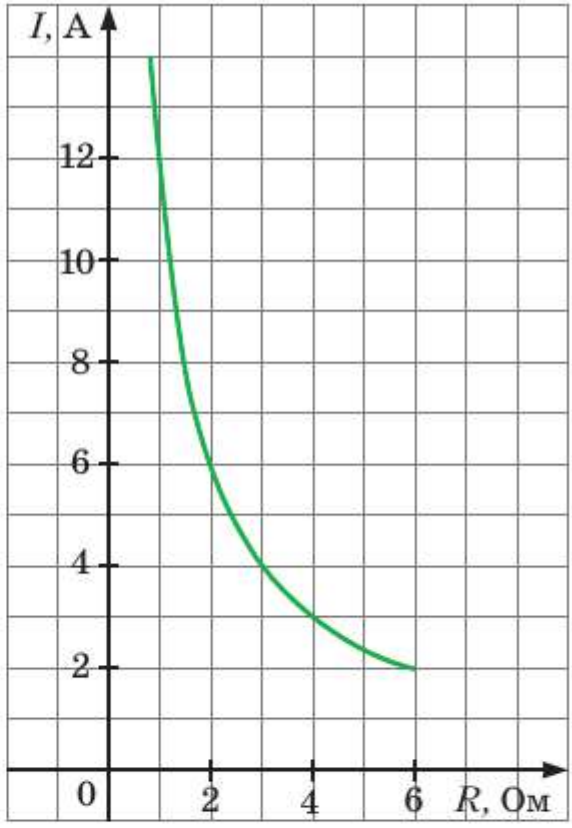


Рис. 15.8

15.17. Найдите значение параметра k, при котором график функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку:

1) $A(-5; 4)$; 3) $C(1{,}5; -8)$.

2) $B\left(\frac{1}{6}; -2\right)$;

15.18. График функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку $A(10; 1{,}6)$. Проходит ли график этой функции через точку:

1) $B(-1; -16)$; 2) $C(-2; 8)$?

15.19. Постройте в одной системе координат графики функций $y = \frac{9}{x}$ и $y = x$ и определите координаты точек их пересечения.

15.20. Решите графически уравнение:

1) $\frac{4}{x} = 4 - x$; 2) $x - 2 = \frac{3}{x}$; 3) $x + 2 = -\frac{5}{x}$.

15.21. Решите графически уравнение:

1) $\frac{8}{x} = 6 - x$; 2) $2x = \frac{2}{x}$; 3) $\frac{7}{x} = -x$.

15.22. Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} xy = 4, \\ 4y = x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 2. \end{cases}$

15.23. Решите графически систему уравнений $\begin{cases} xy = 5, \\ y - x = 4. \end{cases}$

15.24. Определите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} xy = -1, \\ x + 3y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = -1, \\ x - 3y = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy = 6, \\ 3x - 2y = 6. \end{cases}$

15.25. Определите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} xy = -8, \\ 2x + 3y = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = -3, \\ x - 2y - 2 = 0. \end{cases}$

15.26. Найдите координаты всех точек графика функции $y = \frac{64}{x}$, у которых абсцисса и ордината равны.

15.27. Найдите координаты всех точек графика функции $y = -\frac{25}{x}$, у которых абсцисса и ордината — противоположные числа.

◆ ◆

15.28. Исследуйте количество корней уравнения $\frac{k}{x} = a$, $k \neq 0$ в зависимости от значения параметра a.

15.29. Постройте график функции:

1) $y = \frac{6}{|x|}$; 2) $y = -\frac{6}{|x|}$; 3) $y = -|x|^{-1}$.

15.30. Постройте график функции:

1) $y = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & \text{если } x \leqslant -1, \\ x + 3, & \text{если } x > -1; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} -2x + 10, & \text{если } x \leqslant 2, \\ \frac{12}{x}, & \text{если } 2 < x < 4, \\ 3, & \text{если } x \geqslant 4. \end{cases}$

15.31. Постройте график функции:

$$y = \begin{cases} -\frac{4}{x}, & \text{если } x < -2, \\ 2, & \text{если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ \frac{4}{x}, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

15.32. Постройте график функции:

1) $y = \frac{9x - 18}{x^2 - 2x}$; 2) $y = \frac{5x^2 - 5}{x - x^3}$.

15.33. Постройте график функции:

1) $y = \frac{x - 3}{x^2 - 3x}$; 2) $y = \frac{10x^2 - 40}{x^3 - 4x}$.

◆ ◆ ◆

15.34. Постройте график уравнения:

1) $(xy - 1)(x - 2) = 0$;

2) $(xy + 1)(y - 1) = 0$;

3) $(xy - 1)(|x| - |y|) = 0$;

4) $\frac{xy - 1}{x - y} = 0$;

5) $\frac{xy + 1}{x - y} = 0$.

15.35. Постройте график уравнения:

1) $x(xy-1)=0$; 2) $x^2y^2-1=0$; 3) $\dfrac{xy-1}{x-1}=0$.

15.36. Пусть $f(x)=x$. Постройте график функции $y=-f\left(-\dfrac{1}{x}\right)$.

15.37. Пусть $f(x)=-\dfrac{1}{x}$. Постройте график функции $y=-f\left(-\dfrac{1}{x}\right)$.

15.38. Функция f такова, что $f(x)=\dfrac{4}{x}$. Докажите, что $f(x+1)-f(x-1)=$
$=-\dfrac{1}{2}f(x+1)\cdot f(x-1)$.

15.39. Найдите функцию f, удовлетворяющую условию $3f(x)+2f(-x)=$
$=-\dfrac{2}{x}$.

15.40. Найдите функцию f, удовлетворяющую условию $2f(x)+f\left(-\dfrac{1}{x}\right)=$
$=\dfrac{3x^2-6}{x}$.

Упражнения для повторения

15.41. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных, содержащихся в выражении, его значение не зависит от значений a и b:

$$\frac{a^2-b^2}{a+3b}\cdot\left(\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2}+\frac{b}{a^2-b^2}\right)-\frac{b}{a-b}.$$

15.42. Решите уравнение:

$$\frac{3}{5x+25}+\frac{1}{2x-10}=\frac{5}{x^2-25}.$$

15.43. Цену шкафа снизили на 30 %, а спустя некоторое время повысили на 30 %. Как изменилась, увеличилась или уменьшилась, цена шкафа по сравнению с первоначальной и на сколько процентов?

15.44. (*Задача Сунь-Цзы*[1].) Двое мужчин получили монеты, которые они должны были разделить между собой так, что если бы к монетам, которые получит первый из них, прибавить половину монет второго, или к монетам, которые получит второй, прибавить $\dfrac{2}{3}$ монет первого, то в обоих случаях было бы 48 монет. Сколько монет получил каждый из мужчин?

[1] Сунь-Цзы — китайский математик, который жил в III или IV в.

Итоги главы 2

Область определения выражения

Областью определения выражения с одной переменной называют множество значений переменной, при которых это выражение имеет смысл. Элементы этого множества называют допустимыми значениями переменной.

Тождество

Равенство, которое выполняется при любых допустимых значениях входящих в него переменных, называют тождеством.

Тождественно равные выражения

Выражения, соответствующие значения которых равны при любых допустимых значениях входящих в них переменных, называют тождественно равными.

Основное свойство рациональной дроби

Если числитель и знаменатель рациональной дроби умножить на один и тот же ненулевой многочлен, то получим дробь, тождественно равную данной.

Сложение рациональных дробей с одинаковыми знаменателями

Суммой двух рациональных дробей с одинаковыми знаменателями является рациональная дробь, числитель которой равен сумме числителей данных дробей, а знаменатель — знаменателю этих дробей.

Вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями

Разностью двух рациональных дробей с одинаковыми знаменателями является рациональная дробь, числитель которой равен разности числителей данных дробей, а знаменатель — знаменателю этих дробей.

Умножение рациональных дробей

Произведением двух рациональных дробей является рациональная дробь, числитель которой равен произведению числителей данных дробей, а знаменатель — произведению их знаменателей.

Деление рациональных дробей

Частным двух рациональных дробей является рациональная дробь, числитель которой равен произведению числителя делимого и знаменателя делителя, а знаменатель — произведению знаменателя делимого и числителя делителя.

Возведение рациональной дроби в степень

Чтобы возвести рациональную дробь в степень, нужно возвести в эту степень числитель и знаменатель. Первый результат записать как числитель, а второй — как знаменатель дроби.

Область определения уравнения

Областью определения уравнения $f(x) = g(x)$ называют множество значений переменной x, при которых имеют смысл обе части уравнения.

Равносильные уравнения

Уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ называют равносильными, если множества их корней равны.

Свойства уравнений

- Если к обеим частям данного уравнения прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному.
- Если какое-либо слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному.
- Если обе части уравнения умножить (разделить) на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное данному.

Уравнение-следствие

Если множество корней уравнения $f_2(x) = g_2(x)$ содержит множество корней уравнения $f_1(x) = g_1(x)$, то уравнение $f_2(x) = g_2(x)$ называют следствием уравнения $f_1(x) = g_1(x)$.

Рациональное уравнение

Уравнение, левая и правая части которого являются рациональными выражениями, называют рациональным.

Степень с целым отрицательным показателем

Для любого числа a, не равного нулю, и натурального числа n выполняется равенство $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Для любого числа a, не равного нулю, $a^0 = 1$.

Стандартный вид числа

Стандартным видом числа называют его запись в виде произведения $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и $n \in \boldsymbol{Z}$.

Свойства степени с целым показателем

Для любых $a \neq 0$ и $b \neq 0$ и любых целых m и n выполняются равенства:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (основное свойство степени);

$(a^m)^n = a^{mn}$;

$(ab)^n = a^n b^n$;

$a^m : a^n = a^{m-n}$;

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Функция обратная пропорциональность

Функцию, которую можно задать формулой вида $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называют обратной пропорциональностью.

Свойства функции $y = \frac{k}{x}$

Область определения	$D(y) = \{x \mid x \neq 0\}$
Область значений	$E(y) = \{y \mid y \neq 0\}$
График	Гипербола
Значение аргумента, при котором значение функции равно 0	Не существует
Свойство графика	Начало координат — центр симметрии фигуры

глава

3 Основы теории делимости

Изучив материал этой главы, вы познакомитесь с целым рядом понятий и теорем, связанных с делимостью целых чисел. Научитесь доказывать свойства и признаки делимости нацело на 3, на 9, на 11. Познакомитесь с эффективным приёмом нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел. Узнаете об особой роли простых чисел. Изучите основную теорему арифметики.

§ 16 Делимость нацело и её свойства

Определение

Говорят, что целое число a делится нацело на целое число b ($b \neq 0$), если существует такое целое число k, что $a = bk$.

Если целое число a делится нацело на целое число b, то пишут: $a \vdots b$. Например, $12 \vdots -3$, $0 \vdots 1000$, $-2 \vdots -1$.

Если $a \vdots b$, то число b называют **делителем** числа a, а число a — **кратным** числа b. Также говорят, что число a кратно числу b.

Например, $\{-4, 4, -2, 2, -1, 1\}$ — множество делителей числа 4; $\{3k \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$ — множество чисел, кратных числу 3.

Рассмотрим **основные свойства делимости нацело** (буквами обозначены целые числа).

1. Если $a \neq 0$, то $a \vdots a$.
2. Если $a \neq 0$, то $0 \vdots a$.
3. Если $a \vdots b$, то $ka \vdots b$.
4. Если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$.
5. Если $a \vdots m$ и $b \vdots n$, то $ab \vdots mn$.
6. Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $(a \pm b) \vdots c$.

Эти свойства доказывают с помощью определения деления нацело. Докажем, например, свойство 6 (остальные свойства докажите самостоятельно).

Так как $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то существуют такие целые числа m и n, что $a = mc$ и $b = nc$.

Имеем: $a \pm b = mc \pm nc = (m \pm n)c$. Так как $(m \pm n) \in \boldsymbol{Z}$, то по определению делимости нацело получаем, что $(a \pm b) \vdots c$.

Пример 1. Целые числа a, b и c таковы, что $(a + b) \vdots c$, $ab \vdots c$. Докажите, что $(a^3 - b^3) \vdots c$.

Решение. Имеем: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)((a + b)^2 - ab)$. Так как $(a + b)^2 \vdots c$ и $ab \vdots c$, то по свойству 6 получаем, что $((a + b)^2 - ab) \vdots c$. Тогда из свойства 3 следует справедливость доказываемого утверждения. ■

Решить уравнение с двумя переменными в целых (натуральных) числах означает найти все пары целых (натуральных) чисел, являющиеся решениями этого уравнения.

Пример 2. Решите в целых числах уравнение $x^2 + xy - x - y = 5$.

Решение. Разложим левую часть уравнения на множители. Имеем: $x(x + y) - (x + y) = 5$; $(x + y)(x - 1) = 5$. Отсюда получаем, что значения выражений $x + y$ и $x - 1$ являются делителями числа 5. Тогда возможны четыре случая:

1) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x - 1 = 1. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} y = 3, \\ x = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x - 1 = 5. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} y = -5, \\ x = 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = -5, \\ x - 1 = -1. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} y = -5, \\ x = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y = -1, \\ x - 1 = -5. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} y = 3, \\ x = -4. \end{cases}$

Ответ: (2; 3), (6; –5), (0; –5), (–4; 3).

Пример 3. Целые числа x и y таковы, что $(6x + 11y) \vdots 31$. Докажите, что $(x + 7y) \vdots 31$.

Решение. Запишем: $x + 7y = 31(x + 2y) - 5(6x + 11y)$. Из условия и свойства 3 следует, что $5(6x + 11y) \vdots 31$. Кроме того, $31(x + 2y) \vdots 31$. Тогда по свойству 6 разность $31(x + 2y) - 5(6x + 11y)$ делится нацело на 31. ■

Пример 4. Решите в целых числах уравнение $x^2 - y^2 = 14$.

Решение. Имеем: $(x + y)(x - y) = 14$. Далее можно воспользоваться методом, описанным в примере 2. Однако эффективнее воспользоваться

такими соображениями: значения выражений $x + y$ и $x - y$ всегда имеют одинаковую чётность (либо оба чётные, либо оба нечётные), следовательно, их произведение является либо числом нечётным, либо числом, кратным 4.

Число 14, стоящее в правой части уравнения, является чётным и не делится нацело на 4. Поэтому рассматриваемое уравнение не имеет решений в целых числах. ■

Пример 5. Докажите, что если $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, то для любых целых чисел p и q $(p \neq q)$ значение выражения $P(p) - P(q)$ делится нацело на число $p - q$.

Решение. Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$, где a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 — целые числа. Тогда $P(p) - P(q) = a_n(p^n - q^n) + a_{n-1}(p^{n-1} - q^{n-1}) + \ldots + a_1(p - q)$. Из формулы разложения на множители выражения вида $a^n - b^n$ следует, что разность $P(p) - P(q)$ можно представить в виде $(p - q)k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. Отсюда получаем, что

$$(P(p) - P(q)) \vdots (p - q). \blacksquare$$

1. В каком случае говорят, что целое число a делится нацело на целое число b?

2. Что означает запись $a \vdots b$?

3. Какое число называют делителем числа a?

4. Какое число называют кратным числа b?

5. Сформулируйте свойства делимости нацело.

Упражнения

16.1. Число[1] a кратно 5. Докажите, что $8a \vdots 40$.

16.2. Число b кратно 7. Докажите, что $6b \vdots 42$.

16.3. Число m кратно 6. Докажите, что $(m^2 - 4m) \vdots 12$.

16.4. Число n кратно 4. Докажите, что $(n^2 + 8n) \vdots 16$.

16.5. Числа c и d таковы, что $c \vdots 4$, $d \vdots 6$. Докажите, что $(6c + 4d) \vdots 24$.

16.6. Числа p и q таковы, что $p \vdots 5$, $q \vdots 8$. Докажите, что $(8p - 5q) \vdots 40$.

16.7. Числа a, b и c таковы, что $a \vdots c$ и $(a + b) \vdots c$. Докажите, что $b \vdots c$.

16.8. Числа a и b таковы, что каждое из чисел $a + 3$ и $b + 29$ кратно 13. Докажите, что число $a - b$ кратно 13.

[1] В этом параграфе буквами обозначены целые числа. Случаи, когда буквой обозначено натуральное число, будут оговорены отдельно.

16.9. Числа m и n таковы, что каждое из чисел $m + 5$ и $39 - n$ кратно 17. Докажите, что число $m + n$ кратно 17.

16.10. Докажите, что при любых значениях a и b значение выражения $a^2b - b^2a$ является чётным числом.

◆ ◆

16.11. Числа a, b, m таковы, что $am \vdots (a + b)$. Докажите, что $bm \vdots (a + b)$.

16.12. Числа x, y, z таковы, что $xz \vdots (z - y)$. Докажите, что $xy \vdots (z - y)$.

16.13. Числа m, n, k таковы, что $(m - n) \vdots k$ и $mn \vdots k$. Докажите, что $(m^3 + n^3) \vdots k$.

16.14. Решите в целых числах уравнение:

1) $9x^2 - y^2 = 6$;
2) $x^2 + 2xy = 2x + 9$;
3) $x^2 + 2xy - x - 2y = 4$;
4) $x^2 - 4xy + 3y^2 = 3$;
5) $x^2 + xy - 6y^2 = 6$;
6) $x^2 - 2xy - 3y^2 + x + y = 14$.

16.15. Решите в целых числах уравнение:

1) $x^2 - 4y^2 = 5$;
2) $y^2 + 3xy = 15 + y$;
3) $x^2 - 3xy + 3y - x = 10$;
4) $2y^2 - xy - x^2 = 2$.

16.16. Существует ли многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $P(1) = 17$, $P(9) = 53$?

◆ ◆ ◆

16.17. Решите в целых числах уравнение:

1) $xy = x + y$;
2) $xy - x - 2y = 5$.

16.18. Решите в целых числах уравнение $2xy + 2x - 3y - 4 = 0$.

16.19. Докажите, что при любых нечётных натуральных значениях n значение выражения $1^n + 2^n + 3^n + ... + 9^n$:

1) кратно 5;
2) не кратно 10.

16.20. Докажите, что при любых нечётных натуральных значениях n $(n > 1)$ значение выражения $1^n + 2^n + 3^n + ... + 99^n$ кратно 100.

16.21. Числа x и y таковы, что значение выражения $3x + 8y$ кратно 19. Докажите, что значение выражения $13x + 3y$ кратно 19.

16.22. Числа c и d таковы, что значение выражения $2c + 5d$ кратно 17. Докажите, что значение выражения $11c + 2d$ кратно 17.

16.23. Числа a, b, m, n таковы, что $(ab - mn) \vdots (b - m)$. Докажите, что $(am - bn) \vdots (b - m)$.

16.24. Числа a, b, c, d таковы, что $(ab + cd) \vdots (a + c)$. Докажите, что $(ad + bc) \vdots (a + c)$.

16.25. Числа x и y таковы, что $(3x + 10y) \vdots 13$. Докажите, что $(3x + 10y)(3y + 10x) \vdots 169$.

16.26. Натуральные числа m и n таковы, что $n^2 \vdots (m + n)$. Докажите, что $m^3 \vdots (m + n)$.

16.27. Натуральные числа a и b таковы, что $a^3 \vdots (a^2 + b^2)$. Докажите, что $b^4 \vdots (a^2 + b^2)$.

16.28. Трёхзначное число $\overline{abc}$ кратно числу 37. Докажите, что сумма чисел $\overline{bca}$ и $\overline{cab}$ также кратна числу 37.

16.29. Цифры a и b трёхзначного числа $m = \overline{aba}$ таковы, что $(a + b) \vdots 7$. Докажите, что $m \vdots 7$.

16.30. На какую наибольшую степень числа 2 может делиться нацело значение выражения $3^{2n+1} + 1$ при $n \in \boldsymbol{N}$?

16.31. Докажите, что количество делителей квадрата натурального числа — число нечётное. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

16.32. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(2) \vdots 5$ и $P(5) \vdots 2$. Докажите, что $P(7) \vdots 10$.

16.33. Пятизначное число $A = \overline{abcde}$ кратно числу 41. Докажите, что число $B = \overline{bcdea}$ также кратно числу 41.

16.34. Шестизначное число $A = \overline{abcdef}$ кратно числу 37. Докажите, что число $B = \overline{bcdefa}$ также кратно числу 37.

16.35. Дано 19-значное число, десятичная запись которого не содержит нулей. Докажите, что в записи этого числа можно зачеркнуть несколько цифр так, чтобы полученное в результате число было кратным числу 111.

16.36. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Разные числа a, b и c таковы, что $P(a) = P(b) = P(c) = -1$. Докажите, что не существует такого $x_0 \in \boldsymbol{Z}$, что $P(x_0) = 0$.

Упражнения для повторения

16.37. Представьте в виде суммы квадратов двух выражений многочлен:
1) $5a^2 - 2a + 1$; 2) $2x^2 + 6xy + 9y^2 - 6x + 9$.

16.38. Поставьте вместо звёздочек такие одночлены, чтобы выполнялось тождество:
1) $(7k - p)(* + * + *) = 343k^3 - p^3$;
2) $(* + *)(25a^4 - * + 36b^2) = 125a^6 + 216b^3$;
3) $(mn + *)(* - * + k^6) = m^3n^3 + k^9$.

16.39. Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} |x| - y = 0, \\ x + 3y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - |y| = 0, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ x + 2y = 3. \end{cases}$

16.40. В саду растёт более 80, но менее 100 деревьев. Каждое третье дерево — яблоня, а каждое восьмое — груша. Сколько деревьев растёт в саду?

§ 17 Деление с остатком. Сравнения по модулю и их свойства

Из курса математики 5 класса вы знаете, что если натуральное число a не делится нацело на натуральное число b и $a > b$, то можно выполнить деление с остатком.

Например, при делении числа 47 на 5 в частном получаем 9, а в остатке 2. Пишут: $47 : 5 = 9$ (ост. 2) или $47 = 5 \cdot 9 + 2$ и говорят, что число 47 при делении на 5 даёт в остатке число 2.

В теории делимости важную роль играет следующая теорема. Её называют **теоремой о делении с остатком.**

Теорема 17.1

Для любого целого числа a и натурального числа b существует единственная пара целых чисел q и r таких, что $a = bq + r$, где $0 \leqslant r < b$.

Число r называют **остатком при делении числа a на число b.** Если $r \neq 0$, то число q называют **неполным частным при делении числа a на число b.**

Следующие примеры иллюстрируют эту теорему.

Для чисел $a = 2$, $b = 7$ существует пара $q = 0$ и $r = 2$ такая, что $2 = 7 \cdot 0 + 2$.

Для чисел $a = -2$, $b = 5$ существует пара $q = -1$ и $r = 3$ такая, что $-2 = 5 \cdot (-1) + 3$.

Для чисел $a = -8$, $b = 4$ существует пара $q = -2$ и $r = 0$ такая, что $-8 = 4 \cdot (-2) + 0$.

Теперь докажем теорему.

Доказательство.

Если $a \vdots b$, то существует единственное целое число q такое, что $a = bq$. В этом случае $r = 0$.

Пусть число a не делится нацело на число b. Отметим на координатной прямой множество чисел, кратных числу b (рис. 17.1).

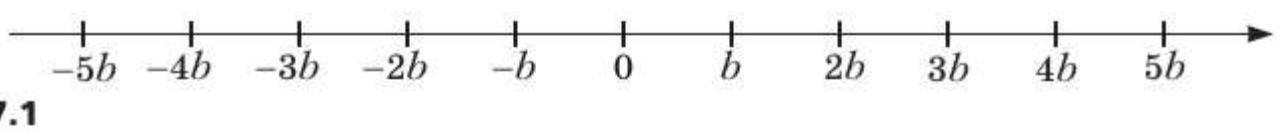


Рис. 17.1

Поскольку число a не делится нацело на число b, то изображение числа a на координатной прямой не совпадает ни с одной из отмеченных точек, а значит, принадлежит одному из промежутков вида $(bq; bq + b)$, где $q \in \boldsymbol{Z}$. Тогда $bq < a < bq + b$ (рис. 17.2). Отсюда $0 < a - bq < b$.

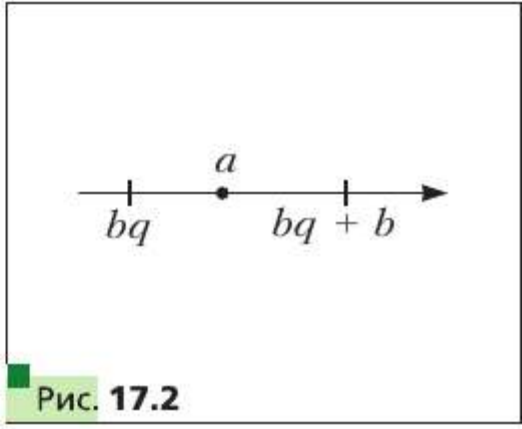


Рис. 17.2

Обозначим разность $a - bq$ буквой r. Тогда $0 < r < b$.

Имеем: $a - bq = r$, $a = bq + r$.

Для заданных чисел a и b промежуток $(bq; bq + b)$, которому принадлежит число a, определяется однозначно. Поэтому числа a и b определяют единственную пару чисел q и r. ■

Поскольку остаток — неотрицательное число, меньшее делителя, то любое целое число при делении на 2 даёт в остатке либо 0, либо 1. Мы часто пользуемся этим фактом, разбивая множество целых чисел на два непересекающихся подмножества: $\{x \mid x = 2n, n \in \boldsymbol{Z}\}$ — множество чётных чисел и $\{x \mid x = 2n + 1, n \in \boldsymbol{Z}\}$ — множество нечётных чисел. Можно записать: $\boldsymbol{Z} = \{x \mid x = 2n, n \in \boldsymbol{Z}\} \cup \{x \mid x = 2n + 1, n \in \boldsymbol{Z}\}$.

При делении целого числа на 3 можно получить только такие остатки: 0, 1, 2. Поэтому множество $\boldsymbol{Z}$ можно разбить на три непересекающихся подмножества:

$\boldsymbol{Z} = \{x \mid x = 3n, n \in \boldsymbol{Z}\} \cup \{x \mid x = 3n + 1, n \in \boldsymbol{Z}\} \cup \{x \mid x = 3n + 2, n \in \boldsymbol{Z}\}$.

Вообще, для заданного натурального числа m, где $m > 1$, множество $\boldsymbol{Z}$ можно разбить на m непересекающихся подмножеств таким образом, что первому подмножеству будут принадлежать все числа, которые при делении на m дают в остатке 0, второму — которые дают в остатке 1, третьему — которые дают в остатке 2, и т. д., m-му — которые дают в остатке $m - 1$. Можно записать:

$\boldsymbol{Z} = \{x \mid x = mn, n \in \boldsymbol{Z}\} \cup \{x \mid x = mn + 1, n \in \boldsymbol{Z}\} \cup \ldots \cup \{x \mid x = mn + m - 1, n \in \boldsymbol{Z}\}$.

Теорема 17.2

Если целые числа a и b при делении на натуральное число m дают одинаковые остатки, то $(a - b) \vdots m$.

Доказательство.

Воспользовавшись теоремой 17.1, можно записать: $a = mq_1 + r$, $b = mq_2 + r$, где q_1, q_2, r — целые числа, причём $0 \leqslant r < m$. Тогда $a - b = m(q_1 - q_2)$. Отсюда $(a - b) \vdots m$. ■

Справедлива и обратная теорема.

Теорема 17.3

Если целые числа a и b таковы, что $(a - b) \vdots m$, где $m \in N$, то числа a и b дают одинаковые остатки при делении на m.

Воспользовавшись методом доказательства от противного, докажите эту теорему самостоятельно.

Определение

Целые числа a и b называют сравнимыми по модулю m, где $m \in N$, если эти числа дают одинаковые остатки при делении на число m.

Пишут $a \equiv b \pmod m$. Такую запись называют **сравнением по модулю m**. Читают: «a сравнимо с b по модулю m».

Например, $5 \equiv 8 \pmod 3$, $7 \equiv -1 \pmod 4$, $18 \equiv 0 \pmod 9$, $25 \equiv 35 \pmod 5$.

Понятие сравнения по модулю ввёл выдающийся немецкий математик Карл Фридрих Гаусс.

Карл Фридрих Гаусс (1777–1855)

Труды Гаусса оказали значительное влияние на развитие алгебры, теории чисел, дифференциальной геометрии, теории электричества и магнетизма, геодезии, теоретической астрономии.



Теорема 17.4

Для того чтобы целые числа a и b были сравнимы по модулю m, где $m \in N$, необходимо и достаточно, чтобы разность $a - b$ делилась нацело на число m.

Справедливость этой теоремы следует из теорем 17.2 и 17.3. Убедитесь в этом самостоятельно.

Рассмотрим **основные свойства сравнений** (буквами a, b, c, d обозначены целые числа, буквами m и n — натуральные числа).

1. Если $a \equiv b \pmod m$, $b \equiv c \pmod m$, то $a \equiv c \pmod m$.

2. Если $a \equiv b \pmod m$, то $a + c \equiv b + c \pmod m$.

3. Если $a \equiv b \pmod m$, то $ac \equiv bc \pmod m$.

4. Если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то $a \pm c \equiv b \pm d \pmod m$.

5. Если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то $ac \equiv bd \pmod m$.

6. Если $a \equiv b \pmod m$, то $a^n \equiv b^n \pmod m$.

Докажем свойство 5.

Доказательство.

Из условия следует, что $(a - b) \vdots m$. Отсюда $a - b = mt_1$, т. е. $a = b + mt_1$, где $t_1 \in \boldsymbol{Z}$. Также $(c - d) \vdots m$. Отсюда $c = d + mt_2$, где $t_2 \in \boldsymbol{Z}$.

Имеем: $ac - bd = (b + mt_1)(d + mt_2) - bd = bmt_2 + dmt_1 + m^2t_1t_2 = m(bt_2 + dt_1 + mt_1t_2)$. Следовательно, $(ac - bd) \vdots m$. Тогда $ac \equiv bd \pmod m$. ■

Докажем свойство 6.

Доказательство.

Имеем: $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

Из условия следует, что $(a - b) \vdots m$. Тогда $(a^n - b^n) \vdots m$. Отсюда $a^n \equiv b^n \pmod m$. ■

Остальные свойства докажите самостоятельно.

Свойства 4 и 5 обобщаются и для тех случаев, когда количество сравнений больше двух.

Если $a_1 \equiv b_1 \pmod m$, $a_2 \equiv b_2 \pmod m$, ..., $a_n \equiv b_n \pmod m$, то $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \equiv b_1 + b_2 + \ldots + b_n \pmod m$ и $a_1a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \equiv b_1b_2 \cdot \ldots \cdot b_n \pmod m$.

Пример 1. Нечётное число m делится нацело на 3. Чему равен остаток при делении числа m на 6?

Решение. При делении целого числа на 6 могут быть получены такие остатки: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Поэтому любое целое число можно отнести к одному из таких видов чисел:

$6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$, $6k + 5$, где $k \in \boldsymbol{Z}$.

Из указанных только числа вида $6k$ и $6k + 3$ кратны 3. Так как число m нечётное, то оно может быть только вида $6k + 3$. Следовательно, число m при делении на 6 даёт в остатке 3.

Ответ: 3. ■

Пример 2. Докажите, что среди пяти последовательных целых чисел есть ровно одно, кратное 5.

Решение. Рассмотрим пять последовательных целых чисел: n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. Разность любых двух таких чисел не делится нацело на 5. Следовательно, все эти пять чисел дают разные остатки при делении на 5. Разных остатков при делении на 5 также 5. Следовательно, ровно одно из этих чисел при делении на 5 даёт в остатке 0. ■

Замечание. Рассуждая аналогично, можно доказать, что среди m последовательных целых чисел ровно одно кратно m.

Пример 3. Докажите, что четвёртая степень целого числа при делении на 5 даёт в остатке 0 или 1.

Решение. Для целого числа n имеет место одно из пяти сравнений: $n \equiv 0 \pmod 5$, $n \equiv 1 \pmod 5$, $n \equiv 2 \pmod 5$, $n \equiv 3 \pmod 5$, $n \equiv 4 \pmod 5$.

Возведём обе части каждого из этих сравнений в четвёртую степень:

$$n^4 \equiv 0 \pmod 5,$$
$$n^4 \equiv 1 \pmod 5,$$
$$n^4 \equiv 16 \pmod 5,$$
$$n^4 \equiv 81 \pmod 5,$$
$$n^4 \equiv 256 \pmod 5.$$

Поскольку $16 \equiv 1 \pmod 5$, $81 \equiv 1 \pmod 5$, $256 \equiv 1 \pmod 5$, то для любого $n \in \boldsymbol{Z}$ имеет место одно из двух сравнений:

$$n^4 \equiv 0 \pmod 5,$$
$$n^4 \equiv 1 \pmod 5.$$

Следовательно, при делении числа вида n^4 на 5 остаток может быть равным 0 или 1. ■

Пример 4. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $2^{4n+3} + 13 \cdot 3^{2n}$ кратно 7.

Решение. Имеем: $2^{4n+3} + 13 \cdot 3^{2n} = 8 \cdot 16^n + 13 \cdot 9^n$. Очевидно, что $16 \equiv 9 \pmod 7$. Применяя последовательно свойства сравнений 6, 3, 2, получим:

$$16^n \equiv 9^n \pmod 7,$$
$$8 \cdot 16^n \equiv 8 \cdot 9^n \pmod 7,$$
$$8 \cdot 16^n + 13 \cdot 9^n \equiv 8 \cdot 9^n + 13 \cdot 9^n \pmod 7.$$

Поскольку $8 \cdot 9^n + 13 \cdot 9^n = 21 \cdot 9^n$, то получаем:

$$8 \cdot 16^n + 13 \cdot 9^n \equiv 21 \cdot 9^n \pmod 7.$$

Правая часть последнего сравнения при делении на 7 даёт в остатке 0. Следовательно, таким же свойством обладает и левая часть сравнения, т. е. значение выражения $8 \cdot 16^n + 13 \cdot 9^n$ кратно 7. ■

Пример 5. Найдите остаток при делении числа 7^{29} на 5.

Решение. Для решения этой задачи достаточно найти такое целое число x, что: $7^{29} \equiv x \pmod 5$ и $0 \leqslant x < 5$. Имеем:

$$7^2 \equiv -1 \pmod 5,$$

$$7^{28} \equiv (-1)^{14} \pmod 5.$$

Получаем $7^{28} \equiv 1 \pmod 5$.

Отсюда $7^{29} \equiv 7 \pmod 5$.

Тогда $7^{29} \equiv 2 \pmod 5$.

Следовательно, искомым остатком является число 2.

Этот результат можно получить и другим способом, например первым записав такое сравнение:

$$7 \equiv 2 \pmod 5.$$

Отсюда $7^4 \equiv 2^4 \pmod 5$.

Получаем $7^4 \equiv 1 \pmod 5$.

$$7^{28} \equiv 1^7 \pmod 5.$$

Тогда $7^{29} \equiv 7 \pmod 5$, т. е. $7^{29} \equiv 2 \pmod 5$.

Ответ: 2. ■

Пример 6. Докажите, что из $n + 1$ целых чисел всегда можно выбрать два таких, разность которых делится нацело на n.

Решение. При делении целых чисел на n можно получить n разных остатков: 0, 1, ..., $n - 1$. Так как заданных чисел $n + 1$, то как минимум два из них дают одинаковые остатки при делении на n. Тогда их разность будет делиться нацело на n. ■

1. Сформулируйте теорему о делении с остатком.

2. Какое свойство имеет разность целых чисел a и b, дающих одинаковые остатки при делении на натуральное число m?

3. Какое свойство имеют остатки при делении целых чисел a и b на натуральное число m, если $(a - b) \vdots m$?

4. Какие числа называют сравнимыми по модулю m, где $m \in \boldsymbol{N}$?

5. Сформулируйте необходимое и достаточное условия того, что целые числа a и b сравнимы по модулю m, где $m \in \boldsymbol{N}$.

6. Сформулируйте свойства сравнений.

Упражнения

17.1. Найдите неполное частное и остаток при делении числа[1] a на число b, если:

[1] В этом параграфе буквами обозначены целые числа.

1) $a = 253$, $b = 19$; 3) $a = -26$, $b = 3$;
2) $a = 8$, $b = 13$; 4) $a = -1$, $b = 7$.

17.2. Найдите неполное частное и остаток при делении числа m на число n, если:
1) $m = 9$, $n = 15$; 2) $m = -31$, $n = 10$; 3) $m = -6$, $n = 11$.

17.3. Какие остатки можно получить при делении целого числа на 7?

17.4. Задайте все множества, каждое из которых состоит из всех целых чисел, имеющих одинаковые остатки при делении на 4.

17.5. Даны попарно непересекающиеся множества A, B, X, причём $A \cup B \cup X = \boldsymbol{Z}$. Найдите множество X, если $A = \{3k \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$, $B = \{3k + 2 \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$.

17.6. Какой остаток при делении на 3 даёт число вида $3k - 2$, где $k \in \boldsymbol{Z}$?

17.7. Какой остаток при делении на 6 даёт число вида $6n - 1$, где $n \in \boldsymbol{Z}$?

17.8. Известно, что при делении числа m на 18 остаток равен 11. Найдите остаток при делении числа m: 1) на 2; 2) на 3; 3) на 6; 4) на 9.

17.9. Известно, что при делении числа n на 16 остаток равен 9. Найдите остаток при делении числа n: 1) на 2; 2) на 4; 3) на 8.

17.10. Число m кратно 6. Чему может быть равен остаток при делении числа m на 18?

17.11. Число n кратно 4. Чему может быть равен остаток при делении числа n на 16?

17.12. Число a при делении на 6 даёт в остатке 3, а при делении на 4 даёт в остатке 1. Найдите остаток при делении числа a на 12.

17.13. Число b при делении на 5 даёт в остатке 2, а при делении на 3 даёт в остатке 1. Найдите остаток при делении числа b на 15.

17.14. Число m даёт равные остатки при делении на 3 и на 4. Чему может быть равным остаток при делении числа m на 12?

17.15. Вместо звёздочки запишите такое наименьшее неотрицательное целое число, чтобы полученное сравнение было верным:
1) $56 \equiv * \pmod 8$; 3) $-43 \equiv * \pmod 5$; 5) $* \equiv -2 \pmod{18}$;
2) $23 \equiv * \pmod 7$; 4) $* \equiv 3 \pmod{15}$; 6) $* \equiv 6 \pmod 2$.

17.16. Вместо звёздочки запишите такое наименьшее неотрицательное целое число, чтобы полученное сравнение было верным:
1) $84 \equiv * \pmod 9$; 2) $-26 \equiv * \pmod 6$; 3) $* \equiv -3 \pmod{11}$.

17.17. Известно, что $a \equiv -11 \pmod 8$, $b \equiv -2 \pmod 8$. Найдите остаток при делении на 8 числа: 1) $a + b$; 2) $a - b$; 3) $2a - 3b$; 4) ab; 5) a^2; 6) b^3.

17.18. Известно, что $a \equiv -4 \pmod 6$, $b \equiv -9 \pmod 6$. Найдите остаток при делении на 6 числа: 1) $3a + 4b$; 2) $a^2 - b$; 3) $b^2 + ba$.

◆ ◆

17.19. Докажите, что квадрат целого числа при делении на 3 даёт в остатке 0 или 1.

17.20. Докажите, что квадрат целого числа при делении на 4 даёт в остатке 0 или 1.

17.21. Докажите, что квадрат нечётного числа при делении на 8 даёт в остатке 1.

17.22. Докажите, что куб целого числа при делении на 7 даёт в остатке 0, 1 или 6.

17.23. Докажите, что куб целого числа при делении на 9 даёт в остатке 0, 1 или 8.

17.24. Числа a и b таковы, что $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 3$. Докажите, что $a \equiv 0 \pmod 3$ и $b \equiv 0 \pmod 3$.

17.25. Числа m и n таковы, что $m^2 + n^2 = 0 \pmod 7$. Докажите, что $m \equiv 0 \pmod 7$ и $n \equiv 0 \pmod 7$.

17.26. Известно, что $(a^2 + b^2) \vdots 3$. Докажите, что $(a^2 + b^2) \vdots 9$.

17.27. Известно, что $(m^2 + n^2) \vdots 7$. Докажите, что $(m^2 + n^2) \vdots 49$.

17.28. Решите в целых числах уравнение:

1) $x^2 - 3y = 8$;
2) $x^2 - 4y^3 = 11$;
3) $m^3 - 7n^2 = 19$;
4) $z^3 - 9t = 16$.

17.29. Решите в целых числах уравнение:

1) $x^2 - 3y^2 = 17$;
2) $9x^2 - 28y = 15$;
3) $8x^3 + 7y^3 = 38$;
4) $16x^4 - 5y^3 = 18$.

◆ ◆ ◆

17.30. Используя сравнения по модулю, докажите, что при любом натуральном значении n значение выражения:

1) $11^n + 14 \cdot 6^n$ кратно 5;
2) $3^{2n} + 11 \cdot 5^n$ кратно 4;
3) $21^n + 2^{2n+4}$ кратно 17;
4) $4 \cdot 13^n + 37^n + 1$ кратно 6;
5) $5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$ кратно 23;
6) $3^{3n+2} + 5 \cdot 2^{3n+1}$ кратно 19;
7) $5^n + 8^n - 2^{n+1}$ кратно 3;
8) $2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}$ кратно 37.

17.31. Используя сравнения по модулю, докажите, что при любом натуральном значении n значение выражения:

1) $17^n + 25 \cdot 4^n$ кратно 13;
2) $16^n + 4^{2n+1}$ кратно 5;
3) $15^n + 2^{3n} - 30$ кратно 7;
4) $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ кратно 11;
5) $17 \cdot 21^{2n+1} + 9 \cdot 43^{2n+1}$ кратно 8;
6) $2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$ кратно 17.

17.32. Найдите остаток при делении числа a на число b, если:

1) $a = 5^{99}$, $b = 3$;
2) $a = 7^{36}$, $b = 4$;
3) $a = 3^{101}$, $b = 7$;
4) $a = 3^{70} + 2^{52}$, $b = 5$.

17.33. Найдите остаток при делении числа m на число n, если:

1) $m = 11^{43}$, $n = 7$;
2) $m = 13^{52}$, $n = 17$;
3) $m = 3^{30}$, $n = 31$.

17.34. Сумма остатков при делении натурального числа n на числа 3, 6 и 9 равна 15. Найдите эти остатки.

17.35. Докажите, что среди чисел вида $4^n + 4^m$ (m и n — натуральные числа) нет ни одного квадрата натурального числа.

17.36. Докажите, что среди чисел вида $5^n + 5^m$ (m и n — натуральные числа) нет ни одного квадрата натурального числа.

17.37. О числах m, n, p, q, r, s известно, что $m^2 + n^2 + p^2 + q^2 + r^2 = s^2$. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел чётное.

17.38. Числа x_1, x_2, ..., x_k не делятся нацело на 5, а значение выражения $x_1^4 + x_2^4 + ... + x_k^4$ кратно 5. Докажите, что $k \vdots 5$.

17.39. Докажите, что ни при каком натуральном n значение выражения $1 + n + n^2 + n^3$ не является степенью числа 3.

17.40. Остаток при делении трёхзначного числа $n = \overline{aa5}$ на некоторое однозначное число равен 8. Найдите число n.

17.41. Остаток при делении трёхзначного числа $m = \overline{2bb}$ на некоторое однозначное число равен 8. Найдите число m.

17.42. При делении натурального числа n на 9 остаток равен неполному частному, при делении n на 14 остаток также равен неполному частному. Найдите все возможные значения n.

17.43. При делении натурального числа n на 26 остаток равен неполному частному, при делении n на 29 остаток также равен неполному частному. Найдите все возможные значения n.

17.44. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые невозможно представить в виде суммы кубов двух натуральных чисел.

17.45. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые невозможно представить в виде суммы кубов трёх натуральных чисел.

17.46. Докажите, что для любого натурального числа n найдётся натуральное число, кратное n, в десятичной записи которого используются только цифры 1 и 0.

17.47. Докажите, что среди натуральных степеней числа 2 существуют две такие, что их разность кратна числу 1001.

Упражнения для повторения

17.48. Известно, что $a + b = 5$, $ab = 3$. Найдите значение выражения $a^2 + b^2$.

17.49. Какой цифрой оканчивается значение выражения (n — натуральное число):

1) 9^{200}; 2) 7^{500}?

17.50. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 2, \\ 5x - y = 34; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6y - 5x = 1, \\ \frac{x-1}{2} + \frac{3y-x}{4} = -4\frac{3}{4}. \end{cases}$

17.51. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2(4x - 5) - 3(3 + 4y) = 5, \\ 7(6y - 1) - (4 + 3x) = 21y - 86; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x+2}{6} - \frac{y-3}{15} = 1, \\ \frac{x+2,5}{9} - \frac{y+3}{6} = \frac{1}{3}. \end{cases}$

17.52. В олимпиаде по математике каждую школу представляли двое или трое учащихся. Всего в олимпиаде участвовало 60 учащихся из 24 школ. От скольких школ в олимпиаде участвовали трое учащихся?

§ 18 Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух натуральных чисел. Взаимно простые числа

Если каждое из чисел[1] a и b делится нацело на число d, то число d называют **общим делителем** чисел a и b.

Если число d — общий делитель чисел a и b, то $d \leqslant a$ и $d \leqslant b$. Следовательно, множество общих делителей чисел a и b конечно. Выберем в этом множестве наибольший элемент. Его называют **наибольшим общим делителем** чисел a и b и обозначают НОД $(a; b)$.

Например, НОД (18; 12) = 6, НОД (5; 6) = 1, НОД (7; 14) = 7.

Теорема 18.1

Если $a > b$, то НОД $(a; b)$ = НОД $(a - b; b)$.

Доказательство.

Пусть $a \vdots d$ и $b \vdots d$, тогда $(a - b) \vdots d$. Пусть $(a - b) \vdots d_1$ и $b \vdots d_1$, тогда $a \vdots d_1$. Получили, что любой общий делитель чисел a и b является общим делителем чисел $a - b$ и b. И наоборот, любой общий делитель чисел $a - b$ и b является общим делителем чисел a и b. Следовательно, множество общих делителей чисел a и b совпадает с множеством общих делителей чисел $a - b$ и b. Отсюда НОД $(a; b)$ = НОД $(a - b; b)$. ■

[1] В этом параграфе буквами обозначены натуральные числа. Случаи, когда буквами обозначены целые числа, будут оговорены отдельно.

С помощью этой теоремы можно находить наибольший общий делитель двух чисел.

Пример 1. Найдите НОД $(6n + 3; 3n)$.

Решение. По теореме 18.1 можно записать НОД $(6n + 3; 3n) =$ $=$ НОД $(6n + 3 - 3n; 3n) =$ НОД $(3n + 3; 3n) =$ НОД $(3n + 3 - 3n; 3n) =$ $=$ НОД $(3; 3n) = 3$. ■

Теперь мы познакомимся с другим методом нахождения наибольшего общего делителя двух чисел.

Если $a \vdots b$, то очевидно, что НОД $(a; b) = b$.

Рассмотрим случай, когда a не делится нацело на b. Для определённости будем считать, что $a > b$.

Лемма[1] **1**

Если число r — остаток при делении числа a на число b, т. е. $a = bq + r$, где $0 < r < b$, то НОД $(a; b)$ = НОД $(b; r)$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству теоремы 18.1. Проведите его самостоятельно.

Из леммы следует, что нахождение НОД $(a; b)$ сводится к нахождению НОД $(b; r)$.

Обозначим через r_1 остаток при делении числа b на число r, т. е. $b = rq_1 + r_1$. Тогда, согласно лемме, НОД $(b; r)$ = НОД $(r; r_1)$. Далее обозначим через r_2 остаток при делении числа r на число r_1, т. е. $r = r_1q_2 + r_2$. Тогда НОД $(r; r_1)$ = НОД $(r_1; r_2)$. Действуя аналогично, будем находить остатки r_3, r_4, ... Имеем:

$$a = bq + r,\ 0 < r < b;$$
$$b = rq_1 + r_1,\ 0 < r_1 < r;$$
$$r = r_1q_2 + r_2,\ 0 < r_2 < r_1;$$
$$r_1 = r_2q_3 + r_3,\ 0 < r_3 < r_2$$
$$\dots$$

Получаем цепочку неравенств $b > r > r_1 > r_2 > r_3 > \dots \geqslant 0$. Как видим, остатки, будучи неотрицательными целыми числами, уменьшаются. Следовательно, на каком-то шаге остаток станет равным нулю. Пусть r_n — последний ненулевой остаток, т. е.

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n;$$
$$r_{n-1} = r_nq_{n+1}.$$

[1] Леммой называют вспомогательную теорему, используемую для доказательства других теорем.

Из леммы следует, что НОД $(a; b)$ = НОД $(b; r)$ = НОД $(r; r_1)$ = ... = НОД $(r_{n-1}; r_n)$.

Так как $r_{n-1} \vdots r_n$, то НОД $(r_{n-1}; r_n) = r_n$. Следовательно, НОД $(a; b) = r_n$. ■

Описанный метод нахождения НОД $(a; b)$ называют **алгоритмом Евклида.**

Пример 2. Найдите НОД (525; 231).

Решение. $525 = 231 \cdot 2 + 63$;

$231 = 63 \cdot 3 + 42$;

$63 = 42 \cdot 1 + 21$;

$42 = 21 \cdot 2 + 0$.

Следовательно, НОД (525; 231) = 21. ■

Если числа a и b являются делителями числа k, то число k называют **общим кратным** чисел a и b.

Среди общих кратных чисел a и b существует наименьшее. Его называют **наименьшим общим кратным** чисел a и b и обозначают НОК $(a; b)$.

Например, НОК (8; 12) = 24, НОК (7; 8) = 56, НОК (64; 16) = 64.

Теорема 18.2

НОК $(a; b)$ является делителем любого общего кратного чисел a и b.

Доказательство.

Пусть НОК $(a; b) = k$ и k_1 — общее кратное чисел a и b.

Предположим, что k_1 не делится нацело на k. Тогда $k_1 = kq + r$, где $0 < r < k$. Отсюда $r = k_1 - kq$. Каждое из чисел k_1 и k кратно и a, и b, следовательно, $r \vdots a$ и $r \vdots b$, т. е. r — общее кратное чисел a и b. Но $r < k$. Получили противоречие. Следовательно, $k_1 \vdots k$. ■

Теорема 18.3

Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то число $\frac{ab}{c}$ является общим кратным чисел a и b.

Доказательство.

Из условия следует, что существуют такие числа m и n, что $a = cm$ и $b = cn$. Тогда $\frac{ab}{c} = \frac{cmcn}{c} = cmn = an = bm$. Следовательно, число $\frac{ab}{c}$ кратно числам a и b. ■

Теорема 18.4

НОК $(a; b) \cdot$ НОД $(a; b) = ab$.

Доказательство.

Пусть НОК $(a; b) = k$, НОД $(a; b) = d$. Очевидно, что число ab является общим кратным чисел a и b. Тогда по теореме 18.2 получаем, что $ab \vdots k$. Следовательно, существует такое число c, что $ab = ck$.

Поскольку $k \vdots a$, то существует такое число m, что $k = ma$. Имеем: $ab = cma$. Отсюда $b = cm$. Следовательно, $b \vdots c$.

Аналогично доказывается, что $a \vdots c$. Следовательно, c — общий делитель чисел a и b. Тогда $d \geqslant c$. Из равенства $ab = ck$ получаем, что $k = \frac{ab}{c}$. Поскольку $\frac{ab}{c} \geqslant \frac{ab}{d}$, то

$$k \geqslant \frac{ab}{d}. \qquad (1)$$

С другой стороны, по теореме 18.3 число $\frac{ab}{d}$ является общим кратным чисел a и b. Следовательно,

$$\frac{ab}{d} \geqslant k. \qquad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) получаем, что $\frac{ab}{d} = k$. ■

Определение

Если НОД $(a; b) = 1$, то числа a и b называют взаимно простыми.

Например, 9 и 25, 16 и 1, 28 и 29 — пары взаимно простых чисел.

Теорема 18.5

Если НОД $(a; b) = 1$, то НОК $(a; b) = ab$.

Справедливость этого утверждения следует из теоремы 18.4.

Теорема 18.6

Если НОД $(b; c) = 1$, $a \vdots b$ и $a \vdots c$, то $a \vdots bc$.

Доказательство.

Так как НОД $(b; c) = 1$, то НОК $(b; c) = bc$. Из условия следует, что a — общее кратное чисел b и c. Тогда по теореме 18.2 $a \vdots$ НОК $(b; c)$, т. е. $a \vdots bc$. ■

Теорема 18.7

Если НОД $(a; b) = 1$ и $ac \vdots b$, то $c \vdots b$.

Доказательство.

Из условия следует, что НОК $(a; b) = ab$. Также понятно, что ac — общее кратное чисел a и b. Следовательно, $ac \vdots ab$. Тогда существует такое число k, что $ac = kab$. Отсюда $c = kb$. Следовательно, $c \vdots b$. ■

Пример 4. Докажите, что значение выражения $n^3 - n$ делится нацело на 6 при любом значении n.

Решение. Имеем: $n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$. Так как из двух последовательных натуральных чисел одно кратно 2, а из трёх последовательных натуральных чисел одно кратно 3, то по теореме 18.6 значение данного выражения кратно $2 \cdot 3$, т. е. 6. ■

Пример 5. Решите в натуральных числах уравнение $x(y - 1)^2 = 8y$.

Решение. Очевидно, что $y \neq 1$. Так как левая часть уравнения кратна $y - 1$, то и правая часть уравнения кратна $y - 1$. Числа y и $y - 1$ взаимно простые (докажите это самостоятельно). Тогда по теореме 18.7 получаем, что $8 \vdots (y - 1)^2$. Отсюда $(y - 1)^2 = 1$ или $(y - 1)^2 = 4$. Поскольку $y \in \boldsymbol{N}$, то получаем, что $y = 2$ или $y = 3$. Далее находим, что $x = 16$ или $x = 6$.

Ответ: (16; 2), (6; 3).

Пример 6. Докажите, что если $a \equiv b \pmod m$, $a \vdots n$, $b \vdots n$ и НОД $(m; n) = 1$, то $\frac{a}{n} \equiv \frac{b}{n} \pmod m$.

Решение. Из условия следует, что существуют такие числа k_1 и k_2, что $a = nk_1$ и $b = nk_2$. Имеем: $a - b = n(k_1 - k_2) \vdots m$. Так как НОД $(m; n) = 1$, то по теореме 18.7 получаем, что $(k_1 - k_2) \vdots m$. Отсюда $k_1 \equiv k_2 \pmod m$, т. е. $\frac{a}{n} \equiv \frac{b}{n} \pmod m$. ■

1. Какое число называют наибольшим общим делителем чисел a и b?
2. Чему равен НОД $(a; b)$, если $a \vdots b$?
3. Опишите алгоритм Евклида.
4. Какое число называют наименьшим общим кратным чисел a и b?
5. Чему равно произведение НОК $(a; b) \cdot$ НОД $(a; b)$?
6. Какие числа называют взаимно простыми?
7. Чему равно наименьшее общее кратное взаимно простых чисел?

Упражнения

18.1. Найдите НОД чисел:
1) 253 и 299; 2) 2491 и 2773.

18.2. Найдите НОД чисел:
1) 899 и 1073; 2) 4757 и 5561.

18.3. Докажите, что для любого $n \in \boldsymbol{N}$:
1) НОД $(n; n + 1) = 1$; 2) НОД $(2n; 2n + 2) = 2$.

18.4. Докажите, что для любого $n \in \boldsymbol{N}$:
1) НОД $(n; 2n + 1) = 1$; 2) НОД $(8n + 4; 4n) = 4$.

18.5. Чему может быть равным НОД $(a; b)$, если:
1) $a = n$, $b = n + 2$; 2) $a = n$, $b = 4n + 3$?

18.6. Чему может быть равным НОД $(a; b)$, если:
1) $a = 2n + 1$, $b = 2n + 3$; 2) $a = 2n + 1$, $b = 8n + 7$?

18.7. Целое число n кратно 3 и кратно 4. Верно ли, что n кратно 12?

18.8. Целое число n кратно 6 и кратно 8. Верно ли, что n кратно 48?

18.9. Докажите, что при любом $n \in \boldsymbol{N}$ является несократимой дробь:
1) $\dfrac{4n + 3}{20n + 23}$; 2) $\dfrac{12n + 1}{30n + 2}$.

18.10. Докажите, что при любом $n \in \boldsymbol{N}$ является несократимой дробь:
1) $\dfrac{3n + 1}{15n + 14}$; 2) $\dfrac{16n + 1}{40n + 2}$.

18.11. Докажите, что при любом $n \in \boldsymbol{Z}$ значение выражения:
1) $n^2 + n$ кратно 2;
2) $n^3 + 3n^2 + 2n$ кратно 6;
3) $n^4 - n^2$ кратно 12.

18.12. Докажите, что при любом $n \in \boldsymbol{Z}$ значение выражения:
1) $n^2 - n$ кратно 2;
2) $n^3 + 11n$ кратно 6;
3) $(n^2 - 1)(n^2 - 2n)$ кратно 24.

18.13. Существуют ли такие целые числа a, b, c, что:
1) $a + b + c + a^2 + b^2 + c^2 = 1001$;
2) $a^3 + b^3 + c^3 - a - b - c = 1004$?

18.14. Докажите, что значение выражения является целым числом при любом $n \in \boldsymbol{Z}$:
1) $\dfrac{n(n + 1)(n + 2)(n + 3)}{24}$; 2) $\dfrac{n^5 - 5n^3 + 4n}{120}$.

18.15. Докажите, что значение выражения является целым числом при любом $n \in \boldsymbol{Z}$:
1) $\dfrac{n^3 + 5n}{6}$; 2) $\dfrac{n(n + 1)^2(n + 2)}{12}$; 3) $\dfrac{(n^2 - 1)(n^2 + 2n)}{24}$.

18.16. От прямоугольника размерами 324×141 мм отрезают квадраты со стороной 141 мм, пока не останется прямоугольник, у которого длина одной стороны меньше чем 141 мм. От полученного прямоугольника снова отрезают квадраты, сторона которых равна длине его меньшей стороны, и т. д. Какова длина стороны последнего квадрата?

18.17. Из 100 последовательных натуральных чисел выбрали 51 число. Докажите, что среди выбранных чисел есть такие числа a и b, что НОД $(a; b) = 1$.

18.18. Наименьшее общее кратное некоторых двух натуральных чисел в 16 раз больше их наибольшего общего делителя. Докажите, что одно из этих чисел кратно другому.

18.19. Наименьшее общее кратное некоторых двух натуральных чисел в 27 раз больше их наибольшего общего делителя. Докажите, что одно из этих чисел кратно другому.

18.20. Решите в натуральных числах уравнение $x(y + 1)^2 = 243y$.

18.21. Докажите, что при любом $n \in \boldsymbol{N}$ дробь $\dfrac{n^4 + 4n^2 + 3}{n^4 + 6n^2 + 8}$ несократима.

18.22. Найдите все пары натуральных чисел m и n таких, что

$$\text{НОК}\,(m; n) - \text{НОД}\,(m; n) = \frac{mn}{3}.$$

18.23. Три автомата печатают на карточках пары целых чисел. Каждый автомат, прочитав некоторую карточку, выдаёт новую карточку. Прочитав карточку с парой чисел $(m; n)$, первый автомат выдаёт карточку с числами $(m - n; n)$, второй — карточку с числами $(m + n; n)$, третий — карточку с числами $(n; m)$. Сначала есть карточка с парой чисел (46; 51). Можно ли, используя автоматы в некотором порядке, получить карточку с парой чисел (15; 33)?

Упражнения для повторения

18.24. При каких значениях a и b график уравнения $ax + by = 8$ проходит через точки $A\,(1; 3)$ и $B\,(2; -4)$?

18.25. Решите уравнение:

1) $(x + y)^2 + (x - 3)^2 = 0$;
2) $(x + 2y - 3)^2 + x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$;
3) $|x - 3y - 6| + (9x + 6y - 32)^2 = 0$;
4) $x^2 + y^2 + 10x - 12y + 61 = 0$;
5) $25x^2 + 10y^2 - 30xy + 8y + 16 = 0$.

18.26. Разложите на множители:

1) $x^4 - 8x^2 + 4$; 2) $4x^4 - 12x^2 + 1$.

18.27. В каждом букете должно быть 2 красных и 3 белых розы. Какое наибольшее количество таких букетов можно составить из 40 красных и 50 белых роз?

§ 19 Признаки делимости

Вы знаете, что признаки делимости позволяют по свойствам десятичной записи делимого, не выполняя деления, определить, является ли данное число его делителем.

Вам известны признаки делимости на 2, 5, 10, 3 и 9. Теперь с помощью «языка сравнений» обобщим и докажем эти признаки, а также изучим признак делимости на 11.

Теорема 19.1

Натуральное число и сумма цифр его десятичной записи при делении на 9 дают одинаковые остатки, т. е.

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0} \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \pmod 9.$$

Доказательство.

Запишем сравнения:

$$1 \equiv 1 \pmod 9,$$
$$10 \equiv 1 \pmod 9,$$
$$10^2 \equiv 1 \pmod 9,$$
$$\ldots$$
$$10^{n-1} \equiv 1 \pmod 9,$$
$$10^n \equiv 1 \pmod 9.$$

Умножим обе части первого сравнения на a_0, второго — на a_1, третьего — на a_2 и т. д., $(n+1)$-го — на a_n. Получим:

$$a_0 \equiv a_0 \pmod 9,$$
$$10a_1 \equiv a_1 \pmod 9,$$
$$10^2 \cdot a_2 \equiv a_2 \pmod 9,$$
$$\ldots$$
$$10^{n-1} \cdot a_{n-1} \equiv a_{n-1} \pmod 9,$$
$$10^n \cdot a_n \equiv a_n \pmod 9.$$

Сложив эти сравнения, получим:

$$10^n \cdot a_n + 10^{n-1} \cdot a_{n-1} + \ldots + 10a_1 + a_0 \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \pmod 9.$$

Отсюда

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0} \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \pmod 9. \blacksquare$$

Следствие

(Признак делимости на 9)

Натуральное число делится нацело на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр его десятичной записи делится нацело на 9.

Докажите это следствие самостоятельно.

Теорема 19.2

Натуральное число и сумма цифр его десятичной записи при делении на 3 дают одинаковые остатки, т. е.

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0} \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \pmod 3.$$

Воспользовавшись идеей доказательства теоремы 19.1, докажите эту теорему самостоятельно.

Следствие

(Признак делимости на 3)

Натуральное число делится нацело на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр его десятичной записи делится нацело на 3.

Докажите это следствие самостоятельно.

Теорема 19.3

Имеет место следующее сравнение:

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0} \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n \pmod{11}.$$

Доказательство.

Запишем сравнения:

$$1 \equiv 1 \pmod{11},$$
$$10 \equiv -1 \pmod{11},$$
$$10^2 \equiv 1 \pmod{11},$$
$$10^3 \equiv -1 \pmod{11},$$
$$\ldots$$
$$10^n \equiv (-1)^n \pmod{11}.$$

Умножим обе части первого сравнения на a_0, второго — на a_1, третьего — на a_2 и т. д., $(n+1)$-го — на a_n. Получим:

$$a_0 \equiv a_0 \pmod{11},$$
$$10a_1 \equiv -a_1 \pmod{11},$$
$$10^2 \cdot a_2 \equiv a_2 \pmod{11},$$
$$10^3 \cdot a_3 \equiv -a_3 \pmod{11},$$

$$10^n \cdot a_n \equiv (-1)^n \cdot a_n \pmod{11}.$$

Сложив эти сравнения, получим:

$10^n \cdot a_n + 10^{n-1} \cdot a_{n-1} + \ldots + 10a_1 + a_0 \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n \pmod{11}$.

Отсюда

$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0} \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n \pmod{11}$. ■

Будем говорить, что цифры десятичной записи натурального числа $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0}$ пронумерованы справа налево числами 0, 1, 2, ..., n.

Следствие

(Признак делимости на 11)

Натуральное число делится нацело на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммой цифр с чётными номерами и суммой цифр с нечётными номерами делится нацело на 11.

Докажите это следствие самостоятельно.

Например, для числа 2 387 605 имеем: $(5 + 6 + 8 + 2) - (0 + 7 + 3) = 11$. Следовательно, число 2 387 605 кратно 11.

Пример 1. Докажите, что число 1 000 003 000 001 не является квадратом натурального числа.

Решение. Сумма цифр данного числа равна 5. Следовательно, это число при делении на 3 даёт в остатке 2. Однако квадрат натурального числа при делении на 3 даёт в остатке либо 0, либо 1 (см. задачу 17.19). ■

Для числа $k = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0}$ обозначим через $S(k)$ сумму цифр его десятичной записи, а через $P(k)$ — разность между суммой цифр с чётными номерами и суммой цифр с нечётными номерами.

Пример 2. Докажите, что разность числа, имеющего нечётное количество цифр, и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится нацело на 99.

Решение. Пусть одно число равно a, а другое, полученное перестановкой цифр числа a в обратном порядке, равно b.

Очевидно, что $S(a) = S(b)$.

Имеем: $a \equiv S(a) \pmod 9$;

$b \equiv S(b) \pmod 9$. Воспользовавшись свойством сравнений, запишем:

$a - b \equiv 0 \pmod 9$, т. е. $(a - b) \vdots 9$.

Пронумеруем цифры числа a справа налево числами 0, 1, 2, ..., $2n$. Тогда:

$P(a) = (a_0 + a_2 + ... + a_{2n-2} + a_{2n}) - (a_1 + a_3 + ... + a_{2n-3} + a_{2n-1})$;

$P(b) = (a_{2n} + a_{2n-2} + ... + a_2 + a_0) - (a_{2n-1} + a_{2n-3} + ... + a_3 + a_1)$.

Очевидно, что $P(a) = P(b)$.

Имеем: $a \equiv P(a) \pmod{11}$;

$b \equiv P(b) \pmod{11}$. Отсюда

$a - b \equiv 0 \pmod{11}$,

т. е. $(a - b) \vdots 11$.

Так как НОД (9; 11) = 1, то $(a - b) \vdots 99$. ■

? **1.** Сформулируйте признак делимости на 9.
2. Сформулируйте признак делимости на 3.
3. Сформулируйте признак делимости на 11.

Упражнения

19.1. Какие из чисел 485 761, 44 253, 1 757 217, 2 223 075 делятся нацело: 1) на 3; 2) на 9; 3) на 11?

19.2. Докажите, что $\overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0} \equiv \overline{a_1 a_0} \pmod{4}$.

19.3. Докажите, что $\overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0} \equiv \overline{a_1 a_0} \pmod{25}$.

19.4. Докажите, что $\overline{a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0} \equiv \overline{a_2 a_1 a_0} \pmod{8}$.

19.5. Докажите, что $\overline{a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0} \equiv \overline{a_2 a_1 a_0} \pmod{125}$.

19.6. Докажите, что $\overline{a_n a_{n-1} ... a_k a_{k-1} ... a_0} \equiv \overline{a_{k-1} a_{k-2} ... a_0} \pmod{2^k}$.

19.7. Докажите, что $\overline{a_n a_{n-1} ... a_k a_{k-1} ... a_0} \equiv \overline{a_{k-1} a_{k-2} ... a_0} \pmod{5^k}$.

19.8. Запишите, используя по одному разу каждую из цифр 0; 1; 4; 7, наибольшее и наименьшее четырёхзначные числа, кратные 15.

19.9. К числу 15 допишите слева и справа по одной цифре так, чтобы образовавшееся число было кратно 15. Сколько решений имеет задача?

19.10. К числу 34 допишите слева и справа по одной цифре так, чтобы образовавшееся число было кратно 45. Сколько решений имеет задача?

19.11. Вместо звёздочек подставьте такие цифры, чтобы число *74* делилось нацело на 18. Найдите все возможные решения.

19.12. Вместо звёздочек подставьте такие цифры, чтобы число 3*4* делилось нацело на 9. Найдите все возможные решения.

19.13. Вместо звёздочки подставьте такую цифру, чтобы число 1 876 74* делилось нацело на 33.

19.14. Вместо звёздочек подставьте такие цифры, чтобы число 2 83* 64* делилось нацело на 55.

19.15. Вместо звёздочек подставьте такие цифры, чтобы число 42 *4* делилось нацело на 72.

19.16. Вместо звёздочек подставьте такие цифры, чтобы число 6 2** 427 делилось нацело на 99.

◆ ◆

19.17. Шестизначное число кратно 8. Какая наибольшая сумма цифр может быть у него?

19.18. Найдите наименьшее натуральное число, кратное 36, в записи которого встречаются все 10 цифр.

19.19. Существует ли натуральное число, произведение цифр которого равно 143 341 143?

19.20. Докажите, что натуральное число, в десятичной записи которого использованы один раз цифра 1, два раза цифра 2, три раза цифра 3 и четыре раза цифра 4, не является квадратом натурального числа.

◆ ◆ ◆

19.21. Может ли натуральное число, в записи которого есть только цифры 0 и 6, быть квадратом натурального числа?

19.22. Сначала вычислили сумму цифр числа, равного произведению $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 999 \cdot 1000$. Потом вычислили сумму цифр полученного числа. Так делали до тех пор, пока не получили однозначное число. Чему равно это число?

19.23. В десятичной записи числа 28^{101} подсчитали сумму цифр. В полученном числе снова подсчитали сумму цифр, и так до тех пор, пока не получили однозначное число. Чему равно это число?

19.24. Решите уравнение:

1) $n + S(n) = 1000$; 2) $n^2 + (S(n))^2 = 1000$.

19.25. Решите уравнение:

1) $n + S(n) = 1001$; 2) $n + S(n) + S(S(n)) = 2000$.

19.26. Натуральное число n таково, что $S(n) = S(5n)$. Докажите, что n кратно 9.

19.27. Натуральное число n таково, что число $n^2 + 1$ — десятизначное. Докажите, что в записи числа $n^2 + 1$ найдутся две одинаковые цифры.

19.28. Можно ли, используя каждую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 по одному разу, записать шестизначное число, которое делится нацело на 11?

19.29. Числа 1000, 1001, ..., 1010 записали друг за другом в некотором порядке. Докажите, что у полученного 44-значного числа есть по крайней мере четыре различных натуральных делителя.

19.30. Найдите все $n \in \boldsymbol{N}$, для которых имеет место следующее свойство: если сумма цифр натурального числа делится нацело на n, то и само число делится нацело на n.

Упражнения для повторения

19.31. Используя диаграммы Эйлера, проиллюстрируйте свойства операций над множествами:

1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; 2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

19.32. Найдите область определения выражения $\dfrac{x+1}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x+1}}$.

19.33. Упростите выражение:

$$\frac{1}{x(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+8)} + \frac{1}{(x+8)(x+12)} + \frac{1}{(x+12)(x+16)}.$$

19.34. Масса полного ящика с яблоками равна 25 кг. После того как продали половину яблок, масса ящика с оставшимися яблоками составила 13 кг. Какова масса пустого ящика?

§ 20 Простые и составные числа

Число 1 имеет только один натуральный делитель — это число 1. Любое другое натуральное число n имеет как минимум два натуральных делителя: 1 и n.

Число 5 имеет только два натуральных делителя: 1 и 5. Вот ещё примеры чисел, имеющих только два натуральных делителя: 2, 7, 11, 13. Такие числа называют **простыми**.

Определение

Натуральное число называют простым, если оно имеет только два разных натуральных делителя: единицу и само это число.

Число 4 имеет три натуральных делителя: 1, 2, 4.

Число 6 имеет четыре натуральных делителя: 1, 2, 3, 6.

Определение

Натуральное число, имеющее более двух натуральных делителей, называют составным.

Числа 4 и 6 — составные числа.

Так как число 1 имеет только один натуральный делитель, то его не относят ни к простым, ни к составным.

Если последовательно выписывать натуральные числа, то легко заметить, что простые числа встречаются намного реже, чем составные. Так, первая тысяча натуральных чисел содержит 168 простых чисел, вторая — 135, третья — 127. Более того, можно указать промежутки натурального ряда любой длины, не содержащие ни единого простого числа.

Например, среди n последовательных натуральных чисел

$$(n + 1)! + 2,\ (n + 1)! + 3,\ \ldots,\ (n + 1)! + n + 1, \text{ где } n > 1,$$

нет ни одного простого числа[1]. Действительно, первое число делится нацело на 2 и больше 2, второе число делится нацело на 3 и больше 3 и т. д. Следовательно, каждое из записанных чисел имеет больше двух натуральных делителей.

Может возникнуть гипотеза, что в натуральном ряду начиная с некоторого места вообще невозможно встретить простое число. Но это не так. Древнегреческий учёный Евклид в своей знаменитой книге «Начала» доказал, что простых чисел бесконечно много.

Теорема 20.1

Множество простых чисел бесконечно.

Доказательство.

Пусть множество простых чисел конечно и состоит из простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Рассмотрим число $p = p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$.

Ни одно из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ не является делителем числа p: число p при делении на каждое из этих чисел даёт в остатке 1.

Пусть m — наименьший делитель числа p, отличный от 1. Если число m — составное, то существует делитель числа p, меньший чем m и отличный от 1. Следовательно, число m — простое. Тогда оно содержится среди чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$, а значит, не может быть делителем числа p. Получили противоречие. Значит, множество простых чисел бесконечно. ■

[1] Символом $k!$ обозначают произведение k первых натуральных чисел (читают: «k факториал»). Например, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$; $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$. Договорились считать, что $1! = 1$ и $0! = 1$.

Рассмотрим некоторые свойства простых чисел.

Теорема 20.2

Если простое число p_1 делится нацело на простое число p_2, то $p_1 = p_2$.

Доказательство.

Число p_1 имеет только два натуральных делителя: 1 и p_1. Так как $p_2 \neq 1$, то $p_2 = p_1$. ■

Теорема 20.3

Для любого натурального числа n и данного простого числа p справедливо одно из двух утверждений: $n \vdots p$ или НОД $(n; p) = 1$.

Доказательство.

Число p имеет только два натуральных делителя: 1 и p. Следовательно, НОД $(n; p)$ может принимать только два значения: 1 и p. Если НОД $(n; p) = p$, то $n \vdots p$. ■

Теорема 20.4

Если $ab \vdots p$, где $a \in N$, $b \in N$, p — простое число, то $a \vdots p$ или $b \vdots p$.

Доказательство.

Если $a \vdots p$, то теорема доказана. Если число a не кратно числу p, то согласно теореме 20.3 получаем: НОД $(a; p) = 1$. Тогда по теореме 18.7 $b \vdots p$. ■

Следствие

Если произведение $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ натуральных чисел делится нацело на простое число p, то хотя бы один из множителей $a_1, a_2, \ldots, a_n$ делится нацело на p.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Понятно, что любое составное число можно представить в виде произведения простых чисел (разложить на простые множители). Этот факт подчёркивает особую роль простых чисел как элементов, из которых строится любое натуральное число.

Поэтому теорему, обосновывающую существование такого разложения, называют **основной теоремой арифметики**. Первым её доказал К.Ф. Гаусс.

Теорема 20.5

(Основная теорема арифметики)

Любое натуральное число, отличное от 1, либо является простым, либо может быть представлено в виде произведения простых чисел. Два разложения натурального числа на простые множители могут отличаться друг от друга только порядком следования множителей.

Доказательство.

Рассмотрим составное число n. Оно имеет натуральный делитель, меньший чем n и отличный от 1. Тогда его можно представить в виде произведения натуральных чисел, отличных от единицы. Существует такое натуральное число k, что $2^k \geqslant n$. Тогда количество множителей, на которые разложено число n, не больше чем k. Действительно, каждый из этих множителей не меньше 2. Если бы их количество было больше чем k, то их произведение было бы больше чем 2^k, что противоречит неравенству $2^k \geqslant n$.

Так как количество множителей в разложении числа n не превосходит k, то существует разложение числа n, содержащее наибольшее количество множителей. Это и есть разложение числа n на простые множители. Действительно, если какой-либо из множителей является составным, то, разложив его на множители, получим «более длинное» разложение числа n на множители.

Итак, мы показали, что любое составное число можно разложить на простые множители.

Докажем, что такое разложение единственное, т. е. два разложения натурального числа на простые множители могут отличаться друг от друга только порядком следования множителей.

Пусть число n можно представить в виде произведения простых чисел двумя способами, т. е. $n = p_1p_2 \cdot \ldots \cdot p_m$ и $n = q_1q_2 \cdot \ldots \cdot q_t$, где $p_1, \ldots, p_m$, $q_1, \ldots, q_t$ — простые числа, $m \geqslant 2$, $t \geqslant 2$.

Имеем: $p_1p_2 \cdot \ldots \cdot p_m = q_1q_2 \cdot \ldots \cdot q_t$.

Левая часть этого равенства делится нацело на число p_1. Тогда и правая часть делится нацело на число p_1. Поскольку p_1 — простое число, то согласно следствию из теоремы 20.4 один из множителей правой части делится нацело на число p_1. Так как все множители правой части равенства являются простыми числами, то по теореме 20.2 один из них равен p_1. Пусть, например, это число q_1. Разделив обе части равенства на p_1, получим:

$$p_2p_3 \cdot \ldots \cdot p_m = q_2q_3 \cdot \ldots \cdot q_t.$$

Рассуждая аналогично, можно получить равенство $p_3p_4 \cdot \ldots \cdot p_m = q_3q_4 \cdot \ldots \cdot q_t$ и т. д. Понятно, что мы придём к равенству $1 = 1$.

Таким образом, каждому множителю левой части равенства $p_1p_2 \cdot \ldots \cdot p_m = q_1q_2 \cdot \ldots \cdot q_t$ соответствует равный ему множитель в правой части этого равенства, и наоборот. Это доказывает, что разложение натурального числа на простые множители единственное. ■

Если в разложении натурального числа некоторые простые множители повторяются, то их произведение записывают в виде степени.

Например, $2940 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$.

Вообще, разложение составного числа на простые множители можно записать в виде

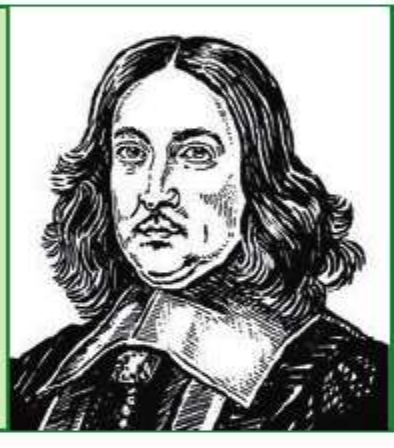
$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где α_1, α_2, ..., α_k — натуральные числа, p_1, p_2, ..., p_k — попарно разные простые числа.

Такую запись называют **каноническим разложением составного числа на простые множители.**

Рассмотрим ещё одно важное свойство простых чисел.

Пьер Ферма (1601–1665)

Французский математик, по специальности юрист. Один из основателей теории чисел. Автор ряда выдающихся трудов в разных областях математики, которые оказали значительное влияние на дальнейшее развитие математики.



Теорема 20.6

(Малая теорема Ферма)

Если натуральное число a не делится нацело на простое число p, то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Доказательство.

Рассмотрим $p - 1$ число: a, $2a$, $3a$, ..., $(p - 1)a$. Очевидно, что каждое из этих чисел не делится нацело на p. Пусть r_1, r_2, ..., r_{p-1} — остатки при делении этих чисел на число p соответственно. Докажем, что никакие два из чисел a, $2a$, $3a$, ..., $(p - 1)a$ не дают одинаковых остатков при делении на p.

Предположим, что такие два числа найдутся. Обозначим их ma и na, где $1 \leqslant m \leqslant p - 1$, $1 \leqslant n \leqslant p - 1$, $m > n$. Тогда $(ma - na) \vdots p$, т. е. $(m - n)a \vdots p$. Однако НОД $(a; p) = 1$. Тогда $(m - n) \vdots p$, что невозможно, так как $0 < m - n < p$.

Поскольку при делении на число p существует $p-1$ ненулевой остаток, а числа a, $2a$, $3a$, $(p-1)a$ дают разные ненулевые остатки при делении на p, то

$$\{r_1, r_2, ..., r_{p-1}\} = \{1, 2, ..., p-1\}. \quad (1)$$

Имеем: $a \equiv r_1 \pmod p$,

$2a \equiv r_2 \pmod p$

...

$(p-1)a \equiv r_{p-1} \pmod p$.

Отсюда $a \cdot 2a \cdot 3a \cdot ... \cdot (p-1)a \equiv r_1 r_2 \cdot ... \cdot r_{p-1} \pmod p$. Учитывая равенство (1), можно записать:

$1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (p-1)a^{p-1} \equiv 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (p-1) \pmod p$. Отсюда

$$(p-1)! \cdot a^{p-1} \equiv (p-1)! \pmod p.$$

Поскольку НОД $((p-1)!; p) = 1$, то, применяя ключевую задачу 6 § 18, можно записать:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p. \blacksquare$$

Следствие

Для любого натурального числа a и простого числа p справедливо следующее сравнение: $a^p \equiv a \pmod p$.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Задача. Докажите, что если квадрат каждого отличного от 1 делителя числа n больше чем n, то число n — простое.

Решение. Пусть число n — составное. Тогда $n = k_1 \cdot k_2$, где $k_1 > 1$ и $k_2 > 1$. По условию $k_1^2 > n$ и $k_2^2 > n$. Отсюда $(k_1 \cdot k_2)^2 > n^2$, т. е. $k_1 \cdot k_2 > n$. Получили противоречие. Следовательно, n — простое число. ■

Доказанное свойство позволяет сократить вычислительную работу при определении того, является ли данное число n простым: достаточно ограничиться проверкой делимости числа n на простые числа, квадраты которых не превосходят n.

Пример 1. Найдите все такие натуральные числа n, что числа $n + 1$, $n + 11$, $n + 27$ являются простыми.

Решение. Так как разность никаких двух данных чисел не делится нацело на 3, то все они дают разные остатки при делении на 3. Следовательно, одно из этих чисел, будучи простым, кратно 3. Значит, оно равно 3. Понятно, что это может быть только число $n + 1$. Отсюда $n = 2$. Тогда $n + 11 = 13$, $n + 27 = 29$. ■

Пример 2. Натуральное число n таково, что $2n = p_1 + p_2$, где p_1 и p_2 — последовательные простые числа, большие чем 2. Докажите, что число n — составное.

Решение. Пусть $p_1 < p_2$. Тогда $p_1 < \frac{p_1 + p_2}{2} < p_2$, т. е. $p_1 < n < p_2$. Поскольку p_1 и p_2 — последовательные простые числа, то число n — составное. ■

Пример 3. Решите в простых числах уравнение $x^y + 1 = z$.

Решение. Если простое число x не равно 2, то x — нечётное число. Тогда левая часть уравнения принимает значения, большие 2, и является чётным числом. В этом случае число z простым быть не может.

Следовательно, $x = 2$. Имеем $2^y + 1 = z$. Если y — нечётное число, то выражение $2^y + 1$ можно разложить на множители, каждый из которых больше 1. Имеем: $2^y + 1 = (2 + 1)(2^{y-1} - 2^{y-2} + \ldots + 1)$. В этом случае число z простым числом быть не может. Значит, y — чётное простое число, т. е. $y = 2$. Тогда $z = 2^2 + 1 = 5$.

Ответ: $x = 2$, $y = 2$, $z = 5$. ■

Пример 4. Найдите остаток при делении числа 3^{102} на 101.

Решение. Так как 101 — простое число, то согласно малой теореме Ферма

$$3^{100} \equiv 1 \pmod{101}.$$

Отсюда $3^{102} \equiv 9 \pmod{101}$.

Ответ: 9. ■

Пример 5. Докажите, что если натуральное число n не делится нацело на 17, то либо $(n^8 - 1) \vdots 17$, либо $(n^8 + 1) \vdots 17$.

Решение. Согласно малой теореме Ферма

$$n^{16} \equiv 1 \pmod{17}.$$

Отсюда $(n^{16} - 1) \vdots 17$;

$$(n^8 - 1)(n^8 + 1) \vdots 17.$$

Поскольку 17 является простым числом, то утверждение задачи следует из теоремы 20.4. ■

?

1. Какое число называют простым?
2. Какое число называют составным?
3. Конечным или бесконечным является множество простых чисел?
4. Сформулируйте основную теорему арифметики.
5. Что называют каноническим разложением составного числа на простые множители?
6. Сформулируйте малую теорему Ферма.

Упражнения

20.1. Может ли произведение двух натуральных чисел быть простым числом?

20.2. Может ли сумма двух простых чисел быть простым числом?

20.3. Может ли разность двух простых чисел быть простым числом?

20.4. Найдите все натуральные значения n, при которых числа n и $n + 1$ являются простыми.

20.5. Найдите все натуральные значения n, при которых числа n и $n + 3$ являются простыми.

20.6. Известно, что числа[1] a и b таковы, что $ab \vdots q$. Верно ли утверждение, что $a \vdots q$ или $b \vdots q$, если: 1) $q = 13$; 2) $q = 21$?

20.7. Известно, что числа m и n таковы, что $mn \vdots p$. Верно ли утверждение, что $m \vdots p$ или $n \vdots p$, если: 1) $p = 29$; 2) $p = 39$?

20.8. Докажите, что остаток при делении простого числа на 30 равен 1 или простому числу.

20.9. Докажите, что каждое простое число p ($p > 3$) можно записать в виде $6k + 1$ или $6k - 1$, $k \in \boldsymbol{N}$.

20.10. Найдите все натуральные n, при которых значение выражения $n^2 + n$ является простым числом.

20.11. Найдите все натуральные n, при которых значение выражения $n^2 - 1$ является простым числом.

20.12. Найдите все натуральные n, при которых является простым числом значение выражения:

1) $n^3 - 1$; 2) $4n^2 + 5n - 21$; 3) $3^n - 1$.

20.13. Найдите все натуральные n, при которых является простым числом значение выражения:

1) $n^3 + 1$; 2) $3n^2 + 4n - 15$; 3) $8^n - 1$.

20.14. Докажите, что если p — простое число и $p > 3$, то $(p^2 - 1) \vdots 24$.

20.15. Простые числа p и q таковы, что $p > 3$, $q > 3$. Докажите, что $(p^2 - q^2) \vdots 24$.

20.16. Найдите все простые числа p такие, что числа $p + 26$ и $p + 28$ простые.

20.17. Найдите все простые числа p такие, что числа $2p + 1$ и $4p + 1$ простые.

[1] В этом параграфе буквами обозначены натуральные числа. Случаи, в которых буквой обозначено целое число, будут оговорены отдельно.

20.18. Числа a и b таковы, что $56a = 65b$. Докажите, что число $a + b$ является составным.

20.19. Числа m и n таковы, что $37m = 55n$. Докажите, что число $m - n$ является составным.

20.20. Целые числа a и b таковы, что значение выражения $a^2 + 9ab + b^2$ кратно 11. Докажите, что значение выражения $a - b$ кратно 11.

20.21. Целые числа m и n таковы, что значение выражения $m^2 - 15mn + n^2$ кратно 17. Докажите, что значение выражения $m + n$ кратно 17.

20.22. Числа p и $8p^2 + 1$ — простые. Найдите p.

20.23. Числа p и $p^{p+1} + 2$ — простые. Найдите p.

20.24. Числа p и $p^2 + 2$ — простые. Найдите p.

20.25. Докажите, что число $8\underbrace{00\ldots0}_{\text{10 нулей}}27$ — составное.

20.26. Докажите, что число 999 999 973 — составное.

20.27. Найдите все натуральные n, при которых значение выражения $n^4 + 4$ является простым числом.

20.28. Найдите все натуральные m, при которых значение выражения $m^4 + m^2 + 1$ является простым числом.

20.29. Натуральные числа m, n, k таковы, что числа $p = m + n$, $q = n + k$ и $r = m + k$ являются простыми. Докажите, что одно из чисел p, q, r равно 2.

20.30. Натуральные числа a, b, c таковы, что $(a + b + c) \vdots 13$. Докажите, что число $a^{13} + b^{13} + c^{13}$ также кратно 13.

20.31. Докажите, что при любом натуральном a значение выражения $a^{14} + 13a^2$ кратно 7.

20.32. Докажите, что при любом натуральном a значение выражения $a^{57} - 39a^3$ кратно 19.

20.33. Используя малую теорему Ферма, найдите остаток при делении числа a на число b, если:

1) $a = 5^{52}$, $b = 53$; 2) $a = 2^{47}$, $b = 41$.

20.34. Докажите, что число $24^{24} - 1$ кратно 35.

20.35. Натуральное число a не делится нацело на 29. Докажите, что одно из чисел $a^{14} - 1$ или $a^{14} + 1$ делится нацело на 29.

20.36. Найдите все простые числа p и q, удовлетворяющие уравнению $p^2 - 2q^2 = 1$.

20.37. Найдите все простые числа p и q, удовлетворяющие уравнению $q - p^2 = 2$.

20.38. Найдите все простые числа p такие, что число $4p + 1$ является квадратом натурального числа.

20.39. Натуральное число n таково, что числа $2n - 1$ и $n + 12$ делятся нацело на простое число p. Найдите p.

20.40. Натуральное число n таково, что числа $5n - 1$ и $n - 10$ делятся нацело на простое число p. Найдите p.

20.41. Найдите все простые p такие, что число $p^2 + 11$ имеет ровно шесть различных натуральных делителей.

20.42. Найдите все простые числа, которые можно представить в виде суммы двух составных чисел.

20.43. Докажите, что значение выражения $42^{47} + 47^{42}$ является составным числом.

20.44. Докажите, что $p^q + q^p \equiv (p + q) \pmod{pq}$, где p и q — различные простые числа.

Упражнения для повторения

20.45. Постройте график функции $y = \dfrac{9x^2 - 6x + 1}{3x - 1}$.

20.46. Упростите выражение $\left(\dfrac{2x}{1 - 3y} + \dfrac{2x}{3y + 1}\right) : \dfrac{4x^2 + 14x}{9y^2 + 1 - 6y}$.

20.47. Какие множества равны:

$A = \{x \mid x = 5n - 1,\ n \in \boldsymbol{Z}\}$;

$B = \{x \mid x = 10n + 9,\ n \in \boldsymbol{Z}\}$;

$C = \{x \mid x = 5n + 4,\ n \in \boldsymbol{Z}\}$;

$D = \{x \mid x = 10n - 1,\ n \in \boldsymbol{Z}\}$?

20.48. Встретились семеро друзей и пожали каждый друг другу руку. Сколько всего было рукопожатий?

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

О проблемах, связанных с простыми числами

На уроках информатики вы можете создать компьютерные программы для составления таблицы, содержащей намного больше простых чисел, чем та, которая приведена на форзаце учебника.

Ещё учёные Древнего мира составляли таблицы простых чисел. Решение такой задачи без современной вычислительной техники — труд нелёгкий. Поэтому поиск простых чисел был неразрывно связан с попытками открыть удобную формулу, пользуясь которой можно было бы составлять указанные таблицы.

Многие известные математики приложили немало усилий, чтобы найти «формулу простых чисел». Часто им казалось, что цель достигнута, но позже выяснялось, что выдвинутые гипотезы неверны.

Так, Пьер Ферма высказал предположение, что все числа вида

$$F(n) = 2^{2^n} + 1 \qquad (1)$$

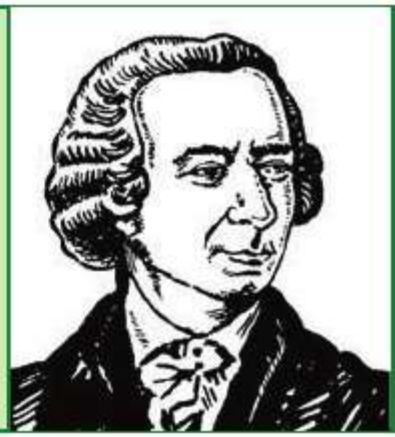
при целом неотрицательном n являются простыми.

Имеем: $F(0) = 3$, $F(1) = 5$, $F(2) = 17$, $F(3) = 257$, $F(4) = 65\,537$. Гипотеза Ферма основывалась на том, что числа 3, 5, 17, 257, 65 537 — простые. Однако в 1732 г. выдающийся математик Л. Эйлер установил, что число $F(5)$ — составное:

$$F(5) = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417.$$

Леонард Эйлер (1707–1783)

Математик, механик и физик, член Петербургской и Берлинской академий наук, автор более 850 научных трудов, свыше 100 из которых относятся к теории чисел.



Таким образом, среди чисел, полученных с помощью формулы (1), есть как простые, так и составные. Простые числа, полученные с помощью этой формулы, называют простыми числами Ферма. Однако конечным или бесконечным является множество простых чисел Ферма — до сих пор не известно.

С числами Ферма связана ещё одна знаменитая проблема. Учёные Древней Греции заметили, что при $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12$ правильные n-угольники построить достаточно просто с помощью циркуля и линейки, а при некоторых других значениях n ($n = 7, 9, 11, 13$) это не удаётся.

В конце XVIII в. К.Ф. Гаусс доказал, что с помощью циркуля и линейки можно построить правильный n-угольник тогда и только тогда, когда $n = 2^k$, где $k \in \mathbf{N}$, $k > 1$, или $n = 2^k \cdot p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_m$, где k — целое неотрицательное число, $p_1, p_2, \ldots, p_m$ — разные простые числа Ферма.

В XVIII в. Л. Эйлер доказал, что не существует многочлена $F(x)$ с целыми коэффициентами, значения которого при всех натуральных значениях x были бы простыми числами.

Вместе с тем Эйлер указал на такие многочлены:

$$h(n) = n^2 - n + 17;$$
$$f(n) = n^2 - n + 41;$$
$$g(n) = n^2 - 79n + 1601.$$

Интересно, что значения многочлена $h(n)$ при $n = 0, 1, 2, ..., 16$ являются простыми числами. Однако $h(17)$ — составное число.

Значениями многочленов $f(n)$ и $g(n)$ являются простые числа при $n = 0, 1, 2, ..., 40$ и $n = 0, 1, 2, ..., 79$ соответственно.

К сожалению, математики до сих пор не нашли удобной формулы, которая позволяла бы получать все простые числа друг за другом.

С проблемой поиска формулы простых чисел неразрывно связана задача нахождения закономерности распределения простых чисел в натуральном ряду.

Выдающийся советский математик, автор целого ряда фундаментальных открытий в области теории чисел Ю.В. Матиясевич писал: «Простые числа разбросаны в натуральном ряду очень прихотливым образом».

Действительно, достаточно даже беглого взгляда на таблицу простых чисел, чтобы увидеть неравномерное распределение их среди натуральных чисел.

Как определить промежутки натурального ряда, содержащие по крайней мере одно простое число? Как определить количество простых чисел на заданном промежутке натурального ряда? В частности, сколько существует простых чисел, не превышающих заданного натурального числа n?

Ответы на эти вопросы являются ключом к решению проблемы распределения простых чисел.

Указать промежуток натурального ряда, содержащий по крайней мере одно простое число, довольно просто. Покажем, например, что любому промежутку от n до $n! + 1$ включительно принадлежит простое число.

Если число $n! + 1$ — простое, то утверждение очевидно.

Пусть $n! + 1$ является составным числом и k — его простой делитель. Так как ни одно из чисел $2, 3, ..., n$ не является делителем числа $n! + 1$, то $n < k < n! + 1$.

Из доказанного утверждения следует, что числа $2, 2! + 1, (2! + 1)! + 1, ...$ разбивают натуральный ряд на промежутки, каждый из которых содержит по крайней мере одно простое число. Этот факт можно рассматривать как ещё одно доказательство бесконечности множества простых чисел.

Так как ни одно из чисел $2, 3, ..., p - 1$ не является делителем числа $(p - 1)! + 1$, то если $((p - 1)! + 1) \vdots p$, $p > 1$, то p — простое число. Этот факт является частью известной теоремы Вильсона (критерия проверки того, является ли данное натуральное число простым).

Для того чтобы натуральное число $n > 1$ было простым, необходимо и достаточно, чтобы число $(n - 1)! + 1$ делилось нацело на n.

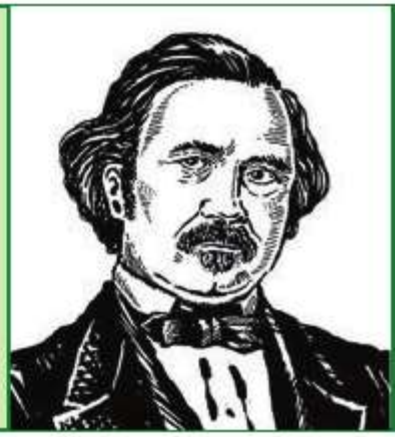
Достаточное условие мы фактически доказали. Доказательство необходимого условия выходит за рамки рассматриваемого курса.

Понятно, что с возрастанием n длина промежутка натурального ряда от n до $n! + 1$ быстро увеличивается. Поэтому желательно уметь указывать промежуток натурального ряда как можно меньшей длины, содержащий по крайней мере одно простое число.

Исследуя таблицы простых чисел, французский математик Жозеф Луи Франсуа Бертран выдвинул предположение, что при $n \geqslant 3$ между числами n и $2n - 2$ содержится хотя бы одно простое число. Доказать эту гипотезу он не смог и пользовался ею как постулатом — утверждением, принимаемым без доказательства. Первым доказал постулат Бертрана выдающийся русский математик П.Л. Чебышёв.

Жозеф Луи Франсуа Бертран (1822–1900)

Французский математик, работавший в области теории чисел, дифференциальной геометрии, теории вероятностей и термодинамики.



Пафнутий Львович Чебышёв (1821–1894)

Русский математик и механик, основатель петербургской математической школы, автор свыше 70 научных трудов по теории чисел, теории вероятностей, теории функций и другим областям математики, основатель теории машин и механизмов.



Обозначим через $\pi(n)$ количество простых чисел, не превышающих числа n. Для маленьких n легко установить, что, например, $\pi(1) = 0$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 2$, $\pi(4) = 2$, $\pi(10) = 4$, $\pi(100) = 25$.

Сложное распределение простых чисел не позволяет найти простую формулу для нахождения $\pi(n)$. Поэтому математики сосредоточили свои усилия на поиске приближённой формулы.

Отношение $\dfrac{\pi(n)}{n}$ называют **плотностью распределения простых чисел.**

В следующей таблице приведены значения плотности распределения простых чисел при некоторых значениях n.

n	$\pi(n)$	$\frac{\pi(n)}{n}$
10	4	0,4
100	25	0,25
1000	168	0,17
10 000	1229	0,12
100 000	9592	0,096
1 000 000	78 498	0,078
10 000 000	664 579	0,066
100 000 000	5 761 455	0,058
1 000 000 000	50 847 478	0,051

Л. Эйлер доказал, что с увеличением n плотность $\frac{\pi(n)}{n}$ становится всё меньше и меньше. П.Л. Чебышёву удалось найти более точную оценку величины $\frac{\pi(n)}{n}$.

Рассмотрим ещё одну проблему, связанную с простыми числами.

Древние математики уделяли особое внимание двум числам: 6 и 28. Их привлекало удивительное свойство этих чисел: каждое из них равно сумме своих **собственных делителей,** т. е. всех делителей, отличных от самого числа. Имеем:

$$6 = 1 + 2 + 3,$$
$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

Такие числа называют **совершенными.**

Евклид доказал, что любое натуральное число, которое можно представить в виде $2^{n-1}(2^n - 1)$, где $2^n - 1$ — простое число, является совершенным.

Убедимся в этом и мы. Обозначим $2^n - 1 = p$ и запишем сумму всех делителей рассматриваемого числа:

$$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1} + p + 2p + 2^2p + ... + 2^{n-1}p =$$
$$= (1 + p)(1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1}) =$$
$$= (1 + p)(2 - 1)(2^{n-1} + 2^{n-2} + ... + 2 + 1) =$$
$$= (1 + p)(2^n - 1) = 2^n(2^n - 1).$$

В записанную сумму входит само число $2^{n-1}(2^n - 1)$. Тогда сумма собственных делителей рассматриваемого числа равна

$$2^n(2^n - 1) - 2^{n-1}(2^n - 1) = (2^n - 1)(2^n - 2^{n-1}) = 2^{n-1}(2^n - 1).$$

Подставив в выражение $2^{n-1}(2^n - 1)$ числа $n = 2$ и $n = 3$, получим уже известные совершенные числа 6 и 28.

Благодаря доказанному свойству Евклид нашёл ещё два совершенных числа. При $n = 5$ имеем: $2^5 - 1 = 31$ — простое число, при $n = 7$ имеем $2^7 - 1 = 127$ — простое число. Значения выражений $2^{5-1}(2^5 - 1)$ и $2^{7-1}(2^7 - 1)$ соответственно равны 496 и 8128. Согласно доказанному выше свойству эти числа являются совершенными.

Почти полтора тысячелетия люди знали только четыре совершенных числа 6, 28, 496 и 8128. Поиск новых совершенных чисел был неразрывно связан с поиском простых чисел вида $2^n - 1$, $n \in \boldsymbol{N}$. Простые числа такого вида называют **простыми числами Мерсенна** в честь Марена Мерсенна, французского математика, физика и музыканта, который в 1664 г., не приводя доказательств, заявил, что при $n = 17, 19, 31, 67, 127, 257$ число $2^n - 1$ является простым.

Л. Эйлер установил, что числа $2^{17} - 1$, $2^{19} - 1$, $2^{31} - 1$ являются простыми. Позже оказалось, что число $2^{127} - 1$ также является простым, а вот числа $2^{67} - 1$ и $2^{257} - 1$ являются составными, причём вывод о числе $2^{257} - 1$ был получен только в 1932 г.

Л. Эйлер доказал, что все чётные совершенные числа имеют вид, указанный Евклидом. До сих пор не найдено ни одного нечётного совершенного числа. Также остаётся открытым вопрос, конечным или бесконечным является множество простых чисел Мерсенна, а следовательно, не известно, конечно или бесконечно множество чётных совершенных чисел.

Поиск новых совершенных чисел требует огромного объёма вычислений. И тут, конечно, незаменимую помощь оказывает современная вычислительная техника. По данным на февраль 2013 г. известно 48 простых числа Мерсенна, а следовательно, 48 чётных совершенных чисел. Также с помощью современных компьютеров установлено: если существует нечётное совершенное число, то оно больше 10^{300}.

В мире простых чисел много и других нерешённых задач. Например, в таблице простых чисел на форзаце оранжевым цветом выделены простые числа, которые отличаются на 2. Это, в частности, 3 и 5, 5 и 7, 419 и 421. Такие пары простых чисел называют **числами-близнецами**. Конечно или бесконечно количество пар чисел-близнецов, пока не известно.

Итоги главы 3

Делимость нацело

Говорят, что целое число a делится нацело на целое число b ($b \neq 0$), если существует такое целое число k, что $a = bk$.

Основные свойства делимости нацело

1. Если $a \neq 0$, то $a \vdots a$.
2. Если $a \neq 0$, то $0 \vdots a$.
3. Если $a \vdots b$, то $ka \vdots b$.
4. Если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$.
5. Если $a \vdots m$ и $b \vdots n$, то $ab \vdots mn$.
6. Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $(a \pm b) \vdots c$.

Деление с остатком

Для любого целого числа a и натурального числа b существует единственная пара целых чисел q и r таких, что $a = bq + r$, где $0 \leqslant r < b$.

Числа, сравнимые по модулю

Целые числа a и b называют сравнимыми по модулю m, где $m \in \boldsymbol{N}$, если эти числа дают одинаковые остатки при делении на число m. Пишут: $a \equiv b \pmod m$.

Необходимое и достаточное условие сравнимости чисел

Для того чтобы целые числа a и b были сравнимы по модулю m, где $m \in \boldsymbol{N}$, необходимо и достаточно, чтобы разность $a - b$ делилась нацело на число m.

Основные свойства сравнений

1. Если $a \equiv b \pmod m$, $b \equiv c \pmod m$, то $a \equiv c \pmod m$.
2. Если $a \equiv b \pmod m$, то $a + c \equiv b + c \pmod m$.
3. Если $a \equiv b \pmod m$, то $ac \equiv bc \pmod m$.
4. Если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то $a \pm c \equiv b \pm d \pmod m$.
5. Если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то $ac \equiv bd \pmod m$.
6. Если $a \equiv b \pmod m$, то $a^n \equiv b^n \pmod m$.

Свойства наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного

- Если $a > b$, то НОД $(a; b)$ = НОД $(a - b; b)$.

- Если число r — остаток при делении числа a на число b, т. е. $a = bq + r$, где $0 < r < b$, то НОД $(a; b)$ = НОД $(b; r)$.
- НОК $(a; b)$ является делителем любого общего кратного чисел a и b.
- Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то число $\frac{ab}{c}$ является общим кратным чисел a и b.
- НОК $(a; b) \cdot$ НОД $(a; b) = ab$.

Взаимно простые числа

Если НОД $(a; b) = 1$, то числа a и b называют взаимно простыми.

Свойства взаимно простых чисел

Если НОД $(a; b) = 1$, то НОК $(a; b) = ab$.
Если НОД $(b; c) = 1$, $a \vdots b$ и $a \vdots c$, то $a \vdots bc$.
Если НОД $(a; b) = 1$ и $ac \vdots b$, то $c \vdots b$.

Признаки делимости

- **Признак делимости на 9:** натуральное число делится нацело на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр его десятичной записи делится нацело на 9.
- **Признак делимости на 3:** натуральное число делится нацело на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр его десятичной записи делится нацело на 3.
- **Признак делимости на 11:** натуральное число делится нацело на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммой цифр с чётными номерами и суммой цифр с нечётными номерами делится нацело на 11.

Простые числа

Натуральное число называют простым, если оно имеет только два разных натуральных делителя: единицу и само это число.

Составные числа

Натуральное число, имеющее более двух натуральных делителей, называют составным.

Свойства простых чисел

- Множество простых чисел бесконечно.
- Если простое число p_1 делится нацело на простое число p_2, то $p_1 = p_2$.
- Для любого натурального числа n и данного простого числа p справедливо одно из двух утверждений: $n \vdots p$ или НОД $(n; p) = 1$.

- Если $ab \vdots p$, где $a \in \boldsymbol{N}$, $b \in \boldsymbol{N}$, p — простое число, то или $a \vdots p$, или $b \vdots p$.
- Если произведение $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ натуральных чисел делится нацело на простое число p, то хотя бы один из множителей a_1, a_2, …, a_n делится нацело на p.

Основная теорема арифметики

Любое натуральное число, отличное от 1, либо является простым, либо может быть представлено в виде произведения простых чисел. Два разложения натурального числа на простые множители могут отличаться друг от друга только порядком следования множителей.

Каноническое разложение составного числа на простые множители

Запись составного числа в виде $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где α_1, α_2, …, α_k — натуральные числа, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — попарно разные простые числа.

Малая теорема Ферма

Если натуральное число a не делится нацело на простое число p, то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Следствие из малой теоремы Ферма

Для любого натурального числа a и простого числа p справедливо следующее сравнение: $a^p \equiv a \pmod{p}$.

глава

4 Неравенства

В этой главе вы изучите свойства числовых неравенств. Научитесь использовать эти свойства для оценки значений числовых выражений. Научитесь решать линейные неравенства с одной переменной. Познакомитесь с особым видом множеств — числовыми промежутками.

§ 21 Числовые неравенства и их свойства

На практике часто приходится сравнивать величины. Например, площадь спортзала больше площади классной комнаты, расстояние от Москвы до Санкт-Петербурга меньше расстояния от Москвы до Пятигорска.

Когда мы сравниваем величины, нам приходится сравнивать числа. Результаты этих сравнений записывают в виде числовых равенств или неравенств, используя знаки $=$, $>$, $<$.

Если число a больше числа b, то пишут $a > b$; если число a меньше числа b, то пишут $a < b$.

Очевидно, что $12 > 7$, $-17 < 3$, $\frac{15}{23} > \frac{11}{23}$. Справедливость этих неравенств следует из правил сравнения рациональных чисел, которые вы изучали в курсе математики.

Однако есть и другой способ сравнения, более универсальный, основанный на таких рассуждениях: если разность двух чисел является числом положительным, то уменьшаемое больше вычитаемого, а если разность отрицательна, то уменьшаемое меньше вычитаемого.

Эти соображения подсказывают, что следует принять такие определения.

Определение

Считают, что число a больше числа b, если разность $a - b$ является положительным числом.

Определение

Считают, что число a меньше числа b, если разность $a - b$ является отрицательным числом.

Эти определения позволяют задачу о сравнении двух чисел свести к задаче о сравнении их разности с нулём. Например, чтобы сравнить значения выражений $3 - 4\pi$ и $6 - 5\pi$, рассмотрим их разность:

$$(3 - 4\pi) - (6 - 5\pi) = 3 - 4\pi - 6 + 5\pi = \pi - 3.$$

Так как $\pi - 3 > 0$, то $3 - 4\pi > 6 - 5\pi$.

Заметим, что разность чисел a и b может быть или положительной, или отрицательной, или равной нулю. Тогда *для любых чисел a и b справедливо одно и только одно из следующих соотношений: $a > b$, $a < b$, $a = b$.*

Если $a > b$, то точка, изображающая число a на координатной прямой, находится справа от точки, изображающей число b (рис. 21.1).

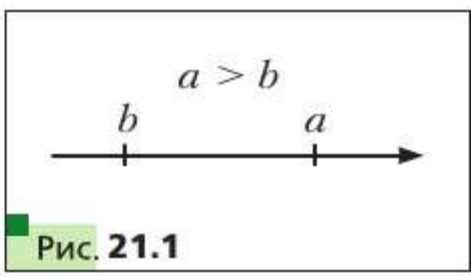


Рис. **21.1**

Для записи того факта, что число a не больше числа b, используют знак $\leqslant$ и пишут $a \leqslant b$ (читают: «a меньше или равно b»). Для записи того факта, что число a не меньше числа b, используют знак $\geqslant$ и пишут $a \geqslant b$ (читают: «a больше или равно b»).

Если $a < b$ или $a = b$, то неравенство $a \leqslant b$ является верным.

Если $a > b$ или $a = b$, то неравенство $a \geqslant b$ является верным.

Например, неравенства $7 \leqslant 7$, $7 \leqslant 15$, $-3 \geqslant -5$ верны.

Знаки $<$ и $>$ называют знаками **строгого неравенства**, а знаки $\leqslant$ и $\geqslant$ — знаками **нестрогого неравенства**.

Рассмотрим свойства числовых неравенств, часто используемые при решении задач.

Теорема 21.1

Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

Доказательство.

Так как по условию $a > b$ и $b > c$, то разности $a - b$ и $b - c$ являются положительными числами. Тогда положительной будет и их сумма $(a - b) + (b - c)$. Имеем: $(a - b) + (b - c) = a - c$. Следовательно, разность $a - c$ является положительным числом, поэтому $a > c$. ■

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 21.2

Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

Теорему 21.1 можно проиллюстрировать геометрически: если на координатной прямой точка $A\,(a)$ лежит правее точки $B\,(b)$, а точка $B\,(b)$ —

правее точки $C(c)$, то точка $A(a)$ лежит правее точки $C(c)$ (рис. 21.2).

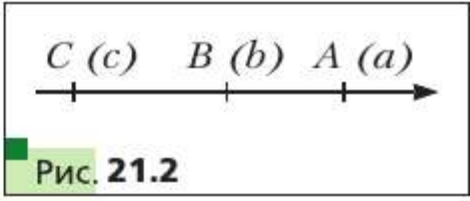


Рис. 21.2

Теорема 21.3

Если $a > b$ и c — любое число, то $a + c > b + c$.

Доказательство.

Рассмотрим разность $(a + c) - (b + c)$. Имеем: $(a + c) - (b + c) = a - b$. Так как по условию $a > b$, то разность $a - b$ является положительным числом. Следовательно, $a + c > b + c$. ■

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 21.4

Если $a < b$ и c — любое число, то $a + c < b + c$.

Так как действие вычитания можно заменить действием сложения (напомним, что $a - c = a + (-c)$), то, учитывая теоремы 21.3 и 21.4, можно сделать такой вывод.

Теорема 21.5

Если к обеим частям верного неравенства прибавить или из обеих частей верного неравенства вычесть одно и то же число, то получим верное неравенство.

Следствие

Если любое слагаемое перенести из одной части верного неравенства в другую, заменив знак слагаемого на противоположный, то получим верное неравенство.

Доказательство.

Пусть неравенство $a > b + c$ является верным. Вычтем из обеих его частей число c. Получим: $a - c > b + c - c$, т. е. $a - c > b$. ■

Теорема 21.6

Если $a > b$ и c — положительное число, то $ac > bc$. Если $a > b$ и c — отрицательное число, то $ac < bc$.

Доказательство.

Рассмотрим разность $ac - bc$. Имеем: $ac - bc = c(a - b)$.

По условию $a > b$, следовательно, разность $a - b$ является положительным числом.

Если $c > 0$, то произведение $c(a - b)$ положительно, а следовательно, разность $ac - bc$ является положительной, т. е. $ac > bc$.

Если $c < 0$, то произведение $c(a - b)$ отрицательно, а следовательно, разность $ac - bc$ является отрицательной, т. е. $ac < bc$. ■

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 21.7

Если $a < b$ и c — положительное число, то $ac < bc$; если $a < b$ и c — отрицательное число, то $ac > bc$.

Так как действие деления можно заменить действием умножения $(a : c = a \cdot \frac{1}{c})$, то, учитывая теоремы 21.6 и 21.7, можно сделать такой вывод.

Теорема 21.8

Если обе части правильного неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получим верное неравенство. Если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и поменять знак неравенства на противоположный, то получим верное неравенство.

Следствие

Если $a > b$ и $ab > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Доказательство.

Разделим обе части неравенства $a > b$ на положительное число ab. Получим верное неравенство $\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}$, т. е. $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$. Отсюда $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. ■

При применении следствия из теоремы 21.8 является распространённой следующая ошибка: не учитывая знак произведения ab, заменять неравенство $a > b$ на неравенство $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. Например, неравенство $5 > -3$ верно, однако неравенство $\frac{1}{5} < -\frac{1}{3}$ неверно.

В теоремах, рассмотренных в этом параграфе, шла речь о строгих неравенствах. Аналогичные свойства имеют и нестрогие неравенства. Например, если $a \geqslant b$ и c — любое число, то $a + c \geqslant b + c$.

Пример. Известно, что $-4 \leqslant a < -2$. Докажите, что $-7 < \dfrac{7}{3a+5} \leqslant -1$.

Решение. Имеем: $-4 \leqslant a < -2$. Тогда по теореме 21.7 получаем: $-12 \leqslant 3a < -6$. Применяя теорему 21.4, получаем: $-7 \leqslant 3a + 5 < -1$. Пользуясь следствием из теоремы 21.8, можно записать, что $-\dfrac{1}{7} \geqslant \dfrac{1}{3a+5} > -1$, т. е. $-1 < \dfrac{1}{3a+5} \leqslant -\dfrac{1}{7}$. Применяя теорему 21.7, получаем: $-7 < \dfrac{7}{3a+5} \leqslant -1$. ■

1. В каком случае считают, что число a больше числа b?
2. В каком случае считают, что число b меньше числа a?
3. Сколько различных соотношений и каких именно может быть при сравнении чисел a и b?
4. Как расположена на координатной прямой точка, изображающая число a, относительно точки, изображающей число b, если $a > b$?
5. Какой знак используют для записи того факта, что число a не больше числа b?
6. Какой знак используют для записи того факта, что число a не меньше числа b?
7. В каком случае верно неравенство $a \leqslant b$?
8. В каком случае верно неравенство $a \geqslant b$?
9. Какие знаки называют знаками строгого неравенства, а какие — нестрогого?

Упражнения

21.1. Сравните числа a и b, если:
1) $a - b = 0{,}4$; 2) $a - b = -3$; 3) $a - b = 0$.

21.2. Известно, что $m < n$. Может ли разность $m - n$ быть равной числу:
1) 4,6; 2) −5,2; 3) 0?

21.3. Как расположена на координатной прямой точка $A\,(a)$ относительно точки $B\,(b)$, если:
1) $a - b = 2$; 2) $a - b = -6$; 3) $a - b = 0$?

21.4. Могут ли одновременно выполняться неравенства:
1) $a > b$ и $a < b$;
2) $a \geqslant b$ и $a \leqslant b$?

21.5. Верно ли утверждение:
1) если $a > b$, то $\dfrac{a}{b} > 1$;
2) если $a > 1$, то $\dfrac{2}{a} < 2$;
3) если $a < 1$, то $\dfrac{2}{a} > 2$;
4) если $\dfrac{a}{b} > 1$ и $b > 0$, то $a > b$?

21.6. Верно ли утверждение:

1) если $a > 1$, то $|a| > 1$;
2) если $a < 2$, то $|a| < 2$;
3) если $a < -3$, то $|a| > 3$;
4) если $-4 < a < 4$, то $|a| < 4$?

21.7. Известно, что $a < 3$. Какой знак имеет значение выражения:

1) $2a - 6$;
2) $3 - a$;
3) $\frac{a-3}{4-a}$?

21.8. Известно, что $a > 2$. Какой знак имеет значение выражения:

1) $4a - 8$;
2) $6 - 3a$;
3) $3a - 3$;
4) $(a - 2)(1 - a)$?

21.9. Какой знак имеет значение выражения $(a + 3)(a - 2)$, если:

1) $a < -3$;
2) $a > 2$;
3) $-3 < a < 2$;
4) $a < -4$?

21.10. Известно, что $a < b$ и $b < c$. Какое из утверждений верно:

1) $a > c$;
2) $a = c$;
3) $c > a$?

21.11. Известно, что $b > a$, $c < a$ и $d > b$. Сравните числа:

1) a и d;
2) b и c.

21.12. Расположите в порядке возрастания числа a, b, c и 0, если $a > b$, $c < b$, $0 < b$ и $0 > c$.

21.13. Известно, что $a > 4$. Сравните с нулём значение выражения:

1) $a - 3$;
2) $2 - a$;
3) $(a - 3)(a - 2)$;
4) $\frac{(a-4)(a-2)}{3-a}$;
5) $(1 - a^2)(4 - a)$.

21.14. Известно, что $b > -2$ и $b < 1$. Сравните с нулём значение выражения:

1) $b + 2$;
2) $1 - b$;
3) $b - 2$;
4) $(b - 1)(b - 3)$;
5) $(b + 2)(b - 4)^2$;
6) $(b - 3)(b + 3)(b - 2)^2$.

21.15. Дано: $a > b$. Сравните значения выражений:

1) $a + 9$ и $b + 9$;
2) $b - 6$ и $a - 6$;
3) $1{,}8a$ и $1{,}8b$;
4) $-a$ и $-b$;
5) $-40b$ и $-40a$;
6) $\frac{a}{20}$ и $\frac{b}{20}$;
7) $2a - 3$ и $2b - 3$;
8) $5 - 8a$ и $5 - 8b$.

21.16. Известно, что $1 \leqslant m < 2$. Какие из данных неравенств верны:

1) $-1 \leqslant m < -2$;
2) $-2 < m \leqslant -1$;
3) $-1 \geqslant -m > -2$;
4) $-2 > m \geqslant -1$?

21.17. Дано: $-3a > -3b$. Сравните значения выражений:

1) a и b;
2) $\frac{2}{7}a$ и $\frac{2}{7}b$;
3) $b - 4$ и $a - 4$;
4) $-\frac{5}{9}b$ и $-\frac{5}{9}a$;
5) $3a + 2$ и $3b + 2$;
6) $-5a + 10$ и $-5b + 10$.

21.18. Известно, что $a > b$. Расположите в порядке убывания числа $a + 7$, $b - 3$, $a + 4$, $b - 2$, b.

21.19. Дано: $a < b$. Сравните:

1) $a - 5$ и b;
2) a и $b + 6$;
3) $a + 3$ и $b - 2$.

21.20. Сравните числа a и b, если:

1) $a > c$ и $c > b + 3$; 2) $a > c$ и $c - 1 > b + d^2$,

где c и d — некоторые числа.

21.21. Сравните числа a и 0, если:

1) $7a < 8a$; 3) $-6a > -8a$;

2) $\frac{a}{2} < \frac{a}{3}$; 4) $-0{,}02a > -0{,}2a$.

21.22. Дано: $a > -2$. Докажите, что:

1) $7a + 10 > -4$; 2) $-6a - 3 < 10$.

21.23. Дано: $b \leqslant 10$. Докажите, что:

1) $5b - 9 \leqslant 41$; 2) $1 - 2b > -21$.

◆ ◆

21.24. Верно ли утверждение:

1) если $a > b$, то $a > -b$;

2) если $a > b$, то $2a > b$;

3) если $a > b$, то $2a + 1 > 2b$;

4) если $b > a$, то $\frac{b}{a} > 1$;

5) если $\frac{a}{b} > 1$ и $a > 0$, то $a > b$;

6) если $a > b + 2$ и $b - 3 > 4$, то $a > 5$;

7) если $a > b$, то $ab > b^2$;

8) так как $5 > 3$, то $5a^2 > 3a^2$?

21.25. Верно ли утверждение:

1) если $a > 1$, то $\frac{1}{a} < 1$; 4) если $2 \leqslant a < 3$, то $\frac{1}{3} < \frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{2}$;

2) если $a > 3$, то $\frac{3}{a} < 1$; 5) если $-2 < a < -1$, то $-1 < \frac{1}{a} < -\frac{1}{2}$;

3) если $a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$; 6) если $-3 < a < 3$, то $-\frac{1}{3} < \frac{1}{a} < \frac{1}{3}$?

21.26. Известно, что $1 < a < 2$. Докажите, что:

1) $\frac{1}{3} < \frac{1}{2a - 1} < 1$; 2) $1 < \frac{4}{3a - 2} < 4$.

21.27. Докажите, что если:

1) $2 < a < 3$, то $\frac{1}{a - 2} > 1$; 2) $-3 < a < -1$, то $\frac{1}{a + 1} < -\frac{1}{2}$.

21.28. Запишите верное неравенство, которое получим, если:

1) обе части неравенства $a > 2$ умножим на a;

2) обе части неравенства $b < -1$ умножим на b;

3) обе части неравенства $m < -3$ умножим на $-m$.

21.29. Запишите правильное неравенство, которое получим, если:

1) обе части неравенства $a < -a^2$ разделим на a;

2) обе части неравенства $a > a^2$ разделим на a;

3) обе части неравенства $a^3 > a^2$ разделим на $-a$.

Упражнения для повторения

21.30. Используя диаграммы Эйлера, проиллюстрируйте свойства операций над множествами:

1) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

21.31. Сократите дробь $\dfrac{a^4 + 9a^2 + 25}{a^2 + a + 5}$.

21.32. Упростите выражение $\dfrac{x^3 - y^3}{2y}\left(\dfrac{2y}{4 - 2y - 2x + xy} + \dfrac{2xy + 4y}{(x - y)(x^2 - 4)}\right)$.

21.33. Можно ли разложить 54 шарика по 10 коробкам так, чтобы во всех коробках количество шариков было разное и не было пустых коробок?

§ 22 Сложение и умножение числовых неравенств. Оценивание значения выражения

Рассмотрим примеры.

1) Если с одного поля собрали больше 40 т пшеницы, а со второго поля — больше 45 т, то можно сделать такой вывод: с двух полей вместе собрали больше чем 85 т пшеницы.

2) Если длина прямоугольника меньше чем 70 см, а ширина — меньше чем 40 см, то можно сделать такой вывод: площадь прямоугольника меньше чем 2800 см^2.

Справедливость полученных выводов подтверждают следующие теоремы.

Теорема 22.1

(О почленном сложении неравенств)

Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

Доказательство.

Рассмотрим разность $(a + c) - (b + d)$. Имеем:

$(a + c) - (b + d) = a + c - b - d = (a - b) + (c - d)$.

Так как $a > b$ и $c > d$, то разности $a - b$ и $c - d$ являются положительными числами. Следовательно, разность $(a + c) - (b + d)$ является положительной, т. е. $a + c > b + d$. ■

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 22.2

(О почленном сложении неравенств)

Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.

Неравенства $a > b$ и $c > d$ (или $a < b$ и $c < d$) называют **неравенствами одного знака**, а неравенства $a > b$ и $c < d$ (или $a < b$ и $c > d$) — **неравенствами противоположных знаков.**

Теоремы 22.1 и 22.2 позволяют сделать такой вывод.

Теорема 22.3

При почленном сложении верных неравенств одного знака результатом является верное неравенство того же знака.

Отметим, что теорема 22.3 справедлива и в случае почленного сложения трёх и более неравенств. Например, если $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2$ и $a_3 > b_3$, то $a_1 + a_2 + a_3 > b_1 + b_2 + b_3$.

Теорема 22.4

(О почленном умножении неравенств)

Если $a > b$, $c > d$ и a, b, c, d — положительные числа, то $ac > bd$.

Доказательство.

Рассмотрим разность $ac - bd$. Имеем:

$ac - bd = ac - bc + bc - bd = c(a - b) + b(c - d)$.

По условию $a - b > 0$, $c - d > 0$, $c > 0$, $b > 0$. Следовательно, разность $ac - bd$ является положительной. Из этого следует, что $ac > bd$. ■

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 22.5

(О почленном умножении неравенств)

Если $a < b$, $c < d$ и a, b, c, d — положительные числа, то $ac < bd$.

Теоремы 22.4 и 22.5 позволяют сделать такой вывод.

Теорема 22.6

При почленном умножении верных неравенств одного знака, у которых левые и правые части — положительные числа, результатом является верное неравенство того же знака.

При применении теоремы 22.6 является распространённой следующая ошибка: не учитывать требование положительности обеих частей неравенств. Например, рассмотрим два верных неравенства: $-2 > -3$ и $4 > 1$. Умножив почленно эти неравенства, получим неверное неравенство: $-8 > -3$.

Заметим, что теорема 22.6 остаётся справедливой и в случае почленного умножения трёх и более неравенств. Например, если a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 — положительные числа, причём $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2$, $a_3 > b_3$, то $a_1a_2a_3 > b_1b_2b_3$.

Следствие

Если $a > b$ и a, b — положительные числа, то $a^n > b^n$, где n — натуральное число.

Доказательство.

Запишем n верных неравенств $a > b$:

$$\left.\begin{array}{l} a > b \\ a > b \\ \ldots \\ a > b \end{array}\right\} \; n \text{ неравенств.}$$

Так как a и b — положительные числа, то можем перемножить почленно n записанных неравенств. Получим $a^n > b^n$. ■

В теоремах, рассмотренных в этом параграфе, шла речь о строгих неравенствах. Аналогичные свойства имеют и нестрогие неравенства. Например, если $a \geqslant b$ и $c \geqslant d$, то $a + c \geqslant b + d$.

Значения величин, полученные в результате измерений, не являются точными. Измерительные приборы позволяют установить, между какими числами находится значение величины. Эти числа называют **границами значения величины**.

Пусть, например, в результате измерения ширины x и длины y прямоугольника было установлено, что 2,5 см $< x <$ 2,7 см и 4,1 см $< y <$ 4,3 см. Тогда с помощью теоремы 22.2 можно оценить площадь прямоугольника. Имеем:

$$\times \begin{array}{r} 2{,}5\text{ см} < x < 2{,}7\text{ см} \\ 4{,}1\text{ см} < y < 4{,}3\text{ см} \end{array}$$
$$10{,}25\text{ см}^2 < xy < 11{,}61\text{ см}^2$$

Вообще, если известны значения границ величин, то, используя свойства числовых неравенств, можно найти границы, т. е. **оценить** значение выражения, содержащего эти величины.

Пример. Дано: $6 < a < 8$ и $10 < b < 12$. Оцените значение выражения:

1) $a + b$; 2) $a - b$; 3) ab; 4) $\frac{a}{b}$; 5) $3a - \frac{1}{2}b$.

Решение.

1) Применив теорему о почленном сложении неравенств, получим:

$$+ \begin{array}{r} 6 < a < 8 \\ 10 < b < 12 \end{array}$$
$$16 < a + b < 20$$

2) Умножив каждую часть неравенства $10 < b < 12$ на -1, получим: $-10 > -b > -12$ или $-12 < -b < -10$. Учитывая, что $a - b = a + (-b)$, далее получим:

$$+ \begin{array}{r} 6 < a < 8 \\ -12 < -b < -10 \end{array}$$
$$-6 < a - b < -2$$

3) Так как $a > 6$ и $b > 10$, то a и b принимают положительные значения. Применив теорему о почленном умножении неравенств, получим:

$$\times \begin{array}{r} 6 < a < 8 \\ 10 < b < 12 \end{array}$$
$$60 < ab < 96$$

4) Так как $10 < b < 12$, то $\frac{1}{10} > \frac{1}{b} > \frac{1}{12}$ или $\frac{1}{12} < \frac{1}{b} < \frac{1}{10}$. Учитывая, что $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$, получаем:

$$\times \begin{array}{r} 6 < a < 8 \\ \frac{1}{12} < \frac{1}{b} < \frac{1}{10} \end{array}$$
$$\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < \frac{4}{5}$$

5) Умножим каждую часть неравенства $6 < a < 8$ на 3, а каждую часть неравенства $10 < b < 12$ на $-\frac{1}{2}$. Получим два верных неравенства:

$18 < 3a < 24$ и $-6 < -\frac{1}{2}b < -5$.

Сложим эти неравенства:

$$\begin{array}{rrcccl} + & 18 & < & 3a & < & 24 \\ & -6 & < & -\frac{1}{2}b & < & -5 \\ \hline & 12 & < & 3a-\frac{1}{2}b & < & 19 \end{array}$$

Ответ: 1) $16 < a + b < 20$; 2) $-6 < a - b < -2$; 3) $60 < ab < 96$; 4) $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < \frac{4}{5}$; 5) $12 < 3a - \frac{1}{2}b < 19$. ■

1. Сформулируйте теорему о почленном сложении неравенств.

2. Объясните, какие неравенства называют неравенствами одного знака, а какие неравенства — неравенствами противоположных знаков.

3. Сформулируйте теорему о почленном умножении неравенств.

4. Сформулируйте следствие из теоремы о почленном умножении неравенств.

Упражнения

22.1. Дано: $-3 < a < 4$. Оцените значение выражения:

1) $2a$; 3) $a + 2$; 5) $3a + 1$; 7) $-4a$;

2) $\frac{a}{3}$; 4) $a - 1$; 6) $-a$; 8) $-5a + 3$.

22.2. Дано: $2 < b < 6$. Оцените значение выражения:

1) $\frac{1}{2}b$; 2) $b - 6$; 3) $2b + 5$; 4) $4 - b$.

22.3. Дано: $2 < x < 4$. Оцените значение выражения $\frac{1}{x}$.

22.4. Оцените среднее арифметическое значений a и b, если $2{,}5 < a < 2{,}6$ и $3{,}1 < b < 3{,}2$.

22.5. Оцените периметр равнобедренного треугольника с основанием a см и боковой стороной b см, если $10 < a < 14$ и $12 < b < 18$.

22.6. Оцените периметр параллелограмма со сторонами a см и b см, если $15 \leqslant a \leqslant 19$ и $6 \leqslant b \leqslant 11$.

22.7. Верно ли утверждение:

1) если $a > 2$ и $b > 7$, то $a + b > 9$;
2) если $a > 2$ и $b > 7$, то $a + b > 8$;
3) если $a > 2$ и $b > 7$, то $a + b > 9{,}2$;
4) если $a > 2$ и $b > 7$, то $a - b > -5$;
5) если $a > 2$ и $b > 7$, то $b - a > 5$;

6) если $a > 2$ и $b > 7$, то $ab > 13$;
7) если $a > 2$ и $b > 7$, то $3a + 2b > 20$;
8) если $a > 2$ и $b < -7$, то $a - b > 9$;
9) если $a < 2$ и $b < 7$, то $ab < 14$;
10) если $a > 2$, то $a^2 > 4$;
11) если $a < 2$, то $a^2 < 4$?

22.8. Дано: $a > 2{,}4$ и $b > 1{,}6$. Сравните:

1) $a + \frac{3}{4}b$ и 3,6;
2) $(a + b)^2$ и 16;
3) $(a - 0{,}4)(b + 1{,}4)$ и 6.

22.9. Известно, что $a > 3$ и $b > -2$. Докажите, что $5a + 4b > 7$.

22.10. Известно, что $a > 5$ и $b < 2$. Докажите, что $6a - 7b > 16$.

22.11. Дано: $5 < a < 8$ и $3 < b < 6$. Оцените значение выражения:

1) $4a + 3b$; 2) $3a - 6b$; 3) $\frac{a}{b}$; 4) $\frac{2b}{3a}$.

22.12. Дано: $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{7} < y < \frac{1}{4}$. Оцените значение выражения:

1) $6x + 14y$; 2) $28y - 12x$; 3) $\frac{y}{x}$.

◆ ◆

22.13. Докажите, что периметр четырёхугольника больше суммы его диагоналей.

22.14. Докажите, что каждая диагональ выпуклого четырёхугольника меньше его полупериметра.

22.15. Докажите, что сумма двух противоположных сторон выпуклого четырёхугольника меньше суммы его диагоналей.

22.16. Докажите утверждение:

1) если $a < b < 0$, то $a^2 > b^2$;
2) если $a > 0$, $b > 0$ и $a^2 > b^2$, то $a > b$.

22.17. Оцените значение a, если:

1) $a - |b| = 1$;
2) $a + b^2 = 2$;
3) $|a| + |b| = 1$.

22.18. Известно, что $b > 0$ и $a > b$. Верно ли, что выполняется неравенство:

1) $a^2 + a > b^2 + b$;
2) $a^2 - a > b^2 - b$;
3) $2 - a^2 < 2 - b^2$;
4) $a + \frac{1}{a} > b + \frac{1}{b}$?

22.19. Найдите объединение множеств A и B, если $A = \{x \mid x = 4n,\ n \in \boldsymbol{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 4n + 2,\ n \in \boldsymbol{Z}\}$.

22.20. Сократите дробь $\dfrac{x^{71} + x^{70} + \ldots + x + 1}{x^{23} + x^{22} + \ldots + x + 1}$.

22.21. Упростите выражение $\left(\dfrac{x^2}{x - y} - y\right) \cdot \left(x + \dfrac{y^2}{x + y}\right)^{-1}$.

22.22. Числа x и y таковы, что $2x - 3y = 2y^2$ и $x - 2y = 10$. Найдите значение выражения $x^2 - 4xy + 4x - 6y$.

§ 23 Неравенства с одной переменной. Числовые промежутки

Рассмотрим такую задачу. Одна из сторон параллелограмма равна 7 см. Какой должна быть длина соседней стороны, чтобы периметр параллелограмма был больше 44 см?

Пусть искомая сторона равна x см. Тогда периметр параллелограмма равен $(14 + 2x)$ см. Неравенство $14 + 2x > 44$ является математической моделью задачи о периметре параллелограмма.

Если в это неравенство вместо переменной x подставить, например, число 16, то получим верное числовое неравенство $14 + 32 > 44$. Говорят, что число 16 является **решением неравенства** с одной переменной $14 + 2x > 44$.

Определение

Решением неравенства с одной переменной называют значение переменной, которое обращает неравенство в верное числовое неравенство.

Так, каждое из чисел 15,1; 20; 101 является решением неравенства $14 + 2x > 44$, а, например, число 10 не является его решением.

Замечание. Определение решения неравенства аналогично определению корня уравнения. Однако не принято говорить «корень неравенства».

Решить неравенство означает найти все его решения или доказать, что решений не существует.

Все решения неравенства образуют **множество решений неравенства**. Если неравенство решений не имеет, то говорят, что множеством

его решений является пустое множество. Следовательно, ***решить неравенство означает найти множество его решений.***

Например, в задаче «решите неравенство $x^2 > 0$» ответ будет таким: «множество всех чисел, кроме числа 0».

Очевидно, что неравенство $|x| < 0$ решений не имеет, т. е. множеством его решений является пустое множество.

Определение

Неравенства называют равносильными, если множества их решений равны.

Приведём несколько примеров.

Неравенства $x^2 \leqslant 0$ и $|x| \leqslant 0$ равносильны. Действительно, каждое из них имеет единственное решение $x = 0$.

Неравенства $x^2 > -1$ и $|x| > -2$ равносильны, так как множеством решений каждого из них является множество всех чисел.

Так как каждое из неравенств $|x| < -1$ и $0x < -3$ решений не имеет, то они также являются равносильными.

Свойства числовых равенств помогают нам решать уравнения. Точно так же свойства числовых неравенств помогают решать неравенства.

Решая уравнение, мы заменяли его другим, более простым уравнением, но равносильным данному. По аналогичной схеме решают и неравенства.

При замене уравнения на равносильное ему уравнение используют теоремы о переносе слагаемых из одной части в другую и об умножении обеих частей уравнения на одно и то же отличное от нуля число.

Аналогичные теоремы применяют и при решении неравенств.

Теорема 23.1

Если какое-либо слагаемое перенести из одной части неравенства в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Теорема 23.2

Если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же положительное число, то получим неравенство, равносильное данному.

Теорема 23.3

Если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Идея доказательства этих теорем такая же, как идея доказательства теоремы 11.1. Докажите эти теоремы самостоятельно.

С помощью этих теорем решим неравенство, полученное выше в задаче о периметре параллелограмма.

Имеем: $14 + 2x > 44$.

Переносим слагаемое 14 в правую часть неравенства:

$$2x > 44 - 14.$$

Отсюда $2x > 30$.

Разделим обе части неравенства на 2:

$$x > 15.$$

Заметим, что полученное неравенство равносильно исходному неравенству. Множество его решений состоит из всех чисел, которые больше 15. Это множество называют **числовым промежутком** и обозначают так: $(15; +\infty)$ (читают: «промежуток от 15 до плюс бесконечности»).

Ответ может быть записан одним из способов: $(15; +\infty)$ либо $x > 15$.

Заметим, что для изображения на рисунке числового промежутка используют два способа: с помощью либо штриховки (рис. 23.1, *а*), либо дуги (рис. 23.1, *б*). Мы будем использовать второй способ.



а *б*

Рис. **23.1**

Пример 1. Решите неравенство $3 + \frac{x}{2} \leqslant 7 + x$.

Решение. Перенесём слагаемое x из правой части неравенства в левую, а слагаемое 3 — из левой части в правую и приведём подобные члены:

$$-x + \frac{x}{2} \leqslant 7 - 3;$$

$$-\frac{x}{2} \leqslant 4.$$

Умножим обе части неравенства на -2:

$$x \geqslant -8.$$

Множеством решений этого неравенства является числовой промежуток, который обозначают так: $[-8; +\infty)$ (читают: «промежуток от -8 до плюс бесконечности, включая -8»).

На рисунке 23.2 изображён числовой промежуток $[-8; +\infty)$.

Ответ: $[-8; +\infty)$.

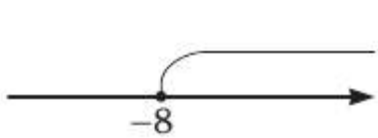


Рис. **23.2**

Пример 2. Решите неравенство $2(2 - 3x) > 3(x + 6) - 5$.

Решение. Запишем цепочку равносильных неравенств:

$$4 - 6x > 3x + 18 - 5;$$
$$4 - 6x > 3x + 13;$$
$$-3x - 6x > -4 + 13;$$
$$-9x > 9;$$
$$x < -1.$$

Множеством решений последнего неравенства является числовой промежуток, который обозначают так: $(-\infty; -1)$ (читают: «промежуток от минус бесконечности до -1»).

На рисунке 23.3 изображён числовой промежуток $(-\infty; -1)$.

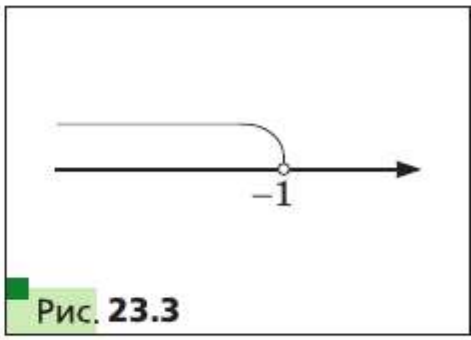


Рис. **23.3**

Ответ: $(-\infty; -1)$.

Пример 3. Решите неравенство $\frac{x-1}{2} + \frac{x}{3} \leqslant \frac{1}{6}$.

Решение. Запишем цепочку равносильных неравенств:

$$6 \cdot \frac{x-1}{2} + 6 \cdot \frac{x}{3} \leqslant 6 \cdot \frac{1}{6};$$
$$3x - 3 + 2x \leqslant 1;$$
$$5x \leqslant 4;$$
$$x \leqslant \frac{4}{5}.$$

Множеством решений последнего неравенства является числовой промежуток, который обозначают так: $\left(-\infty; \frac{4}{5}\right]$ (читают: «промежуток от минус бесконечности до $\frac{4}{5}$, включая $\frac{4}{5}$»).

На рисунке 23.4 изображён числовой промежуток $\left(-\infty; \frac{4}{5}\right]$.

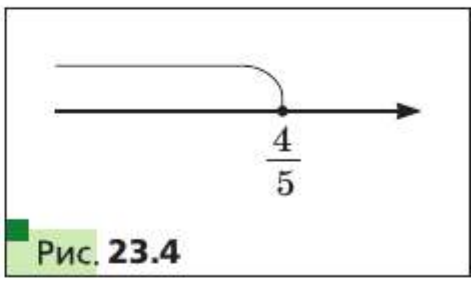


Рис. **23.4**

Ответ: $\left(-\infty; \frac{4}{5}\right]$. ■

Пример 4. Решите неравенство $3(2x - 1) + 7 \geqslant 2(3x + 1)$.

Решение. Имеем: $6x - 3 + 7 \geqslant 6x + 2;$

$$6x - 6x \geqslant 2 - 4;$$
$$0x \geqslant -2.$$

Последнее неравенство при любом значении x превращается в верное числовое неравенство $0 \geqslant -2$. Следовательно, искомое множество решений совпадает с множеством всех чисел.

Множество всех чисел можно записать в виде числового промежутка $(-\infty; +\infty)$ (читают: «промежуток от минус бесконечности до плюс бесконечности»).

Ответ: $(-\infty; +\infty)$. ■

Пример 5. Решите неравенство $4(x - 2) - 1 < 2(2x - 9)$.

Решение. Имеем: $4x - 8 - 1 < 4x - 18;$

$$4x - 4x < 9 - 18;$$

$$0x < -9.$$

Полученное неравенство при любом значении x превращается в неверное числовое неравенство $0 < -9$.

Ответ: $\varnothing$. ■

Заметим, что неравенства, рассмотренные в примерах 1–5, сводились к одному из неравенств вида: $ax > b$, или $ax < b$, или $ax \geqslant b$, или $ax \leqslant b$.

Определение

Неравенства вида $ax > b$, $ax < b$, $ax \geqslant b$ и $ax \leqslant b$, где x — переменная, a и b — параметры, называют линейными неравенствами с одной переменной.

Определение

Если множество решений данного неравенства содержит множество решений другого неравенства, то данное неравенство называют следствием другого неравенства.

Например, неравенство $x > 2$ является следствием неравенства $x > 5$ (рис. 23.5). Действительно, $(5; +\infty) \subset (2; +\infty)$.

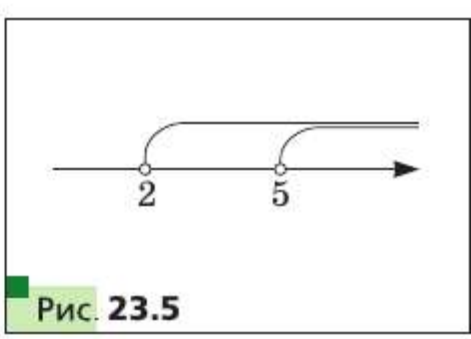


Рис. 23.5

Так как пустое множество является подмножеством любого множества, то следствием неравенства с некоторой переменной, не имеющего решений, является любое неравенство с той же переменной. Например, следствием неравенства $|x| < 0$ является неравенство $14 + 2x > 44$.

Заметим, что если два неравенства равносильны, то любое из них можно считать следствием другого.

Пример 6. При каких значениях параметра a неравенство $2x + a > 0$ является следствием неравенства $x + 1 - 3a > 0$?

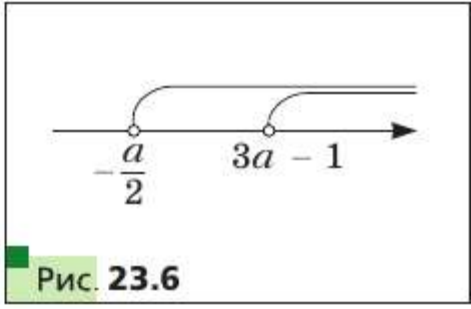
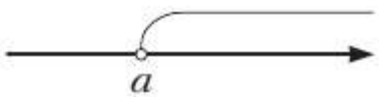
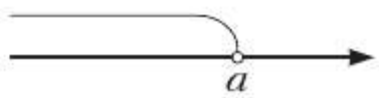
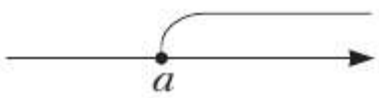
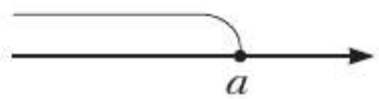


Рис. 23.6

Решение. Заменим каждое из данных неравенства на равносильное. Соответственно получаем: $x > -\frac{a}{2}$ и $x > 3a - 1$. Множество решений неравенства $x > -\frac{a}{2}$ должно содержать множество решений неравенства $x > 3a - 1$ (рис. 23.6), а это выполняется, если $-\frac{a}{2} \leqslant 3a - 1$, т. е. $a \geqslant \frac{2}{7}$.

Ответ: $a \geqslant \frac{2}{7}$.

В заключение приведём таблицу обозначений и изображений изученных числовых промежутков.

Неравенство	Промежуток	Изображение
$x > a$	$(a; +\infty)$	
$x < a$	$(-\infty; a)$	
$x \geqslant a$	$[a; +\infty)$	
$x \leqslant a$	$(-\infty; a]$	

1. Что называют решением неравенства с одной переменной?
2. Что означает решить неравенство?
3. Что образуют все решения неравенства?
4. Какие неравенства называют равносильными?
5. Сформулируйте теоремы, с помощью которых можно получить неравенство, равносильное данному.
6. Какие неравенства называют линейными неравенствами с одной переменной?

7. Как записывают, читают и изображают промежуток, являющийся множеством решений неравенства вида: $x > a$; $x < a$; $x \geqslant a$; $x \leqslant a$?

8. Решением неравенства является любое число. Как в таком случае записывают и читают промежуток, являющийся множеством решений неравенства?

Упражнения

23.1. Множеством решений какого из данных неравенств является пустое множество:

1) $(x-3)^2 > 0$; 3) $(x-3)^2 < 0$;
2) $(x-3)^2 \geqslant 0$; 4) $(x-3)^2 \leqslant 0$?

23.2. Какое из данных неравенств не имеет решений:

1) $0x > -3$; 2) $0x < 3$; 3) $0x < -3$; 4) $0x > 3$?

23.3. Множеством решений какого из данных неравенств является множество всех чисел:

1) $0x > 1$; 2) $0x > 0$; 3) $0x > -1$; 4) $x + 1 > 0$?

23.4. Множеством решений каких из данных неравенств является множество всех чисел:

1) $x^2 > 0$; 2) $x > -x$; 3) $-x^2 \leqslant 0$; 4) $|x| \geqslant 0$?

23.5. Среди данных неравенств укажите неравенство, решением которого является любое число, и неравенство, не имеющее решений:

1) $\frac{x^2+1}{x^2} \geqslant 0$; 2) $\frac{x^2+1}{x^2+1} < 1$; 3) $\frac{x^2-1}{x^2-1} \geqslant 1$; 4) $\frac{x^2}{x^2+1} \geqslant 0$.

23.6. Укажите наименьшее целое число, принадлежащее промежутку:

1) $(6; +\infty)$; 2) $[6; +\infty)$; 3) $(-3,4; +\infty)$; 4) $[-0,9; +\infty)$.

23.7. Укажите наибольшее целое число, принадлежащее промежутку:

1) $(-\infty; -4)$; 3) $(-\infty; 1]$;
2) $(-\infty; -6,2]$; 4) $(-\infty; -1,8)$.

23.8. Решите неравенство:

1) $-2x \geqslant 10$; 4) $7x - 2 > 19$; 7) $5x < 2x - 18$;
2) $\frac{1}{3}x < 9$; 5) $4 - x < 5$; 8) $36 - 2x < 4x$;
3) $-10x < 0$; 6) $5 + 8x \geqslant 6$; 9) $\frac{x+2}{5} < 2$.

23.9. Решите неравенство:

1) $-4x \leqslant -16$; 4) $-3x < \frac{6}{7}$; 7) $5 - 9x > 16$;
2) $\frac{2}{3}x \leqslant 6$; 5) $4x + 5 > -7$; 8) $\frac{x-3}{4} > -1$.
3) $-12x \geqslant 0$; 6) $9 - x \geqslant 2x$;

23.10. Решите неравенство:

1) $0x > 10$; 3) $0x > -8$; 5) $0x \geqslant 1$; 7) $0x \leqslant 0$;

2) $0x < 15$; 4) $0x < -3$; 6) $0x \leqslant 2$; 8) $0x > 0$.

23.11. Найдите наименьшее целое решение неравенства:

1) $5x \geqslant 40$; 2) $5x > 40$; 3) $-2x < -3$; 4) $-7x < 15$.

23.12. Найдите наибольшее целое решение неравенства:

1) $8x \leqslant -16$; 2) $8x < -16$; 3) $3x < 10$; 4) $-6x > -25$.

23.13. Решите неравенство:

1) $8x + 2 < 9x - 3$; 3) $3 - 11y \geqslant -3y + 6$;

2) $6y + 8 \leqslant 10y - 8$; 4) $3m - 1 \leqslant 1{,}5m + 5$.

23.14. Решите неравенство:

1) $4 + 11x > 7 + 12x$; 3) $3x - 10 < 6x + 2$;

2) $35x - 28 \leqslant 32x + 2$; 4) $6x - 3 \geqslant 2x$.

23.15. Решите неравенство:

1) $\frac{4x}{3} + \frac{x}{2} < 11$; 3) $\frac{5x}{7} - x > -4$;

2) $\frac{2x}{3} - \frac{3x}{4} \geqslant \frac{1}{6}$; 4) $\frac{x}{8} - \frac{1}{4} \leqslant x$.

23.16. Решите неравенство:

1) $\frac{y}{6} - \frac{5y}{4} < 1$; 2) $\frac{x}{10} - \frac{x}{5} > -2$.

23.17. Найдите множество решений неравенства:

1) $3 - 5(2x + 4) \geqslant 7 - 2x$;

2) $x - 2(x - 1) \geqslant 10 + 3(x + 4)$;

3) $(4x - 3)^2 + (3x + 2)^2 \geqslant (5x + 1)^2$;

4) $\frac{2x - 1}{4} \geqslant \frac{3x - 5}{5}$;

5) $(x - 5)(x + 1) \leqslant 3 + (x - 2)^2$;

6) $\frac{x + 1}{2} - \frac{x - 3}{3} > 2 + \frac{x}{6}$;

7) $(6x - 1)^2 - 4x(9x - 3) \leqslant 1$;

8) $\frac{x - 3}{9} - \frac{x + 4}{4} > \frac{x - 8}{6}$.

23.18. Найдите множество решений неравенства:

1) $(2 - y)(3 + y) \leqslant (4 + y)(6 - y)$;

2) $(y + 3)(y - 5) - (y - 1)^2 > -16$;

3) $\frac{2x}{3} - \frac{x - 1}{6} - \frac{x + 2}{2} < 0$;

4) $\frac{y - 1}{2} - \frac{2y + 1}{8} - y < 2$.

23.19. Найдите наибольшее целое решение неравенства:

1) $7(x + 2) - 3(x - 8) < 10$;

2) $(x - 4)(x + 4) - 5x > (x - 1)^2 - 17$.

23.20. Найдите наименьшее целое решение неравенства:

1) $\frac{4x + 13}{10} - \frac{5 + 2x}{4} > \frac{6 - 7x}{20} - 2$;

2) $(x - 1)(x + 1) - (x - 4)(x + 2) \geqslant 0$.

23.21. Сколько целых отрицательных решений имеет неравенство

$$x - \frac{x + 7}{4} - \frac{11x + 30}{12} < \frac{x - 5}{3}?$$

23.22. Сколько натуральных решений имеет неравенство

$$\frac{2 - 3x}{4} \geqslant \frac{1}{5} - \frac{5x + 6}{8}?$$

23.23. При каких значениях x верно равенство:

1) $|x - 5| = x - 5$;

2) $|2x + 14| = -2x - 14$?

23.24. При каких значениях y верно равенство:

1) $\frac{|y + 7|}{y + 7} = 1$;

2) $\frac{|6 - y|}{y - 6} = 1$?

23.25. Турист проплыл на лодке некоторое расстояние по течению реки, а потом вернулся назад, потратив на всё путешествие не более 5 ч. Скорость лодки в стоячей воде равна 5 км/ч, а скорость течения — 1 км/ч. Какое наибольшее расстояние мог проплыть турист по течению реки?

23.26. Взяв четыре последовательных целых числа, нашли разность произведений крайних и средних чисел. Найдите четыре таких числа, для которых эта разность больше нуля.

23.27. В коробке находятся синие и жёлтые шарики. Количество синих шариков относится к количеству жёлтых как 3 : 4. Какое наибольшее количество синих шариков может быть в коробке, если всего шариков не больше 45?

23.28. Стороны треугольника равны 8 см, 14 см и a см, где a — натуральное число. Какое наибольшее значение может принимать a?

23.29. Какие из неравенств являются следствиями неравенства $1 - 3x > 0$:

1) $x > \frac{1}{3}$; 3) $x \leqslant \frac{1}{3}$; 5) $x < \frac{2}{5}$;

2) $x < \frac{1}{3}$; 4) $x < \frac{1}{4}$; 6) $x < 1$?

23.30. Решите неравенство:

1) $\frac{2}{x^2} + 2 > 0$;
2) $(x+2)^2 > 0$;
3) $(x+2)^2 \leqslant 0$;
4) $\frac{x+2}{x+2} > \frac{2}{3}$;
5) $\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2 > 0$;
6) $\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2 \geqslant 0$;
7) $|x| > -1$;
8) $|x^2 - 3x - 2| < -1$;
9) $\left|\frac{1}{x+3}\right| > -2$;
10) $|x^2 - 4| \leqslant 0$;
11) $|x| \geqslant -x^2$;
12) $|x| > -x^2$;
13) $|x| > x$;
14) $|x| \geqslant -x$;
15) $\frac{|x|}{x} \geqslant 1$;
16) $\frac{|x|}{x} > 1$;
17) $|x| + x \geqslant -x^2$;
18) $|x| - x \geqslant -x^2$.

23.31. Найдите множество решений неравенства:

1) $|x| > 0$;
2) $|x| \leqslant 0$;
3) $|x| < 0$;
4) $|x| > -2$;
5) $\left|\frac{1}{x}\right| > -2$;
6) $|x| > -|x-4|$;
7) $\left|\frac{1}{x}\right| > -|x|$;
8) $\frac{|x|}{x} < 1$;
9) $\frac{|x|}{x} \leqslant 1$;
10) $|x| + x > -x^2$;
11) $|x| + x \leqslant -x^2$;
12) $|x| - x \leqslant -x^2$.

23.32. Равносильны ли неравенства:

1) $\frac{1}{x} < 1$ и $x > 1$;
2) $x^2 \geqslant x$ и $x \geqslant 1$;
3) $(x-1)^2 > 0$ и $|x-1| > 0$;
4) $(x-5)^2 < 0$ и $|x-4| < 0$;
5) $|x| \leqslant 0$ и $x^4 \leqslant 0$;
6) $(x-2)^2 \leqslant 0$ и $(x-1)^2 \leqslant 0$?

23.33. Какое из неравенств в паре является следствием второго:

1) $2x + 1 > 0$ и $1 - 2x < 0$;
2) $3x - 5 \leqslant 0$ и $6 - 5x \geqslant 0$;
3) $|x| \geqslant 0$ и $x^2 > 0$;
4) $|x+3| < 0$ и $17x - 19 > 0$;
5) $x + 1 \geqslant 0$ и $(x+1)(x^2+1) > 0$;
6) $x^2 + 2x + 1 > 0$ и $x + 1 > 0$;
7) $\frac{1}{x} > 0$ и $x \geqslant 0$?

23.34. Постройте график функции:

1) $y = |x - 2|$;
2) $y = |x + 3| - 1$;
3) $y = |x - 1| + x$.

23.35. Постройте график функции:

1) $y = |x + 4|$;
2) $y = |x - 5| + 2$;
3) $y = |2x - 6| - x$.

23.36. При каких значениях параметра a уравнение:

1) $4x + a = 2$ имеет положительный корень;

2) $(a + 6)\,x = 3$ имеет отрицательный корень;

3) $(a - 1)\,x = a^2 - 1$ имеет единственный положительный корень?

23.37. При каких значениях параметра m уравнение:

1) $2 + 4x = m - 6$ имеет неотрицательный корень;

2) $mx = m^2 - 7m$ имеет единственный отрицательный корень?

23.38. Существует ли такое значение параметра a, при котором не имеет решений неравенство (в случае утвердительного ответа укажите это значение):

1) $ax > 3x + 4$; 2) $(a^2 + a)\,x \leqslant a$?

23.39. Существует ли такое значение параметра a, при котором любое число является решением неравенства (в случае утвердительного ответа укажите это значение):

1) $ax > -1 - 7x$; 2) $(a^2 - 16)\,x \leqslant a + 4$?

◆ ◆ ◆

23.40. Для каждого значения параметра a решите неравенство:

1) $ax > 0$; 3) $ax \geqslant a$; 5) $(a + 3)\,x \leqslant a^2 - 9$;

2) $ax < 1$; 4) $(a - 2)\,x > a^2 - 4$; 6) $2(x - a) < ax - 4$.

23.41. Для каждого значения параметра a решите неравенство:

1) $a^2x \leqslant 0$; 2) $(a + 4)\,x > 1$; 3) $a + x < 2 - ax$.

23.42. При каких значениях параметра a первое из неравенств в паре является следствием второго неравенства:

1) $2x - a > 0$ и $x + 2a - 3 > 0$;

2) $3x + a \leqslant 0$ и $2x - a + 4 < 0$;

3) $x + a - 3 > 0$ и $\frac{x}{2} + a - 1 \geqslant 0$;

4) $ax < 1$ и $x > 1$;

5) $x > 0$ и $ax > 1$?

23.43. При каких значениях параметра a равносильны неравенства:

1) $2x - a > 0$ и $x + 2a - 3 > 0$;

2) $3x + a \leqslant 0$ и $2x - a + 4 < 0$;

3) $3x - a \geqslant 0$ и $x - a - 1 \geqslant 0$;

4) $3x - a \geqslant 0$ и $ax - 3 \geqslant 0$;

5) $ax \geqslant 1$ и $2ax > 3$;

6) $a^2x \geqslant 1$ и $2ax \geqslant 3$?

Упражнения для повторения

23.44. Переменные x, y, z таковы, что $\frac{x}{2z} = 5$, $\frac{y}{3z} = 4$. Найдите значение выражения $\frac{y}{x}$.

23.45. Приведите пример ста попарно различных множеств таких, что объединение любых двух из них содержит каждое из остальных 98 в качестве подмножества.

23.46. Упростите выражение $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$.

23.47. Докажите, что при любом целом значении n значение выражения $n(n+1)(2n+1)$ кратно 6.

§ 24 Системы и совокупности линейных неравенств с одной переменной

Рассмотрим неравенства $2x-1\geqslant 0$ и $5-x\geqslant 0$. Поставим такую задачу: найти множество общих решений этих неравенств.

Если требуется найти множество общих решений двух или нескольких неравенств, то говорят, что надо решить **систему неравенств**.

Как и систему уравнений, систему неравенств записывают с помощью фигурной скобки.

Для нахождения множества общих решений заданных выше неравенств надо решить систему неравенств

$$\begin{cases}2x-1\geqslant 0,\\5-x\geqslant 0.\end{cases} \qquad (1)$$

Определение

Решением системы неравенств с одной переменной называют значение переменной, которое обращает каждое неравенство системы в верное числовое неравенство.

Так, числа 2, 3, 4, 5 являются решениями системы (1), а, например, число 7 не является её решением.

Решить систему неравенств — это значит найти множество её решений.

Например, в задаче «Решите систему неравенств $\begin{cases}0x\geqslant -1,\\|x|\geqslant 0\end{cases}$ ответ будет таким: «множество всех чисел».

Очевидно, что множество решений системы $\begin{cases}x\leqslant 5,\\x\geqslant 5\end{cases}$ состоит из единственного числа 5.

Система $\begin{cases}x>5,\\x<5\end{cases}$ решений не имеет, т. е. множеством её решений является пустое множество.

Решим систему (1). Преобразовав каждое неравенство системы в равносильное ему, получим: $\begin{cases} 2x \geqslant 1, \\ -x \geqslant -5; \end{cases} \begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2}, \\ x \leqslant 5. \end{cases}$

Множество решений последней системы состоит из всех чисел, которые не меньше $\frac{1}{2}$ и не больше 5, т. е. из всех чисел, удовлетворяющих неравенству $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 5$. Это множество является числовым промежутком, который обозначают так: $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ (читают: «промежуток от $\frac{1}{2}$ до 5, включая $\frac{1}{2}$ и 5»).

На рисунке 24.1 изображён числовой промежуток $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$.

Ответ к задаче о нахождении общих решений неравенств $2x - 1 \geqslant 0$ и $5 - x \geqslant 0$ может быть записан одним из способов: $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ либо $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 5$.

Заметим, что все общие точки промежутков $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ и $(-\infty; 5]$ образуют промежуток $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ (рис. 24.2). Записывают: $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \cap (-\infty; 5] = \left[\frac{1}{2}; 5\right]$.

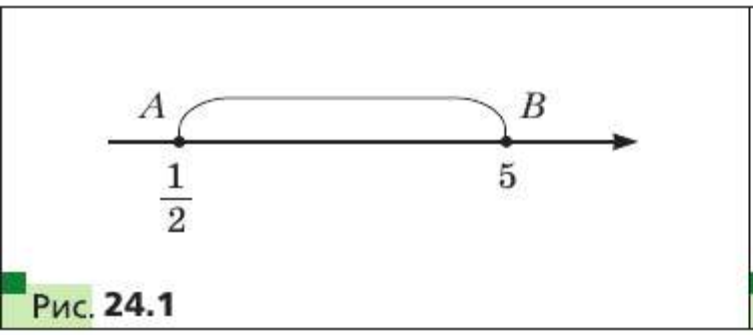


Рис. **24.1**

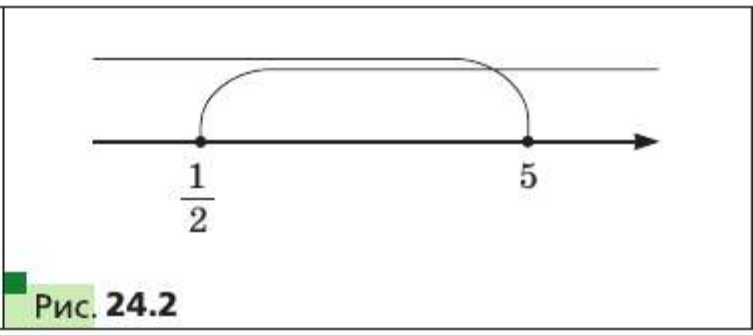


Рис. **24.2**

Промежутки $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ и $(-\infty; 5]$ являются множествами решений соответственно неравенств $x \geqslant \frac{1}{2}$ и $x \leqslant 5$. Тогда можно сказать, что *множество решений системы* $\begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2}, \\ x \leqslant 5 \end{cases}$ *является пересечением множеств решений каждого из неравенств, составляющих систему.*

Следовательно, ***чтобы решить систему неравенств, надо найти пересечение множеств решений неравенств, составляющих систему.***

Пример 1. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3x - 1 > -7, \\ 3 - 4x > -9. \end{cases}$

Решение. Имеем: $\begin{cases} 3x > -6, \\ -4x > -12; \end{cases} \begin{cases} x > -2, \\ x < 3. \end{cases}$

С помощью координатной прямой найдём пересечение множеств решений неравенств данной системы, т. е. пересечение промежутков $(-\infty; 3)$ и $(-2; +\infty)$ (рис. 24.3). Искомое пересечение состоит из всех чисел, удовлетворяющих неравенству $-2 < x < 3$. Это множество является числовым промежутком, который обозначают так: $(-2; 3)$ (читают: «промежуток от -2 до 3»). Таким образом, $(-\infty; 3) \cap (-2; +\infty) = (-2; 3)$.

Ответ: $(-2; 3)$. ■

Пример 2. Решите систему неравенств $\begin{cases} 4x - 3 < 1, \\ 3 - x \leqslant 5. \end{cases}$

Решение. Имеем: $\begin{cases} 4x < 4, \\ -x \leqslant 2; \end{cases} \begin{cases} x < 1, \\ x \geqslant -2. \end{cases}$

С помощью координатной прямой найдём пересечение промежутков $(-\infty; 1)$ и $[-2; +\infty)$, являющихся множествами решений неравенств данной системы (рис. 24.4). Искомое пересечение состоит из всех чисел, удовлетворяющих неравенству $-2 \leqslant x < 1$. Это множество является числовым промежутком, который обозначают так: $[-2; 1)$ (читают: «промежуток от -2 до 1, включая -2»). Таким образом, $(-\infty; 1) \cap [-2; +\infty) = [-2; 1)$.

Ответ: $[-2; 1)$. ■

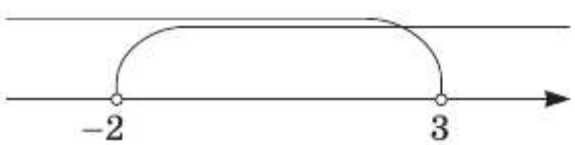


Рис. **24.3**



Рис. **24.4**

Пример 3. Решите систему неравенств $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ x > -2. \end{cases}$

Решение. Имеем: $\begin{cases} 5x - 3 \leqslant 2, \\ 4x - 1 > -9; \end{cases} \begin{cases} x \leqslant 1, \\ x > -2. \end{cases}$

Множеством решений последней системы является пересечение промежутков $(-\infty; 1]$ и $(-2; +\infty)$ (рис. 24.5). Это пересечение является числовым промежутком, который обозначают так: $(-2; 1]$ (читают: «промежуток от -2 до 1, включая 1»). Таким образом, $(-\infty; 1] \cap (-2; +\infty) = (-2; 1]$.

Ответ: $(-2; 1]$. ■

Пример 4. Решите неравенство $-7 < 3x + 5 < 11$.

Решение. Решениями неравенства будут те значения переменной, которые одновременно удовлетворяют каждому из неравенств $3x + 5 > -7$ и $3x + 5 < 11$, т. е. данное двойное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 3x + 5 > -7, \\ 3x + 5 < 11. \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} x > -4, \\ x < 2. \end{cases}$

Ответ: $(-4; 2)$. ■

Пример 5. Решите неравенство $x^2(x + 1) > 0$.

Решение. Произведение двух множителей принимает положительные значения, если эти множители принимают значения одного знака. Заметим, что $x = 0$ не является решением данного неравенства. При $x \neq 0$ получаем, что $x^2 > 0$. Поэтому множитель $x + 1$ должен принимать положительные значения. Отсюда $x > -1$. Однако промежутку $(-1; +\infty)$ принадлежит число 0, не являющееся решением данного неравенства. Следовательно, данное неравенство равносильно системе $\begin{cases} x + 1 > 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$ Решением этой системы является объединение двух промежутков: $(-1; 0)$ и $(0; +\infty)$ (рис. 24.6).

Ответ: $(-1; 0) \cup (0; +\infty)$ ■



Рис. **24.5**

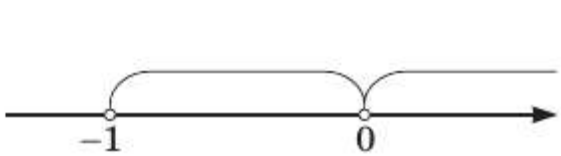


Рис. **24.6**

Пример 6. Решите неравенство $|x|(x-1) \geqslant 0$.

Решение. Поскольку при любом значении x выполняется неравенство $|x| \geqslant 0$, то может показаться, что данное неравенство равносильно неравенству $x - 1 \geqslant 0$, т. е. искомым решением является промежуток $[1; +\infty)$.

Однако в этих рассуждениях не учтено, что если один из множителей равен нулю, то произведение равно нулю независимо от значения второго множителя. Поэтому решением данного неравенства также является число 0, которое не принадлежит уже найденному промежутку $[1; +\infty)$.

Любое число $x \neq 0$, не принадлежащее промежутку $[1; +\infty)$, не может являться решением исходного неравенства.

Следовательно, искомое множество решений состоит из объединения множества решений уравнения $|x| = 0$ и множества решений неравенства $x - 1 \geqslant 0$.

Ответ: $\{0\} \cup [1; +\infty)$. ■

Если требуется найти объединение множеств решений неравенств, то говорят, что надо решить **совокупность неравенств**. Совокупность неравенств записывают с помощью квадратной скобки.

Так, чтобы решить неравенство $|x|(x-1) \geqslant 0$, надо решить совокупность

$$\left[\begin{array}{l} |x| = 0, \\ x - 1 \geqslant 0. \end{array}\right.$$

Пример 7. Решите неравенство $(x+2)(x-1)^2 \leqslant 0$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x + 2 \leqslant 0, \\ x - 1 = 0. \end{array}\right.$$

Отсюда $\left[\begin{array}{l} x \leqslant -2, \\ x = 1. \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup \{1\}$. ■

Пример 8. Для каждого значения параметра a решите неравенство $(x-a)^2(x-2) \geqslant 0$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} x - 2 \geqslant 0, \\ x - a = 0. \end{array}\right.$

Отсюда $\left[\begin{array}{l} x \geqslant 2, \\ x = a. \end{array}\right.$

Если $a < 2$ (рис. 24.7), то множеством решений исходного неравенства является множество $\{a\} \cup [2; +\infty)$.

Если $a \geqslant 2$ (рис. 24.8), то промежуток $[2; +\infty)$ является множеством решений исходного неравенства. ■

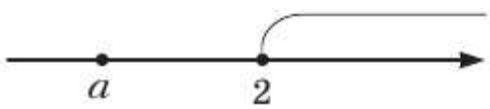


Рис. **24.7**

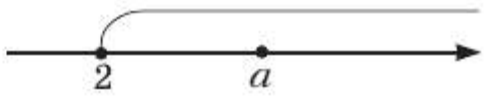
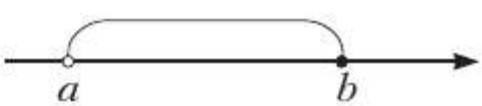
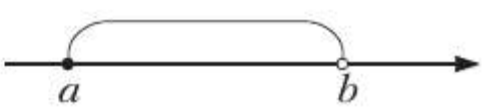


Рис. **24.8**

В заключение приведём таблицу обозначений и изображений числовых промежутков, изученных в этом параграфе.

Неравенство	Промежуток	Изображение
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a; b]$	
$a < x < b$	$(a; b)$	
$a < x \leqslant b$	$(a; b]$	
$a \leqslant x < b$	$[a; b)$	

1. В каких случаях говорят, что надо решить систему неравенств?
2. С помощью какого символа записывают систему неравенств?
3. Что называют решением системы неравенств с одной переменной?
4. Что означает решить систему неравенств?
5. Опишите алгоритм решения системы неравенств.
6. Как записывают, читают, называют и изображают промежуток, являющийся множеством решений неравенства вида: $a \leqslant x \leqslant b$? $a < x < b$? $a < x \leqslant b$? $a \leqslant x < b$?
7. В каких случаях говорят, что надо решить совокупность неравенств?

Упражнения

24.1. Изобразите на координатной прямой и запишите промежуток, который задаётся неравенством:

1) $0 < x < 5$; 3) $0{,}2 \leqslant x < 102$;

2) $\frac{1}{6} < x \leqslant 2\frac{1}{7}$; 4) $-2{,}4 \leqslant x \leqslant -1$.

24.2. Запишите все целые числа, принадлежащие промежутку:

1) $[3; 7]$; 2) $(2{,}9; 6]$; 3) $[-5{,}2; 1]$; 4) $(-2; 2)$.

24.3. Укажите наименьшее и наибольшее целые числа, принадлежащие промежутку:

1) $[-12; -6]$; 2) $(5; 11]$; 3) $(-10{,}8; 1{,}6]$; 4) $[-7{,}8; -2{,}9]$.

24.4. Изобразите на координатной прямой и запишите пересечение промежутков:

1) $[-1; 7]$ и $[4; 9]$; 4) $(-\infty; 2{,}6)$ и $(2{,}8; +\infty)$;

2) $[3; 6]$ и $(3; 8)$; 5) $[9; +\infty)$ и $[11{,}5; +\infty)$;

3) $(-\infty; 3{,}4)$ и $(2{,}5; +\infty)$; 6) $(-\infty; -4{,}2]$ и $(-\infty; -1{,}3)$.

24.5. Известно, что $a < b < c < d$. Какой из данных промежутков является пересечением промежутков $(a; c)$ и $(b; d)$:

1) $(a; d)$; 2) $(b; c)$; 3) $(c; d)$; 4) $(a; b)$?

24.6. Известно, что $m < n < k < p$. Какой из данных промежутков является пересечением промежутков $(m; p)$ и $(n; k)$:

1) $(m; n)$; 2) $(k; p)$; 3) $(n; k)$; 4) $(m; p)$?

24.7. Изобразите на координатной прямой и запишите множество решений системы неравенств:

1) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x \leqslant -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < 2, \\ x \geqslant -1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x > 2, \\ x \geqslant -1; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \leqslant 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x > -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x < -1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x > 2, \\ x \leqslant -1; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x < 2. \end{cases}$

24.8. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x - 4 < 0, \\ 2x \geqslant -6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 6x + 3 \geqslant 0, \\ 7 - 4x < 7; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 3x - 6 \leqslant x - 1, \\ 11x + 13 < x + 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 2 > 3, \\ -3x < -12; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 10x - 1 \geqslant 3, \\ 7 - 3x \geqslant 2x - 3; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 5x + 14 \geqslant 18 - x, \\ 1{,}5x + 1 < 3x - 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 6 > 2, \\ \frac{x}{4} < 2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x - 2 < 1 + 3x, \\ 5x - 7 \leqslant x + 9; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 4x + 19 \leqslant 5x - 1, \\ 10x < 3x + 21. \end{cases}$

24.9. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} -4x \leqslant -12, \\ x + 2 > 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 8 - x \geqslant 5, \\ x - 7 \leqslant 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - 3 < 5x, \\ 7x - 10 < 5x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2 - 3x < 4x - 12, \\ 7 + 3x \geqslant 2x + 10; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + 3 \geqslant 8, \\ \dfrac{x+1}{3} < 6; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x - 2 \geqslant 2x + 1, \\ 2x + 3 \leqslant 33 - 3x. \end{cases}$

24.10. Найдите множество решений неравенства:

1) $-3 < x - 4 < 7$;

2) $-2{,}4 \leqslant 3x + 0{,}6 \leqslant 3$;

3) $0{,}8 \leqslant 6 - 2x < 1{,}4$;

4) $4 < \dfrac{x}{5} - 2 \leqslant 5$.

24.11. Решите неравенство:

1) $2 < x + 10 \leqslant 14$;

2) $10 < 4x - 2 < 18$;

3) $-1{,}8 \leqslant 1 - 7x \leqslant 36$;

4) $1 \leqslant \dfrac{x+1}{4} < 1{,}5$.

24.12. Найдите наименьшее целое решение системы неравенств

$$\begin{cases} x + 8 \geqslant 17, \\ \dfrac{x}{2} > 4{,}5. \end{cases}$$

24.13. Найдите наибольшее целое решение системы неравенств

$$\begin{cases} 2x + 1 < -4, \\ 3x - 6 \leqslant -12. \end{cases}$$

24.14. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 8(2 - x) - 2x > 3, \\ -3(6x - 1) - x < 2x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{4} - \dfrac{2x+3}{3} > 1, \\ 6(2x - 1) < 5(x - 4) - 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2(x - 3) \leqslant 3x + 4(x + 1), \\ (x - 3)(x + 3) \leqslant (x - 4)^2 - 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2(x + 11) \geqslant 3(6 - x), \\ (x - 3)(x + 6) \geqslant (x + 5)(x - 4); \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x - \dfrac{x+1}{2} \leqslant \dfrac{x+1}{3}, \\ (x + 5)(x - 3) + 41 \geqslant (x - 6)^2; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x + 4 \leqslant 2x - 8, \\ (x + 2)(x - 1) \geqslant (x + 3)(x - 2); \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{7} < \dfrac{x+1}{4}, \\ (x - 6)(x + 2) + 4x < x^2 - 49; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{6x+1}{6} - \dfrac{5x-1}{5} > -1, \\ 2(x + 8) - 3(x + 2) < 5 - x. \end{cases}$

24.15. Найдите множество решений системы неравенств:

1) $\begin{cases} \frac{2x-3}{5} - \frac{4x-9}{6} > 1, \\ 5(x-1) + 7(x+2) > 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{x+1}{2} - \frac{x+2}{3} < \frac{x+12}{6}, \\ 0,3x - 19 \leqslant 1,7x - 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-6)^2 < (x-2)^2 - 8, \\ 3(2x-1) - 8 < 34 - 3(5x-9); \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{3x-2}{3} - \frac{4x+1}{4} \leqslant 1, \\ (x-1)(x-2) > (x+4)(x-7). \end{cases}$

24.16. Найдите целые решения системы неравенств:

1) $\begin{cases} 2x - 1 < 1,7 - x, \\ 3x - 2 \geqslant x - 8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{x}{4} < 1, \\ 2x - \frac{x}{2} \geqslant 10. \end{cases}$

24.17. Сколько целых решений имеет система неравенств:

1) $\begin{cases} 4x + 3 \geqslant 6x - 7, \\ 3(x+8) \geqslant 4(8-x); \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - \frac{x+1}{3} - \frac{x-2}{6} < 2, \\ \frac{2x-5}{3} \geqslant -3? \end{cases}$

24.18. Решите неравенство:

1) $-3 < \frac{2x-5}{2} < 4;$

2) $-4 \leqslant 1 - \frac{x-2}{3} \leqslant -3.$

24.19. Решите неравенство:

1) $-2 \leqslant \frac{6x+1}{4} < 4;$

2) $1,2 < \frac{7-3x}{5} \leqslant 1,4.$

24.20. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x < 4, \\ x > 2, \\ x < 3,6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - 6 < 8, \\ 4 - 4x < 10, \\ 8x - 9 > 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 0,4 - 8x \geqslant 3,6, \\ 1,5x - 2 < 4, \\ 4,1x + 10 < 1,6x + 5. \end{cases}$

24.21. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} -x < 2, \\ 2x \geqslant 7, \\ x < -4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x - 1 < 2x + 2, \\ 2x + 1 > 8 - 5x, \\ 5x - 25 \leqslant 0. \end{cases}$

24.22. Решите совокупность неравенств:

1) $\begin{cases} x < 1, \\ x > 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x < 1, \\ x < 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x > 1, \\ x > 3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x > 1, \\ x < 3. \end{cases}$

24.23. Решите совокупность неравенств:

1) $\begin{cases} x \leqslant 7, \\ x < 7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x \leqslant 7, \\ x > 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x \geqslant 7, \\ x > 7; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x > 7, \\ x < 7. \end{cases}$

24.24. Решите совокупность неравенств:

1) $\left[\begin{array}{l} 1 < x < 2, \\ x \geqslant 2; \end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l} 1 < x < 2, \\ x \leqslant 1; \end{array}\right.$ 3) $\left[\begin{array}{l} 1 < x < 2, \\ x \geqslant 1; \end{array}\right.$ 4) $\left[\begin{array}{l} 1 < x < 2, \\ x \leqslant 2. \end{array}\right.$

24.25. Решите совокупность $\left[\begin{array}{l} x \neq 2, \\ x \neq 7. \end{array}\right.$

24.26. Решите систему:

1) $\begin{cases} x > 2, \\ \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 3; \end{array}\right. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 4, \\ \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 3; \end{array}\right. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x > -3, \\ \left[\begin{array}{l} x > 1, \\ x < 0; \end{array}\right. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x < 4, \\ \left[\begin{array}{l} x > 2, \\ x < -2. \end{array}\right. \end{cases}$

24.27. Решите неравенство:

1) $x^2(x + 2) > 0$; 3) $x^2(x - 2) \geqslant 0$; 5) $x^2(x + 2) \leqslant 0$;
2) $x^2(x + 2) \geqslant 0$; 4) $x^2(x - 2) < 0$; 6) $x^2(x - 2) \leqslant 0$.

24.28. Решите неравенство:

1) $|x - 1|(x + 3) > 0$; 3) $|x - 1|(x - 3) \geqslant 0$; 5) $|x - 1|(x + 3) \leqslant 0$;
2) $|x - 1|(x + 3) \geqslant 0$; 4) $|x - 1|(x - 3) < 0$; 6) $|x - 1|(x - 3) \leqslant 0$.

24.29. Решите неравенство:

1) $\dfrac{x}{|x - 1|} > 0$; 2) $\dfrac{x}{|x - 1|} \geqslant 0$.

24.30. Решите неравенство:

1) $\dfrac{x}{|x + 1|} < 0$; 2) $\dfrac{x}{|x + 1|} \leqslant 0$.

24.31. При каких значениях параметра a имеет хотя бы одно решение система неравенств:

1) $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x < a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leqslant 3, \\ x \geqslant a? \end{cases}$

24.32. При каких значениях параметра a не имеет решений система неравенств:

1) $\begin{cases} x > 4, \\ x < a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ x \geqslant a? \end{cases}$

24.33. При каких значениях параметра a множеством решений системы неравенств $\begin{cases} x > -1, \\ x \geqslant a \end{cases}$ является промежуток:

1) $(-1; +\infty)$; 2) $[1; +\infty)$?

24.34. Для каждого значения параметра a решите систему неравенств

$$\begin{cases} x < 2, \\ x \leqslant a. \end{cases}$$

24.35. Для каждого значения параметра a решите систему неравенств

$$\begin{cases} x < -3, \\ x > a. \end{cases}$$

◆ ◆ ◆

24.36. При каких значениях параметра a множество решений системы неравенств $\begin{cases} x \geqslant 7, \\ x < a \end{cases}$ содержит четыре целых решения?

24.37. При каких значениях параметра b множество решений системы неравенств $\begin{cases} x < 5, \\ x \geqslant b \end{cases}$ содержит три целых решения?

24.38. При каких значениях параметра a наименьшим целым решением системы неравенств $\begin{cases} x \geqslant 6, \\ x > a \end{cases}$ является число 9?

24.39. При каких значениях параметра b наибольшим целым решением системы неравенств $\begin{cases} x \leqslant b, \\ x < -2 \end{cases}$ является число -6?

24.40. При каких значениях параметра a решением системы $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant a + 8, \\ x \geqslant 4 \end{cases}$ является отрезок, длина которого равна 5?

24.41. При каких значениях параметра a решением системы $\begin{cases} a - 7 \leqslant x \leqslant a, \\ x \leqslant 3 \end{cases}$ является отрезок, длина которого равна 4?

24.42. Для каждого значения параметра a решите неравенство:

1) $(x - a)^2(x - 1) > 0$;
2) $(x - a)^2(x - 1) \geqslant 0$;
3) $(x - a)(x - 1)^2 < 0$;
4) $(x - a)(x - 1)^2 \leqslant 0$.

24.43. Для каждого значения параметра a решите неравенство:

1) $|x + a|(x + 1) > 0$;
2) $|x + a|(x + 1) \geqslant 0$;
3) $(x + a)|x + 1| < 0$;
4) $(x + a)|x + 1| \leqslant 0$.

Упражнения для повторения

24.44. Упростите выражение $\left(\dfrac{x+9}{x+7}\right)^{-1} + \left(\dfrac{x+7}{x^2+81-18x} + \dfrac{x+5}{x^2-81}\right)\left(\dfrac{x+3}{x-9}\right)^{-2}$.

24.45. Найдите все натуральные значения n, при которых является целым числом значение выражения $\dfrac{2n+11}{n+3}$.

24.46. Существуют ли такие натуральные числа n и k, что значение выражения $5^n + 1$ кратно значению выражения $5^k - 1$?

24.47. В классе 35 учащихся. Из них 20 посещают математический кружок, 11 — кружок для юных физиков, а 10 учащихся не посещают эти кружки. Сколько физиков увлекается математикой?

§ 25 Уравнения и неравенства, содержащие знак модуля

Напомним основные сведения о модуле числа.

Определение

Модулем числа a называют расстояние от точки, изображающей число a на координатной прямой, до начала отсчёта.

Модуль числа a обозначают так: $|a|$.

Из определения модуля следует, что $|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$

Следовательно, чтобы найти модуль числа (или, как ещё говорят, раскрыть модуль), надо знать знак числа.

Например, $|\pi - 3| = \pi - 3$, так как $\pi > 3$.

$|\pi - 4| = 4 - \pi$, так как $\pi < 4$.

$|x^2 + 1| = x^2 + 1$, так как $x^2 + 1 > 0$ при любом значении x.

Пример 1. Раскройте модуль $|2x - 1|$.

Решение. Из определения модуля числа следует, что

$$|2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1, \text{ если } x \geqslant \frac{1}{2}, \\ 1 - 2x, \text{ если } x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$ ■

Перечислим свойства модуля, следующие из определения.

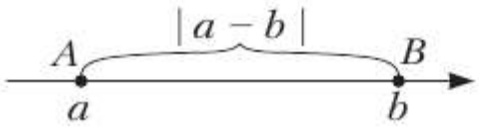
1) Модуль произвольного числа принимает только неотрицательные значения, т. е. $|a| \geqslant 0$.

2) Модули противоположных чисел равны, т. е. $|a| = |-a|$.

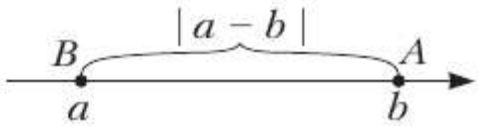
3) Если $|a| = b$, то $b \geqslant 0$ и $a = b$ или $a = -b$.

4) Если $b \geqslant 0$ и $a = b$ или $a = -b$, то $|a| = b$.

5) Расстояние между точками $A(a)$ и $B(b)$ на координатной прямой равно $|a - b|$ (рис. 25.1).



$a < b$



$a > b$

Рис. **25.1**

Рассмотрим основные приёмы решения уравнений, содержащих знак модуля.

Теорема 25.1

Если $a \geqslant 0$, то уравнение вида $|x| = a$ равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x = a, \\ x = -a. \end{array}\right.$$

Доказательство.

Если $a = 0$, то доказываемая теорема очевидна. Если $a > 0$, то существует только два числа, a и $-a$, модули которых равны a. ■

Пример 2. Решите уравнение $|x - 1| = 2$.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x - 1 = 2, \\ x - 1 = -2. \end{array}\right.$$

Отсюда $\left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -1. \end{array}\right.$

Ответ: -1; 3.

Это уравнение можно решить иначе, если условие задачи «перевести на геометрический язык»: найдите координаты всех точек координатной прямой, которые удалены от точки $A(1)$ на 2 единичных отрезка. Очевидно, что существует только две такие точки: $B(-1)$ и $C(3)$ (рис. 25.2).

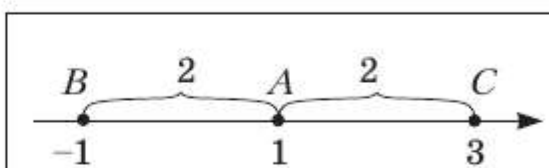


Рис. **25.2**

Обобщением теоремы 1 является следующая теорема.

Теорема 25.2

Уравнение вида $|f(x)| = g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right. \end{cases}$$

Воспользовавшись идеей доказательства теоремы 11.1 и свойствами модуля 3 и 4, докажите эту теорему самостоятельно.

Пример 3. Решите уравнение $|2x - 1| = 3x + 1$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3x + 1 \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2x - 1 = 3x + 1, \\ 2x - 1 = -3x - 1. \end{array}\right. \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} x \geqslant -\frac{1}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 0. \end{array}\right. \end{cases}$

Последняя система имеет единственное решение $x = 0$.

Ответ: 0. ■

Уравнение вида $|f(x)| = g(x)$ можно решить и другим способом — раскрыть модуль, рассмотрев два случая $f(x) \geqslant 0$ и $f(x) < 0$, т. е. заменить данное уравнение на равносильную ему совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) = g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Например, решение уравнения $|2x - 1| = 3x + 1$ можно записать так:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - 1 \geqslant 0, \\ 2x - 1 = 3x + 1, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 1 < 0, \\ -2x + 1 = 3x + 1; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2}, \\ x = -2, \end{cases} \\ \begin{cases} x < \frac{1}{2}, \\ x = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Отсюда $x = 0$.

Пример 4. Решите уравнение $|x+1|+|x-2|=3$.

Решение. Числа -1 и 2 разбивают область определения уравнения на три промежутка: $(-\infty;\,-1)$, $[-1;\,2]$, $(2;\,+\infty)$, на каждом из котором значения выражений $x+1$ и $x-2$ сохраняют постоянный знак.

На промежутке $(-\infty;\,-1)$ значения выражений $x+1$ и $x-2$ отрицательны. На промежутке $[-1;\,2]$ выражение $x+1$ принимает неотрицательные значения, а выражение $x-2$ — неположительные. На промежутке $(2;\,+\infty)$ значения выражений $x+1$ и $x-2$ положительны. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности трёх систем.

1) $\begin{cases} x<-1, \\ -(x+1)-(x-2)=3. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} x<-1, \\ x=-1. \end{cases}$ Эта система решений не имеет.

2) $\begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 2, \\ (x+1)-(x-2)=3. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 2, \\ 0x=0. \end{cases}$ Решением этой системы является промежуток $[-1;\,2]$.

3) $\begin{cases} x>2, \\ (x+1)+(x-2)=3; \end{cases}$ $\begin{cases} x>2, \\ x=2. \end{cases}$ Эта система решений не имеет.

Ответ: $[-1;\,2]$.

Решение этой задачи можно оформить иначе, записав совокупность, равносильную исходному уравнению:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-1, \\ -x-1-x+2=3, \end{cases} \\ \begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 2, \\ x+1-x+2=3, \end{cases} \\ \begin{cases} x>2, \\ x+1+x-2=3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Также это уравнение можно решить с помощью геометрической интерпретации: искомые корни — это координаты точек координатной прямой, сумма расстояний от которых до точек $A\,(-1)$ и $B\,(2)$ равна 3. Понятно, что координаты всех точек отрезка AB (рис. 25.3) образуют искомое множество корней, т. е. промежуток $[-1;\,2]$.

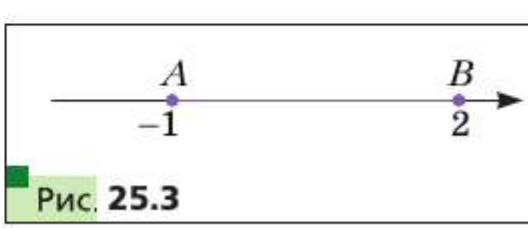


Рис. **25.3**

Рассмотрим основные методы решения неравенств, содержащих знак модуля.

Теорема 25.3

Неравенство вида $|x| < a$ равносильно системе

$$\begin{cases} x < a, \\ x > -a. \end{cases}$$

Доказательство.

Если $a \leqslant 0$, то как исходное неравенство, так и записанная система решений не имеют. Следовательно, они равносильны.

Если $a > 0$, то, раскрыв модуль, можно записать, что исходное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x < a, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ -x < a. \end{cases} \end{array}\right.$$

Получаем: $\left[\begin{array}{l} 0 \leqslant x < a, \\ -a < x < 0. \end{array}\right.$ Отсюда $-a < x < a$.

Очевидно, что полученное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x < a, \\ x > -a. \end{cases}$$ ■

Заметим, что для случая, когда $a > 0$, доказательство теоремы можно провести, используя геометрическую интерпретацию: и неравенству $|x| < a$, и системе $\begin{cases} x < a, \\ x > -a \end{cases}$ удовлетворяют координаты тех и только тех точек координатной прямой, которые удалены от начала отсчёта на расстояние меньше a, т. е. их решением является промежуток $(-a; a)$.

Пример 5. Решите неравенство $|3x - 1| < 2$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 3x - 1 < 2, \\ 3x - 1 > -2. \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} 3x < 3, \\ 3x > -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1, \\ x > -\frac{1}{3}. \end{cases}$

Ответ: $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$.

Обобщением теоремы 25.3 является следующая теорема.

Теорема 25.4

Неравенство вида $|f(x)| < g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 25.3.

Теорема 25.5

Неравенство вида $|x| > a$ равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} x > a, \\ x < -a. \end{array}\right.$$

Доказательство.

Если $a = 0$, то множеством решений как данного неравенства, так и совокупности является множество $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Если $a < 0$, то множеством решений и неравенства, и совокупности является множество $(-\infty; +\infty)$. Поэтому для случая, когда $a \leqslant 0$, данное неравенство и записанная совокупность неравенств равносильны.

Если $a > 0$, то, раскрыв модуль, можно записать, что исходное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x > a, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ -x > a. \end{cases} \end{array}\right.$$

Отсюда $\left[\begin{array}{l} x > a, \\ x < -a. \end{array}\right.$ ■

Заметим, что для случая, когда $a > 0$, доказательство теоремы можно провести, используя геометрическую интерпретацию: и неравенству $|x| > a$, и совокупности $\left[\begin{array}{l} x > a, \\ x < -a \end{array}\right.$ удовлетворяют координаты тех и только тех точек координатной прямой, которые удалены от начала отсчёта на расстояние больше a, т. е. их решением является множество $(-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$.

Пример 6. Решите неравенство $|4x - 3| > 5$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} 4x - 3 > 5, \\ 4x - 3 < -5. \end{array}\right.$$

Отсюда $\left[\begin{array}{l} 4x > 8, \\ 4x < -2; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x > 2, \\ x < -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

Обобщением теоремы 25.5 является следующая теорема.

Теорема 25.6

Неравенство вида $|f(x)| > g(x)$ равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 25.5.

Пример 7. Решите неравенство $|x - 1| + |x - 2| > x + 3$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности трёх систем.

1) $\begin{cases} x < 1, \\ 1 - x - x + 2 > x + 3; \end{cases} \begin{cases} x < 1, \\ x < 0. \end{cases}$ Отсюда $x < 0$.

2) $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ x - 1 - x + 2 > x + 3; \end{cases} \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ x < -2. \end{cases}$ Эта система решений не имеет.

3) $\begin{cases} x > 2, \\ x - 1 + x - 2 > x + 3; \end{cases} \begin{cases} x > 2, \\ x > 6. \end{cases}$ Отсюда $x > 6$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$.

1. Сформулируйте определение модуля числа.
2. Что надо знать, чтобы раскрыть модуль числа?
3. Сформулируйте свойства, которые следуют из определения модуля.
4. Сформулируйте теоремы о решении неравенств, содержащих знак модуля.

Упражнения

25.1. Раскройте модуль:

1) $\left|\frac{\pi}{3}-1\right|$; 3) $\left|2-\frac{\pi}{3}\right|$; 5) $\left|x-\frac{x^2}{4}-1\right|$;

2) $|\pi-3{,}14|$; 4) $|x^2+1|$; 6) $|x^2+2x+2|$.

25.2. Раскройте модуль:

1) $\left|\frac{\pi}{4}-0{,}7\right|$; 3) $|\pi-3{,}15|$; 5) $\left|x^2+x+\frac{1}{4}\right|$;

2) $\left|\frac{\pi}{4}-0{,}8\right|$; 4) $|x^4+2|$; 6) $|x^2+4x+5|$.

25.3. Докажите, что:

1) $|ab|=|a|\cdot|b|$; 4) $|a-b|=|b-a|$;

2) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$, $b\neq 0$; 5) $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$.

3) $(|a|)^2=|a^2|=a^2$;

25.4. Известно, что $a+b<0$, $a>0$, $b<0$. Сравните с нулём значение выражения $|a|-|b|$.

25.5. Известно, что $a+b>0$, $a<0$, $b>0$. Сравните с нулём значение выражения $|a|-|b|$.

25.6. Упростите выражение:

1) $(3|x|-|y|)(3|x|+|y|)$; 3) $\frac{|m|-|n|}{|m|+|n|}-\frac{|m|+|n|}{|m|-|n|}$.

2) $(2|a|-3|b|)^2+(2|a|+3|b|)^2$;

25.7. Решите уравнение:

1) $|x+3|=2$; 2) $|1-2x|=5$; 3) $|6x+5|=1$.

25.8. Решите уравнение:

1) $|x-1|=4$; 2) $|1-3x|=7$; 3) $|-4x-1|=8$.

25.9. Решите неравенство:

1) $|x+5|<4$; 3) $|3x+2|\leqslant 1$;

2) $|2x-1|>3$; 4) $|5x-1|\geqslant 4$.

25.10. Решите неравенство:

1) $|x-3|\leqslant 6$; 3) $|1-4x|<2$;

2) $|3x-2|\geqslant 3$; 4) $|5x+2|>6$.

25.11. Докажите, что:

1) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$;

2) $|a-b|\geqslant|a|-|b|$;

3) $|a+b|=|a|+|b|$ тогда и только тогда, когда $ab \geqslant 0$;

4) $|a|+|b|=a+b$ тогда и только тогда, когда $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$;

5) $|a-b|=|a|+|b|$ тогда и только тогда, когда $ab \leqslant 0$.

25.12. Докажите, что:

1) $|x|+|x-3| \geqslant 3$; 2) $|x-1|+|x-3| \geqslant 2$.

25.13. Найдите наименьшее значение выражения:

1) $|x|+|x+4|$; 2) $|x+2|+|x-3|$.

25.14. Решите систему уравнений $\begin{cases} |x+y-4|=\pi, \\ |x-3|+|y-1|=3. \end{cases}$

25.15. Решите уравнение:

1) $||x|-2|=2$; 2) $||x|+2|=1$.

25.16. Решите уравнение:

1) $||x|-3|=1$; 2) $||x|+1|=1$.

25.17. Решите уравнение:

1) $|2x-1|=|3x+2|$; 2) $|3-4x|=|2x+1|$.

25.18. Решите уравнение:

1) $|x+2|=4x-1$; 3) $|x-1|=4x+3$.

2) $|3x+2|=2x-1$;

25.19. Решите уравнение:

1) $|x+2|=2(3-x)$;

2) $|3x-1|=x+1$;

3) $|3x+1|=4x-1$.

25.20. Решите неравенство:

1) $|x+5|<2x+3$; 3) $|4x+5|>3x-1$;

2) $|1-2x| \leqslant x+1$; 4) $|2x-7| \geqslant x-2$.

25.21. Решите неравенство:

1) $|x+2|<2x-1$; 3) $|3x-2| \geqslant 2x+1$;

2) $5x+3 \geqslant |x+1|$; 4) $|3x-5|>9x+1$.

◆ ◆ ◆

25.22. Решите уравнение:

1) $|x-2|+|x-4|=3$;

2) $|x-2|-3\,|3-x|+x=0$;

3) $|4-x|+|2x-2|=5-2x$;

4) $|x|-2|x+1|=5$;

5) $|x|+|3x+2|+|2x-1|=5$;

6) $|x|+|x-6|=6$;

7) $|x+2|-|x-3|=5$;

8) $|5x-2|-|7x-3|+2x=1$;

9) $\dfrac{|x-2|}{|x-1|-1}=1$;

10) $\dfrac{|x-3|+|x-1|-2}{|x-1|-|x|+1}=1$.

25.23. Решите уравнение:

1) $|x+1|+|x-5|=20$;

2) $|x+3|-|5-2x|=2-3x$;

3) $|x-3|+2\,|x+1|=4$;

4) $|x-1|+|x-2|=|x-3|+4$;

5) $|x+5|+|x-8|=13$;

6) $|x|-|x-2|=2$;

7) $|7x-12|-|7x-11|=1$;

8) $\dfrac{|x-6|}{3-|x-3|}=1$;

9) $\dfrac{|x|+|x+1|-1}{|x|-|x-2|+2}=1$.

25.24. Решите неравенство:

1) $|x+1|+|x+2|>2x+3$;

2) $2|x-3|+|x+1|\leqslant 3x+1$;

3) $|x+1|+|x-1|\leqslant 2$;

4) $|x|-2|x-2|+3|x+5|\geqslant 2x$.

25.25. Решите неравенство:

1) $2|x+1|-|x-1|>3$;

2) $|x-1|-2|x+3|>x+7$;

3) $|x-1|+|x+3|\leqslant 4$;

4) $|x|-2\,|x+1|+3\,|x+2|\geqslant 4$.

25.26. Постройте график функции:

1) $y=|x+3|+|x-1|$;

2) $y=2|x-2|-|x-1|$.

25.27. Постройте график функции $y=|x+2|+2\,|x-1|-x$.

25.28. Определите количество корней уравнения в зависимости от значения параметра a:

1) $|3x-4|=a+x$;

2) $2x-|x|+|x-1|=a$.

25.29. Определите количество корней уравнения в зависимости от значения параметра a:

1) $|x-1|+|x+1|=a$;

2) $|x-2|-|x+2|=a$.

25.30. При каких значениях параметра a множество корней уравнения $|x-1|+|x-a|=1-a$ содержит три целых числа?

25.31. При каких значениях параметра a множество корней уравнения $|x-3|+|x-a|=a-3$ содержит одно чётное число?

Упражнения для повторения

25.32. Упростите выражение $\left(\dfrac{a}{8}+\dfrac{1}{6a}+\dfrac{1}{3}\right)\cdot\left(\dfrac{a+2}{12a}\right)^{-1}\cdot(3a+2)^{-1}$.

25.33. Докажите, что не существует такого натурального числа p, для которого числа $p+5$ и $p+10$ являются простыми.

25.34. Натуральное число $n>1$ не делится нацело ни на 2, ни на 3. Докажите, что число n^2-1 кратно 24.

25.35. Между пристанями A и B, расположенными на противоположных берегах озера, курсирует паром. На рисунке 25.4 изображён график движения парома во время двух первых рейсов от A до B и назад. С какой скоростью выполнял паром второй рейс из A в B?

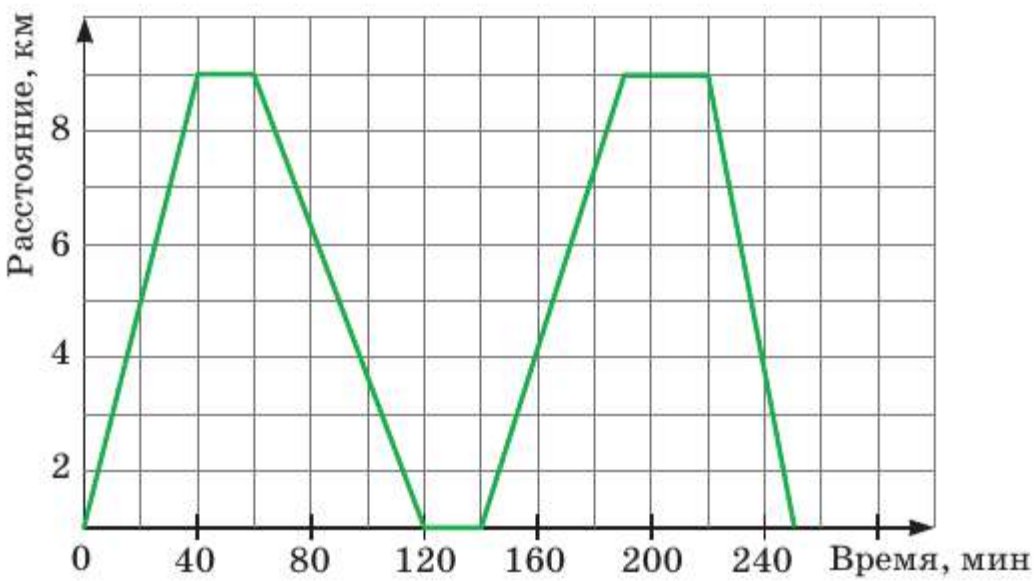


Рис. **25.4**

Итоги главы 4

Сравнение чисел

Считают, что число a больше числа b, если разность $a - b$ является положительным числом. Считают, что число a меньше числа b, если разность $a - b$ является отрицательным числом.

Основные свойства числовых неравенств

- Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.
- Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.
- Если $a > b$ и c — любое число, то $a + c > b + c$.
- Если $a < b$ и c — любое число, то $a + c < b + c$.
- Если $a > b$ и c — положительное число, то $ac > bc$.
- Если $a > b$ и c — отрицательное число, то $ac < bc$.
- Если $a > b$ и $ab > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Сложение и умножение числовых неравенств

Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.
Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.
Если $a > b$, $c > d$ и a, b, c, d — положительные числа, то $ac > bd$.
Если $a < b$, $c < d$ и a, b, c, d — положительные числа, то $ac < bd$.

Решение неравенства с одной переменной

Решением неравенства с одной переменной называют значение переменной, которое обращает неравенство в верное числовое неравенство.

Решить неравенство

Решить неравенство означает найти множество его решений, т. е. найти все его решения, или доказать, что решений не существует.

Равносильные неравенства

Неравенства называют равносильными, если множества их решений равны.

Теоремы о решении неравенств

- Если какое-либо слагаемое перенести из одной части неравенства в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.
- Если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же положительное число, то получим неравенство, равносильное данному.
- Если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Линейное неравенство с одной переменной

Неравенства вида $ax > b$, $ax < b$, $ax \geqslant b$ и $ax \leqslant b$, где x — переменная, a и b — параметры, называют линейными неравенствами с одной переменной.

Неравенство-следствие

Если множество решений данного неравенства содержит множество решений другого неравенства, то данное неравенство называют следствием другого неравенства.

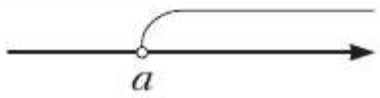
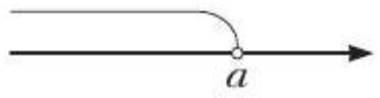
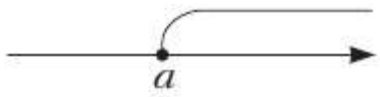
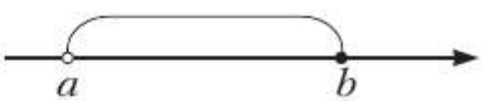
Решение системы неравенств с одной переменной

Решением системы неравенств с одной переменной называют значение переменной, которое обращает каждое неравенство системы в верное числовое неравенство.

Решить систему неравенств

Решить систему неравенств — это значит найти множество её решений.

Числовые промежутки

Неравенство	Промежуток	Изображение
$x > a$	$(a; +\infty)$	
$x < a$	$(-\infty; a)$	
$x \geqslant a$	$[a; +\infty)$	
$x \leqslant a$	$(-\infty; a]$	
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a; b]$	
$a < x < b$	$(a; b)$	
$a < x \leqslant b$	$(a; b]$	
$a \leqslant x < b$	$[a; b)$	

Модуль числа

Модулем числа a называют расстояние от точки, изображающей число a на координатной прямой, до начала отсчёта.

Свойства модуля, следующие из определения

1) Модуль произвольного числа принимает только неотрицательные значения, т. е. $|a| \geqslant 0$.

2) Модули противоположных чисел равны, т. е. $|a| = |-a|$.

3) Если $|a| = b$, то $b \geqslant 0$ и $a = b$ или $a = -b$.

4) Если $b \geqslant 0$ и $a = b$ или $a = -b$, то $|a| = b$.

5) Расстояние между точками A (a) и B (b) координатной прямой равно $|a - b|$.

Теоремы об уравнениях и неравенствах, содержащих знак модуля

- Если $a \geqslant 0$, то уравнение вида $|x| = a$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} x = a, \\ x = -a. \end{array}\right.$
- Уравнение вида $|f(x)| = g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right. \end{cases}$
- Неравенство вида $|x| < a$ равносильно системе $\begin{cases} x < a, \\ x > -a. \end{cases}$
- Неравенство вида $|f(x)| < g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$
- Неравенство вида $|x| > a$ равносильно совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} x > a, \\ x < -a. \end{array}\right.$
- Неравенство вида $|f(x)| > g(x)$ равносильно совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$

глава

5 Квадратные корни. Действительные числа

- Изучив материал этой главы, вы познакомитесь с функцией $y = x^2$ и её свойствами.
- Узнаете о новом действии «извлечение квадратного корня». Вы убедитесь, что для изучения окружающего мира рациональных чисел недостаточно. Познакомитесь с новым числовым множеством.
- Вы изучите свойства нового математического понятия — арифметического квадратного корня. Научитесь упрощать выражения, содержащие квадратные корни.

§ 26 Функция $y = x^2$ и её график

Обозначим через y площадь квадрата со стороной x. Тогда $y = x^2$.

С изменением стороны x квадрата соответственно будет изменяться и его площадь y.

Понятно, что каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y. Следовательно, зависимость переменной y от переменной x является функциональной, а формула $y = x^2$ задаёт функцию.

Рассмотрим функцию $y = x^2$, областью определения которой является множество всех чисел. В таблице приведены некоторые значения аргумента и соответствующие им значения функции.

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0
y	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Отметим на координатной плоскости точки (рис. 26.1), координаты которых приведены в таблице.

Чем больше точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = x^2$, будет отмечено, тем меньше полученная фигура (рис. 26.2) будет отличаться от графика функции $y = x^2$.

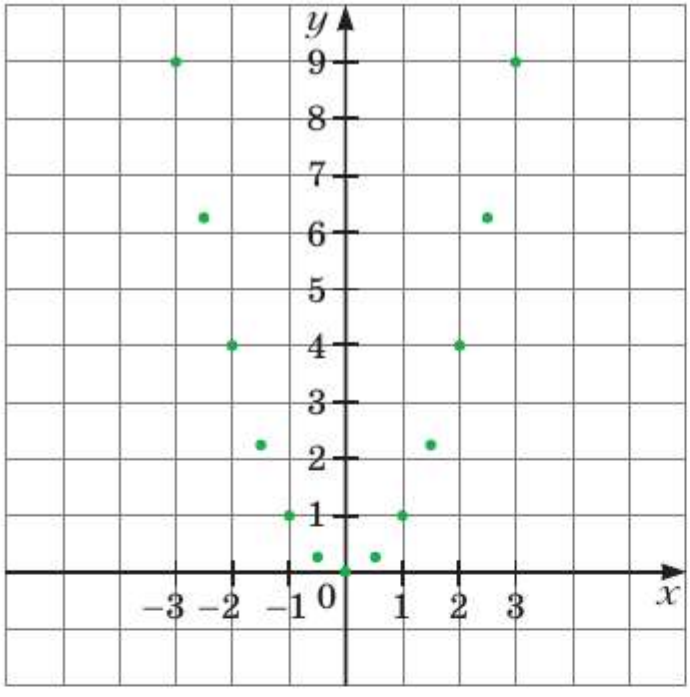


Рис. **26.1**

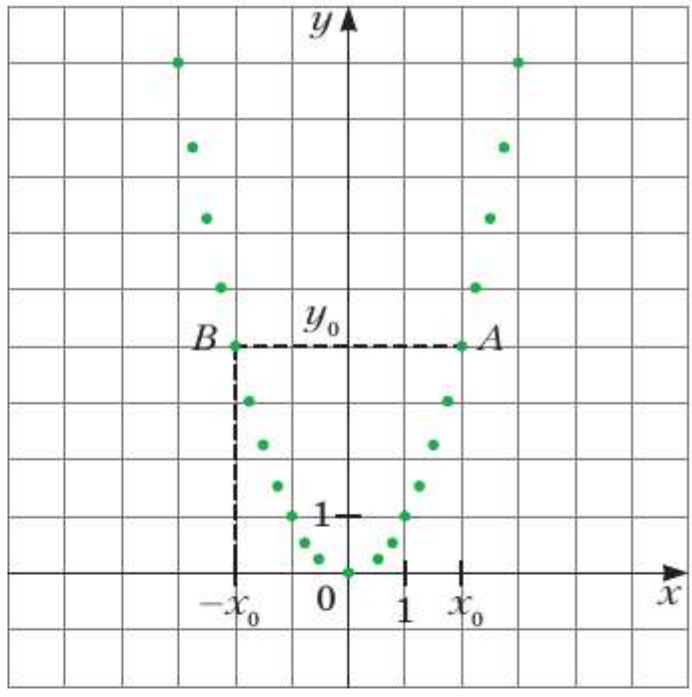


Рис. **26.2**

Пара чисел (0; 0) является решением уравнения $y = x^2$. Следовательно, график данной функции проходит через начало координат. Так как $y = x^2$ и $x^2 \geqslant 0$, то $y \geqslant 0$, т. е. среди отмеченных точек не может быть точек с отрицательными ординатами.

В следующем параграфе будет показано, что при любом $a \geqslant 0$ уравнение $x^2 = a$ имеет корни. Отсюда можно сделать вывод, что областью значений функции $y = x^2$ является множество всех неотрицательных чисел.

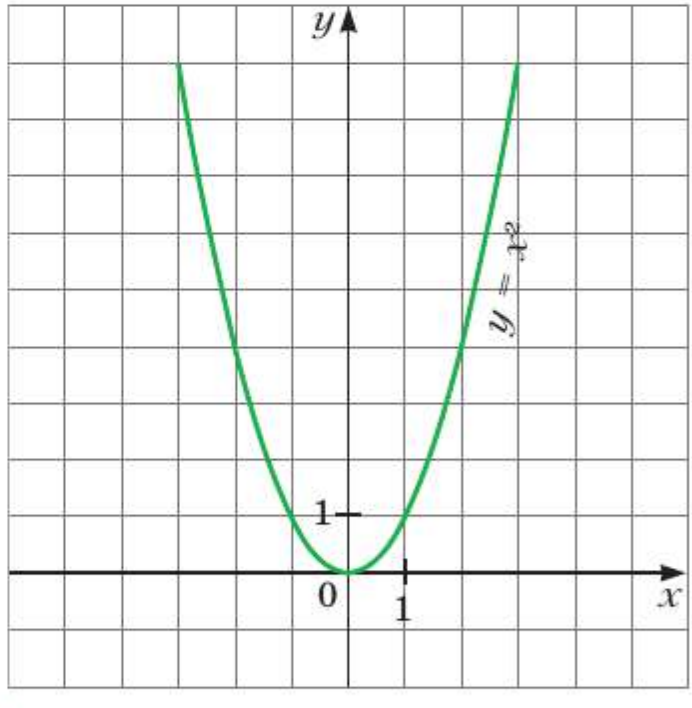


Рис. **26.3**

Поскольку $x^2 = (-x)^2$, то можно сделать вывод: если точка $A(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции, то точка $B(-x_0; y_0)$ также принадлежит графику (рис. 26.2). Следовательно, график функции $y = x^2$ является симметричной фигурой. Ось ординат является её осью симметрии.

Если бы удалось отметить на координатной плоскости все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = x^2$, то получилась бы фигура — график функции $y = x^2$, которую называют **параболой** (рис. 26.3).

Точка с координатами (0; 0) делит параболу на две равные части, каждую из которых называют **ветвью параболы**, а саму точку — **вершиной параболы**.

В таблице приведены свойства функции $y = x^2$, рассмотренные в этом параграфе.

Область определения	$D(y) = (-\infty; +\infty)$
Область значений	$E(y) = [0; +\infty)$
График	Парабола
Свойства графика	Ось ординат — ось симметрии параболы
Значение аргумента, при котором значение функции равно 0	$x = 0$

Пример. Решите графически уравнение $x^2 = x + 2$.

Решение. В одной системе координат построим графики функций $y = x^2$ и $y = x + 2$ (рис. 26.4). Эти графики пересекаются в двух точках, абсциссы которых равны -1 и 2. Следовательно, при найденных абсциссах значения выражений x^2 и $x + 2$ равны, т. е. числа 2 и -1 являются корнями уравнения $x^2 = x + 2$. Проверка это подтверждает. Действительно, $2^2 = 2 + 2$ и $(-1)^2 = -1 + 2$.

Ответ: -1; 2. ■

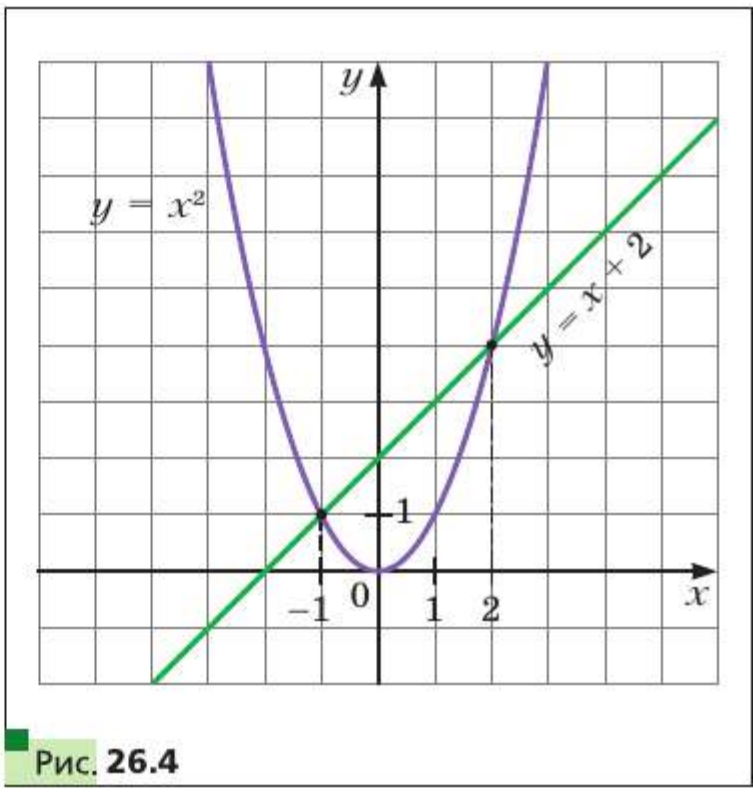


Рис. **26.4**

1. Какое множество является областью определения функции $y = x^2$?
2. Какое множество является областью значений функции $y = x^2$?
3. При каком значении аргумента значение функции $y = x^2$ равно нулю?
4. Сравните значения функции $y = x^2$ при противоположных значениях аргумента.
5. Какая фигура является графиком функции $y = x^2$?

Упражнения

26.1. Функция задана формулой $y = x^2$. Найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: -6; $0{,}8$; $-1{,}2$; 150;

2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 49; 0; 2500; $0{,}04$.

26.2. Не выполняя построения графика функции $y = x^2$, определите, проходит ли этот график через точку:

1) $A(-8;\ 64)$; 3) $C(0{,}5;\ 2{,}5)$;

2) $B(-9;\ -81)$; 4) $D(0{,}1;\ 0{,}01)$.

26.3. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = 4x - 4$. Постройте графики данных функций и отметьте найденные точки.

26.4. Решите графически уравнение:

1) $x^2 = x - 1$; 2) $x^2 - 2x - 3 = 0$; 3) $x^2 = \dfrac{8}{x}$.

26.5. Решите графически уравнение:

1) $x^2 = -4x - 3$; 2) $x^2 - 3x + 5 = 0$; 3) $x^2 + \dfrac{1}{x} = 0$.

26.6. Определите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ x - y + 6 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ 2x + 5y = 10. \end{cases}$

26.7. Определите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} y = x^2, \\ 3x + 2y = -6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^2, \\ x - 3y = -3. \end{cases}$

26.8. Функция f задана кусочно: $f(x) = \begin{cases} 4, \text{ если } x \leqslant -2, \\ x^2, \text{ если } -2 < x < 1, \\ 2x - 1, \text{ если } x \geqslant 1. \end{cases}$

1) Найдите $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(3)$, $f(0{,}5)$.

2) Постройте график данной функции.

26.9. Дана функция $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, \text{ если } x \leqslant -1, \\ x^2, \text{ если } -1 < x < 2, \\ 4, \text{ если } x \geqslant 2. \end{cases}$

1) Найдите $f(-4)$, $f(-0{,}3)$, $f(1{,}9)$, $f(3)$, $f(-1)$, $f(2)$.

2) Постройте график данной функции.

26.10. Дана функция $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \leqslant 0, \\ x + 1, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

1) Найдите $f(-7)$, $f(0)$, $f(2)$.

2) Постройте график данной функции.

26.11. Дана функция $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{6}{x}, \text{ если } x \leqslant -1, \\ x^2, \text{ если } x > -1. \end{cases}$

1) Найдите $f(-12)$, $f(-1)$, $f(-0{,}9)$, $f(3)$, $f(0)$.

2) Постройте график данной функции.

26.12. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{x^3 + x^2}{x + 1}$; 2) $y = \dfrac{x^4 - 4x^2}{x^2 - 4}$.

26.13. Постройте график функции:

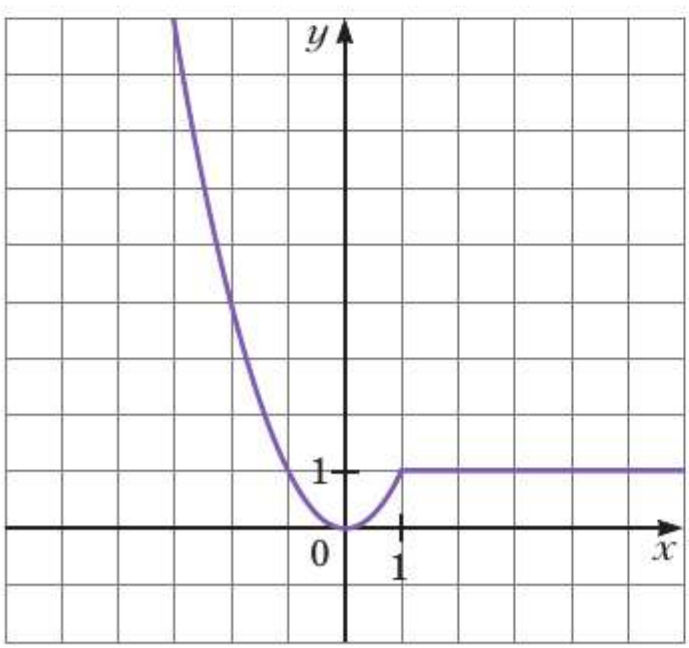
1) $y = \dfrac{x^3}{x}$; 2) $y = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$.

26.14. Найдите область определения, область значений и нули функции $y = -x^2$. Постройте график этой функции.

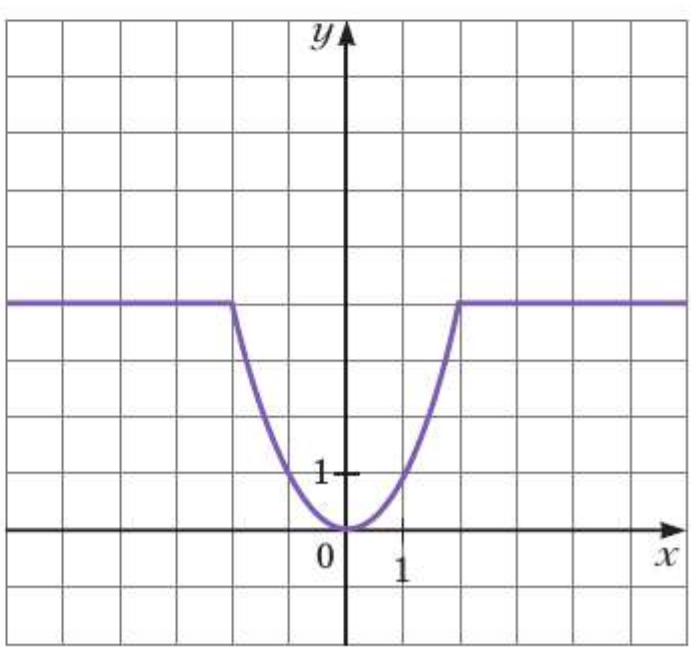
26.15. При каком значении параметра k графики функций $y = kx - 3$ и $y = x^2$ пересекаются в точке, абсцисса которой равна -2?

26.16. При каком значении параметра b графики функций $y = 8x + b$ и $y = x^2$ пересекаются в точке, принадлежащей оси ординат?

26.17. Задайте кусочно функцию, график которой изображён на рисунке 26.5.



а



б

Рис. **26.5**

26.18. Задайте кусочно функцию, график которой изображён на рисунке 26.6.

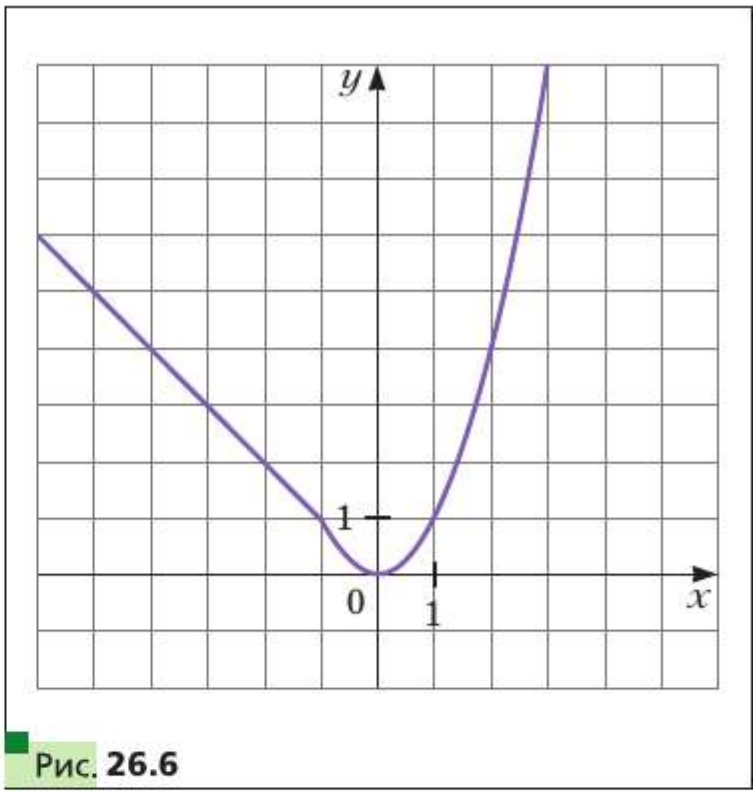


Рис. **26.6**

26.19. Постройте график уравнения:

1) $(y - x^2)(y - x) = 0$;

2) $y^2 - x^4 = 0$;

3) $\dfrac{y - x^2}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 0$;

4) $\dfrac{y - x^2}{y - x} = 0$.

26.20. Постройте график уравнения:

1) $(y + x^2)(y + x) = 0$;

2) $\dfrac{x^2 - y}{(x+2)^2 + (y-4)^2} = 0$.

26.21. Постройте график уравнения $(y - x)^2 + (y - x^2)^2 = 0$.

26.22. Постройте график уравнения $(y - 2x)^2 + (y + x^2)^2 = 0$.

Упражнения для повторения

26.23. Докажите тождество:

$$\frac{(a+b)^2}{a-b} : \left(\frac{a}{a-b} + \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a}{a+b} \right) = a + b.$$

26.24. Решите уравнение:

$$\frac{6}{x-2} - \frac{x+3}{x} = \frac{x+6}{x^2-2x}.$$

26.25. Докажите, что значение выражения $27^6 - 9^7$ кратно 48.

26.26. Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 30 км, одновременно навстречу друг другу вышли два туриста и встретились через 3 ч 45 мин. Если бы первый из них вышел на 2 ч раньше второго, то они встретились бы через 4,5 ч после выхода первого. Найдите скорость каждого туриста.

§ 27 Квадратные корни. Арифметический квадратный корень

Рассмотрим квадрат, площадь которого равна 49 см^2. Пусть длина его стороны равна x см. Тогда уравнение $x^2 = 49$ можно рассматривать как математическую модель задачи о нахождении стороны квадрата, площадь которого равна 49 квадратным единицам.

Корнями этого уравнения являются числа -7 и 7. Говорят, что числа -7 и 7 являются **квадратными корнями** из числа 49.

Определение

Квадратным корнем из числа a называют число, квадрат которого равен a.

Приведём несколько примеров.

Квадратными корнями из числа 9 являются числа -3 и 3. Действительно, $(-3)^2 = 9$, $3^2 = 9$.

Квадратными корнями из числа $\frac{25}{4}$ являются числа $-\frac{5}{2}$ и $\frac{5}{2}$. Действительно, $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$, $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

Квадратным корнем из числа 0 является только число 0. Действительно, существует только одно число, квадрат которого равен нулю, — это число 0.

Поскольку не существует числа, квадрат которого равен отрицательному числу, то квадратных корней из отрицательных чисел не существует.

Положительный корень уравнения $x^2 = 49$, число 7, является ответом в задаче о нахождении стороны квадрата, площадь которого равна 49 квадратным единицам. Это число называют **арифметическим квадратным корнем** из числа 49.

Определение

Арифметическим квадратным корнем из числа a называют неотрицательное число, квадрат которого равен a.

Арифметический квадратный корень из числа a обозначают так: $\sqrt{a}$. Знак $\sqrt{\ }$ называют **знаком квадратного корня** или **радикалом** (от лат. *radix* — «корень»).

Запись $\sqrt{a}$ читают: «квадратный корень из a», опуская при чтении слово «арифметический».

Выражение, стоящее под знаком радикала, называют **подкоренным выражением**. Например, в записи $\sqrt{b-5}$ двучлен $b-5$ является подкоренным выражением.

Из определения арифметического квадратного корня следует, что *подкоренное выражение может принимать только неотрицательные значения*. Так, областью определения выражения $\sqrt{b-5}$ является числовой промежуток $[5; +\infty)$.

Действие нахождения арифметического квадратного корня из числа называют **извлечением квадратного корня**.

Рассмотрим несколько примеров:

$\sqrt{9} = 3$, так как $3 \geqslant 0$ и $3^2 = 9$;

$\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$, так как $\frac{5}{2} \geqslant 0$ и $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$;

$\sqrt{0} = 0$, так как $0 \geqslant 0$ и $0^2 = 0$.

Вообще, ***равенство $\sqrt{a} = b$ выполняется при условии, что $b \geqslant 0$ и $b^2 = a$.***

Этот вывод можно представить в другой форме: ***для любого неотрицательного числа a справедливо, что $\sqrt{a} \geqslant 0$ и $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.***

Например, $\sqrt{4} \geqslant 0$ и $\left(\sqrt{4}\right)^2 = 4$, $\sqrt{2} \geqslant 0$ и $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$, $\sqrt{5{,}2} \geqslant 0$ и $\left(\sqrt{5{,}2}\right)^2 = 5{,}2$.

Подчеркнём, что к понятию квадратного корня мы пришли, решая уравнение вида $x^2 = a$, где $a \geqslant 0$. Корни этого уравнения — числа, каждое из которых является квадратным корнем из числа a.

Исследуем количество корней уравнения $x^2 = a$ в зависимости от значений параметра a.

Уравнение $x^2 = a$ при $a < 0$ не имеет корней, что подтверждается графически: графики функций $y = x^2$ и $y = a$ при $a < 0$ общих точек не имеют (рис. 27.1).

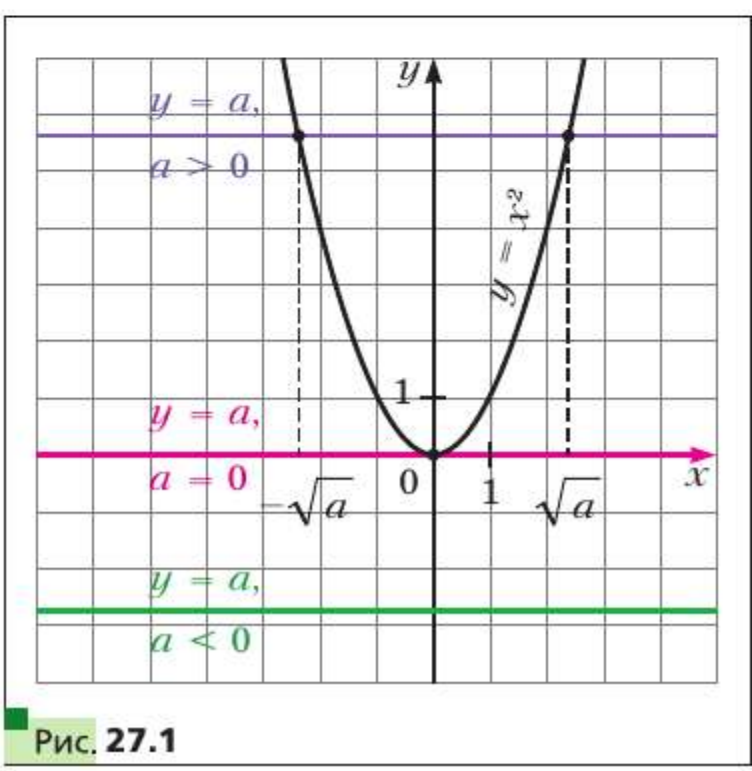


Рис. 27.1

При $a = 0$ уравнение $x^2 = a$ имеет единственный корень $x = 0$, что тоже подтверждается графически: графики функций $y = x^2$ и $y = 0$ имеют только одну общую точку (см. рис. 27.1).

Графический метод также позволяет сделать следующий вывод: если $a > 0$, то уравнение $x^2 = a$ имеет два корня. Действительно, парабола $y = x^2$ и прямая $y = a$, где $a > 0$, имеют две общие точки (см. рис. 27.1). При этом корнями уравнения $x^2 = a$ являются числа $-\sqrt{a}$ и $\sqrt{a}$. Действительно, $\left(-\sqrt{a}\right)^2 = a$, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Например, уравнение $x^2 = 5$ имеет два корня: $-\sqrt{5}$ и $\sqrt{5}$.

Вообще, ***если $a \geqslant 0$, то уравнение вида $x^2 = a$ равносильно совокупности***

$$\left[\begin{array}{l} x = \sqrt{a}, \\ x = -\sqrt{a}. \end{array}\right.$$

Пример 1. Найдите значение выражения $\left(-8\sqrt{2}\right)^2$.

Решение. Применив правило возведения произведения в степень и тождество $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, получим:

$$\left(-8\sqrt{2}\right)^2 = (-8)^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 64 \cdot 2 = 128. \blacksquare$$

Пример 2. Решите уравнение: 1) $\frac{1}{2}\sqrt{x} - 3 = 0$; 2) $\sqrt{1 + \sqrt{x+2}} = 2$.

Решение.

1) Имеем: $\frac{1}{2}\sqrt{x} = 3$; $\sqrt{x} = 6$. Тогда $x = 6^2$; $x = 36$.

2) Имеем: $\sqrt{1 + \sqrt{x+2}} = 2$; $1 + \sqrt{x+2} = 2^2$; $\sqrt{x+2} = 3$; $x + 2 = 3^2$; $x = 7$.

Ответ: 1) 36; 2) 7. $\blacksquare$

Пример 3. Решите уравнение $(3x - 1)^2 = 2$.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} 3x - 1 = -\sqrt{2}, \\ 3x - 1 = \sqrt{2}. \end{array}\right. \text{ Отсюда } \left[\begin{array}{l} 3x = 1 - \sqrt{2}, \\ 3x = 1 + \sqrt{2}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{3}, \\ x = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{3}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{1 - \sqrt{2}}{3}$; $\frac{1 + \sqrt{2}}{3}$. $\blacksquare$

Пример 4. Найдите область определения выражения: 1) $\frac{\sqrt{|x|-1}}{x^2-4}$; 2) $\sqrt{3-|x|}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

Решение.

1) Данное выражение имеет смысл, если одновременно выполняются два условия: подкоренное выражение неотрицательно и знаменатель дроби не равен нулю, т. е. $|x|-1 \geqslant 0$ и $x^2-4 \neq 0$. Следовательно, область определения данного выражения равна множеству решений системы

$$\begin{cases} |x|-1 \geqslant 0, \\ x^2-4 \neq 0. \end{cases}$$ Отсюда $$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geqslant 1, \\ x \leqslant -1, \end{array}\right. \\ x \neq -2, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Изобразив решения этой системы на координатной прямой (рис. 27.2), получаем ответ.

2) Для нахождения области определения данного выражения достаточно решить систему

$$\begin{cases} 3-|x| \geqslant 0, \\ x+1>0. \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} |x| \leqslant 3, \\ x>-1; \end{cases}$ $\begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant 3, \\ x>-1. \end{cases}$

Обратимся к геометрической интерпретации (рис. 27.3).

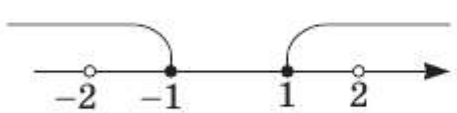


Рис. **27.2**

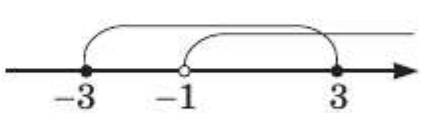


Рис. **27.3**

Ответ: 1) $(-\infty; -2) \cup (-2; -1] \cup [1; 2) \cup (2; +\infty)$; 2) $(-1; 3]$. ■

Пример 5. Решите уравнение: 1) $\sqrt{-x}+\sqrt{x-2}=2$; 2) $\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x-2}=0$; 3) $(x^2-9)\sqrt{x-2}=0$.

Решение. 1) Найдём область определения данного уравнения. Для этого решим систему $\begin{cases} -x \geqslant 0, \\ x-2 \geqslant 0. \end{cases}$ Очевидно, что эта система решений не имеет, а следовательно, не имеет решений и исходное уравнение.

2) Левая часть данного уравнения является суммой двух слагаемых, каждое из которых может принимать только неотрицательные значения. Тогда их сумма равна нулю, если каждое из слагаемых равно нулю. Следовательно, одновременно должны выполняться два условия: $\sqrt{x^2-2x}=0$ и $\sqrt{x-2}=0$. Это означает, что надо найти общие корни полученных уравнений, т. е. решить систему уравнений:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-2x}=0,\\ \sqrt{x-2}=0.\end{cases}$$

Эта система равносильна исходному уравнению.

Имеем: $\begin{cases}x^2-2x=0,\\ x-2=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x(x-2)=0,\\ x=2;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=2,\end{array}\right.\\ x=2.\end{cases}$

Решением последней системы является число 2.

3) Областью определения данного уравнения является промежуток $[2;+\infty)$. Учитывая это и используя условие равенства произведения нулю, можно записать, что данное уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-2}=0,\\ \begin{cases}x^2-9=0,\\ x-2\geqslant 0.\end{cases}\end{array}\right.$$ Отсюда $$\left[\begin{array}{l}x=2,\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=-3,\end{array}\right.\\ x\geqslant 2;\end{cases}\end{array}\right.$$ $\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=3.\end{array}\right.$

Ответ: 1) корней нет; 2) 2; 3) 2; 3.

Пример 6. Постройте график функции $y=\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{1-x}\right)^2$.

Решение. Область определения данной функции — это множество решений системы неравенств $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ 1-x\geqslant 0.\end{cases}$ Отсюда $D(y)=[0;1]$.

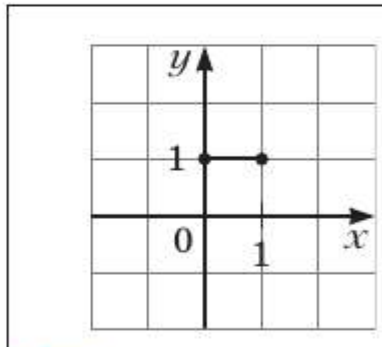


Рис. **27.4**

Имеем: $y=\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{1-x}\right)^2=x+1-x=1$.

Искомый график изображён на рисунке 27.4. ■

Пример 7. При каких значениях параметра a уравнение $(x-a)(\sqrt{x}-1)=0$ имеет единственное решение?

Решение. Областью определения этого уравнения является промежуток $[0; +\infty)$. Поэтому исходное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}-1=0,\\ \begin{cases}x-a=0,\\ x\geqslant 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

При любом значении параметра a данное уравнение имеет корень $x=1$. Для того чтобы этот корень оставался единственным, система, входящая в совокупность, должна или иметь это же решение, или не иметь решений, т. е. должно выполняться одно из двух условий: $a=1$ или $a<0$.

Ответ: $a=1$ или $a<0$.

1. Что называют квадратным корнем из числа a?
2. Что называют арифметическим квадратным корнем из числа a?
3. Как обозначают арифметический квадратный корень из числа a?
4. Как называют знак $\sqrt{\ }$?
5. Как читают запись $\sqrt{a}$?
6. Как называют выражение, стоящее под знаком радикала?
7. Какие значения может принимать подкоренное выражение?
8. Как называют действие нахождения арифметического квадратного корня из числа?
9. Чему равно значение выражения $(\sqrt{a})^2$ для любого неотрицательного значения a?
10. Сколько корней имеет уравнение $x^2=a$ при $a>0$? Чему они равны?
11. Имеет ли корни уравнение $x^2=a$ при $a=0$? При $a<0$?

Упражнения

27.1. Найдите значение арифметического квадратного корня:

1) $\sqrt{0,01}$; 3) $\sqrt{3600}$; 5) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$;

2) $\sqrt{1,21}$; 4) $\sqrt{\frac{1}{64}}$; 6) $\sqrt{0,0004}$.

27.2. Найдите значение арифметического квадратного корня:

1) $\sqrt{144}$; 3) $\sqrt{0,49}$; 5) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$;

2) $\sqrt{0,04}$; 4) $\sqrt{\frac{16}{121}}$; 6) $\sqrt{0,0009}$.

27.3. Найдите значение выражения:

1) $\left(\sqrt{4,2}\right)^2$; 3) $-\left(\sqrt{10}\right)^2$;

2) $\left(-\sqrt{11}\right)^2$; 4) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{14}\right)^2$.

27.4. Вычислите:

1) $\left(\sqrt{6}\right)^2$; 3) $\left(-4\sqrt{5}\right)^2$;

2) $\left(-\sqrt{21}\right)^2$; 4) $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$.

27.5. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{16+9}$; 4) $-2\sqrt{0,16}+0,7$;

2) $\sqrt{16}+\sqrt{9}$; 5) $\left(\sqrt{13}\right)^2-3\cdot\left(\sqrt{8}\right)^2$;

3) $\sqrt{0,81}+\sqrt{0,01}$; 6) $\frac{1}{6}\cdot\left(\sqrt{18}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{24}\right)^2$.

27.6. Вычислите значение выражения:

1) $\sqrt{72-\sqrt{64}}$; 3) $\frac{1}{3}\sqrt{900}+0,2\sqrt{1600}$;

2) $\sqrt{16}\cdot\sqrt{225}$; 4) $\left(2\sqrt{6}\right)^2-3\left(\sqrt{21}\right)^2$.

27.7. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x}=\frac{1}{4}$; 2) $\sqrt{x}-0,2=0$; 3) $\sqrt{x}+7=0$.

27.8. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x}=20$; 2) $\sqrt{x}=-16$; 3) $\sqrt{x}-\frac{2}{3}=0$.

27.9. Решите уравнение:

1) $x^2=0,49$; 2) $x^2=3$; 3) $x^2=-25$.

27.10. Решите уравнение:

1) $x^2=0,81$; 2) $x^2=7$; 3) $x^2=3,6$.

27.11. Найдите значение выражения:

1) $-0,06\cdot\sqrt{10000}+\frac{8}{\sqrt{256}}-2,5\sqrt{3,24}$;

2) $\sqrt{64}\cdot\sqrt{6,25}+\sqrt{2^3+17}$;

3) $\sqrt{1\frac{11}{25}}+3\sqrt{7\frac{1}{9}}-0,6\sqrt{3025}$;

4) $\left(\frac{1}{5}\sqrt{75}\right)^2+\sqrt{26^2-24^2}$;

5) $\sqrt{144}:\sqrt{0,04}-\sqrt{2,56}\cdot\sqrt{2500}$.

27.12. Найдите значение выражения:

1) $0{,}15\sqrt{3600} - 0{,}18\sqrt{400} + \left(10\sqrt{0{,}08}\right)^2$;

2) $\dfrac{95}{\sqrt{361}} - \dfrac{13}{14}\sqrt{1\dfrac{27}{169}} + \sqrt{8^2 + 15^2}$;

3) $\left(-8\sqrt{\dfrac{1}{4}} + \dfrac{\sqrt{1{,}44}}{3} \cdot \sqrt{12{,}25}\right) : \left(0{,}1\sqrt{13}\right)^2$.

27.13. Найдите область определения выражения:

1) $\sqrt{-x}$; 3) $\sqrt{-x^2}$; 5) $\sqrt{(x-8)^2}$;

2) $\sqrt{x^2}$; 4) $\sqrt{x^2+8}$; 6) $\sqrt{|x|}$.

27.14. Найдите область определения выражения:

1) $\sqrt{2y}$; 3) $\sqrt{y^3}$; 5) $\sqrt{-y^4}$;

2) $\sqrt{-3y}$; 4) $\sqrt{-y^3}$; 6) $\dfrac{1}{\sqrt{y}}$.

27.15. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{1-3x}$; 4) $y = \sqrt{2-x} + \sqrt{3x+1}$;

2) $y = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x+5}$; 5) $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{3-x}$;

3) $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{4x-1}}$; 6) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2-3x}} - \sqrt{2x+1}$.

27.16. Найдите область определения функции:

1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$; 3) $y = \dfrac{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-4}}{2x-9}$.

2) $y = \sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1}$;

27.17. Решите уравнение:

1) $\sqrt{5x} - 4 = 0$; 3) $\sqrt{5x-4} = 6$; 5) $\dfrac{18}{\sqrt{x+3}} = 9$;

2) $\sqrt{5x-4} = 0$; 4) $\dfrac{42}{\sqrt{x}} = 6$; 6) $\sqrt{x^2-36} = 8$.

27.18. Решите уравнение:

1) $\dfrac{1}{3}\sqrt{x} - 2 = 0$; 3) $\dfrac{4}{\sqrt{x-5}} = 6$;

2) $\sqrt{2x+3} = 11$; 4) $\sqrt{130-x^2} = 9$.

27.19. Решите уравнение:

1) $(x+6)^2=0$; 2) $(x+6)^2=9$; 3) $(7x+6)^2=5$.

27.20. Решите уравнение:

1) $(2x-3)^2=25$; 2) $(x-3)^2=7$; 3) $(2x-3)^2=7$.

◆ ◆

27.21. Найдите область определения выражения:

1) $\sqrt{\frac{2}{3}x-x^2-\frac{1}{9}}$; 5) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{-x}$; 9) $\sqrt{\sqrt{x}+1}$;

2) $\frac{1}{\sqrt{(x-8)^2}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{-x}}$; 10) $\sqrt{-\sqrt{x}}$;

3) $\frac{1}{\sqrt{x}-3}$; 7) $\sqrt{-|x|}$; 11) $\sqrt{-\sqrt{-x}}$;

4) $\frac{1}{\sqrt{x}+3}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$; 12) $\sqrt{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

27.22. Найдите область определения выражения:

1) $\frac{1}{\sqrt{y}-1}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{y}+1}$; 3) $\sqrt{y^2-y+\frac{1}{4}}$; 4) $\sqrt{y-\frac{y^2}{4}-1}$.

27.23. Найдите область определения функции:

1) $y=\sqrt{|x|-2}$; 4) $y=\sqrt{|x|-x}$;

2) $y=\sqrt{1-|x|}$; 5) $y=\frac{\sqrt{|x|-4}}{x^2-25}$;

3) $y=\sqrt{x-|x|}$; 6) $y=\sqrt{5-|x|}+\frac{1}{\sqrt{2-x}}$.

27.24. Найдите область определения функции:

1) $y=\sqrt{7-|x|}$; 2) $y=\sqrt{|x|-2}-\frac{1}{\sqrt{x+3}}$.

27.25. Решите уравнение:

1) $\sqrt{3+\sqrt{2+x}}=4$;

2) $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}}=3$;

3) $\sqrt{4-\sqrt{10+\sqrt{x}}}=2$.

27.26. Решите уравнение:

1) $\sqrt{17+\sqrt{\sqrt{x}-6}}=5$; 2) $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}}=1$.

27.27. Можно ли утверждать, что при любом значении x имеет смысл выражение $\sqrt{x^2-4x+5}$?

27.28. Докажите, что не существует такого значения x, при котором имеет смысл выражение $\sqrt{-x^2+6x-12}$.

27.29. Какое из данных выражений имеет смысл при любом значении x:

1) $\sqrt{x^2+8x+15}$;

2) $\sqrt{x^2-10x+27}$?

27.30. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x}=-x$;

2) $\left(\sqrt{x}\right)^2=x$;

3) $\sqrt{x}=-x^2$;

4) $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}=0$;

5) $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x-1}=0$;

6) $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-4}=0$;

7) $(x-1)\sqrt{x+1}=0$;

8) $(x+1)\sqrt{x-1}=0$;

9) $\sqrt{x+3}\sqrt{x-2}=0$;

10) $(x^2-4)\sqrt{x-1}=0$;

11) $(x-1)(\sqrt{-x}-1)=0$;

12) $(x+1)(\sqrt{-x}-1)=0$.

27.31. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x}+\sqrt{-x}=0$;

2) $\sqrt{x}=-|x|$;

3) $\left(\sqrt{x}\right)^2=|x|$;

4) $\sqrt{x}+\sqrt{-x}=1$;

5) $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-1}=0$;

6) $(x-2)\sqrt{x-3}=0$;

7) $(x-1)(\sqrt{x}+1)=0$;

8) $(x+1)(\sqrt{x}-1)=0$;

9) $(x^2-16)\sqrt{x-3}=0$;

10) $(x+2)(\sqrt{-x}-1)=0$.

27.32. Решите неравенство:

1) $\sqrt{2x+1}>-2$;

2) $\sqrt{2x+1}\leqslant 0$;

3) $\sqrt{2x+1}<-2$;

4) $\sqrt{x}>-\sqrt{x}$;

5) $\sqrt{x}\geqslant-\sqrt{x}$;

6) $\sqrt{x}\leqslant-\sqrt{x}$.

27.33. Решите неравенство:

1) $\sqrt{x-1}>-1$;

2) $\sqrt{x-1}<-1$;

3) $\sqrt{x-1}\leqslant-\sqrt{x-1}$.

27.34. Постройте график функции:

1) $y=\sqrt{-x^2}$;

2) $y=\sqrt{-x^2-4x-4}+2$;

3) $y=\left(\sqrt{x}\right)^4$;

4) $y=\sqrt{x}\cdot\sqrt{-x}$;

5) $y=\sqrt{-x}\cdot\sqrt{-x}$;

6) $y=\left(\sqrt{1-x}\right)^2+1$;

7) $y=\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{-x}\right)^2+2$;

8) $y=\left(\sqrt{3-x}\right)^2+\left(\sqrt{x-1}\right)^2+x-1$.

27.35. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{2x - 1 - x^2} - 1$;
2) $y = \left(\sqrt{x}\right)^2 + 3 - x$;
3) $y = \left(\sqrt{-x}\right)^2 + 1$;
4) $y = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$;
5) $y = x\left(\sqrt{x}\right)^2$;
6) $y = \left(\sqrt{x+2}\right)^2 - 1$.

27.36. Найдите все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению:

1) $\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3} = 0$;
2) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{y-2x+3} = 0$;
3) $\sqrt{4x+y-5} + \sqrt{x-2y+6} = 0$;
4) $\sqrt{x+4} + \sqrt{y^2-1} = 0$;
5) $\sqrt{x^2-25} + \sqrt{y^2-16} = 0$.

27.37. Найдите все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению:

1) $\sqrt{x+1} + \sqrt{y-3} = 0$;
2) $\sqrt{x-y} + \sqrt{x+y-2} = 0$;
3) $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{y+1} = 0$.

27.38. На координатной плоскости отметьте все точки с координатами $(x; y)$, для которых определено выражение:

1) $\sqrt{x} + \sqrt{y}$;
2) $\sqrt{x} + \sqrt{-y}$;
3) $\sqrt{xy}$;
4) $\sqrt{x^2y}$.

27.39. При каких значениях a и b имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{ab}$;
2) $\sqrt{-ab}$;
3) $\sqrt{ab^2}$;
4) $\sqrt{a^2b^2}$;
5) $\sqrt{-a^2b}$?

27.40. Решите неравенство:

1) $\sqrt{x}(x+1) > 0$;
2) $\sqrt{x}(x+1) \geqslant 0$;
3) $\sqrt{x}(x+1) < 0$;
4) $\sqrt{x}(x+1) \leqslant 0$;
5) $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}} > 0$;
6) $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}} \geqslant 0$;
7) $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}} < 0$;
8) $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}} \leqslant 0$.

27.41. Решите неравенство:

1) $\sqrt{x}(x-1) > 0$;
2) $\sqrt{x}(x-1) \geqslant 0$;
3) $\sqrt{x}(x-1) < 0$;
4) $\sqrt{x}(x-1) \leqslant 0$;
5) $\dfrac{x}{\sqrt{x-1}} > 0$;
6) $\dfrac{x}{\sqrt{x-1}} \geqslant 0$;
7) $\dfrac{x}{\sqrt{x-1}} < 0$;
8) $\dfrac{x}{\sqrt{x-1}} \leqslant 0$.

27.42. Постройте график функции $y = x^3 - \left(\sqrt{x^2(x-1)}\right)^2$.

27.43. Постройте график функции $y = \left(\sqrt{(x+1)^2 x}\right)^2 - x^3 - x^2 - x$.

27.44. При каких значениях параметра a не имеет корней уравнение:

1) $(x-a)(\sqrt{x}+1)=0$; 2) $\dfrac{x-a}{\sqrt{x}-1}=0$?

27.45. При каких значениях параметра a не имеет корней уравнение:

1) $(x-a)(\sqrt{-x}+1)=0$; 2) $\dfrac{x-a}{\sqrt{x-1}}=0$?

27.46. При каких значениях параметра a уравнение $(x-a)(\sqrt{x}-2)=0$ имеет два различных корня?

27.47. При каких значениях параметра a имеет единственное решение уравнение:

1) $(x+a)(\sqrt{x}-3)=0$; 3) $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x-a}=0$?

2) $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\sqrt{x}-a)=0$;

27.48. При каких значениях параметра a уравнение $(\sqrt{x}-4)(x-a)=0$ имеет только один корень?

27.49. Для каждого значения параметра a решите уравнение:

1) $a\sqrt{x-1}=0$; 4) $\sqrt{x-2}=a$;

2) $\sqrt{(a-1)x}=0$; 5) $(x-1)\sqrt{x-a}=0$;

3) $a\sqrt{x-1}=a$; 6) $(2-a)\sqrt{x-2}=0$.

Упражнения для повторения

27.50. Дома на улице пронумерованы подряд числами от 1 до 24. Сколько раз цифра 1 встречается в нумерации домов?

27.51. Упростите выражение:

$$\left(\frac{a}{a^2-25}+\frac{5}{5-a}+\frac{1}{a+5}\right):\left(\frac{28-a^2}{a+5}+a-5\right).$$

27.52. Рабочий получил 4700 р. аванса купюрами по 100 р. и по 500 р. Сколько купюр каждого достоинства получил рабочий, если всего он получил 31 купюру?

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

Растут ли в огороде радикалы?

В Древней Греции действие извлечения корня отождествляли с поиском стороны квадрата по его площади, а сам квадратный корень называли стороной.

В Древней Индии слово «мула» означало «начало», «основание», «корень дерева». Это же слово стали употреблять и по отношению к стороне квадрата, возможно, исходя из такой ассоциации: из стороны квадрата, как из корня, вырастает сам квадрат. Видимо, поэтому в латинском языке понятия «сторона» и «корень» выражаются одним и тем же словом — *radix*. От этого слова произошёл термин «радикал».

Слово *radix* можно также перевести как «редис», т. е. корнеплод — часть растения — видоизменённый корень, который может являться съедобным.

В XIII–XV вв. европейские математики, сокращая слово *radix*, обозначали квадратный корень знаками R, $\mathcal{R}$, R^2. Например, запись $\sqrt{7}$ выглядела так: $R^2 7$.

В XVI в. стали использовать знак $\surd$. Происхождение этого символа, по-видимому, связано с рукописным начертанием латинской буквы r.

В XVII в. выдающийся французский математик Рене Декарт, соединив знак $\surd$ с горизонтальной чертой, получил символ $\sqrt{}$, который мы и используем сегодня.

Рене Декарт (1596–1650)

Французский математик, философ, физик, создатель аналитической геометрии и современной алгебраической символики, автор целого ряда научных открытий в механике и оптике.



§ 28 Множество действительных чисел

Рассмотрим множество Q рациональных чисел. Каждое рациональное число можно представить в виде отношения $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное. Например, $5 = \frac{5}{1}$; $-3 = \frac{-3}{1}$; $0{,}2 = \frac{1}{5}$; $0 = \frac{0}{7}$; $5{,}3 = \frac{53}{10}$.

С возможностью такого представления связано название «рациональное число»: одним из значений латинского слова *ratio* является «отношение».

В курсе математики 6 класса вы узнали, что каждое рациональное число можно представить в виде конечной десятичной дроби или бесконечной периодической десятичной дроби. Для дроби $\frac{m}{n}$ такое представление можно получить, выполнив деление числа m на число n «уголком». Например, $\frac{5}{8} = 0{,}625$; $\frac{5}{11} = 0{,}454545\ldots$. Число $\frac{5}{8}$ записано в виде конечной десятичной дроби, а число $\frac{5}{11}$ — в виде бесконечной периодической десятичной дроби. В записи $0{,}454545\ldots$ цифры 4 и 5 периодически повторяются. Повторяющуюся группу цифр называют **периодом дроби** и записывают в круглых скобках. В данном случае период дроби равен 45, а дробь $\frac{5}{11}$ записывают так: $\frac{5}{11} = 0{,}(45)$.

Заметим, что любую конечную десятичную дробь и любое целое число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Например,

$0{,}625 = 0{,}6250000\ldots = 0{,}625(0)$;

$2 = 2{,}000\ldots = 2{,}(0)$.

Таким образом, ***каждое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби.***

Справедливо и такое утверждение: ***каждая бесконечная периодическая десятичная дробь является записью некоторого рационального числа.*** В курсе алгебры 9 класса вы научитесь записывать бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби.

Сумма и произведение двух натуральных чисел являются натуральными числами. Однако разность натуральных чисел не всегда обладает таким свойством. Например, $(5 - 7) \notin \boldsymbol{N}$.

Сумма, разность, произведение двух целых чисел являются целыми числами. Однако частное целых чисел не всегда обладает таким свойством. Например, $\frac{5}{7} \notin \boldsymbol{Z}$.

Сумма, разность, произведение и частное (кроме деления на нуль) двух рациональных чисел являются рациональными числами.

Итак, действие вычитания натуральных чисел может вывести результат за пределы множества $\boldsymbol{N}$, действие деления целых чисел — за пределы множества $\boldsymbol{Z}$, однако выполнение любого из четырёх арифметических действий с рациональными числами не выводит результат за пределы множества $\boldsymbol{Q}$.

Вы познакомились с новым действием — извлечением квадратного корня. Возникает естественный вопрос: всегда ли квадратный корень из

неотрицательного рационального числа является рациональным числом? Иными словами: может ли действие извлечения квадратного корня из рационального числа вывести результат за пределы множества $\boldsymbol{Q}$?

Рассмотрим уравнение $x^2 = 2$. Поскольку $2 > 0$, то это уравнение имеет два корня: $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$.

Предположим, что число $\sqrt{2}$ — рациональное. Тогда его можно представить в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа, т. е. $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.

Отсюда $\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$; $2 = \frac{m^2}{n^2}$; $m^2 = 2n^2$.

Из последнего равенства следует, что число m^2 — чётное. А это означает, что чётным является и число m. Тогда $m = 2k$, где k — некоторое натуральное число. Имеем: $(2k)^2 = 2n^2$; $4k^2 = 2n^2$; $n^2 = 2k^2$. Отсюда следует, что число n^2, а следовательно, и число n — чётные.

Таким образом, числитель и знаменатель дроби $\frac{m}{n}$ — чётные числа, т. е. эта дробь сократима. Получили противоречие.

Итак, *не существует рационального числа, квадрат которого равен* 2, т. е. числа $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$ не являются рациональными. Эти числа являются примерами **иррациональных чисел** (приставка «ир» означает отрицание).

Мы показали, что действие извлечения корня из рационального числа может вывести результат за пределы множества $\boldsymbol{Q}$.

Никакое иррациональное число не может быть представлено в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$, а следовательно, и в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Иррациональные числа могут быть представлены в виде **бесконечных непериодических десятичных дробей.**

Например, с помощью специальной компьютерной программы можно установить, что

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356237309504880168872420 97\ldots .$$

Числа $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$ — это не первые иррациональные числа, с которыми вы встречаетесь. Число π, равное отношению длины окружности к диаметру, также является иррациональным числом:

$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937\ldots .$

Иррациональные числа возникают не только в результате извлечения квадратных корней. Их можно получать, строя бесконечные непериодические десятичные дроби.

Например, число 0,1010010001000010000... (после запятой записываются последовательно степени числа 10) является иррациональным. Если предположить, что у рассматриваемой десятичной дроби есть период, состоящий из n цифр, то с некоторого места этот период будет полностью состоять из нулей, т. е. начиная с этого места в записи не должна встретиться ни одна единица, что не соответствует записи числа.

Объединение множеств иррациональных и рациональных чисел называют **множеством действительных чисел**. Его обозначают буквой $\boldsymbol{R}$ (первая буква латинского слова *realis* — реальный, существующий в действительности).

Теперь цепочку $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$ можно продолжить: $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$.

В старших классах вы узнаете, что и у этой цепочки тоже есть продолжение.

Связь между числовыми множествами, рассмотренными в этом параграфе, иллюстрирует схема, изображённая на рисунке 28.1.



Рис. **28.1**

Длину любого отрезка можно выразить действительным числом. Этот факт позволяет установить взаимно однозначное соответствие между множеством $\boldsymbol{R}$ и множеством точек координатной прямой. Точке O, началу отсчёта, поставим в соответствие число 0. Каждой точке A координатной прямой, отличной от точки O, поставим в соответствие единственное число, равное длине отрезка OA, если точка A расположена справа от точки O, и число, противоположное длине отрезка OA, если точка A расположена слева от точки O. Также можно установить, что каждое дей-

ствительное число является соответствующим единственной точке координатной прямой.

В § 23 мы ввели понятие числового промежутка. Сейчас после введения множества действительных чисел можно сказать, что каждый из рассмотренных числовых промежутков является подмножеством множества $\boldsymbol{R}$:

$(a; +\infty) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x > a\}$; $(-\infty; a) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x < a\}$;

$[a; +\infty) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \geqslant a\}$; $(-\infty; a] = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \leqslant a\}$;

$[a; b] = \{x \in \boldsymbol{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$; $(a; b) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x < b\}$;

$(a; b] = \{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x \leqslant b\}$; $[a; b) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid a \leqslant x < b\}$.

Над действительными числами можно выполнять четыре арифметических действия: сложение, вычитание, умножение, деление (кроме деления на нуль), в результате будем получать действительное число. Действия сложения и умножения обладают известными вам свойствами.

$a + b = b + a$	Переместительное свойство сложения
$ab = ba$	Переместительное свойство умножения
$(a + b) + c = a + (b + c)$	Сочетательное свойство сложения
$(ab)c = a(bc)$	Сочетательное свойство умножения
$a(b + c) = ab + ac$	Распределительное свойство умножения относительно сложения

Действительные числа можно сравнивать, используя правила сравнения десятичных дробей, т. е. сравнивая цифры в соответствующих разрядах. Например, $7{,}853126... < 7{,}853211...$.

Любое положительное действительное число больше нуля и любого отрицательного действительного числа. Любое отрицательное действительное число меньше нуля. Из двух отрицательных действительных чисел больше то, у которого модуль меньше.

Если отметить на координатной прямой два действительных числа, то меньшее из них будет расположено слева от большего.

Находя длину окружности и площадь круга, вы пользовались приближённым значением числа π ($\pi \approx 3{,}14$). Аналогично при решении практических задач, где нужно выполнить действия с действительными числами, при необходимости эти числа заменяют их приближёнными значениями. Например, для числа $\sqrt{2}$ можно воспользоваться такими

приближёнными равенствами: $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ или $\sqrt{2} \approx 1{,}415$. Первое из них называют приближённым значением числа $\sqrt{2}$ по недостатку с точностью до 0,001, второе — приближённым значением числа $\sqrt{2}$ по избытку с точностью до 0,001. Более подробно о приближённых значениях будет рассказано в курсе алгебры 9 класса.

В заключение подчеркнём, что из любого неотрицательного действительного числа можно извлечь квадратный корень и в результате этого действия получить действительное число, т. е. действие извлечения квадратного корня из неотрицательного действительного числа не выводит результат за пределы множества $\boldsymbol{R}$.

?

1. В виде какого отношения можно представить каждое рациональное число?
2. Как связаны между собой рациональные числа и бесконечные периодические десятичные дроби?
3. Объединение каких множеств образует множество действительных чисел?
4. Как обозначают множество действительных чисел?
5. Как взаимосвязаны множества $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$?

Упражнения

28.1. Верно ли утверждение:

1) $1 \in \boldsymbol{N}$;
2) $1 \in \boldsymbol{Z}$;
3) $1 \in \boldsymbol{Q}$;
4) $1 \in \boldsymbol{R}$;
5) $0 \in \boldsymbol{N}$;
6) $0 \notin \boldsymbol{Z}$;
7) $0 \in \boldsymbol{R}$;
8) $-2{,}3 \in \boldsymbol{N}$;
9) $-2{,}3 \in \boldsymbol{R}$;
10) $-\frac{3}{7} \in \boldsymbol{Q}$;
11) $-\frac{3}{7} \notin \boldsymbol{R}$;
12) $\sqrt{7} \notin \boldsymbol{R}$;
13) $\sqrt{9} \in \boldsymbol{Q}$;
14) $\sqrt{9} \in \boldsymbol{Z}$;
15) $\sqrt{9} \in \boldsymbol{R}$;
16) $\frac{\pi}{3} \in \boldsymbol{R}$?

28.2. Верно ли утверждение:

1) любое натуральное число является целым;
2) любое натуральное число является рациональным;
3) любое натуральное число является действительным;
4) любое рациональное число является целым;
5) любое действительное число является рациональным;
6) любое рациональное число является действительным;
7) любое иррациональное число является действительным;
8) любое действительное число является рациональным или иррациональным?

28.3. Какие из данных бесконечных дробей являются записями рациональных чисел, а какие — иррациональных:

1) 0,(3);

2) 0,4(32);

3) 5,25255255525... (количество пятёрок между соседними двойками последовательно увеличивается на 1)?

28.4. Сравните:

1) 6,542... и 6,452...; 2) –24,064... и –24,165... .

28.5. Сравните:

1) 0,234... и 0,225...; 2) –1,333... и –1,345... .

28.6. С помощью микрокалькулятора найдите приближённое значение числа $\sqrt{3}$ с точностью до 0,01: 1) по недостатку; 2) по избытку.

28.7. С помощью микрокалькулятора найдите приближённое значение числа $\sqrt{5}$ с точностью до 0,01: 1) по недостатку; 2) по избытку.

28.8. Укажите какое-нибудь значение a, при котором уравнение $x^2 = a$:

1) имеет два рациональных корня;

2) имеет два иррациональных корня.

28.9. Сравните числа:

1) $\frac{43}{7}$ и 6,12; 3) π и 3,(14);

2) 3,(24) и 3,24; 4) –2,(36) и –2,36.

28.10. Сравните числа:

1) $\frac{1}{6}$ и 0,2; 2) $\frac{7}{9}$ и 0,77; 3) –1,(645) и –1,(643).

28.11. Запишите в порядке убывания числа 3,(16); π; –1,82...; –0,08...; 2,(136).

28.12. Запишите в порядке возрастания числа 1,57; 1,571...; $\frac{\neq}{2}$; 1,(56); 1,(572).

◆ ◆

28.13. Докажите, что сумма, разность, произведение и частное двух рациональных чисел являются рациональными числами.

28.14. Докажите, что сумма рационального и иррационального чисел является иррациональным числом.

28.15. Верно ли, что:

1) сумма любых двух иррациональных чисел является иррациональным числом;

2) произведение любых двух иррациональных чисел является иррациональным числом;

3) произведение любого иррационального числа и любого рационального числа является иррациональным числом?

28.16. Известно, что сумма и произведение двух чисел — рациональные числа. Обязательно ли данные числа являются рациональными?

28.17. Найдите все рациональные числа a и b такие, что число $a + b\sqrt{2}$ является рациональным.

28.18. Найдите такие целые числа a и b, что:

1) $(3 - \sqrt{2})^2 = a + b\sqrt{2}$;

2) $(\sqrt{3} - 2)^2 = a - b\sqrt{3}$.

◆ ◆ ◆

28.19. Докажите, что число $\sqrt{3}$ является иррациональным.

28.20. Докажите иррациональность числа 0,12345... (выписаны подряд все натуральные числа).

28.21. Можно ли представить число $\sqrt{2} + 1$ в виде арифметического квадратного корня из некоторого рационального числа?

28.22. Пара чисел $(\sqrt{2} - 1;\ -\sqrt{2})$ является решением уравнения $ax + by + c = 0$, где a, b, c — рациональные числа. Докажите, что $a = b = c$.

28.23. Число $1 + \sqrt{2}$ является корнем уравнения $x^2 + px + q = 0$, где p и q — рациональные числа. Найдите p и q.

28.24. Число $\sqrt{2} - 1$ является корнем уравнения $x^2 + px + q = 0$, где p и q — рациональные числа. Докажите, что число $-\sqrt{2} - 1$ также является корнем этого уравнения.

28.25. Числа a, b и $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ — рациональные. Докажите, что $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ — рациональные числа.

28.26. Докажите, что между любыми двумя рациональными числами найдутся как рациональное число, так и иррациональное число.

28.27. Существует ли такое число x, что значения выражений $x + \sqrt{2}$ и $x^3 + \sqrt{2}$ — рациональные числа?

28.28. Существует ли такое число x, что значения выражений:

1) $x + \sqrt{3}$ и $\dfrac{1}{x} - \sqrt{3}$;

2) $x + \sqrt{3}$ и $\dfrac{1}{x} + \sqrt{3}$

являются целыми числами?

28.29. Плоскость покрыта бесконечной квадратной сеткой. Можно ли через любой узел провести прямую, которая не проходит больше ни через любой другой узел сетки?

Упражнения для повторения

28.30. В каждом подъезде на каждом этаже девятиэтажного дома по восемь квартир. В каком подъезде и на каком этаже находится квартира № 186?

28.31. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения

$$\left(\frac{3}{4-4a+a^2}+\frac{2}{a^2-4}\right)\cdot(a-2)^2-\frac{2a-4}{a+2}$$

не зависит от значения a.

28.32. В ведре несколько литров воды. Если отлить половину воды, то в нём останется на 14 л воды меньше, чем помещается в ведре. Если долить 4 л, то объём воды составит $\frac{2}{3}$ того, что помещается в ведре. Сколько литров воды помещается в ведре?

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

Когда тайное становится явным

Графическое решение уравнения $x^2 = 2$ (рис. 28.2) иллюстрирует, что существуют отрезки (в нашем случае это отрезки OA и OB), длины которых не выражаются рациональными числами, т. е. *для измерения отрезков рациональных чисел недостаточно*.

Этот факт был открыт в школе великого древнегреческого учёного Пифагора.

Сначала пифагорейцы считали, что для любых отрезков AB и CD всегда можно найти такой отрезок MN, который в каждом из них укладывается целое число раз. Отсюда следовало, что отношение длин любых двух отрезков выражается отношением целых чисел, т. е. рациональным числом.

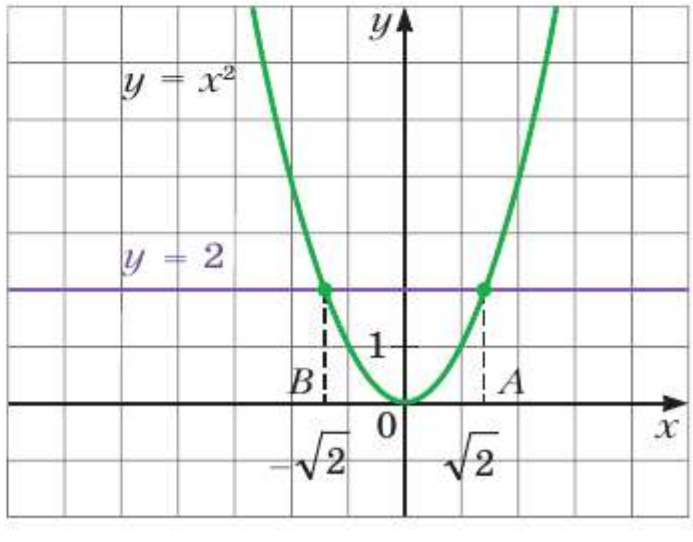


Рис. 28.2

Пифагор (ок. 570 — ок. 500 до н. э.)



О жизни Пифагора мало что известно достоверно. Он родился в VI в. до н. э. на греческом острове Самос. По преданиям, он много путешествовал, побывал в Египте и Вавилоне, где приобретал знания и мудрость.
После того как он поселился в греческой колонии Кротон (на юге Италии), около него сформировалось многочисленное окружение преданных учеников и единомышленников. Так возник пифагорейский союз (или кротонское братство). Влияние этого союза было таким сильным, что даже через столетия после смерти Пифагора многие выдающиеся математики Древнего мира называли себя пифагорейцами.

Например, на рисунке 28.3 $AB = 5MN$, $CD = 2MN$ и $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{2}$. Отрезок MN называют **общей мерой** отрезков AB и CD.

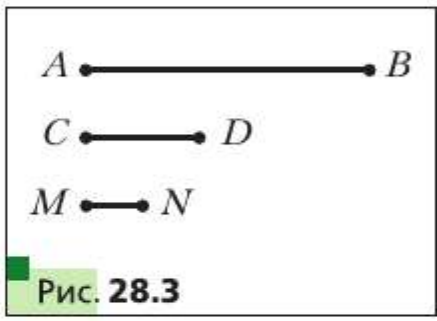


Рис. **28.3**

Если для отрезков существует общая мера, то их называют **соизмеримыми**. Например, отрезки AB и CD (см. рис. 28.3) являются соизмеримыми.

Итак, древнегреческие учёные считали, что любые два отрезка являются соизмеримыми. Из этого следовало, что длину любого отрезка можно выразить рациональным числом.

Действительно, пусть некоторый отрезок AB выбран в качестве единичного. Тогда для отрезка AB и любого другого отрезка CD существует отрезок длиной e, являющийся их общей мерой. Получаем $AB = ne$, $CD = me$, где m и n — некоторые натуральные числа. Отсюда $\frac{CD}{AB} = \frac{me}{ne} = \frac{m}{n}$. Поскольку $AB = 1$, то $CD = \frac{m}{n}$.

Однако сами же пифагорейцы сделали выдающееся открытие. Они доказали, что диагональ и сторона квадрата несоизмеримы, т. е. доказали, что если сторону квадрата взять за единицу, то длину диагонали квадрата нельзя выразить рациональным числом.

Для доказательства рассмотрим произвольный квадрат $ABCD$ и примем его сторону за единицу длины. Тогда его площадь равна $AB^2 = 1$. На диагонали AC построим квадрат $ACEF$ (рис. 28.4). Понятно, что площадь квадрата $ACEF$ в 2 раза больше площади квадрата $ABCD$. Отсюда $AC^2 = 2$, т. е. $AC = \sqrt{2}$. Следовательно, длина диагонали AC не может быть выражена рациональным числом.

Это открытие изменило один из фундаментальных постулатов древнегреческих учёных, заключавшийся в том, что отношение любых двух величин выражается отношением целых чисел.

Существует легенда о том, что пифагорейцы держали открытие иррациональных чисел в строжайшей тайне, а человека, разгласившего этот факт, покарали боги: он погиб при кораблекрушении.

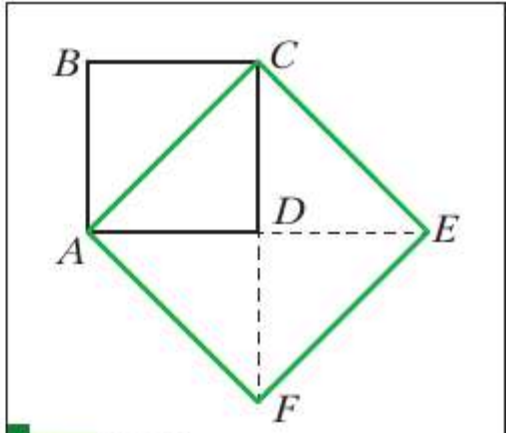


Рис. 28.4

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

О счётности числовых множеств

Вы знаете, что множества $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{Q}$ — счётные.

Возникает естественный вопрос: все ли числовые множества являются счётными?

Покажем, что, например, множество чисел промежутка (0; 1) является несчётным.

Пусть это множество счётно. Тогда все числа из этого промежутка можно пронумеровать:

$$a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

Каждое из этих чисел можно записать в виде бесконечной десятичной дроби (если десятичная дробь конечная, то будем считать, что с некоторого места все цифры её десятичной записи равны нулю) такого вида:

$$0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_n,$$

где α_1, α_2, α_3, ..., α_n — любые цифры от 0 до 9.

Некоторые из этих чисел могут иметь две записи. Например, дробям 0,7000... и 0,6999... соответствует одно и то же действительное число (этот на первый взгляд неожиданный факт будет доказан в старших классах). Чтобы избежать неопределённости, не будем здесь рассматривать периодические десятичные дроби с периодом 9.

Запишем все числа a_1, a_2, ..., a_n, ... в столбик. Например, запись может иметь такой вид:

$$\begin{array}{lllllllll}
a_1 = 0, & 7 & 2 & 5 & 3 & 9 & 1 & 8 & ... \\
a_2 = 0, & 1 & 1 & 7 & 7 & 0 & 0 & 0 & ... \\
a_3 = 0, & 9 & 8 & 4 & 5 & 3 & 1 & 7 & ... \\
a_4 = 0, & 8 & 5 & 3 & 9 & 5 & 8 & 4 & ... \\
...
\end{array}$$

В этой таблице выделены цифры, стоящие на диагонали. Составим новую десятичную бесконечную дробь (число a) по такому правилу: если в числе a_n на «диагональном месте» (на n-м месте после запятой) стоит цифра 1, то в числе a на этом месте поставим цифру 2; в остальных случаях в числе a на n-м месте поставим цифру 1. Так, для данного примера получим:

$$a = 0{,}1211\ldots .$$

Так как в числе a на n-м месте стоит цифра, отличная от n-й цифры числа a_n, то число a не содержится среди записанных чисел. Однако $a \in (0; 1)$. Получили противоречие. Следовательно, множество точек промежутка $(0; 1)$ является несчётным.

Это доказательство аналогично доказательству несчётности множества бесконечных последовательностей, составленных из нулей и единиц, рассмотренному в главе 1. Используемый метод называют **диагональным методом Кантора**.

§ 29 Свойства арифметического квадратного корня

Легко проверить, что $\sqrt{5^2} = 5$, $\sqrt{1{,}4^2} = 1{,}4$, $\sqrt{0^2} = 0$. Может показаться, что при любом значении a выполняется равенство $\sqrt{a^2} = a$. Однако это не так. Например, равенство $\sqrt{(-5)^2} = -5$ неверно, поскольку $-5 < 0$. На самом деле $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$. Также можно убедиться, что, например, $\sqrt{(-7)^2} = 7$, $\sqrt{(-2{,}8)^2} = 2{,}8$.

Теорема 29.1

Для любого действительного числа a выполняется равенство

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Доказательство.

Для того чтобы доказать равенство $\sqrt{a} = b$, надо показать, что $b \geqslant 0$ и $b^2 = a$.

Имеем: $|a| \geqslant 0$ при любом a.

Также из определения модуля следует, что $(|a|)^2 = a^2$. ■

Обобщением данной теоремы является следующая теорема.

Теорема 29.2

(Арифметический квадратный корень из степени)

Для любых действительного числа a и натурального числа n выполняется равенство

$$\sqrt{a^{2n}} = |a^n|.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 29.1. Проведите это доказательство самостоятельно.

Теорема 29.3

(Арифметический квадратный корень из произведения)

Для любых действительных чисел a и b таких, что $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, выполняется равенство

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Доказательство.

Имеем: $\sqrt{a} \geqslant 0$ и $\sqrt{b} \geqslant 0$. Тогда $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geqslant 0$. Кроме того, $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = ab$. Следовательно, выражение $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ принимает неотрицательное значение, и его квадрат равен ab. ■

Эту теорему можно обобщить для произведения трёх и более множителей. Например, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и $c \geqslant 0$, то

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)c} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}.$$

Заметим, что если $a \leqslant 0$ и $b \leqslant 0$, то теорема об арифметическом корне из произведения выражается таким равенством:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}.$$

Теорема 29.4

(Арифметический квадратный корень из дроби)

Для любых действительных чисел a и b таких, что $a \geqslant 0$ и $b > 0$, выполняется равенство

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 29.3. Докажите её самостоятельно.

Заметим, что если $a \leqslant 0$ и $b < 0$, то теорема об арифметическом корне из дроби выражается таким равенством:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}.$$

Пример 1. Найдите значение выражения: 1) $\sqrt{(-7{,}3)^2}$; 2) $\sqrt{1{,}2^4}$; 3) $\sqrt{0{,}81 \cdot 225}$; 4) $\sqrt{\frac{16}{49}}$.

Решение. 1) $\sqrt{(-7{,}3)^2} = |-7{,}3| = 7{,}3$.

2) $\sqrt{1{,}2^4} = 1{,}2^2 = 1{,}44$.

3) $\sqrt{0{,}81 \cdot 225} = \sqrt{0{,}81} \cdot \sqrt{225} = 0{,}9 \cdot 15 = 13{,}5$.

4) $\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}} = \frac{4}{7}$. ■

Пример 2. Найдите значение выражения: 1) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$; 2) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{150}}$.

Решение. 1) Заменив произведение корней корнем из произведения, получаем:

$$\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18 \cdot 2} = \sqrt{36} = 6.$$

2) Заменив частное корней корнем из дроби, получаем:

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{150}} = \sqrt{\frac{24}{150}} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}.$$ ■

Пример 3. Упростите выражение: 1) $\sqrt{a^{14}}$; 2) $\sqrt{a^{36}}$; 3) $\sqrt{9a^6}$, если $a \leqslant 0$; 4) $\sqrt{m^2n^2}$, если $m \geqslant 0$, $n \leqslant 0$; 5) $\sqrt{y^2 + 4y + 4}$, если $y \leqslant -2$; 6) $\sqrt{(x-3)^6}$.

Решение. 1) По теореме об арифметическом квадратном корне из степени имеем:

$$\sqrt{a^{14}} = |a^7| = \begin{cases} a^7, \text{ если } a \geqslant 0, \\ -a^7, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

2) $\sqrt{a^{36}} = |a^{18}|$. Поскольку $a^{18} \geqslant 0$, то $\sqrt{a^{36}} = |a^{18}| = a^{18}$.

3) Имеем: $\sqrt{9a^6} = 3|a^3|$. Поскольку по условию $a \leqslant 0$, то $a^3 \leqslant 0$. Тогда

$$\sqrt{9a^6} = 3 \cdot |a^3| = -3a^3.$$

4) $\sqrt{m^2n^2} = |m| \cdot |n|$. Поскольку по условию $m \geqslant 0$ и $n \leqslant 0$, то $|m| = m$ и $|n| = -n$. Следовательно, $\sqrt{m^2n^2} = m \cdot (-n) = -mn$.

5) $\sqrt{y^2 + 4y + 4} = \sqrt{(y+2)^2} = |y+2|$. Поскольку $y \leqslant -2$, то $y + 2 \leqslant 0$ и $|y+2| = -y - 2$.

6) $\sqrt{(x-3)^6} = |x-3|^3 = \begin{cases} (x-3)^3, \text{ если } x \geqslant 3, \\ (3-x)^3, \text{ если } x < 3. \end{cases}$ ■

Понятно, что из двух квадратов с площадями S_1 и S_2 (рис. 29.1) бóльшую сторону имеет тот, у которого площадь больше, т. е. если $S_1 > S_2$, то $\sqrt{S_1} > \sqrt{S_2}$.

Это очевидное соображение подтверждает следующая теорема.

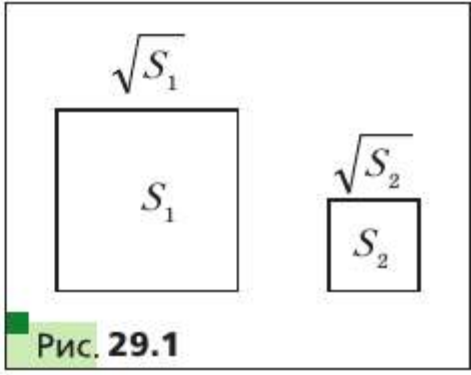


Рис. 29.1

Теорема 29.5

Если $a > b \geqslant 0$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

Доказательство.

Предположим, что доказываемое неравенство неверно, т. е. $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$. Так как $\sqrt{a} > 0$ и $\sqrt{b} \geqslant 0$, то, используя свойства числовых неравенств, получаем, что $(\sqrt{a})^2 \leqslant (\sqrt{b})^2$. Отсюда $a \leqslant b$, что противоречит условию. ■

Теорема 29.6

Если $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, то $a > b$.

Доказательство.

Так как $\sqrt{a} \geqslant 0$ и $\sqrt{b} \geqslant 0$, то, используя свойства числовых неравенств, получаем, что $(\sqrt{a})^2 > (\sqrt{b})^2$, т. е. $a > b$. ■

Пример 4. Сравните числа: 1) 6 и $\sqrt{31}$; 2) $3\sqrt{7}$ и $\sqrt{65}$.

Решение. 1) Так как $6 = \sqrt{36}$ и $36 > 31$, то $\sqrt{36} > \sqrt{31}$. Таким образом, $6 > \sqrt{31}$.

2) Имеем $(3\sqrt{7})^2 = 63$ и $63 < 65$, тогда $\sqrt{63} < \sqrt{65}$. Следовательно, $3\sqrt{7} < \sqrt{65}$. ■

Пример 5. Постройте график функции $y = \dfrac{\sqrt{x + \frac{1}{x} + 2} - \sqrt{x + \frac{1}{x} - 2}}{\sqrt{x + \frac{1}{x} + 2} + \sqrt{x + \frac{1}{x} - 2}}$.

Решение. Имеем: $y = \dfrac{\sqrt{\frac{(x+1)^2}{x}} - \sqrt{\frac{(x-1)^2}{x}}}{\sqrt{\frac{(x+1)^2}{x}} + \sqrt{\frac{(x-1)^2}{x}}}$. Теперь легко установить, что областью определения данной функции является множество $D(y) =$

$= (0; +\infty)$. С учётом области определении формулу, задающую данную функцию, можно записать так: $y = \dfrac{\frac{|x+1|}{\sqrt{x}} - \frac{|x-1|}{\sqrt{x}}}{\frac{|x+1|}{\sqrt{x}} + \frac{|x-1|}{\sqrt{x}}}$. Отсюда $y = \dfrac{|x+1| - |x-1|}{|x+1| + |x-1|}$.

Так как $x > 0$, то $x + 1 > 0$, тогда $y = \dfrac{x + 1 - |x-1|}{x + 1 + |x-1|}$.

Если $0 < x \leqslant 1$, то $y = \dfrac{x+1+x-1}{x+1+1-x} = x$.

Если $x > 1$, то $y = \dfrac{x+1-x+1}{x+1+x-1} = \dfrac{1}{x}$.

Следовательно, данную функцию можно задать так: $y = \begin{cases} x, \text{ если } 0 < x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x}, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

Искомый график изображён на рисунке 29.2. ■

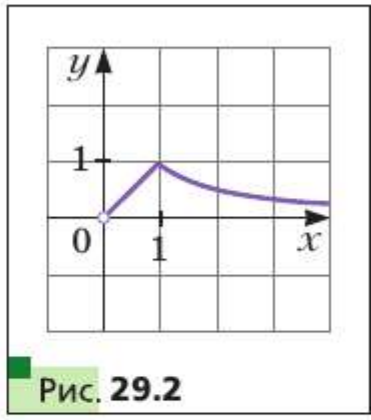


Рис. **29.2**

Пример 6. Сократите дробь $\dfrac{\sqrt{ab} + b}{\sqrt{ab}}$.

Решение. Из условия задачи следует, что числа a и b одинакового знака. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $a > 0$ и $b > 0$. Имеем:

$$\frac{\sqrt{ab} + b}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + \sqrt{b} \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a}}.$$

Второй случай: $a < 0$ и $b < 0$. Имеем:

$$\frac{\sqrt{ab} + b}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} - \left(\sqrt{-b}\right)^2}{\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{-b}\left(\sqrt{-a} - \sqrt{-b}\right)}{\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{-a} - \sqrt{-b}}{\sqrt{-a}}.$$

Для случая, когда $a < 0$ и $b < 0$, можно предложить другое решение. Пусть $a = -x$, $b = -y$, где $x > 0$, $y > 0$. Имеем:

$$\frac{\sqrt{ab} + b}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} - y}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{-a} - \sqrt{-b}}{\sqrt{-a}}.$$ ■

?

1. Какому выражению тождественно равно выражение $\sqrt{a^2}$?
2. Сформулируйте теорему об арифметическом квадратном корне из степени.
3. Сформулируйте теорему об арифметическом квадратном корне из произведения.

4. Сформулируйте теорему об арифметическом квадратном корне из дроби.

5. Известно, что неотрицательные числа a_1 и a_2 таковы, что $a_1 > a_2$. Сравните значения выражений $\sqrt{a_1}$ и $\sqrt{a_2}$.

6. Известно, что $\sqrt{a_1} > \sqrt{a_2}$. Сравните числа a_1 и a_2.

Упражнения

29.1. Вычислите значение выражения:

1) $\sqrt{16 \cdot 2500}$;
2) $\sqrt{400 \cdot 1{,}44}$;
3) $\sqrt{0{,}09 \cdot 0{,}04}$;
4) $\sqrt{7^2 \cdot 2^8}$;
5) $\sqrt{0{,}01 \cdot 0{,}81 \cdot 2500}$;
6) $\sqrt{\frac{49}{256}}$;
7) $\sqrt{3\frac{1}{16} \cdot 2\frac{14}{25}}$;
8) $\sqrt{\frac{169}{36 \cdot 81}}$;
9) $\sqrt{\frac{121 \cdot 256}{25 \cdot 100}}$.

29.2. Чему равно значение выражения:

1) $\sqrt{16 \cdot 0{,}25}$;
2) $\sqrt{0{,}36 \cdot 1{,}21}$;
3) $\sqrt{5^2 \cdot 3^6}$;
4) $\sqrt{2{,}25 \cdot 0{,}04 \cdot 1600}$;
5) $\sqrt{13\frac{4}{9}}$;
6) $\sqrt{1\frac{7}{9} \cdot \frac{4}{25}}$?

29.3. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50}$;
2) $\sqrt{0{,}009} \cdot \sqrt{1000}$;
3) $\sqrt{13} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{26}$;
4) $\sqrt{2{,}4} \cdot \sqrt{1\frac{2}{3}}$;
5) $\sqrt{\frac{2}{11}} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{\frac{1}{11}}$;
6) $\sqrt{2^3 \cdot 3} \cdot \sqrt{2^5 \cdot 3^3}$.

29.4. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3}$;
2) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$;
3) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{12{,}1}$;
4) $\sqrt{0{,}5} \cdot \sqrt{50}$;
5) $\sqrt{5 \cdot 2^3} \cdot \sqrt{5^3 \cdot 2^3}$.

29.5. Найдите значение частного:

1) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$;
2) $\frac{\sqrt{3{,}2}}{\sqrt{0{,}2}}$;
3) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{50}}$;
4) $\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$;
5) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{15}}$.

29.6. Найдите значение выражения:

1) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$;
2) $\frac{\sqrt{6{,}3}}{\sqrt{0{,}7}}$;
3) $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{242}}$;
4) $\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

29.7. Сравните числа:

1) $\sqrt{\frac{17}{4}}$ и 2; 3) $\sqrt{\frac{6}{7}}$ и 1; 5) $3\sqrt{2}$ и $2\sqrt{3}$;

2) 5 и $\sqrt{26}$; 4) -7 и $-\sqrt{48}$; 6) $\sqrt{41}$ и $2\sqrt{10}$.

29.8. Сравните числа:

1) $\sqrt{33}$ и 6; 3) $\sqrt{30}$ и $2\sqrt{7}$;

2) $3\sqrt{5}$ и $\sqrt{42}$; 4) $7\sqrt{\frac{1}{7}}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{20}$.

29.9. Запишите в порядке убывания числа 8; $\sqrt{62}$; 7,9; $\sqrt{65}$; 8,2.

29.10. Запишите в порядке возрастания числа $\sqrt{38}$; 6,1; 6; $\sqrt{35}$; 5,9.

29.11. Между какими двумя последовательными целыми числами находится на координатной прямой число:

1) $\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{5}$; 5) $\sqrt{13}$; 7) $-\sqrt{10}$;

2) $\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{7}$; 6) $\sqrt{0{,}98}$; 8) $-\sqrt{115}$?

29.12. Между какими двумя последовательными целыми числами находится на координатной прямой число:

1) $\sqrt{6}$; 2) $\sqrt{19}$; 3) $\sqrt{29}$; 4) $-\sqrt{30{,}5}$?

29.13. Укажите все целые числа, расположенные на координатной прямой между числами:

1) 3 и $\sqrt{68}$; 3) $-\sqrt{31}$ и $-2{,}3$;

2) $\sqrt{7}$ и $\sqrt{77}$; 4) $-\sqrt{42}$ и 2,8.

29.14. Укажите все целые числа, расположенные на координатной прямой между числами:

1) $\sqrt{3}$ и $\sqrt{13}$; 2) $\sqrt{10}$ и $\sqrt{90}$; 3) $-\sqrt{145}$ и $-\sqrt{47}$.

29.15. При каких значениях a выполняется равенство:

1) $\sqrt{a^2} = a$; 2) $\sqrt{a^2} = -a$?

29.16. При каких значениях переменных выполняется равенство:

1) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; 3) $\sqrt{-ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-b}$?

2) $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$;

29.17. Найдите значение выражения, представив предварительно подкоренное выражение в виде произведения квадратов рациональных чисел:

1) $\sqrt{8 \cdot 98}$; 3) $\sqrt{75 \cdot 48}$; 5) $\sqrt{2{,}7 \cdot 1{,}2}$;

2) $\sqrt{3{,}6 \cdot 14{,}4}$; 4) $\sqrt{4{,}5 \cdot 72}$; 6) $\sqrt{33 \cdot 297}$.

29.18. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{18 \cdot 200}$; 3) $\sqrt{14{,}4 \cdot 0{,}9}$; 5) $\sqrt{12{,}5 \cdot 32}$;

2) $\sqrt{3{,}6 \cdot 0{,}4}$; 4) $\sqrt{13 \cdot 52}$; 6) $\sqrt{108 \cdot 27}$.

29.19. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{41^2 - 40^2}$; 2) $\sqrt{21{,}8^2 - 18{,}2^2}$; 3) $\sqrt{\dfrac{139^2 - 86^2}{98{,}5^2 - 45{,}5^2}}$.

29.20. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{6{,}8^2 - 3{,}2^2}$; 2) $\sqrt{98{,}5^2 - 97{,}5^2}$; 3) $\sqrt{\dfrac{98}{228^2 - 164^2}}$.

29.21. Замените выражение тождественно равным, не содержащим знака корня:

1) $\sqrt{b^2}$; 2) $-0{,}4\sqrt{c^2}$; 3) $\sqrt{a^6}$; 4) $\sqrt{m^8}$.

29.22. Замените выражение тождественно равным, не содержащим знака корня:

1) $1{,}2\sqrt{x^2}$; 2) $\sqrt{y^4}$; 3) $\sqrt{n^{10}}$.

29.23. Упростите выражение:

1) $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2}$; 3) $\sqrt{(2\sqrt{5} - 3)^2}$;

2) $\sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{7})^2}$; 4) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{3})^2}$.

29.24. Упростите выражение:

1) $\sqrt{(\sqrt{5} - 4)^2}$; 3) $\sqrt{(\sqrt{8} - 3)^2} - \sqrt{(\sqrt{2} - 3)^2}$;

2) $\sqrt{(\sqrt{10} - \sqrt{11})^2}$; 4) $\sqrt{(2 - \sqrt{6})^2} - \sqrt{(\sqrt{6} - 1)^2}$.

29.25. Решите уравнение $\sqrt{x^6} = -x$.

29.26. Упростите выражение:

1) $\sqrt{m^2}$, если $m > 0$;

2) $\sqrt{n^2}$, если $n < 0$;

3) $\sqrt{16p^2}$, если $p \geqslant 0$;

4) $\sqrt{0{,}36k^2}$, если $k \leqslant 0$;

5) $\sqrt{c^{12}}$;

6) $\sqrt{0{,}25b^{14}}$, если $b \leqslant 0$;

7) $\sqrt{81x^4y^2}$, если $y \geqslant 0$;

8) $\sqrt{0{,}01a^6b^{10}}$, если $a \leqslant 0$, $b \geqslant 0$;

9) $-1{,}2x\sqrt{64x^{18}}$, если $x \leqslant 0$;

10) $\dfrac{\sqrt{a^{12}b^{22}c^{36}}}{a^4b^8c^{10}}$, если $b < 0$;

11) $\dfrac{3{,}3a^4}{b^3}\sqrt{\dfrac{b^{24}}{121a^{26}}}$, если $a < 0$;

12) $-0{,}5m^5\sqrt{1{,}96m^6n^8}$, если $m \leqslant 0$.

29.27. Упростите выражение:

1) $\sqrt{9a^{16}}$;

2) $\sqrt{0{,}81d^6}$, если $d \geqslant 0$;

3) $-5\sqrt{4x^2}$, если $x \leqslant 0$;

4) $-0{,}1\sqrt{100z^{10}}$, если $z \geqslant 0$;

5) $\sqrt{p^6q^8}$, если $p \geqslant 0$;

6) $\sqrt{25m^{34}n^{38}}$, если $m \leqslant 0$, $n \leqslant 0$;

7) $b^2\sqrt{b^{18}c^{22}}$, если $b \geqslant 0$, $c \leqslant 0$;

8) $\dfrac{8m^3p^4}{k^2}\sqrt{\dfrac{k^{32}p^{40}}{m^6}}$, если $m < 0$.

29.28. Упростите выражение:

1) $\sqrt{(a-4)^2}$;

2) $\sqrt{(b-15)^2}$, если $b \geqslant 15$;

3) $\sqrt{(c+1)^2}$, если $c \leqslant -1$;

4) $(10-m)\sqrt{\dfrac{400}{(m-12)^2}}$, если $m > 12$;

5) $\dfrac{n^2-6n+9}{n+3}\sqrt{\dfrac{(n+3)^4}{(n-3)^2}}$, если $n > 3$;

6) $\dfrac{p^2-1}{(p+2)^2}\sqrt{\dfrac{p^2+4p+4}{(p+1)^2}}$, если $p < -2$.

29.29. Упростите выражение:

1) $\sqrt{(a-b)^2}$, если $b \geqslant a$;

2) $\sqrt{c^2+6c+9}$, если $c \geqslant -3$;

3) $\dfrac{\sqrt{(m-5)^4}}{m^2-10m+25}$.

29.30. При каких значениях a выполняется равенство:

1) $\sqrt{(a-2)^2} = 2-a$;

2) $\sqrt{(a+3)^6} = (a+3)^3$;

3) $\sqrt{(1-a)^4} = (a-1)^2$;

4) $\sqrt{a-3}\cdot\sqrt{a-3} = a-3$;

5) $\sqrt{a(a-1)} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{a-1}$;

6) $\sqrt{a(a-1)} = \sqrt{-a}\cdot\sqrt{1-a}$;

7) $\dfrac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{2-a}} = \sqrt{\dfrac{a-1}{2-a}}$?

29.31. При каких значениях a выполняется равенство:

1) $\sqrt{a^{10}} = a^5$;

2) $\sqrt{a^{10}} = -a^5$;

3) $\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2$;

4) $\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{-a}\right)^2$;

5) $\sqrt{(a+1)^2} = -a-1$;

6) $\sqrt{(1-a)^{10}} = (1-a)^5$;

7) $\sqrt{a^4+2a^2+1} = a^2+1$;

8) $\sqrt{(a-2)(a-3)} = \sqrt{2-a}\cdot\sqrt{3-a}$;

9) $\sqrt{a(a+1)} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{a+1}$?

29.32. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{x^2} - x$, если $x \leqslant 0$;

2) $y = 2x + \sqrt{x^2}$;

3) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2}} + 3$;

4) $y = \sqrt{(x+3)^2} + x$.

29.33. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{x^2} + x$, если $x \geqslant 0$;

2) $y = \sqrt{(x-3)^2}$;

3) $y = \sqrt{(x-2)^2} - x$;

4) $y = \sqrt{(x+4)^2} - x - 4$.

29.34. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x^2} = x - 4$;

2) $\sqrt{x^2} = 6 - x$;

3) $2\sqrt{x^2} = x + 3$;

4) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2x - 5$.

29.35. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x^2} = 6x - 10$;

2) $\sqrt{x^2} = x + 8$;

3) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = x + 1$;

4) $\sqrt{9 - 6x + x^2} = 2x - 1$.

29.36. Решите неравенство:

1) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} < 2$;

2) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} \geqslant 3$.

29.37. Решите неравенство:

1) $\sqrt{9x^2 + 6x + 1} \leqslant 1$;

2) $\sqrt{x^2 - 10x + 25} > 4$.

◆ ◆ ◆

29.38. Изобразите на координатной плоскости множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению:

1) $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$;

2) $\sqrt{xy} = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{-y}$;

3) $\sqrt{xy} = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{y}$;

4) $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{-y}$.

29.39. Сократите дробь:

1) $\dfrac{a + \sqrt{ab}}{b + \sqrt{ab}}$, $a \neq 0$;

2) $\dfrac{b + \sqrt{ab}}{\sqrt{-b}}$;

3) $\dfrac{a + b + 2\sqrt{ab}}{\sqrt{-a} + \sqrt{-b}}$.

29.40. Упростите выражение:

1) $\sqrt{a^2 - 2a + 1 + \sqrt{4a^2 - 12a + 9}}$, если $a \leqslant \dfrac{3}{2}$;

2) $\sqrt{b^2 + 9b + 17 - \sqrt{b^2 + 2b + 1}}$, если $b \geqslant -1$;

3) $\sqrt{b^2 + 4b + \sqrt{9b^4 + 6b^2 + 1}}$.

29.41. Упростите выражение:

1) $\sqrt{a^2 - 11a + 26 + \sqrt{1 - 2a + a^2}}$, если $a > 1$;

2) $\sqrt{7b^2 + 6b + \sqrt{4b^4 + 4b^2 + 1}}$.

29.42. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{a^2-5a}{a^2-10a+25}+\frac{25}{a^2-25}\right):\frac{125-a^3}{5+a}$$

при $a=4{,}5$.

29.43. Тракторист должен был засеять поле за 8 дней. Однако из-за плохой погоды он засеивал ежедневно на 3 га меньше нормы и поэтому выполнил работу за 10 дней. Какова площадь поля?

29.44. Найдите все двузначные натуральные числа, любая натуральная степень которых оканчивается двумя цифрами, образующими это двузначное число.

§ 30 Тождественные преобразования выражений, содержащих арифметические квадратные корни

Пользуясь теоремой об арифметическом квадратном корне из произведения, преобразуем выражение $\sqrt{48}$. Имеем:

$$\sqrt{48}=\sqrt{16\cdot 3}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}=4\sqrt{3}.$$

Выражение $\sqrt{48}$ мы представили в виде произведения рационального числа 4 и иррационального числа $\sqrt{3}$. Такое преобразование называют **вынесением множителя из-под знака корня**. В данном случае был вынесен из-под корня множитель 4.

Рассмотрим выполненное преобразование в обратном порядке:

$$4\sqrt{3}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{16\cdot 3}=\sqrt{48}.$$

Такое преобразование называют **внесением множителя под знак корня**. В данном случае был внесён под корень множитель 4.

Пример 1. Вынесите множитель из-под знака корня: 1) $\sqrt{72a^8}$; 2) $\sqrt{b^{35}}$; 3) $\sqrt{-b^{35}}$; 4) $\sqrt{a^2b^3}$, если $a<0$; 5) $\sqrt{a^6b}$.

Решение. 1) $\sqrt{72a^8}=\sqrt{36a^8\cdot 2}=6a^4\sqrt{2}$.

2) Поскольку подкоренное выражение должно быть неотрицательным, то из условия следует, что $b\geqslant 0$. Тогда

$$\sqrt{b^{35}}=\sqrt{b^{34}b}=|b^{17}|\sqrt{b}=b^{17}\sqrt{b}.$$

3) Из условия следует, что $b\leqslant 0$. Тогда

$$\sqrt{-b^{35}}=\sqrt{b^{34}\cdot(-b)}=|b^{17}|\sqrt{-b}=-b^{17}\sqrt{-b}.$$

4) Из условия следует, что $a^2 > 0$. Поскольку подкоренное выражение должно быть неотрицательным, то получаем, что $b \geqslant 0$. Тогда

$$\sqrt{a^2b^3} = \sqrt{a^2b^2b} = |a| \cdot |b| \sqrt{b} = -ab\sqrt{b}.$$

5) Заметим, что если $a = 0$, то значение данного выражения равно 0. Если $a \neq 0$, то из условия следует, что $b \geqslant 0$. Получаем:

$\sqrt{a^6b} = a^3\sqrt{b}$ при $a > 0$;

$\sqrt{a^6b} = -a^3\sqrt{b}$ при $a < 0$. ■

Пример 2. Внесите множитель под знак корня: 1) $-2\sqrt{7}$; 2) $a\sqrt{7}$; 3) $3b\sqrt{-\frac{b}{3}}$; 4) $c\sqrt{c^7}$.

Решение. 1) $-2\sqrt{7} = -\sqrt{4} \cdot \sqrt{7} = -\sqrt{28}$.

2) Если $a \geqslant 0$, то $a\sqrt{7} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{7a^2}$;

если $a < 0$, то $a\sqrt{7} = -\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{7} = -\sqrt{7a^2}$.

3) Из условия следует, что $b \leqslant 0$. Тогда $3b\sqrt{-\frac{b}{3}} = -\sqrt{9b^2} \cdot \sqrt{-\frac{b}{3}} = -\sqrt{9b^2 \cdot \left(-\frac{b}{3}\right)} = -\sqrt{-3b^3}$.

4) Из условия следует, что $c \geqslant 0$. Тогда $c\sqrt{c^7} = \sqrt{c^2} \cdot \sqrt{c^7} = \sqrt{c^9}$. ■

Пример 3. Упростите выражение: 1) $\sqrt{54a} + \sqrt{24a} - \sqrt{600a}$; 2) $\left(7 - 3\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{10} + \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{10} - \sqrt{5}\right)$.

Решение. 1) Имеем:

$$\sqrt{54a} + \sqrt{24a} - \sqrt{600a} = \sqrt{9 \cdot 6a} + \sqrt{4 \cdot 6a} - \sqrt{100 \cdot 6a} =$$

$$= 3\sqrt{6a} + 2\sqrt{6a} - 10\sqrt{6a} = \sqrt{6a}(3 + 2 - 10) = \sqrt{6a} \cdot (-5) = -5\sqrt{6a}.$$

2) Применив формулы сокращённого умножения (квадрат двучлена и произведение суммы и разности двух выражений), получим:

$7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 3\sqrt{2} + \left(3\sqrt{2}\right)^2 - \left(\left(\sqrt{10}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2\right)$. Упростим это выражение: $49 - 42\sqrt{2} + 18 - (10 - 5) = 62 - 42\sqrt{2}$. ■

Пример 4. Разложите на множители выражение: 1) $a^2 - 2$; 2) $b - 4$, если $b \geqslant 0$; 3) $9c - 6\sqrt{5c} + 5$; 4) $a + \sqrt{a}$; 5) $\sqrt{3} + 6$.

Решение. 1) Представив данное выражение в виде разности квадратов, получим: $a^2 - 2 = a^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2$. Далее воспользуемся формулой разности квадратов двух выражений:

$$a^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(a - \sqrt{2}\right)\left(a + \sqrt{2}\right).$$

2) Поскольку по условию $b \geqslant 0$, то

$$b-4=\left(\sqrt{b}\right)^2-4=\left(\sqrt{b}-2\right)\left(\sqrt{b}+2\right).$$

3) Применим формулу квадрата разности:

$$9c-6\sqrt{5c}+5=\left(3\sqrt{c}\right)^2-2\cdot 3\sqrt{c}\cdot\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2=\left(3\sqrt{c}-\sqrt{5}\right)^2.$$

4) Имеем: $a+\sqrt{a}=\left(\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{a}=\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)$.

5) $\sqrt{3}+6=\sqrt{3}+2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2=\sqrt{3}\left(1+2\sqrt{3}\right)$. ■

Пример 5. Сократите дробь: 1) $\dfrac{b-1}{\sqrt{b}+1}$; 2) $\dfrac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

Решение. 1) Имеем:

$$\frac{b-1}{\sqrt{b}+1}=\frac{\left(\sqrt{b}\right)^2-1}{\sqrt{b}+1}=\frac{\left(\sqrt{b}-1\right)\left(\sqrt{b}+1\right)}{\sqrt{b}+1}=\sqrt{b}-1.$$

2) $\dfrac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-3\right)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-3$. ■

Пример 6. Освободите знаменатель дроби от иррациональности: 1) $\dfrac{15}{2\sqrt{3}}$; 2) $\dfrac{14}{5\sqrt{2}-1}$.

Освободить знаменатель дроби от иррациональности *означает преобразовать дробь так, чтобы её знаменатель не содержал квадратного корня.*

Решение. 1) Умножим числитель и знаменатель данной дроби на $\sqrt{3}$ и далее преобразуем полученную дробь:

$$\frac{15}{2\sqrt{3}}=\frac{15\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{15\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{15\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

2) Умножим числитель и знаменатель данной дроби на выражение $5\sqrt{2}+1$ и далее преобразуем полученную дробь:

$$\frac{14}{5\sqrt{2}-1}=\frac{14\left(5\sqrt{2}+1\right)}{\left(5\sqrt{2}-1\right)\left(5\sqrt{2}+1\right)}=\frac{14\left(5\sqrt{2}+1\right)}{\left(5\sqrt{2}\right)^2-1}=\frac{14\left(5\sqrt{2}+1\right)}{50-1}=$$

$$=\frac{14\left(5\sqrt{2}+1\right)}{49}=\frac{2\left(5\sqrt{2}+1\right)}{7}=\frac{10\sqrt{2}+2}{7}.$$ ■

Пример 7. Докажите тождество

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{2\sqrt{ab}}{b-a}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

Решение. $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{2\sqrt{ab}}{b-a}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\dfrac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=$

$=\dfrac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})+\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})+2\sqrt{ab}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}\cdot\left(\sqrt{a}-\dfrac{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=$

$=\dfrac{a-\sqrt{ab}+\sqrt{ab}+b+2\sqrt{ab}}{a-b}\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=\dfrac{(a+2\sqrt{ab}+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}=$

$=\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$ ■

Пример 8. Упростите выражение: 1) $\sqrt{12+6\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{2-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение. 1) Представим подкоренное выражение в виде квадрата суммы и далее преобразуем полученное выражение:

$$\sqrt{12+6\sqrt{3}}=\sqrt{9+2\cdot3\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}=\left|3+\sqrt{3}\right|=3+\sqrt{3}.$$

2) $\sqrt{2-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{1-2\sqrt{3}+3}{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=$

$=\sqrt{\dfrac{(1-\sqrt{3})^2}{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{|1-\sqrt{3}|}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}.$ ■

Пример 9. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{2b+2\sqrt{b^2-4}}}{\sqrt{b^2-4}+b+2}$, если $b\geqslant 2$.

Решение. Так как $b\geqslant 2$, то $\sqrt{b^2-4}=\sqrt{b-2}\cdot\sqrt{b+2}$, $b+2=\left(\sqrt{b+2}\right)^2$, $b-2=\left(\sqrt{b-2}\right)^2$. Имеем: $\dfrac{\sqrt{2b+2\sqrt{b^2-4}}}{\sqrt{b^2-4}+b+2}=\dfrac{\sqrt{b-2+2\sqrt{b^2-4}+b+2}}{\sqrt{(b-2)(b+2)}+\left(\sqrt{b+2}\right)^2}=$

$=\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{b-2}\right)^2+2\sqrt{b-2}\cdot\sqrt{b+2}+\left(\sqrt{b+2}\right)^2}}{\sqrt{b-2}\cdot\sqrt{b+2}+\left(\sqrt{b+2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2}\right)^2}}{\sqrt{b+2}\left(\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2}\right)}=$

$=\dfrac{\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2}}{\sqrt{b+2}\left(\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{b+2}}.$ ■

Упражнения

30.1. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{32}$; 3) $\sqrt{490}$; 5) $\sqrt{275}$; 7) $\sqrt{0,48}$;

2) $\sqrt{54}$; 4) $\sqrt{500}$; 6) $\sqrt{0,72}$; 8) $\sqrt{450}$.

30.2. Упростите выражение:

1) $\frac{1}{2}\sqrt{128}$; 2) $\frac{1}{10}\sqrt{200}$; 3) $-0,05\sqrt{4400}$.

30.3. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{27}$; 3) $-2\sqrt{0,18}$; 5) $\frac{3}{7}\sqrt{98}$;

2) $\sqrt{20}$; 4) $\frac{4}{9}\sqrt{63}$; 6) $10\sqrt{0,03}$.

30.4. Внесите множитель под знак корня:

1) $7\sqrt{2}$; 3) $6\sqrt{a}$; 5) $\frac{1}{8}\sqrt{128a}$; 7) $3\sqrt{\frac{1}{3}}$;

2) $-2\sqrt{17}$; 4) $-\frac{2}{3}\sqrt{54}$; 6) $-0,3\sqrt{10b}$; 8) $\frac{2}{9}\sqrt{\frac{27}{28}}$.

30.5. Внесите множитель под знак корня:

1) $-11\sqrt{3}$; 2) $12\sqrt{b}$; 3) $-7\sqrt{3c}$; 4) $-\frac{1}{3}\sqrt{18p}$.

30.6. Упростите выражение:

1) $\sqrt{9a}+\sqrt{25a}-\sqrt{49a}$; 2) $2\sqrt{0,04c}-0,3\sqrt{16c}+\frac{1}{3}\sqrt{0,81c}$.

30.7. Упростите выражение:

1) $2\sqrt{4x}+6\sqrt{16x}-\sqrt{625x}$;

2) $3\sqrt{0,09y}-0,6\sqrt{144y}+\frac{18}{11}\sqrt{\frac{121}{36}y}$.

30.8. Упростите выражение:

1) $8\sqrt{2}-\sqrt{32}$; 3) $2\sqrt{500}-8\sqrt{5}$;

2) $6\sqrt{3}-\sqrt{27}$; 4) $2\sqrt{20}-\frac{1}{3}\sqrt{45}-0,6\sqrt{125}$.

30.9. Упростите выражение:

1) $\sqrt{75}-6\sqrt{3}$; 3) $3\sqrt{72}-4\sqrt{2}+2\sqrt{98}$;

2) $2\sqrt{50}-8\sqrt{2}$; 4) $\frac{1}{3}\sqrt{108}+\sqrt{363}-\frac{2}{9}\sqrt{243}$.

30.10. Упростите выражение:

1) $\sqrt{2}(\sqrt{50}+\sqrt{8})$;
2) $(\sqrt{3}-\sqrt{12})\cdot\sqrt{3}$;
3) $(3\sqrt{5}-4\sqrt{3})\cdot\sqrt{5}$;
4) $2\sqrt{2}\left(3\sqrt{18}-\frac{1}{4}\sqrt{2}+\sqrt{32}\right)$.

30.11. Упростите выражение:

1) $\sqrt{7}(\sqrt{7}-\sqrt{28})$;
2) $(\sqrt{18}+\sqrt{72})\cdot\sqrt{2}$;
3) $(4\sqrt{3}-\sqrt{75}+4)\cdot 3\sqrt{3}$;
4) $(\sqrt{600}+\sqrt{6}-\sqrt{24})\cdot\sqrt{6}$.

30.12. Выполните умножение:

1) $(\sqrt{2}+\sqrt{5})(2\sqrt{2}-\sqrt{5})$;
2) $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})$;
3) $(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})$;
4) $(4\sqrt{2}-2\sqrt{3})(2\sqrt{3}+4\sqrt{2})$;
5) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$;
6) $(2-3\sqrt{3})^2$.

30.13. Выполните умножение:

1) $(4\sqrt{2}-\sqrt{3})(2\sqrt{2}+5\sqrt{3})$;
2) $(\sqrt{p}-q)(\sqrt{p}+q)$;
3) $(\sqrt{5}-x)(\sqrt{5}+x)$;
4) $(\sqrt{19}+\sqrt{17})(\sqrt{19}-\sqrt{17})$;
5) $(m+\sqrt{n})^2$;
6) $(3-2\sqrt{15})^2$.

30.14. Чему равно значение выражения:

1) $(2+\sqrt{7})^2-4\sqrt{7}$;
2) $(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2+6\sqrt{2}$?

30.15. Найдите значение выражения:

1) $(3+\sqrt{5})^2-6\sqrt{5}$;
2) $(\sqrt{12}-2\sqrt{2})^2+8\sqrt{6}$.

30.16. Освободите знаменатель дроби от иррациональности:

1) $\frac{18}{\sqrt{5}}$;
2) $\frac{m}{\sqrt{n}}$;
3) $\frac{7}{\sqrt{7}}$;
4) $\frac{24}{5\sqrt{3}}$.

30.17. Освободите знаменатель дроби от иррациональности:

1) $\frac{a}{\sqrt{11}}$;
2) $\frac{5}{\sqrt{10}}$;
3) $\frac{30}{\sqrt{15}}$;
4) $\frac{2}{3\sqrt{x}}$.

30.18. Разложите на множители выражение:

1) a^2-3;
2) $4b^2-2$;
3) $5-6c^2$;
4) $a-9$, если $a\geqslant 0$;
5) $m-n$, если $m\geqslant 0$, $n\geqslant 0$;
6) $16x-25y$, если $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$;
7) $a-2\sqrt{a}+1$;
8) $4m-28\sqrt{mn}+49n$, если $m\geqslant 0$, $n\geqslant 0$;
9) $b+6\sqrt{b}+9$;
10) $3+2\sqrt{3c}+c$;
11) $2+\sqrt{2}$;
12) $6\sqrt{7}-7$;
13) $a-\sqrt{a}$;
14) $\sqrt{b}+\sqrt{3b}$;
15) $\sqrt{15}-\sqrt{5}$.

30.19. Разложите на множители выражение:

1) $15 - x^2$;

2) $49x^2 - 2$;

3) $36p - 64q$, если $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$;

4) $c - 100$, если $c \geqslant 0$;

5) $a - 8b\sqrt{a} + 16b^2$;

6) $m + 2\sqrt{mn} + n$, если $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$;

7) $a - 4\sqrt{a} + 4$;

8) $5 + \sqrt{5}$;

9) $\sqrt{3p} - p$;

10) $\sqrt{12} + \sqrt{32}$.

30.20. Сократите дробь:

1) $\dfrac{a^2 - 7}{a + \sqrt{7}}$;

2) $\dfrac{\sqrt{3} - b}{3 - b^2}$;

3) $\dfrac{c - 9}{\sqrt{c} - 3}$;

4) $\dfrac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$;

5) $\dfrac{5\sqrt{a} - 7\sqrt{b}}{25a - 49b}$;

6) $\dfrac{100a^2 - 9b}{10a + 3\sqrt{b}}$;

7) $\dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{6} - \sqrt{3}}$;

8) $\dfrac{\sqrt{35} + \sqrt{10}}{\sqrt{7} + \sqrt{2}}$;

9) $\dfrac{\sqrt{15} - \sqrt{6}}{5 - \sqrt{10}}$;

10) $\dfrac{13 - \sqrt{13}}{\sqrt{13}}$;

11) $\dfrac{a + 2\sqrt{ab} + b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$;

12) $\dfrac{4b^2 - 4b\sqrt{c} + c}{2b - \sqrt{c}}$.

30.21. Сократите дробь:

1) $\dfrac{x - 25}{\sqrt{x} - 5}$;

2) $\dfrac{\sqrt{a} + 2}{a - 4}$;

3) $\dfrac{a - 3}{\sqrt{a} + \sqrt{3}}$;

4) $\dfrac{\sqrt{10} + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$;

5) $\dfrac{23 - \sqrt{23}}{\sqrt{23}}$;

6) $\dfrac{\sqrt{24} - \sqrt{28}}{\sqrt{54} - \sqrt{63}}$;

7) $\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - 2\sqrt{ab} + b}$;

8) $\dfrac{b - 8\sqrt{b} + 16}{\sqrt{b} - 4}$.

30.22. Упростите выражение:

1) $3\sqrt{8} + \sqrt{128} - \dfrac{1}{3}\sqrt{162}$;

2) $\sqrt{5a} - 2\sqrt{20a} + 3\sqrt{80a}$;

3) $\sqrt{a^3b} - \dfrac{2}{a}\sqrt{a^5b}$, если $a > 0$, $b \geqslant 0$;

4) $\sqrt{c^5} + 4c\sqrt{c^3} - 5c^2\sqrt{c}$.

30.23. Упростите выражение:

1) $0{,}5\sqrt{12} - 3\sqrt{27} + 0{,}4\sqrt{75}$;

2) $2{,}5\sqrt{28b} + \frac{2}{3}\sqrt{63b} - 10\sqrt{0{,}07b}$;

3) $\sqrt{81a^7} - 5a^3\sqrt{a} + \frac{6}{a}\sqrt{a^9}$.

30.24. Докажите, что:

1) $\sqrt{11 + 4\sqrt{7}} = \sqrt{7} + 2$;

2) $\sqrt{14 + 8\sqrt{3}} = \sqrt{8} + \sqrt{6}$.

30.25. Упростите выражение:

1) $(2\sqrt{3} - 1)(\sqrt{27} + 2)$;

2) $(\sqrt{5} - 2)^2 - (3 + \sqrt{5})^2$;

3) $\sqrt{\sqrt{17} - 4} \cdot \sqrt{\sqrt{17} + 4}$;

4) $(7 + 4\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^2$;

5) $\left(\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}\right)^2$.

30.26. Найдите значение выражения:

1) $(3\sqrt{2} + 1)(\sqrt{8} - 2)$;

2) $(3 - 2\sqrt{7})^2 + (3 + 2\sqrt{7})^2$;

3) $(10 - 4\sqrt{6})(2 + \sqrt{6})^2$;

4) $\left(\sqrt{9 - 4\sqrt{2}} + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}\right)^2$.

30.27. Сократите дробь:

1) $\frac{4a + 4\sqrt{5}}{a^2 - 5}$;

2) $\frac{\sqrt{28} - 2\sqrt{2a}}{6a - 21}$;

3) $\frac{a + 4\sqrt{ab} + 4b}{a - 4b}$, если $a > 0$, $b > 0$;

4) $\frac{x^2 - 6y}{x^2 + 6y - x\sqrt{24y}}$;

5) $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}}$;

6) $\frac{m\sqrt{m} - 27}{\sqrt{m} - 3}$.

30.28. Сократите дробь:

1) $\frac{a - b}{\sqrt{11b} - \sqrt{11a}}$;

2) $\frac{2a + 10\sqrt{2ab} + 25b}{6a - 75b}$, если $a > 0$, $b > 0$;

3) $\frac{a - 2\sqrt{a} + 4}{a\sqrt{a} + 8}$.

30.29. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$;

2) $\frac{19}{2\sqrt{5} - 1}$;

3) $\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$;

4) $\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$.

30.30. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 2}$;

2) $\frac{8}{\sqrt{10} - \sqrt{2}}$;

3) $\frac{9}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$;

4) $\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$.

30.31. Докажите равенство:

1) $\frac{1}{5-2\sqrt{6}}+\frac{1}{5+2\sqrt{6}}=10$;

2) $\frac{2}{3\sqrt{2}+4}-\frac{2}{3\sqrt{2}-4}=-8$;

3) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=4\sqrt{2}$;

4) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+4}+2}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+4}-2}=-4$.

30.32. Докажите, что значением выражения является рациональное число:

1) $\frac{6}{3+2\sqrt{3}}+\frac{6}{3-2\sqrt{3}}$;

2) $\frac{\sqrt{11}+\sqrt{6}}{\sqrt{11}-\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{11}-\sqrt{6}}{\sqrt{11}+\sqrt{6}}$.

30.33. Упростите выражение:

1) $\frac{a}{\sqrt{a}-2}-\frac{4\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}-2}$;

2) $\frac{\sqrt{m}+1}{\sqrt{m}-2}-\frac{\sqrt{m}+3}{\sqrt{m}}$;

3) $\frac{\sqrt{y}+4}{\sqrt{xy}+y}-\frac{\sqrt{x}-4}{x+\sqrt{xy}}$;

4) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+4}-\frac{a}{a-16}$;

5) $\frac{a}{\sqrt{ab}-b}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$;

6) $\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{b}{2\sqrt{a}+2}$;

7) $\frac{\sqrt{c}-5}{\sqrt{c}}:\frac{c-25}{3c}$;

8) $\left(\sqrt{a}-\frac{a}{\sqrt{a}+1}\right):\frac{\sqrt{a}}{a-1}$;

9) $\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right):\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;

10) $\left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}+\frac{12\sqrt{x}}{x-9}\right):\frac{\sqrt{x}+3}{x-3\sqrt{x}}$.

30.34. Упростите выражение:

1) $\frac{\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}+1}-\frac{\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}}$;

2) $\frac{\sqrt{a}+1}{a-\sqrt{ab}}-\frac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{ab}-b}$;

3) $\frac{\sqrt{x}}{y-2\sqrt{y}}:\frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{y}-6}$;

4) $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}:\left(\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}\right)$;

5) $\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{4\sqrt{x}}{x-1}\right)\cdot\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;

6) $\frac{a-64}{\sqrt{a}+3}\cdot\frac{1}{a+8\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a}+8}{a-3\sqrt{a}}$.

30.35. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{-m^9}$;

2) $\sqrt{96(a-3)^5}$;

3) $\sqrt{a^4b^{13}}$, если $a\neq 0$;

4) $\sqrt{4x^6y}$, если $x<0$;

5) $\sqrt{(a+1)^6(a^2+1)^5}$, если $a\leqslant -1$;

6) $\sqrt{m^7n^7}$, если $m\leqslant 0$, $n\leqslant 0$;

7) $\sqrt{45x^3y^{14}}$, если $y < 0$;

8) $\sqrt{64a^2b^9}$, если $a > 0$;

9) $\sqrt{242m^{11}b^{18}}$, если $b < 0$;

10) $\sqrt{-m^2n^2p^{15}}$, если $m > 0$, $n < 0$;

11) $\sqrt{x^5(y-1)^4}$, если $y \neq 1$;

12) $\sqrt{-y^7(x+2)^8}$, если $x \neq -2$.

30.36. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{-m^{19}}$;

2) $\sqrt{48(x-1)^7}$;

3) $\sqrt{a^{23}b^{24}}$, если $b \neq 0$;

4) $\sqrt{49a^2b}$, если $a < 0$;

5) $\sqrt{(b+3)^{10}(b^4+1)^3}$, если $b \leqslant -3$;

6) $\sqrt{a^9b^9}$;

7) $\sqrt{27x^{15}y^{34}}$, если $y < 0$;

8) $\sqrt{-8c^6n^6p^7}$, если $c > 0$, $n > 0$;

9) $\sqrt{a^9(b+2)^8}$, если $b \neq -2$;

10) $\sqrt{-x^3(y-3)^{12}}$, если $y \neq 3$.

30.37. Внесите множитель под знак корня:

1) $a\sqrt{3}$;

2) $b\sqrt{-b}$;

3) $c\sqrt{c^5}$;

4) $m\sqrt{n}$, если $m \geqslant 0$;

5) $xy^2\sqrt{xy}$, если $x \leqslant 0$;

6) $2p\sqrt{\frac{p}{2}}$;

7) $2p\sqrt{-\frac{p}{2}}$;

8) $(x-1)\sqrt{\frac{1}{x^2-2x+1}}$, если $x < 1$;

9) $(y+3)\sqrt{\frac{5}{y^2+6y+9}}$, если $y > -3$;

10) $(m+1)\sqrt{\frac{1}{m+1}}$;

11) $(2-c)\sqrt{\frac{1}{2c-4}}$;

12) $(-x-y)\sqrt{\frac{2}{x+y}}$;

13) $ab^2\sqrt{\frac{a}{b}}$, если $a \geqslant 0$.

30.38. Внесите множитель под знак корня:

1) $m\sqrt{7}$, если $m \geqslant 0$;

2) $3n\sqrt{6}$, если $n \leqslant 0$;

3) $p\sqrt{p^3}$;

4) $x^4y\sqrt{x^5y}$, если $y \leqslant 0$;

5) $7a\sqrt{\dfrac{3}{a}}$;

6) $(3-a)\sqrt{\dfrac{2}{a^2-6a+9}}$, если $a > 3$;

7) $(b+6)\sqrt{\dfrac{1}{b+6}}$;

8) $(y-4)\sqrt{\dfrac{1}{12-3y}}$;

9) $5ab\sqrt{-\dfrac{a^7}{5b}}$, если $a < 0$.

◆ ◆ ◆

30.39. Докажите тождество:

1) $\left(\dfrac{8\sqrt{a}}{\sqrt{a}+7}-\dfrac{15\sqrt{a}}{a+14\sqrt{a}+49}\right):\dfrac{8\sqrt{a}+41}{a-49}+\dfrac{7\sqrt{a}-49}{\sqrt{a}+7}=\sqrt{a}-7;$

2) $\dfrac{a\sqrt{a}+27}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}-3}{a-3\sqrt{a}+9}-\dfrac{\sqrt{ab}-9}{a\sqrt{a}+27}\right)=\sqrt{a};$

3) $\left(\sqrt{x}-\dfrac{\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right):\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{2\sqrt{xy}}{x-y}\right)=\sqrt{x}+\sqrt{y};$

4) $\dfrac{\sqrt{x}-2}{4x-16\sqrt{x}+16}:\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-4}-\dfrac{x-12}{2x-8}-\dfrac{2}{x+2\sqrt{x}}\right)=\dfrac{\sqrt{x}}{4\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}.$

30.40. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}}-\dfrac{1}{a-b}\cdot\dfrac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}};$

2) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\dfrac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right);$

3) $\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1}+\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1}-1\right):\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1}-\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1}+1\right);$

4) $\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:(a-b)+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}};$

5) $\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}\right):\left(1+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)$;

6) $\left(\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right):\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}-2\right)\right):\left(1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, $a>0$, $b>0$.

30.41. Упростите выражение $\left(\frac{1+\sqrt{2-a}}{2-a+\sqrt{2-a}}-\frac{1-\sqrt{2-a}}{2-a-\sqrt{2-a}}\right)\cdot\sqrt{\frac{2}{a}-1}$, если $0<a<2$.

30.42. Упростите выражение $\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$, если $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, $a>0$, $b>0$.

30.43. Упростите выражение:

1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$;
3) $\sqrt{11+2\sqrt{30}}$;
5) $\sqrt{37-5\sqrt{48}}$;
2) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$;
4) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$;
6) $\sqrt{28-\sqrt{108}}$.

30.44. Упростите выражение:

1) $\sqrt{8+2\sqrt{7}}$;
3) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$;
5) $\sqrt{18+2\sqrt{45}}$;
2) $\sqrt{15+6\sqrt{6}}$;
4) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$;
6) $\sqrt{91-40\sqrt{3}}$.

30.45. Упростите выражение:

1) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$;

2) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{8}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{50}+\sqrt{47}}$.

30.46. Докажите, что:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{91}+\sqrt{89}}=\frac{\sqrt{91}-1}{2}.$$

30.47. Докажите, что:

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=2$;

2) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=1$.

30.48. Упростите выражение:

1) $\sqrt{10+8\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$;
3) $\sqrt{8-\sqrt{28}}-\sqrt{8+\sqrt{28}}$;
2) $\sqrt{22+6\sqrt{3+\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$;
4) $\sqrt{4+\sqrt{15}}-\sqrt{4-\sqrt{15}}$.

30.49. Упростите выражение:

1) $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$; 2) $\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}$.

30.50. Докажите равенство

$$\frac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}+\frac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}}=2\sqrt{2}.$$

30.51. Докажите равенство

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2}.$$

30.52. Упростите выражение:

1) $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}$;

2) $\sqrt{a+1+4\sqrt{a-3}}$;

3) $\sqrt{\frac{x+4}{4}+\sqrt{x}}$;

4) $\sqrt{2x-2\sqrt{x^2-1}}$, если $x \geqslant 1$;

5) $\frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-3}-2}-1}{\sqrt{x-3}}$;

6) $\sqrt{x^2+2+2\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{x^2+2-2\sqrt{x^2+1}}$;

7) $\sqrt{2a+3-2\sqrt{a^2+3a+2}}+\sqrt{a+1}$.

30.53. Упростите выражение:

1) $\sqrt{a+4\sqrt{a-4}}$;

2) $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}$;

3) $\sqrt{\frac{a+1}{4}+\frac{\sqrt{a}}{2}}$;

4) $\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-y^2}}$, если $x \geqslant y > 0$;

5) $\frac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-4b^2}}-\sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b}}$;

6) $\sqrt{2-\sqrt{4-a^2}}$, если $0 \leqslant a \leqslant 2$;

7) $\sqrt{3a-1+2\sqrt{2a^2-a}}$, если $a \geqslant \frac{1}{2}$.

30.54. Рабочий должен был изготовлять ежедневно по 12 деталей. Однако он изготовлял ежедневно по 15 деталей, и уже за 5 дней до окончания срока работы ему осталось изготовить 30 деталей. Сколько деталей должен был изготовить рабочий?

30.55. При распродаже цену на товар снизили на 20 %. На сколько процентов нужно повысить цену на товар, чтобы она стала равна первоначальной?

30.56. Лодка проплыла 32 км по течению реки за 4 ч, а против течения — за 8 ч. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения реки.

30.57. Федя и Оля едут в одном поезде. Федя сел в двенадцатый вагон от головы поезда, а Оля — в шестой вагон от хвоста поезда. Оказалось, что они едут в одном вагоне. Сколько вагонов в поезде?

§ 31 Функция $y = \sqrt{x}$ и её график

Если площадь квадрата равна x, то его сторону y можно найти по формуле $y = \sqrt{x}$. Изменение площади x квадрата приводит и к изменению его стороны y.

Каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y. Следовательно, зависимость переменной y от переменной x является функциональной, а формула $y = \sqrt{x}$ задаёт функцию.

Так как областью определения выражения $\sqrt{x}$ является множество всех неотрицательных чисел, то областью определения функции $y = \sqrt{x}$ является множество $D(y) = [0; +\infty)$.

Выражение $\sqrt{x}$ не может принимать отрицательные значения, т. е. никакое отрицательное число не может принадлежать области значений рассматриваемой функции.

Покажем, что функция $y = \sqrt{x}$ может принимать любое неотрицательное значение. Пусть b — произвольное неотрицательное число. Тогда $\sqrt{b^2} = |b| = b$. Тогда для любого $b \geqslant 0$ существует такое значение аргумента функции $y = \sqrt{x}$, а именно $x = b^2$, что $\sqrt{x} = b$.

Следовательно, областью значений функции $y = \sqrt{x}$ является множество $E(y) = [0; +\infty)$.

Заметим, что если $x = 0$, то $y = 0$.

Учитывая область определения и область значений функции $y = \sqrt{x}$, можно сделать вывод, что её график расположен в I координатной четверти.

В таблице приведены некоторые значения аргумента и соответствующие им значения функции $y = \sqrt{x}$.

x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
y	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Отметим на координатной плоскости точки (рис. 31.1), координаты которых приведены в таблице.

Чем больше отметить точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = \sqrt{x}$, тем меньше полученная фигура (рис. 31.2) будет отличаться от графика функции $y = \sqrt{x}$.

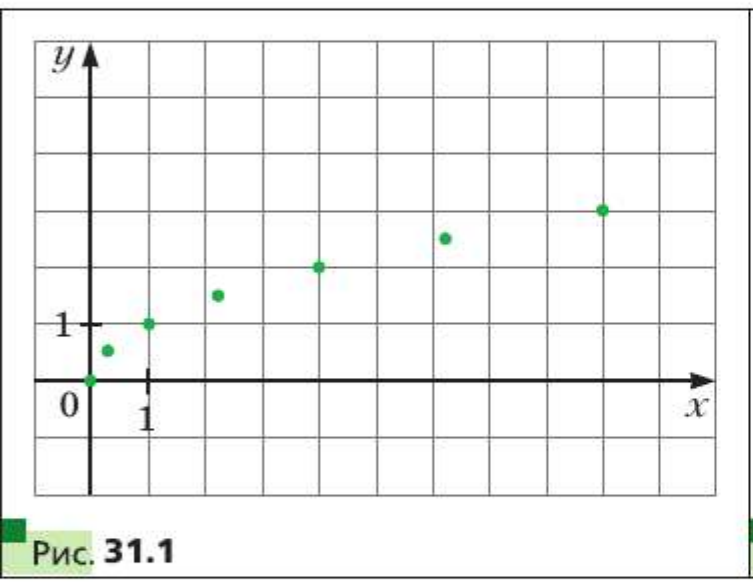


Рис. **31.1**

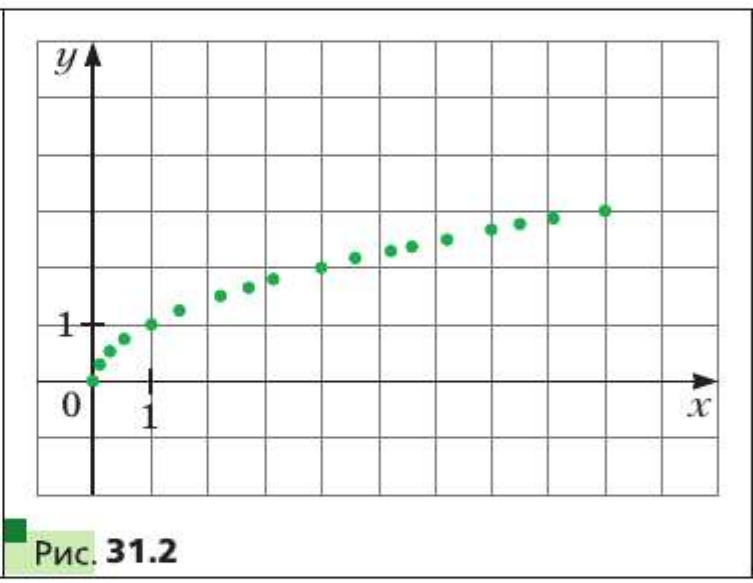


Рис. **31.2**

Если бы удалось отметить на координатной плоскости все такие точки, то получили бы фигуру, изображённую на рисунке 31.3. В старших классах будет доказано, что графиком функции $y = \sqrt{x}$ является фигура, равная ветви параболы $y = x^2$.

Пусть x_1 и x_2 — два произвольных значения аргумента функции $y = \sqrt{x}$ такие, что $x_1 < x_2$. Тогда из свойства арифметического квадратного корня следует, что $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$. Это значит, что большему значению аргумента функции $y = \sqrt{x}$ соответствует большее значение функции. Справедливо и обратное утверждение: большему значению функции соответствует большее значение аргумента, т. е. если $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$, то $x_1 < x_2$ (рис. 31.4).

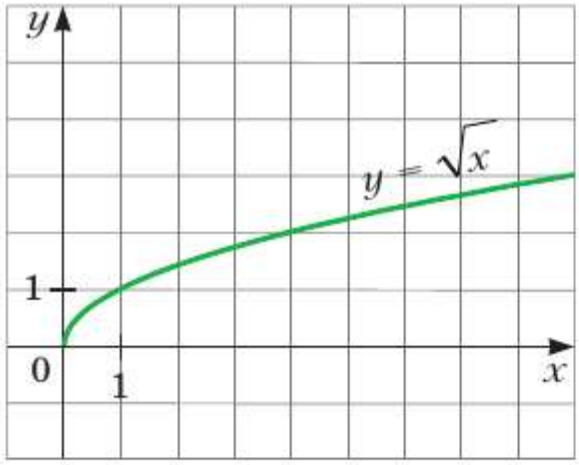


Рис. **31.3**

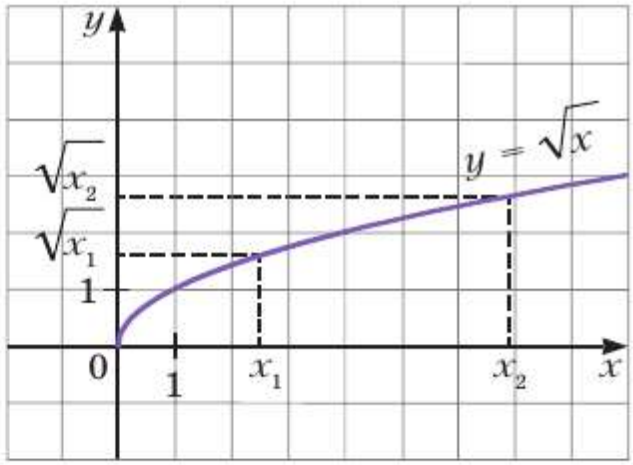


Рис. **31.4**

В таблице приведены свойства функции $y = \sqrt{x}$, изученные в этом параграфе.

Область определения	$D(y) = [0; +\infty)$
Область значений	$E(y) = [0; +\infty)$
График	Ветвь параболы
Значение аргумента, при котором значение функции равно 0	$x = 0$
Сравнение значений функции	Большему значению аргумента соответствует большее значение функции

Пример 1. Решите графически уравнение $\sqrt{x} = 6 - x$.

Решение. В одной системе координат построим графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = 6 - x$ (рис. 31.5). Эти графики пересекаются в точке, абсцисса которой равна 4.

Проверка подтверждает, что число 4 является корнем данного уравнения.

Ответ: 4. ■

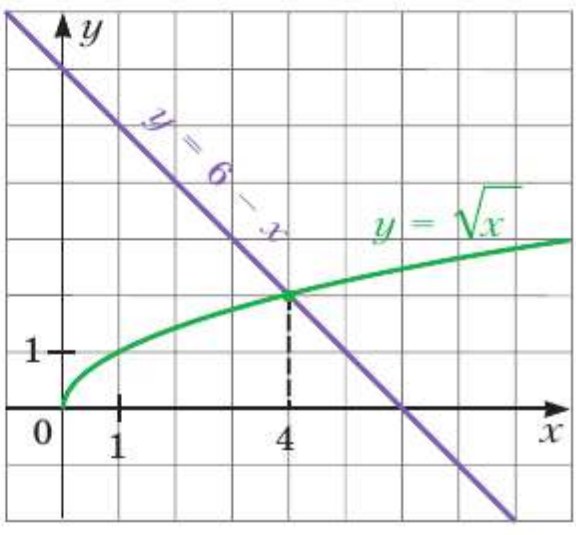


Рис. **31.5**

Пример 2. Решите неравенство:

1) $\sqrt{x} < 3$; 2) $\sqrt{x-1} > 2$; 3) $\sqrt{x+2} > \sqrt{1-3x}$.

Решение. 1) Запишем данное неравенство так: $\sqrt{x} < \sqrt{9}$. Так как большему значению функции $y = \sqrt{x}$ соответствует большее значение аргумента, то можно сделать вывод, что $x < 9$. Учитывая, что выражение $\sqrt{x}$ имеет смысл только при $x \geqslant 0$, получаем, что данное неравенство равносильно системе $\begin{cases} x < 9, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$ Отсюда $0 \leqslant x < 9$.

Ответ: $[0; 9)$.

2) Имеем: $\sqrt{x-1} > \sqrt{4}$; $x - 1 > 4$; $x > 5$.

Ответ: $(5; +\infty)$.

3) Данное неравенство равносильно системе $\begin{cases} x + 2 > 1 - 3x, \\ 1 - 3x \geqslant 0. \end{cases}$ Отсюда

$$\begin{cases} 4x > -1, \\ 3x \leqslant 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -\frac{1}{4}, \\ x \leqslant \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$.

Пример 3. Упростите выражение A, где

$A = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$.

Решение. Имеем: $A = \sqrt{x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1} + \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1} =$

$= \sqrt{(\sqrt{x-1} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1} - 1)^2} = |\sqrt{x-1} + 1| + |\sqrt{x-1} - 1| =$

$= \sqrt{x-1} + 1 + |\sqrt{x-1} - 1|$.

Чтобы раскрыть модуль $|\sqrt{x-1} - 1|$, решим каждое из неравенств $\sqrt{x-1} \leqslant 1$ и $\sqrt{x-1} > 1$.

Неравенство $\sqrt{x-1} \leqslant 1$ равносильно системе $\begin{cases} x - 1 \leqslant 1, \\ x - 1 \geqslant 0. \end{cases}$ Отсюда $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Следовательно, если $1 \leqslant x \leqslant 2$, то $A = \sqrt{x-1} + 1 - \sqrt{x-1} + 1 = 2$.

Теперь решим неравенство $\sqrt{x-1} > 1$. Имеем: $x - 1 > 1$; $x > 2$. Следовательно, если $x > 2$, то $A = \sqrt{x-1} + 1 + \sqrt{x-1} - 1 = 2\sqrt{x-1}$.

Ответ: $A = 2$, если $1 \leqslant x \leqslant 2$; $A = 2\sqrt{x-1}$, если $x > 2$.

Пример 4. Решите уравнение $\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}=1$.

Решение. Имеем:

$$\sqrt{x+1-2\sqrt{x+1}+1}+\sqrt{x+1-4\sqrt{x+1}+4}=1;$$

$$\sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x+1}-2)^2}=1;$$

$$\left|\sqrt{x+1}-1\right|+\left|\sqrt{x+1}-2\right|=1.$$

Это уравнение равносильно совокупности трёх систем.

1) $\begin{cases}\sqrt{x+1}<1,\\ -\sqrt{x+1}+1-\sqrt{x+1}+2=1;\end{cases}$ $\begin{cases}0\leqslant x+1<1,\\ \sqrt{x+1}=1;\end{cases}$ $\begin{cases}-1\leqslant x<0,\\ x=0.\end{cases}$

Эта система решений не имеет.

2) $\begin{cases}1\leqslant\sqrt{x+1}\leqslant 2,\\ \sqrt{x+1}-1-\sqrt{x+1}+2=1;\end{cases}$ $\begin{cases}1\leqslant x+1\leqslant 4,\\ 0x=0;\end{cases}$ $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3,\\ 0x=0;\end{cases}$ $0\leqslant x\leqslant 3.$

3) $\begin{cases}\sqrt{x+1}>2,\\ \sqrt{x+1}-1+\sqrt{x+1}-2=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x+1>4,\\ \sqrt{x+1}=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x>3,\\ x=3.\end{cases}$

Эта система решений не имеет.

Ответ: $[0;\ 3]$.

1. Какова область определения функции $y=\sqrt{x}$?

2. Какова область значений функции $y=\sqrt{x}$?

3. В какой координатной четверти находится график функции $y=\sqrt{x}$?

4. Чему равно значение аргумента, при котором значение функции $y=\sqrt{x}$ равно 0?

5. Сравните значения функции $y=\sqrt{x}$ при неравных значениях аргумента.

Упражнения

31.1. Функция задана формулой $y=\sqrt{x}$.

1) Чему равно значение функции, если значение аргумента равно: 0,16; 64; 1,44; 3600?

2) При каком значении аргумента значение функции равно: 0,2; 5; 120; –4?

31.2. Не выполняя построения, определите, через какие из данных точек проходит график функции $y=\sqrt{x}$: $A(36;\ 6)$, $B(4;\ -2)$, $C(0{,}81;\ 0{,}9)$, $D(-1;\ 1)$, $E(42{,}25;\ 6{,}5)$.

31.3. Через какую из данных точек проходит график функции $y = \sqrt{x}$:
1) $A\,(16;\ 4)$; 2) $B\,(49;\ -7)$; 3) $C\,(3{,}6;\ 0{,}6)$; 4) $D\,(-36;\ 6)$?

31.4. Не выполняя построения, найдите координаты точки пересечения графика функции $y = \sqrt{x}$ и прямой:
1) $y = 1$; 2) $y = 0{,}8$; 3) $y = -6$; 4) $y = 500$.

31.5. Решите неравенство:
1) $\sqrt{x} \geqslant 2$; 4) $\sqrt{x+2} \geqslant 3$; 7) $\sqrt{2x+1} \leqslant \sqrt{x-5}$;
2) $\sqrt{x} < 4$; 5) $\sqrt{1-2x} < 2$; 8) $\sqrt{|x|-1} \geqslant 2$;
3) $6 \leqslant \sqrt{x} < 9$; 6) $\sqrt{x+3} > \sqrt{1-4x}$; 9) $\sqrt{|x|-2} < 1$.

31.6. При каких значениях x выполняется неравенство:
1) $\sqrt{x} \leqslant 8$; 3) $\sqrt{4x-3} \leqslant 1$; 5) $\sqrt{|x|-3} > 1$;
2) $\sqrt{2x+1} > 2$; 4) $\sqrt{3x-1} > \sqrt{x+2}$; 6) $\sqrt{|x|+1} \leqslant 3$?

31.7. Решите графически уравнение:
1) $\sqrt{x} = x$; 3) $\sqrt{x} = x + 2$;
2) $\sqrt{x} = x^2$; 4) $\sqrt{x} = 1{,}5 - 0{,}5x$.

31.8. Решите графически уравнение:
1) $\sqrt{x} = -x - 1$; 2) $\sqrt{x} = 2 - x$; 3) $\sqrt{x} = \dfrac{8}{x}$.

◆ ◆

31.9. Дана функция $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x}, \text{ если } x < 0, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$
1) Найдите $f\,(-8)$, $f\,(0)$, $f\,(9)$.
2) Постройте график данной функции.

31.10. Дана функция $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \leqslant 1, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x > 1. \end{cases}$
1) Найдите $f\,(-2)$, $f\,(0)$, $f\,(1)$, $f\,(4)$.
2) Постройте график данной функции.

31.11. Найдите область определения, область значений и нули функции $y = \sqrt{-x}$. Постройте график данной функции.

31.12. Постройте график функции $y = \dfrac{x}{\sqrt{x}}$.

◆ ◆ ◆

31.13. Постройте график уравнения:
1) $x = \sqrt{y}$; 2) $\left(x + \sqrt{y}\right)\left(y - \sqrt{x}\right) = 0$.

31.14. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{x} = a - x$ в зависимости от значения параметра a?

31.15. Упростите выражение $\sqrt{(\sqrt{a}+1)^2-4\sqrt{a}}+\sqrt{(\sqrt{a}-2)^2+8\sqrt{a}}$.

31.16. Упростите выражение $\sqrt{(\sqrt{a}-6)^2+24\sqrt{a}}-\sqrt{(\sqrt{a}+6)^2-24\sqrt{a}}$.

31.17. Упростите выражение:

1) $\sqrt{2x-2\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x-1}$;

2) $\dfrac{\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+2}{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-2}$;

3) $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}-\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$;

4) $\sqrt{\dfrac{a+1}{4}+\dfrac{\sqrt{a}}{2}}+\sqrt{\dfrac{a+1}{4}-\dfrac{\sqrt{a}}{2}}$.

31.18. Упростите выражение:

1) $\sqrt{a+1-4\sqrt{a-3}}$;

2) $\sqrt{2a+2+2\sqrt{a^2+2a}}-\sqrt{a}$;

3) $\sqrt{\dfrac{x+4}{4}+\sqrt{x}}+\sqrt{\dfrac{x+4}{4}-\sqrt{x}}$.

31.19. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x+6+2\sqrt{x+5}}+\sqrt{x+6-2\sqrt{x+5}}=6$;

2) $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=2$.

31.20. Решите уравнение:

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}.$$

Упражнения для повторения

31.21. В одном контейнере было 90 кг яблок, а в другом — 75 кг. После того как из первого контейнера взяли в 3 раза больше яблок, чем из второго, в первом осталось в 2 раза меньше яблок, чем во втором. Сколько килограммов яблок взяли из первого контейнера?

31.22. От пристани против течения реки отплыла моторная лодка, собственная скорость которой равна 12 км/ч. Через 40 мин после отправления лодки вышел из строя мотор, и лодку течением реки принесло к пристани через 2 ч. Какова скорость течения реки?

31.23. Докажите тождество:

1) $\left(\dfrac{a-2b}{a^2+2ab}-\dfrac{1}{a^2-4b^2}:\dfrac{a+2b}{(2b-a)^2}\right):\dfrac{a^2-2ab}{a^2+4ab+4b^2}=\dfrac{2b}{a^2}$;

2) $\left(\dfrac{2a}{a+3}-\dfrac{4a}{a^2+6a+9}\right)\cdot\dfrac{a^2-9}{a+1}-\dfrac{a^2-9a}{a+3}=a$.

31.24. Расстояние между двумя городами легковая машина проезжает за 2 ч, а грузовая — за 3 ч. Через какое время после начала движения они встретятся, если выедут одновременно навстречу друг другу из этих городов?

Свойства функции $y = x^2$

Область определения	$D(y) = (-\infty; +\infty)$
Область значений	$E(y) = [0; +\infty)$
График	Парабола
Свойства графика	Ось ординат — ось симметрии параболы
Значение аргумента, при котором значение функции равно 0	$x = 0$

Квадратный корень

Квадратным корнем из числа a называют число, квадрат которого равен a.

Арифметический квадратный корень

Арифметическим квадратным корнем из числа a называют неотрицательное число, квадрат которого равен a.

Множество действительных чисел

Объединение множеств рациональных и иррациональных чисел называют множеством действительных чисел. Множество действительных чисел обозначают R.

Связь между числовыми множествами

$\boldsymbol{N \subset Z \subset Q \subset R}$.

Свойства арифметического квадратного корня

- Для любого действительного числа a выполняется равенство $\sqrt{a^2} = |a|$.
- Для любых действительного числа a и натурального числа n выполняется равенство $\sqrt{a^{2n}} = |a^n|$.
- Для любых действительных чисел a и b таких, что $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, выполняется равенство $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

- Для любых действительных чисел a и b таких, что $a \geqslant 0$ и $b > 0$, выполняется равенство

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

- Если $a > b \geqslant 0$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.
- Если $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, то $a > b$.

Свойства функции $y = \sqrt{x}$

Область определения	$D(y) = [0; +\infty)$
Область значений	$E(y) = [0; +\infty)$
График	Ветвь параболы
Значение аргумента, при котором значение функции равно 0	$x = 0$
Сравнение значений функции	Большему значению аргумента соответствует большее значение функции

глава

6 Квадратные уравнения

- Изучив материал этой главы, вы научитесь решать уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$.
- Изучите теорему Виета для квадратного уравнения.
- Овладеете приёмами решения уравнений, которые сводятся к квадратным.
- Узнаете, как делят один многочлен на другой. Познакомитесь с теоремой Безу. Изучите приёмы нахождения корней целого рационального уравнения.

§ 32 Квадратные уравнения. Решение неполных квадратных уравнений

Вы умеете решать линейные уравнения, т. е. уравнения вида $ax = b$, где x — переменная, a и b — параметры.

Если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ называют **уравнением первой степени**.

Например, каждое из линейных уравнений $2x = 3$, $3x = 0$, $\frac{1}{3}x = -7$ является уравнением первой степени. А вот линейные уравнения $0x = 0$, $0x = 2$ уравнениями первой степени не являются.

Параметры a и b называют **коэффициентами уравнения первой степени** $ax = b$.

Уравнение первой степени всегда имеет один корень.

То, что множество уравнений первой степени является подмножеством множества линейных уравнений, иллюстрирует схема, изображённая на рисунке 32.1.



Рис. 32.1

Вы также умеете решать некоторые уравнения, содержащие переменную во второй степени. Например, вы легко решите каждое из уравнений $x^2 = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x^2 + 5x = 0$, $x^2 - 2x + 1 = 0$. Все они имеют вид $ax^2 + bx + c = 0$.

Определение

Квадратным уравнением называют уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b, c — параметры, причём $a \neq 0$.

Параметры a, b и c называют **коэффициентами квадратного уравнения**. Параметр a называют **первым** или **старшим коэффициентом**, параметр b — **вторым коэффициентом**, параметр c — **свободным членом**.

Например, уравнение $-2x^2 + 5x + 3 = 0$ является квадратным и имеет коэффициенты: $a = -2$, $b = 5$, $c = 3$.

Левая часть квадратного уравнения является многочленом второй степени. Поэтому квадратное уравнение ещё называют **уравнением второй степени.**

Квадратное уравнение, первый коэффициент которого равен 1, называют **приведённым.**

Например, $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$, $x^2 - 4 = 0$, $x^2 + 3x = 0$ — привёденные квадратные уравнения.

Поскольку в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ старший коэффициент не равен нулю, то неприведённое квадратное уравнение всегда можно преобразовать в приведённое, равносильное данному. Разделив обе части уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ на число a, получим приведённое квадратное уравнение $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то такое уравнение называют **неполным квадратным уравнением.**

Существует три вида неполных квадратных уравнений:

1) при $b = c = 0$ имеем: $ax^2 = 0$;

2) при $c = 0$ и $b \neq 0$ имеем: $ax^2 + bx = 0$;

3) при $b = 0$ и $c \neq 0$ имеем: $ax^2 + c = 0$.

Решим неполное квадратное уравнение каждого вида.

1. Поскольку $a \neq 0$, то уравнение $ax^2 = 0$ имеет единственный корень $x = 0$.

2. Уравнение $ax^2 + bx = 0$ представим в виде $x(ax + b) = 0$. Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ ax + b = 0. \end{array}\right.$ Отсюда

$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -\dfrac{b}{a}. \end{array}\right.$ Следовательно, рассматриваемое уравнение имеет два корня: $x_1 = 0$ и $x_2 = -\dfrac{b}{a}$.

3. Уравнение $ax^2 + c = 0$ представим в виде $x^2 = -\dfrac{c}{a}$. Так как $c \neq 0$, то возможны два случая: $-\dfrac{c}{a} < 0$ или $-\dfrac{c}{a} > 0$. Очевидно, что в первом случае уравнение корней не имеет. Во втором случае уравнение имеет два корня: $x_1 = \sqrt{-\dfrac{c}{a}}$ и $x_2 = -\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$.

Результаты, полученные при решении неполных квадратных уравнений, оформим в виде следующей таблицы.

Значения коэффициентов b и c квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$	Неполное квадратное уравнение	Корни неполного квадратного уравнения
$b = c = 0$	$ax^2 = 0$	$x = 0$
$b \neq 0,\ c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0,\ x_2 = -\dfrac{b}{a}$
$b = 0,\ -\dfrac{c}{a} < 0$	$ax^2 + c = 0$	Корней нет
$b = 0,\ -\dfrac{c}{a} > 0$	$ax^2 + c = 0$	$x_1 = \sqrt{-\dfrac{c}{a}},\ x_2 = -\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$

Пример. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - (a + 1)x + a^2 - 1 = 0$ имеет два корня, один из которых равен нулю?

Решение. Число 0 является корнем квадратного уравнения, если свободный член этого уравнения равен нулю. Отсюда $a^2 - 1 = 0$; $a = 1$ или $a = -1$.

При $a = -1$ исходное уравнение принимает вид $x^2 = 0$ и имеет единственный корень $x = 0$. При $a = 1$ получаем: $x^2 - 2x = 0$. Отсюда $x = 0$ или $x = 2$.

Ответ: при $a = 1$. ■

1. Какое уравнение называют линейным?
2. Какое уравнение называют уравнением первой степени?
3. Какое уравнение называют квадратным?
4. Как называют коэффициенты квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$?
5. Какое квадратное уравнение называют приведённым?
6. Какое квадратное уравнение называют неполным?
7. Какие существуют виды неполных квадратных уравнений? Какие корни имеет уравнение каждого вида?

Упражнения

32.1. Укажите среди данных уравнений квадратные и назовите, чему равны старший коэффициент, второй коэффициент и свободный член каждого из них:

1) $x = 0$;
2) $x^2 = 0$;
3) $x^2 + x = 0$;
4) $x^2 + 1 = 0$;
5) $x^2 - 4x + 2 = 0$;
6) $3x^3 - x^2 + 6 = 0$;
7) $6 - x^2 + 4x = 0$;
8) $-x^2 - 2x + 3 = 0$.

32.2. Представьте данное уравнение в виде $ax^2 + bx + c = 0$, укажите значения коэффициентов a, b и c:

1) $6x(3 - x) = 7 - 2x^2$;
2) $(5x - 1)^2 = (x + 4)(x - 2)$.

32.3. Представьте данное уравнение в виде $ax^2 + bx + c = 0$, укажите значения коэффициентов a, b и c:

1) $x(x + 10) = 8x + 3$;
2) $(x + 2)^2 = 2x^2 + 4$.

32.4. Укажите, какие из данных уравнений являются приведёнными, и преобразуйте неприведённые уравнения в привёденные:

1) $x^2 - 5x + 34 = 0$;
2) $2x^2 + 6x + 8 = 0$;
3) $\frac{1}{3}x^2 + x - 5 = 0$;
4) $16 - 6x + x^2 = 0$;
5) $-x^2 + 8x - 7 = 0$;
6) $-0{,}2x^2 + 0{,}8x + 1 = 0$.

32.5. Преобразуйте данное квадратное уравнение в приведённое:

1) $\frac{1}{6}x^2 - 2x - 3 = 0$;
2) $-4x^2 + 20x - 16 = 0$;
3) $3x^2 + x + 2 = 0$.

32.6. Решите уравнение:

1) $5x^2 - 45 = 0$;
2) $x^2 + 8x = 0$;
3) $2x^2 - 10 = 0$;
4) $2x^2 - 10x = 0$;
5) $64x^2 - 9 = 0$;
6) $x^2 + 16 = 0$.

32.7. Решите уравнение:

1) $x^2 + 7x = 0$;
2) $2x^2 - 11x = 0$;
3) $3x^2 - 6 = 0$;
4) $-8x^2 = 0$.

32.8. Решите уравнение:

1) $(3x - 1)(x + 4) = -4$;

2) $(2x - 1)^2 - 6(6 - x) = 2x$;

3) $(x + 2)(x - 3) - (x - 5)(x + 5) = x^2 - x$.

32.9. Решите уравнение:

1) $(3x - 2)(3x + 2) + (4x - 5)^2 = 10x + 21$;

2) $(2x - 1)(x + 8) - (x - 1)(x + 1) = 15x$.

32.10. Найдите два последовательных натуральных числа, произведение которых на 36 больше меньшего из них.

32.11. Найдите два последовательных натуральных числа, произведение которых на 80 больше большего из них.

32.12. Решите уравнение:

1) $\frac{x^2 - 8x}{6} = x$; 2) $\frac{x^2 - 3}{5} - \frac{x^2 - 1}{2} = 2$.

32.13. Решите уравнение:

1) $\frac{x^2 + x}{7} - \frac{x}{3} = 0$; 2) $\frac{x^2 + 1}{6} - \frac{x^2 + 2}{4} = -1$.

32.14. Составьте квадратное уравнение, один из корней которого равен 1 и которое является:

1) полным и неприведённым;

2) полным и приведённым;

3) неполным и неприведённым;

4) неполным и приведённым.

32.15. При каком значении m:

1) число 2 является корнем уравнения $x^2 + mx - 6 = 0$;

2) число -3 является корнем уравнения $2x^2 - 7x + m = 0$;

3) число $\frac{1}{7}$ является корнем уравнения $m^2x^2 + 14x - 3 = 0$?

32.16. Докажите, что один из корней уравнения $mx^2 - (m + n)x + n = 0$ равен 1.

32.17. При каком значении n:

1) число 6 является корнем уравнения $x^2 - nx + 3 = 0$;

2) число 0,5 является корнем уравнения $nx^2 - 8x + 10 = 0$?

32.18. Сумма квадратов двух последовательных целых чисел на 17 больше, чем удвоенное большее из них. Найдите эти числа.

32.19. Найдите два последовательных целых числа, сумма квадратов которых равна 1.

◆ ◆

32.20. При каком значении m не является квадратным уравнение:

1) $(m - 4)x^2 + mx + 7 = 0$;

2) $(m^2 + 8m)x^2 + (m + 8)x + 10 = 0$;

3) $(m^2 - 81)x^2 - 6x + m = 0$?

32.21. Каким числом, положительным или отрицательным, является отличный от нуля корень неполного квадратного уравнения $ax^2 + bx = 0$, если:

1) $a > 0$, $b > 0$; 3) $a > 0$, $b < 0$;

2) $a < 0$, $b > 0$; 4) $a < 0$, $b < 0$?

32.22. Имеет ли корни неполное квадратное уравнение $ax^2 + c = 0$, если:

1) $a > 0$, $c > 0$; 3) $a > 0$, $c < 0$;

2) $a < 0$, $c > 0$; 4) $a < 0$, $c < 0$?

32.23. Каким многочленом можно заменить звёздочку в уравнении $3x^2 - 2x + 4 + * = 0$, чтобы образовалось неполное квадратное уравнение, корнями которого являются числа:

1) 0 и 4; 2) -1 и 1?

32.24. Каким многочленом можно заменить звёздочку в уравнении $x^2 + 5x - 1 + * = 0$, чтобы образовалось неполное квадратное уравнение, корнями которого являются числа:

1) -7 и 0; 2) -4 и 4?

32.25. Решите уравнение:

1) $x^2 - 3|x| = 0$; 4) $x^2 - \dfrac{2x^2}{|x|} = 0$;

2) $x^2 + |x| - 2x = 0$; 5) $2x^2 + 5|x| = 0$;

3) $x^2 - \dfrac{|x|}{x} = 0$; 6) $x^2 + \dfrac{4x^2}{|x|} = 0$.

32.26. Решите уравнение:

1) $x^2 - 7|x| = 0$; 3) $2x^2 - \dfrac{3x^2}{|x|} = 0$;

2) $x^2 - 6|x| + x = 0$; 4) $x^2 + \dfrac{9|x|}{x} = 0$.

32.27. При каком значении параметра a уравнение $(a - 2)x^2 + (2a - 1)x + a^2 - 4 = 0$ является:

1) линейным;

2) приведённым квадратным;

3) неполным неприведённым квадратным;

4) неполным приведённым квадратным?

32.28. Определите, при каком значении параметра a один из корней квадратного уравнения равен 0, и найдите второй корень уравнения:

1) $x^2 + ax + a - 4 = 0$; 3) $ax^2 + (a + 3)x + a^2 - 3a = 0$.

2) $4x^2 + (a - 8)x + a^2 + a = 0$;

32.29. Определите, при каком значении параметра a корни уравнения являются противоположными числами, и найдите их:

1) $x^2 + (a - 2)x + a - 6 = 0$; 3) $x^2 + (a - 1)x + a + 8 = 0$.

2) $x^2 + (a + 6)x + a + 4 = 0$;

32.30. Упростите выражение:

1) $10\sqrt{3} - 5\sqrt{48} + 2\sqrt{75}$; 3) $(5 - \sqrt{2})^2$;

2) $(3\sqrt{5} - \sqrt{20})\sqrt{5}$; 4) $(\sqrt{18} - \sqrt{3})\sqrt{2} + 0{,}5\sqrt{24}$.

32.31. Какой из графиков, представленных на рисунке 32.2, является графиком функции:

1) $y = x^2$; 2) $y = 2x$; 3) $y = \frac{x}{2}$; 4) $y = \frac{2}{x}$?

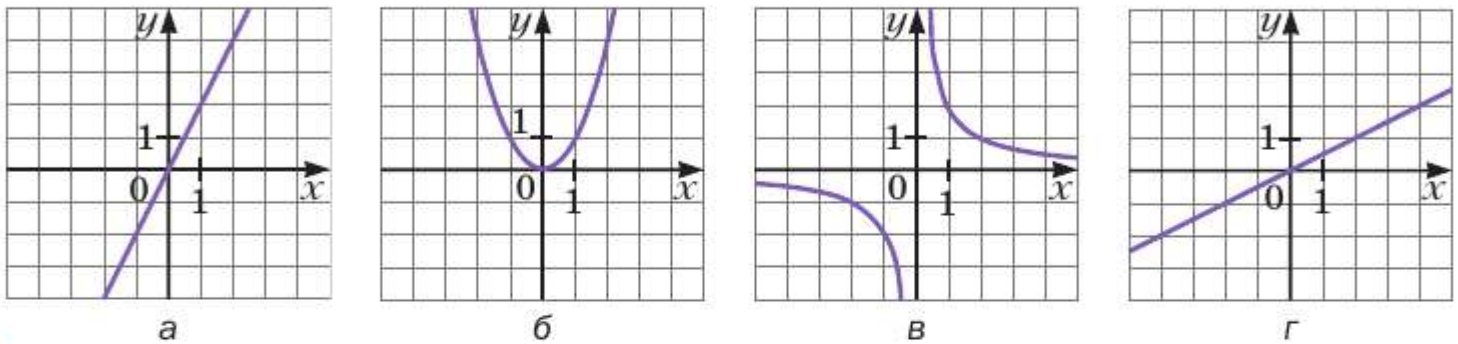


Рис. **32.2**

32.34. Ученик задумал двузначное число. Если каждую цифру этого числа увеличить на 2, то полученное число будет на 13 меньше удвоенного задуманного числа. Какое число задумал ученик?

§ 33 Формула корней квадратного уравнения

Зная коэффициенты a и b уравнения первой степени $ax = b$, можно найти его корень по формуле $x = \frac{b}{a}$.

Выведем формулу, позволяющую по коэффициентам a, b и c квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ находить его корни.

Имеем:

$$ax^2 + bx + c = 0. \qquad (1)$$

Поскольку $a \neq 0$, то, умножив обе части этого уравнения на $4a$, получим уравнение, равносильное данному:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Выделим в левой части этого уравнения квадрат двучлена:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0;$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac. \qquad (2)$$

Существование корней уравнения (2) и их количество зависит от знака значения выражения $b^2 - 4ac$. Это значение называют **дискриминантом квадратного уравнения** $ax^2 + bx + c = 0$ и обозначают буквой D, т. е. $D = b^2 - 4ac$. Термин «дискриминант» происходит от латинского слова *discriminare*, что означает «различать», «разделять».

Теперь уравнение (2) можно записать так:

$$(2ax + b)^2 = D. \qquad (3)$$

Возможны три случая: $D < 0$, $D = 0$, $D > 0$.

1. Если $D < 0$, то уравнение (3), а следовательно, и уравнение (1) корней не имеет. Действительно, при любом значении x выражение $(2ax + b)^2$ принимает только неотрицательные значения.

Вывод: ***если $D < 0$, то квадратное уравнение корней не имеет.***

2. Если $D = 0$, то уравнение (3) принимает вид:

$$(2ax + b)^2 = 0.$$

Отсюда $2ax + b = 0$; $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Вывод: ***если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет один корень $x = -\dfrac{b}{2a}$.***

3. Если $D > 0$, то уравнение (3) можно записать в виде:

$$(2ax + b)^2 = (\sqrt{D})^2.$$

Отсюда $2ax + b = -\sqrt{D}$ или $2ax + b = \sqrt{D}$. Тогда $x = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ или $x = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

Вывод: ***если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня x_1 и x_2:***

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a},\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$$

Эти записи называют **формулами корней квадратного уравнения** $ax^2 + bx + c = 0$.

Формулу корней квадратного уравнения можно применять и в случае, когда $D = 0$. Тогда

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}.$$

При решении квадратных уравнений, отличных от неполных, удобно использовать следующий алгоритм:

- найти дискриминант D квадратного уравнения;
- если $D < 0$, то в ответе записать, что корней нет;
- если $D \geqslant 0$, то воспользоваться формулой корней квадратного уравнения; полученные корни записать в ответ.

Если второй коэффициент квадратного уравнения является чётным целым числом, то можно пользоваться другой формулой, которая во многих случаях облегчает вычисления.

Рассмотрим квадратное уравнение $ax^2 + 2kx + c = 0$, где k — целое число.

Найдём его дискриминант: $D = 4k^2 - 4ac = 4(k^2 - ac)$.

Обозначим выражение $k^2 - ac$ через D_1.

Если $D_1 \geqslant 0$, то по формулам корней квадратного уравнения получим:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4D_1}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{D_1}}{2a} = \frac{2\left(-k \pm \sqrt{D_1}\right)}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{ т. е.}$$

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{ где } D_1 = k^2 - ac.$$

Пример 1. Решите уравнение:

1) $3x^2 - 2x - 16 = 0$;
2) $-0{,}5x^2 + 2x - 2 = 0$;
3) $x^2 + 5x - 3 = 0$;
4) $x^2 - 6x + 11 = 0$;
5) $5x^2 - 16x + 3 = 0$.

Решение. 1) В данном уравнении $a = 3$, $b = -2$, $c = -16$.

Дискриминант уравнения $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-16) = 4 + 192 = 196$.

Следовательно, $x_1 = \frac{2 - \sqrt{196}}{6} = \frac{2 - 14}{6} = -2$, $x_2 = \frac{2 + 14}{6} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

2) $D = 2^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot (-2) = 4 - 4 = 0$.

Следовательно, данное уравнение имеет один корень:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-1} = 2.$$

Заметим, что данное уравнение можно решить другим способом. Умножив обе части уравнения на -2, получаем:

$$x^2 - 4x + 4 = 0;\ (x - 2)^2 = 0;\ x - 2 = 0;\ x = 2.$$

3) $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 25 + 12 = 37$.

Уравнение имеет два корня: $x_1 = \frac{-5 - \sqrt{37}}{2}$, $x_2 = \frac{-5 + \sqrt{37}}{2}$.

4) $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11 = 36 - 44 = -8$. Получили, что $D < 0$.

Следовательно, уравнение не имеет корней.

5) Представим данное уравнение в виде $5x^2 + 2 \cdot (-8)\, x + 3 = 0$ и применим формулы корней для уравнения вида $ax^2 + 2kx + c = 0$:

$$D_1 = (-8)^2 - 5 \cdot 3 = 49;$$

$$x_1 = \frac{8-7}{5} = \frac{1}{5};\ x_2 = \frac{8+7}{5} = 3.$$

Ответ: 1) $-2;\ 2\frac{2}{3}$; 2) 2; 3) $\frac{-5-\sqrt{37}}{2};\ \frac{-5+\sqrt{37}}{2}$; 4) корней нет; 5) $\frac{1}{5};\ 3$.

Пример 2. Решите уравнение:

1) $x^2 + 6\sqrt{x^2} - 16 = 0$;

2) $x^2 - 10\left(\sqrt{x}\right)^2 - 24 = 0$;

3) $9x^2 - 8x + \frac{5}{x-1} = 1 + \frac{5}{x-1}$.

Решение. 1) Имеем: $x^2 + 6|x| - 16 = 0$.

Это уравнение равносильно совокупности двух систем.

а) $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 + 6x - 16 = 0. \end{cases}$

Уравнение этой системы имеет два корня: -8 и 2. Тогда можно записать

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -8. \end{array}\right. \end{cases}$$ Отсюда $x = 2$.

б) $\begin{cases} x < 0, \\ x^2 - 6x - 16 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 8. \end{array}\right. \end{cases}$ Отсюда $x = -2$.

2) Областью определения данного уравнения является промежуток $[0; +\infty)$. Тогда данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 - 10x - 24 = 0. \end{cases}$

Отсюда $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 12. \end{array}\right. \end{cases}$ Получаем $x = 12$.

3) Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} 9x^2 - 8x = 1, \\ x - 1 \neq 0. \end{cases}$ Имеем:

$$\begin{cases} 9x^2 - 8x - 1 = 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -\dfrac{1}{9}, \end{array}\right. \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Отсюда $x = -\dfrac{1}{9}$.

Ответ: 1) -2; 2; 2) 12; 3) $-\dfrac{1}{9}$.

Пример 3. Решите уравнение:
1) $|x^2 - x - 8| = -x$; 2) $|x + 1| = x^2 + 3x + 1$.
Решение. 1) Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} -x \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 8 = -x, \\ x^2 - x - 8 = x. \end{array}\right. \end{cases} \text{ Отсюда } \begin{cases} x \leqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 8 = 0, \\ x^2 - 2x - 8 = 0; \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x \leqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 2\sqrt{2}, \\ x = -2\sqrt{2}, \\ x = 4, \\ x = -2. \end{array}\right. \end{cases}$$

Получаем: $x = -2\sqrt{2}$ или $x = -2$.
2) Данное уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 1 \geqslant 0, \\ x + 1 = x^2 + 3x + 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x + 1 < 0, \\ -x - 1 = x^2 + 3x + 1. \end{cases} \end{array}\right. \text{ Отсюда } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -1, \\ x^2 + 2x = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1, \\ x^2 + 4x + 2 = 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -1, \\ x = 0 \text{ или } x = -2, \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1, \\ x = -2 + \sqrt{2} \text{ или } x = -2 - \sqrt{2}; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -2 - \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: 1) $-2\sqrt{2}$; -2; 2) 0; $-2 - \sqrt{2}$.

Пример 4. При каком значении параметра b имеет единственный корень уравнение:

1) $2x^2 - bx + 18 = 0$; 2) $(b + 6)x^2 - (b - 2)x + 1 = 0$?

Решение. 1) Данное уравнение является квадратным. Оно имеет единственный корень, если его дискриминант равен нулю. Имеем:

$$D = b^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = b^2 - 144;$$
$$b^2 - 144 = 0;$$
$$b = -12 \text{ или } b = 12.$$

2) Обратим внимание на распространённую ошибку: считать такое уравнение квадратным. На самом деле это уравнение степени не выше второй.

При $b = -6$ получаем линейное уравнение $8x + 1 = 0$, имеющее один корень.

При $b \neq -6$ данное уравнение является квадратным; оно имеет единственный корень, если его дискриминант равен нулю:

$$D = (b - 2)^2 - 4(b + 6) = b^2 - 4b + 4 - 4b - 24 = b^2 - 8b - 20.$$

Имеем: $b^2 - 8b - 20 = 0$, отсюда $b = -2$ или $b = 10$.

Ответ: 1) $b = -12$ или $b = 12$; 2) $b = -2$, или $b = 10$, или $b = -6$.

Пример 5. При каких значениях параметра a уравнение $a(a + 3)x^2 + (2a + 6)x - 3a - 9 = 0$ имеет больше одного корня?

Решение. При $a = 0$ получаем линейное уравнение $6x - 9 = 0$, имеющее единственный корень.

При $a = -3$ получаем линейное уравнение $0x = 0$, имеющее бесконечно много корней.

Если $a \neq 0$ и $a \neq -3$, то, разделив обе части уравнения на $a + 3$, получим квадратное уравнение $ax^2 + 2x - 3 = 0$. Дискриминант этого уравнения равен $4(1 + 3a)$. Для выполнения условия задачи он должен быть положительным, т. е. $4(1 + 3a) > 0$. Отсюда $a > -\frac{1}{3}$. Однако промежуток $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$ содержит значение $a = 0$, при котором исходное уравнение имеет единственный корень, что не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a = -3$, или $-\frac{1}{3} < a < 0$, или $a > 0$.

1. Какое выражение называют дискриминантом квадратного уравнения?
2. Как зависит количество корней квадратного уравнения от знака дискриминанта?
3. Запишите формулу корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.
4. Каким алгоритмом удобно пользоваться при решении квадратных уравнений, отличных от неполных?

33.1. Найдите дискриминант и определите количество корней уравнения:

1) $x^2 + 2x - 4 = 0$;
2) $x^2 - 3x + 5 = 0$;
3) $2x^2 - 6x - 3{,}5 = 0$;
4) $5x^2 - 2x + 0{,}2 = 0$.

33.2. Какое из данных уравнений имеет два корня:

1) $x^2 + 4x + 8 = 0$;
2) $3x^2 - 4x - 1 = 0$;
3) $4x^2 - 12x + 9 = 0$;
4) $2x^2 - 9x + 15 = 0$?

33.3. Какое из данных уравнений не имеет корней:

1) $x^2 - 6x + 4 = 0$;
2) $5x^2 - 10x + 6 = 0$;
3) $3x^2 + 4x - 2 = 0$;
4) $0{,}04x^2 - 0{,}4x + 1 = 0$?

33.4. Решите уравнение:

1) $x^2 - 4x + 3 = 0$;
2) $x^2 + 3x - 4 = 0$;
3) $x^2 - 4x - 21 = 0$;
4) $x^2 + x - 56 = 0$;
5) $-x^2 + 6x + 55 = 0$;
6) $2x^2 - x - 6 = 0$;
7) $3x^2 - 4x - 20 = 0$;
8) $-5x^2 + 7x - 2 = 0$;
9) $-3x^2 + 7x + 6 = 0$;
10) $x^2 - 4x + 1 = 0$;
11) $2x^2 - x - 4 = 0$;
12) $x^2 - 8x + 20 = 0$.

33.5. Решите уравнение:

1) $x^2 - 3x + 2 = 0$;
2) $x^2 + 12x - 13 = 0$;
3) $x^2 - x - 72 = 0$;
4) $2x^2 - 5x + 2 = 0$;
5) $2x^2 - 7x - 4 = 0$;
6) $-2x^2 + x + 15 = 0$;
7) $x^2 - 6x + 11 = 0$;
8) $-x^2 - 8x + 12 = 0$.

33.6. При каких значениях переменной равны значения:

1) многочленов $6x^2 - 2$ и $5 - x$;
2) двучлена $y - 6$ и трёхчлена $y^2 - 9y + 3$;
3) трёхчленов $4m^2 + 4m + 2$ и $2m^2 + 10m + 8$?

33.7. При каких значениях переменной равны значения:

1) двучлена $4x + 4$ и трёхчлена $3x^2 + 5x - 10$;
2) трёхчленов $10p^2 + 10p + 8$ и $3p^2 - 10p + 11$?

33.8. Найдите корни уравнения:

1) $(2x - 5)(x + 2) = 18$;
2) $(4x - 3)^2 + (3x - 1)(3x + 1) = 9$;
3) $(x + 3)^2 - (2x - 1)^2 = 16$;
4) $(x - 6)^2 - 2x(x + 3) = 30 - 12x$;
5) $(x + 7)(x - 8) - (4x + 1)(x - 2) = -21x$;
6) $(2x - 1)(2x + 1) - x(1 - x) = 2x(x + 1)$.

33.9. Решите уравнение:

1) $(x - 4)^2 = 4x - 11$;

2) $(x+5)^2+(x-7)(x+7)=6x-19$;

3) $(3x-1)(x+4)=(2x+3)(x+3)-17$.

33.10. Решите уравнение:

1) $x^2-x(\sqrt{6}-1)-\sqrt{6}=0$;

2) $\frac{x^2-4}{8}-\frac{2x+3}{3}=-1$;

3) $\frac{4x^2+x}{3}-\frac{x^2+17}{9}=\frac{5x-1}{6}$;

4) $\frac{2x^2}{3}-\frac{x^2+2}{2}-\frac{x+2}{4}=3$.

33.11. Решите уравнение:

1) $x^2+3x\sqrt{2}+4=0$;

2) $x^2-x(\sqrt{3}+2)+2\sqrt{3}=0$;

3) $\frac{2x^2+x}{3}-\frac{x+3}{4}=x-1$;

4) $\frac{3x^2+x}{4}-\frac{3x^2+17}{10}=\frac{2-7x}{5}$.

33.12. При каких значениях параметра a число $\frac{1}{4}$ является корнем уравнения $a^2x^2+4ax-5=0$?

33.13. При каких значениях параметра a число 2 является корнем уравнения $x^2-0{,}5ax-3a^2=0$?

33.14. Докажите, что если старший коэффициент и свободный член квадратного уравнения имеют разные знаки, то уравнение имеет два корня.

33.15. Найдите натуральное число, квадрат которого на 42 больше данного числа.

33.16. Найдите периметр прямоугольника, площадь которого равна 70 см^2, а одна из сторон на 9 см больше другой.

33.17. Произведение двух чисел равно 84. Найдите эти числа, если одно из них на 8 меньше другого.

33.18. Произведение двух последовательных натуральных чисел на 89 больше их суммы. Найдите эти числа.

33.19. Сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел равна 365. Найдите эти числа.

33.20. От квадратного листа картона отрезали полоску в форме прямоугольника шириной 3 см и длиной, равной стороне квадрата. Площадь оставшейся части листа составляет 40 см^2. Найдите длину стороны квадратного листа картона.

33.21. От прямоугольного листа бумаги, длина которого равна 18 см, отрезали квадрат, сторона которого равна ширине листа. Площадь оставшейся части прямоугольника составляет 72 см^2. Найдите исходную ширину листа бумаги.

33.22. Найдите три последовательных нечётных натуральных числа, если квадрат первого из них на 33 больше удвоенной суммы второго и третьего.

33.23. Найдите четыре последовательных чётных натуральных числа, если сумма первого и третьего чисел в 5 раз меньше произведения второго и четвёртого чисел.

33.24. В футбольном турнире было сыграно 36 матчей. Сколько команд участвовало в турнире, если каждая команда сыграла по одному разу с каждой из остальных команд?

33.25. Сколько сторон у многоугольника, если в нём можно провести 90 диагоналей?

33.26. При каких значениях параметра b имеет единственный корень уравнение:

1) $2x^2 + 4x - b = 0$; 2) $3x^2 - bx + 12 = 0$?

33.27. При каких значениях параметра b имеет единственный корень уравнение:

1) $6x^2 - 18x + b = 0$; 2) $8x^2 + bx + 2 = 0$?

◆ ◆

33.28. Решите уравнение:

1) $|x^2 + 7x - 4| = 4$;
2) $|x^2 - x - 5| = 1$;
3) $x^2 - 4|x| - 21 = 0$;
4) $5x^2 - 8|x| + 3 = 0$;
5) $x|x| + 6x - 5 = 0$;
6) $x^2 + \frac{4x^2}{|x|} - 12 = 0$;
7) $x^2 + 6\,|x| + 8 = 0$;
8) $x^2 - |x - 5| = 5$;
9) $x\,|2x + 1| - 3x - 4 = 0$;
10) $x^2 - 8\sqrt{x^2} + 15 = 0$;
11) $x^2 + 4\sqrt{x^2} - 12 = 0$;
12) $||x^2 - 6x + 4| - 3| = 1$.

33.29. Решите уравнение:

1) $|x^2 + 10x - 4| = 20$;
2) $x^2 - 7|x| + 6 = 0$;
3) $|x^2 - x - 1| = 1$;
4) $x|x| + 12x - 45 = 0$;
5) $x|x| - 16x + 15 = 0$;
6) $3x^2 + 7|x| - 6 = 0$;
7) $2x^2 - \frac{13x^2}{|x|} + 6 = 0$;
8) $\frac{x^3}{|x|} - 14x - 15 = 0$;
9) $x^2 - 8\sqrt{x^2} - 9 = 0$;
10) $x^2 + 7\sqrt{x^2} + 12 = 0$;
11) $x^2 + |x + 4| = 4$;
12) $x|x - 2| - 6x + 8 = 0$.

33.30. Решите уравнение:

1) $x^2 + 2x + \frac{3}{x - 8} = \frac{3}{x - 8} + 80$;
2) $x^2 + 8\left(\sqrt{x}\right)^2 - 33 = 0$;
3) $2x^2 + 9\left(\sqrt{x + 1}\right)^2 - 27 = 0$;
4) $x^2 - 5x\,\frac{|x - 2|}{x - 2} - 14 = 0$.

33.31. Решите уравнение:

1) $6x^2+5x-\frac{1}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$;

2) $5x^2-14\left(\sqrt{x}\right)^2-3=0$;

3) $x^2-4\left(\sqrt{x+2}\right)^2-13=0$;

4) $x^2+2x+3\frac{|x-1|}{x-1}=0$.

33.32. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x^2+2x}+|x^2-8x-20|=0$;

2) $\sqrt{x^2-9x+8}+x^2-16x+64=0$.

33.33. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{8x^2-7x-1}=0$;

2) $x^2+6x+9+|x^2+x-6|=0$;

3) $\sqrt{36-x^2}+|x^2+5x-6|=0$.

33.34. Решите уравнение:

1) $(\sqrt{x}-2)(x^2+2x-24)=0$;

2) $(x^2+2x)(\sqrt{x}-5)(3x^2-11x-4)=0$.

33.35. Решите уравнение $(\sqrt{x}-3)(x^2+4x-21)=0$.

33.36. Докажите, что при любом значении параметра p имеет два корня уравнение:

1) $4x^2-px-3=0$;

2) $x^2+px+p-2=0$.

33.37. Докажите, что при любом значении параметра m не имеет корней уравнение:

1) $x^2+mx+m^2+1=0$;

2) $x^2-2mx+2m^2+9=0$.

33.38. Докажите, что при любом значении параметра b уравнение $x^2+bx-7=0$ имеет два корня.

33.39. При каких значениях параметра a имеет два корня уравнение:

1) $x^2+3x+a=0$;

2) $x^2+2ax+a^2-3a+1=0$?

◆ ◆ ◆

33.40. Решите уравнение:

1) $|x^2+x-3|=x$;

2) $|x^2+x-1|=2x-1$;

3) $|x-2|=x^2-2x$;

4) $|2x+1|=x^2-x-1$.

33.41. Решите уравнение:

1) $|x^2-2x|=3-2x$;

2) $|x-3|=x^2-6x+3$.

33.42. Для каждого значения параметра a решите уравнение:

1) $x^2 + (3a + 1)x + 2a^2 + a = 0$;

2) $x^2 - (2a + 4)x + 8a = 0$;

3) $a^2x^2 - 24ax - 25 = 0$;

4) $3(2a - 1)x^2 - 2(a + 1)x + 1 = 0$.

33.43. Для каждого значения параметра a решите уравнение:

1) $x^2 - (2a - 5)x - 3a^2 + 5a = 0$;

2) $x^2 + (3a - 4)x - 12a = 0$;

3) $ax^2 - (a + 1)x + 1 = 0$.

33.44. При каких значениях параметра b имеет единственный корень уравнение:

1) $bx^2 - 6x - 7 = 0$;

2) $(b + 5)x^2 - (b + 6)x + 3 = 0$;

3) $(b - 4)x^2 + (2b - 8)x + 15 = 0$;

4) $(b + 2)x^2 + (b^2 + 2b)x + b + 2 = 0$?

33.45. При каких значениях параметра b имеет единственный корень уравнение:

1) $bx^2 + x + b = 0$;

2) $(b + 3)x^2 + (b + 1)x - 2 = 0$;

3) $(b - 2)x^2 + (4 - 2b)x + 3 = 0$?

33.46. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 + 4x + 3 = 0$ имеет два корня?

33.47. При каких значениях параметра a уравнение $a(2a + 4)x^2 - (a + 2)x - 5a - 10 = 0$ имеет больше одного решения?

Упражнения для повторения

33.48. Найдите значение выражения $\dfrac{(a^{-3})^3}{a^{-2} \cdot a^{-5}}$ при $a = \dfrac{1}{3}$.

33.49. Имеется лом сплавов двух сортов, которые содержат 5 % и 45 % никеля соответственно. Сколько металлолома каждого из этих сортов нужно взять, чтобы получить 120 т сплава с 30-процентным содержанием никеля?

33.50. В книге недостаёт нескольких листов. На левой странице разворота стоит номер страницы 24, а на правой — номер 53. Сколько листов недостаёт между этими страницами?

33.51. Упростите выражение $\left(\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}\right)\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} - 2\right)^{-1}\left(\left(1 + \dfrac{y}{x}\right)\dfrac{x}{x - y}\right)^{-2}$.

33.52. Для каждого значения параметра a решите неравенство $ax + 2 > x$.

Теорема 34.1

(Теорема Виета)

Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Доказательство.

Условие теоремы предполагает, что данное квадратное уравнение имеет корни, поэтому его дискриминант D не может быть отрицательным.

Пусть $D > 0$. Запишем формулы корней квадратного уравнения:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a},\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Имеем: $x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D} - b + \sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{a};$

$$x_1 x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{D})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Пусть $D = 0$. В этом случае считают, что $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. Тогда получаем:

$$x_1 + x_2 = 2 \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \blacksquare$$

Франсуа Виет (1540–1603)

Французский математик, по профессии юрист. В 1591 г. ввёл буквенные обозначения не только для неизвестных величин, но и для коэффициентов уравнений, благодаря чему стало возможным выражать свойства уравнений и их корни общими формулами. Среди своих открытий сам Виет особенно высоко ценил установление зависимости между корнями и коэффициентами уравнений.



Следствие

Если x_1 и x_2 — корни приведённого квадратного уравнения $x^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -b,$$
$$x_1 x_2 = c,$$

т. е. сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Теорема 34.2

(Обратная теореме Виета)

Если числа α и β таковы, что $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ и $\alpha\beta = \frac{c}{a}$, то эти числа являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Доказательство.

Рассмотрим квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Преобразуем его в приведённое:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Согласно условию теоремы это уравнение можно записать так:

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0. \qquad (1)$$

Подставим в полученное уравнение вместо x сначала число α, затем число β. Получим:

$$\alpha^2 - (\alpha + \beta)\alpha + \alpha\beta = \alpha^2 - \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta = 0;$$
$$\beta^2 - (\alpha + \beta)\beta + \alpha\beta = \beta^2 - \alpha\beta - \beta^2 + \alpha\beta = 0.$$

Следовательно, числа α и β — корни уравнения (1), а значит, и квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. ■

Следствие

Если числа α и β таковы, что $\alpha + \beta = -b$ и $\alpha\beta = c$, то эти числа являются корнями приведённого квадратного уравнения $x^2 + bx + c = 0$.

Это следствие позволяет решать некоторые квадратные уравнения устно, не используя формулу корней.

Пример 1. Найдите сумму и произведение корней уравнения $3x^2 - 15x + 2 = 0$.

Решение. Выясним, имеет ли данное уравнение корни.

Имеем: $D = (-15)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 225 - 24$. Получили, что $D > 0$. Следовательно, уравнение имеет два корня x_1 и x_2.

Тогда по теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{-15}{3} = 5$, $x_1 x_2 = \frac{2}{3}$.

Ответ: $5; \frac{2}{3}$. ■

Пример 2. Найдите коэффициенты b и c уравнения $x^2 + bx + c = 0$, если его корнями являются числа -7 и 4.

Решение. По теореме Виета $b = -(-7 + 4) = 3$, $c = -7 \cdot 4 = -28$.

Ответ: $3; -28$. ■

Пример 3. Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корни которого равны: 1) 4 и $-\frac{5}{7}$; 2) $\frac{6-\sqrt{7}}{2}$ и $\frac{6+\sqrt{7}}{2}$.

Решение. 1) Пусть $x_1 = 4$ и $x_2 = -\frac{5}{7}$. Тогда $x_1 + x_2 = 4 - \frac{5}{7} = \frac{23}{7}$, $x_1 x_2 = 4 \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) = -\frac{20}{7}$.

По теореме, обратной теореме Виета, числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 - \frac{23}{7}x - \frac{20}{7} = 0$. Умножив обе части этого уравнения на 7, получим квадратное уравнение с целыми коэффициентами:

$$7x^2 - 23x - 20 = 0.$$

2) Пусть $x_1 = \frac{6-\sqrt{7}}{2}$ и $x_2 = \frac{6+\sqrt{7}}{2}$. Тогда $x_1 + x_2 = \frac{6-\sqrt{7}}{2} + \frac{6+\sqrt{7}}{2} = 6$, $x_1 x_2 = \frac{6-\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{6+\sqrt{7}}{2} = \frac{36-7}{4} = \frac{29}{4}$.

Следовательно, x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 - 6x + \frac{29}{4} = 0$. Отсюда искомым является уравнение $4x^2 - 24x + 29 = 0$.

Ответ: $4x^2 - 24x + 29 = 0$. ■

Пример 4. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $2x^2 - 3x - 9 = 0$. Не решая уравнение, найдите значение выражения: 1) $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}$; 2) $x_1^2 + x_2^2$.

Решение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$, $x_1 x_2 = -\frac{9}{2}$.

Тогда имеем:

1) $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{3}{2} : \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{1}{3}$;

2) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{9}{4} + 9 = \frac{45}{4}$.

Ответ: 1) $-\frac{1}{3}$; 2) $\frac{45}{4}$. ■

Пример 5. Число 4 является корнем уравнения $3x^2 - 10x + n = 0$. Найдите второй корень уравнения и значение параметра n.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения, причём $x_1 = 4$. По теореме Виета $x_1 + x_2 = \frac{10}{3}$. Тогда $x_2 = \frac{10}{3} - 4 = -\frac{2}{3}$; $\frac{n}{3} = x_1x_2 = -\frac{8}{3}$; $n = -8$.

Ответ: $x_2 = -\frac{2}{3}$, $n = -8$. ■

Пример 6. Составьте квадратное уравнение, корни которого на 4 больше соответствующих корней уравнения $x^2 + 6x - 14 = 0$.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения, x_1' и x_2' — корни искомого уравнения.

По условию $x_1' = x_1 + 4$, $x_2' = x_2 + 4$.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -6$, $x_1x_2 = -14$.

Тогда имеем:

$x_1' + x_2' = x_1 + 4 + x_2 + 4 = (x_1 + x_2) + 8 = -6 + 8 = 2$;

$x_1' x_2' = (x_1 + 4)(x_2 + 4) = x_1x_2 + 4(x_1 + x_2) + 16 = -14 + 4 \cdot (-6) + 16 = -22$.

Следовательно, по теореме, обратной теореме Виета, искомым является уравнение $x^2 - 2x - 22 = 0$.

Ответ: $x^2 - 2x - 22 = 0$. ■

Пример 7. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + ax + a = 0$ равна 3?

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения. По условию $x_1^2 + x_2^2 = 3$, т. е. $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3$. Применяя теорему Виета, можно записать $(-a)^2 - 2a = 3$; $a^2 - 2a - 3 = 0$. Отсюда $a = -1$ или $a = 3$.

Казалось бы, решение завершено. Однако теорема Виета «работает» лишь для тех квадратных уравнений, у которых есть корни. А данное квадратное уравнение имеет корни не при всех значениях параметра a. Существование корней определяется условием $D \geqslant 0$. Для данного уравнения $D = a^2 - 4a$. Следовательно, найденные значения $a = -1$ и $a = 3$ должны удовлетворять неравенству $a^2 - 4a \geqslant 0$. Легко установить, что подходит только $a = -1$.

Ответ: $a = -1$. ■

1. Сформулируйте теорему Виета.
2. Сформулируйте следствие из теоремы Виета.
3. Сформулируйте теорему, обратную теореме Виета.
4. Сформулируйте следствие из теоремы, обратной теореме Виета.

Упражнения

34.1. Не решая уравнение, найдите сумму и произведение его корней:
1) $x^2 + 6x - 32 = 0$;
2) $x^2 - 10x + 4 = 0$;
3) $2x^2 - 6x + 3 = 0$;
4) $10x^2 + 42x + 25 = 0$.

34.2. Не решая уравнение, найдите сумму и произведение его корней:
1) $x^2 - 12x - 18 = 0$;
2) $x^2 + 2x - 9 = 0$;
3) $3x^2 + 7x + 2 = 0$;
4) $-4x^2 - 8x + 27 = 0$.

34.3. Применяя теорему, обратную теореме Виета, определите, являются ли корнями уравнения:
1) $x^2 - 8x + 12 = 0$ числа 2 и 6;
2) $x^2 + x - 56 = 0$ числа -7 и 8;
3) $x^2 - 13x + 42 = 0$ числа 5 и 8;
4) $x^2 - 20x - 99 = 0$ числа 9 и 11.

34.4. Найдите коэффициенты b и c уравнения $x^2 + bx + c = 0$, если его корнями являются числа:
1) -8 и 6;
2) 4 и 5.

34.5. Найдите коэффициенты b и c уравнения $x^2 + bx + c = 0$, если его корнями является числа:
1) -2 и 0,5;
2) -10 и -20.

34.6. Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корни которого равны:
1) 2 и 5;
2) $-\frac{1}{3}$ и 2;
3) $-0{,}2$ и -10;
4) $2 - \sqrt{3}$ и $2 + \sqrt{3}$;
5) 0 и 6;
6) $-\sqrt{7}$ и $\sqrt{7}$.

34.7. Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корни которого равны:
1) -7 и -8;
2) 5 и $-0{,}4$;
3) $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$;
4) $5 - \sqrt{10}$ и $5 + \sqrt{10}$.

34.8. Число -2 является корнем уравнения $x^2 - 8x + q = 0$. Найдите значение q и второй корень уравнения.

34.9. Число 7 является корнем уравнения $x^2 + px - 42 = 0$. Найдите значение p и второй корень уравнения.

34.10. Число $\frac{1}{3}$ является корнем уравнения $6x^2 - bx + 4 = 0$. Найдите значение b и второй корень уравнения.

34.11. Число –0,2 является корнем уравнения $4x^2 - 5{,}6x + m = 0$. Найдите значение параметра m и второй корень уравнения.

34.12. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $2x^2 - 7x - 13 = 0$. Не решая уравнение, найдите значение выражения $x_1x_2 - 4x_1 - 4x_2$.

34.13. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $5x^2 + 4x - 13 = 0$. Не решая уравнение, найдите значение выражения $3x_1x_2 - x_1 - x_2$.

34.14. При каком значении параметра b корни уравнения $x^2 + bx - 17 = 0$ являются противоположными числами? Найдите эти корни.

34.15. Применяя теорему, обратную теореме Виета, решите уравнение:

1) $x^2 - 5x + 4 = 0$;
2) $x^2 + 5x + 4 = 0$;
3) $x^2 - 9x + 20 = 0$;
4) $x^2 + 2x - 8 = 0$;
5) $2x^2 + 5x + 3 = 0$;
6) $-8x^2 - 19x + 27 = 0$.

34.16. Применяя теорему, обратную теореме Виета, решите уравнение:

1) $x^2 - 4x - 5 = 0$;
2) $x^2 + 4x - 5 = 0$;
3) $2x^2 - 5x + 3 = 0$;
4) $x^2 - x - 2 = 0$;
5) $x^2 - 3x - 18 = 0$;
6) $16x^2 - 23x + 7 = 0$.

34.17. Какие из данных уравнений имеют: а) два положительных корня; б) два отрицательных корня; в) корни разных знаков:

1) $x^2 - 12x + 14 = 0$;
2) $x^2 + 6x + 2 = 0$;
3) $x^2 - 7x - 30 = 0$;
4) $x^2 + 16x - 10 = 0$;
5) $x^2 - 24x + 0{,}1 = 0$;
6) $x^2 + 20x + 3 = 0$?

◆ ◆

34.18. Один из корней уравнения $x^2 - 10x + c = 0$ на 8 меньше другого. Найдите значение параметра c и корни уравнения.

34.19. Корни уравнения $x^2 + 20x + a = 0$ относятся как 7 : 3. Найдите значение параметра a и корни уравнения.

34.20. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 7x + m = 0$ удовлетворяют условию $2x_1 - 5x_2 = 28$. Найдите корни уравнения и значение параметра m.

34.21. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 + 4x + n = 0$ удовлетворяют условию $3x_1 - x_2 = 8$. Найдите корни уравнения и значение параметра n.

34.22. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 9x + 6 = 0$. Не решая уравнение, найдите значение выражения:

1) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$;
2) $x_1^2 + x_2^2$;
3) $(x_1 - x_2)^2$;
4) $x_1x_2^3 + x_2x_1^3$;
5) $x_1^3 + x_2^3$.

34.23. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + 5x - 16 = 0$. Не решая уравнение, найдите значение выражения:

1) $x_1^2x_2 + x_2^2x_1$;
2) $\dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{x_1}{x_2}$;
3) $|x_2 - x_1|$.

34.24. Составьте квадратное уравнение, корни которого на 2 меньше соответствующих корней уравнения $x^2 + 8x - 3 = 0$.

34.25. Составьте квадратное уравнение, корни которого на 3 больше соответствующих корней уравнения $x^2 - 12x + 4 = 0$.

34.26. Составьте квадратное уравнение, корни которого в 3 раза меньше соответствующих корней уравнения $2x^2 - 14x + 9 = 0$.

34.27. Составьте квадратное уравнение, корни которого в 2 раза больше соответствующих корней уравнения $2x^2 - 15x + 4 = 0$.



34.28. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $3x^2 + ax - 7 = 0$ равна $\frac{46}{9}$.

34.29. При каких значениях параметра a корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 - ax + 8 = 0$ удовлетворяют условию $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{5}{2}$.

34.30. Верно ли утверждение:

1) уравнение $7x^2 + 4x - a^2 - 1 = 0$ имеет корни разных знаков при любом значении параметра a;

2) если уравнение $x^2 + 6x + a^2 + 4 = 0$ имеет корни, то независимо от значения параметра a они оба отрицательны?

34.31. Найдите все значения параметра b, при которых имеет целые корни уравнение:

1) $x^2 + bx + 6 = 0$; 2) $x^2 + bx - 12 = 0$.

34.32. Найдите все значения параметра b, при которых имеет целые корни уравнение:

1) $x^2 + bx + 8 = 0$; 2) $x^2 + bx - 18 = 0$.

34.33. Корни уравнения $x^2 + bx + c = 0$ равны его коэффициентам b и c. Найдите b и c.

34.34. При каких значениях параметра a сумма корней уравнения $x^2 + (a^2 + 2a - 3)x + a = 0$ равна нулю?

34.35. При каких значениях параметра a произведение корней уравнения $x^2 + (a + 2)x + a^2 - 4a = 0$ равно 5?

34.36. При каких значениях параметра a разность корней уравнения $2x^2 - (a + 1)x + a - 1 = 0$ равна их произведению?

34.37. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2 - 5x + a = 0$ на 1 меньше корней уравнения $x^2 - 7x + 3a - 6 = 0$?

34.38. При каких значениях параметра a модуль разности корней уравнения $x^2 - ax + 2a = 0$ равен 3?

34.39. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 4x + a = 0$ равна: 1) 12; 2) 6?

34.40. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (a - 1)x - 2a = 0$ равна 9?

34.41. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + 2ax - 3 = 0$ является наименьшей?

34.42. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + ax + a^2 - 2 = 0$ является наибольшей?

34.43. Натуральные числа m и n таковы, что НОК $(m; n)$ + НОД $(m; n) = m + n$. Докажите, что одно из чисел m или n делится нацело на другое.

Упражнения для повторения

34.44. В саду посадили рядами 48 деревьев с одинаковым количеством деревьев в каждом ряду. Рядов оказалось на 8 меньше, чем деревьев в каждом из них. Сколько деревьев посадили в каждом ряду и сколько было рядов?

34.45. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = x + 2$. Начертите графики данных функций и отметьте найденные точки.

34.46. В саду 60 % деревьев составляют вишни и сливы, из них 30 % составляют сливы. Какой процент всех деревьев сада составляют сливы?

34.47. Найдите все пары натуральных чисел $(m; n)$ таких, что $m! + 12 = n^2$.

§ 35 Квадратный трёхчлен

Определение

Квадратным трёхчленом называют многочлен вида $ax^2 + bx + c$, где x — переменная, a, b и c — параметры, причём $a \neq 0$.

Приведём примеры многочленов, являющихся квадратными трёхчленами:

$$2x^2 - 3x + 5;\ x^2 + 7x;\ x^2 - 5;\ 3x^2.$$

Заметим, что левая часть квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ является квадратным трёхчленом.

Определение

Корнем квадратного трёхчлена называют значение переменной, при котором значение квадратного трёхчлена равно нулю.

Например, число 2 является корнем квадратного трёхчлена $x^2 - 6x + 8$.

Чтобы найти корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, надо решить соответствующее квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

Число $D = b^2 - 4ac$ называют **дискриминантом квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$.**

Если $D < 0$, то квадратный трёхчлен корней не имеет. Если $D = 0$, то квадратный трёхчлен имеет один корень, если $D > 0$ — то два корня.

Рассмотрим квадратный трёхчлен $x^2 - 3x + 2$. Разложим его на множители методом группировки.

Имеем:

$x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 = x(x - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(x - 2)$.

О таком тождественном преобразовании говорят, что квадратный трёхчлен $x^2 - 3x + 2$ разложили на **линейные множители** $x - 1$ и $x - 2$.

Связь между корнями квадратного трёхчлена и линейными множителями, на которые он раскладывается, устанавливает следующая теорема.

Теорема 35.1

Если дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ положительный, то данный трёхчлен можно разложить на линейные множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена.

Доказательство.

Поскольку числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то по теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Тогда $a(x - x_1)(x - x_2) = a(x_2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$

$= ax^2 + bx + c$. ■

Теорема 35.2

Если дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ равен нулю, то его разложение на линейные множители имеет вид:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Доказательство.

В данном квадратном трёхчлене выделим квадрат двучлена:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right).$$

Теперь ясно, что если $D = 0$, то $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. ■

Пример 1. Разложите на множители квадратный трёхчлен:
1) $x^2 - 14x - 32$; 2) $-x^2 + 17x - 30$; 3) $3x^2 - 7x + 2$.

Решение. 1) Найдём корни данного трёхчлена:

$$x^2 - 14x - 32 = 0;$$
$$x_1 = -2,\ x_2 = 16.$$

Следовательно, $x^2 - 14x - 32 = (x + 2)(x - 16)$.

2) Решим уравнение $-x^2 + 17x - 30 = 0$. Имеем:

$$x^2 - 17x + 30 = 0;$$
$$x_1 = 2,\ x_2 = 15.$$

Следовательно, $-x^2 + 17x - 30 = -(x - 2)(x - 15)$.

3) Решим уравнение $3x^2 - 7x + 2 = 0$. Имеем:

$$x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = 2.$$

Тогда $3x^2 - 7x + 2 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 2) = (3x - 1)(x - 2)$. ■

Пример 2. Сократите дробь $\frac{6a^2 - a - 1}{9a^2 - 1}$.

Решение. Разложим на множители квадратный трёхчлен, являющийся числителем данной дроби:

$$6a^2 - a - 1 = 0;$$
$$a_1 = -\frac{1}{3},\ a_2 = \frac{1}{2};$$

$$6a^2 - a - 1 = 6\left(a + \frac{1}{3}\right)\left(a - \frac{1}{2}\right) = 3\left(a + \frac{1}{3}\right) \cdot 2\left(a - \frac{1}{2}\right) = (3a + 1)(2a - 1).$$

Тогда:

$$\frac{6a^2 - a - 1}{9a^2 - 1} = \frac{(3a + 1)(2a - 1)}{(3a + 1)(3a - 1)} = \frac{2a - 1}{3a - 1}.$$

Ответ: $\frac{2a - 1}{3a - 1}$.

Теорема 35.3

Если дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ отрицательный, то данный трёхчлен нельзя разложить на линейные множители.

Доказательство.

Предположим, что квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ можно разложить на линейные множители. Тогда существуют такие числа k, m и n, что выполняется равенство $ax^2 + bx + c = k(x - m)(x - n)$. Отсюда получаем, что m и n — корни данного квадратного трёхчлена. Следовательно, его дискриминант неотрицательный, что противоречит условию. ■

Заметим, что если дискриминант квадратного трёхчлена неотрицательный, то такой трёхчлен имеет корни, а значит, не может принимать только отрицательные или только положительные значения. Выясним, при каких условиях квадратный трёхчлен принимает значения одного и того же знака.

Теорема 35.4

Если дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ отрицательный, то при всех x значения этого трёхчлена имеют тот же знак, что и параметр a, т. е.:

если $a > 0$, то $ax^2 + bx + c > 0$ при всех x;

если $a < 0$, то $ax^2 + bx + c < 0$ при всех x.

Доказательство.

Имеем: $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right)$. Если $D < 0$, то $-\frac{D}{4a^2} > 0$. Тогда $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2} > 0$ при всех x. Следовательно, знак произведения $a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right)$ зависит только от знака числа a. ■

Пример 3. Решите неравенство:

1) $-2x^2 + 3x - 3 < 0$; 2) $\sqrt{x}(x^2 - 2x + 3) > 0$.

Решение. 1) Так как дискриминант и старший коэффициент квадратного трёхчлена $-2x^2 + 3x - 3$ отрицательные, то данный трёхчлен принимает отрицательные значения при всех x. Следовательно, множеством решений данного неравенства является множество $\boldsymbol{R}$.

2) Так как дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 - 2x + 3$ отрицательный, а старший коэффициент положительный, то $x^2 - 2x + 3 > 0$ при

всех x. Тогда данное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{x} > 0$. Отсюда $x > 0$.

Ответ: 1) $\boldsymbol{R}$; 2) $(0; +\infty)$.

Пример 4. Разложите на множители многочлен $2x^2 + xy - 6y^2$.

Решение. Рассмотрим данный многочлен как квадратный трёхчлен с переменной x, считая y параметром. Найдём его корни:

$$2x^2 + xy - 6y^2 = 0;\ x = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 + 48y^2}}{4};\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-y + 7y}{4}; \\ x = \dfrac{-y - 7y}{4}; \end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2}y; \\ x = -2y. \end{array}\right.$$

Отсюда $2x^2 + xy - 6y^2 = 2(x + 2y)\left(x - \dfrac{3y}{2}\right) = (x + 2y)(2x - 3y)$. ■

Пример 5. При каком значении параметра m разложение на множители трёхчлена $2x^2 + 9x + m$ содержит множитель $(x + 5)$?

Решение. Поскольку разложение данного трёхчлена на множители должно содержать множитель $(x + 5)$, то один из корней этого трёхчлена равен -5.

Тогда:

$$2 \cdot (-5)^2 + 9 \cdot (-5) + m = 0;$$
$$m = -5.$$

Ответ: $m = -5$.

Пример 6. При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 - 2x + 3 > 0$ выполняется при всех x?

Решение. Если $a = 0$, то данное неравенство принимает вид $-2x + 3 > 0$. Множеством решений этого неравенства не является множество $\boldsymbol{R}$.

Если $a \neq 0$, то левая часть данного неравенства — квадратный трёхчлен. Чтобы он принимал положительные значения при всех x, его дискриминант должен быть отрицательным, а старший коэффициент — положительным. Поэтому искомые значения параметра a являются решениями системы $\begin{cases} a > 0, \\ 4 - 12a < 0. \end{cases}$ Отсюда $a > \dfrac{1}{3}$.

Ответ: при $a > \dfrac{1}{3}$.

1. Какой многочлен называют квадратным трёхчленом?

2. Что называют корнем квадратного трёхчлена?

3. Что называют дискриминантом квадратного трёхчлена?

4. В каком случае квадратный трёхчлен не имеет корней? Имеет один корень? Имеет два корня?
5. В каком случае квадратный трёхчлен можно разложить на линейные множители?
6. По какой формуле квадратный трёхчлен можно разложить на линейные множители?
7. В каком случае квадратный трёхчлен нельзя разложить на линейные множители?
8. Какие значения принимает квадратный трёхчлен с отрицательным дискриминантом?

Упражнения

35.1. Разложите на линейные множители квадратный трёхчлен:

1) $x^2 - 7x + 12$;
2) $x^2 + 8x + 15$;
3) $-x^2 + x + 2$;
4) $4x^2 + 3x - 22$;
5) $-3a^2 + 8a + 3$;
6) $\frac{1}{6}b^2 - \frac{5}{6}b + 1$;
7) $-2x^2 - 0{,}5x + 1{,}5$;
8) $0{,}4x^2 - 2x + 2{,}5$;
9) $-1{,}2m^2 + 2{,}6m - 1$.

35.2. Разложите на линейные множители квадратный трёхчлен:

1) $x^2 - 3x - 18$;
2) $-x^2 + 3x + 4$;
3) $5x^2 + 8x - 4$;
4) $-\frac{1}{4}x^2 - 2x - 3$;
5) $0{,}3m^2 - 3m + 7{,}5$;
6) $-0{,}5x^2 + x + 1{,}5$.

35.3. Сократите дробь:

1) $\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x}$;
2) $\frac{4a^2 - 9}{2a^2 - 9a - 18}$;
3) $\frac{2b^2 - 7b + 3}{4b^2 - 4b + 1}$;
4) $\frac{m^3 - 1}{m^2 + 9m - 10}$;
5) $\frac{x^2 - 16}{32 - 4x - x^2}$;
6) $\frac{4n^2 - 9n + 2}{2 + 9n - 5n^2}$.

35.4. Сократите дробь:

1) $\frac{2x + 12}{x^2 + 3x - 18}$;
2) $\frac{x^2 + 9x + 14}{x^2 + 7x}$;
3) $\frac{4x^2 + x - 3}{x^2 - 1}$;
4) $\frac{2y^2 + 3y - 5}{y^2 - 2y + 1}$;
5) $\frac{a^2 + 5a + 4}{a^2 - a - 20}$;
6) $\frac{3 + 20b - 7b^2}{7b^2 - 6b - 1}$.

35.5. Решите неравенство:

1) $x^2 + x + 1 > 0$;
2) $-x^2 + x - 1 \leqslant 0$;
3) $(2x - 1)(2x^2 - 3x + 5) < 0$;
4) $\sqrt{x - 1}\,(-5x^2 + 8x - 5) \geqslant 0$.

35.6. Решите неравенство:

1) $7x^2 - 9x + 3 \geqslant 0$;
2) $-5y^2 + 11y - 11 < 0$;
3) $(2x + 3)(3x^2 - 8x + 6) \geqslant 0$;
4) $|x + 1|(4x^2 - 5x + 2) \leqslant 0$.

35.7. Найдите область определения функции:

1) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 4}}{x + 2}$; 2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{5x^2 - 4x + 1}}$.

35.8. При каком значении параметра b разложение на линейные множители трёхчлена:

1) $2x^2 - 5x + b$ содержит множитель $(x - 3)$;

2) $-4x^2 + bx + 2$ содержит множитель $(x + 1)$;

3) $3x^2 - 4x + b$ содержит множитель $x - \dfrac{2}{3}$?

35.9. При каком значении параметра a разложение на линейные множители трёхчлена:

1) $2x^2 - 7x + a$ содержит множитель $(x - 4)$;

2) $4x^2 - ax + 6$ содержит множитель $x + \dfrac{1}{2}$?

35.10. Упростите выражение:

1) $\dfrac{9a^2 - 4}{2a^2 - 5a + 2} \cdot \dfrac{a - 2}{3a + 2} + \dfrac{a - 1}{1 - 2a}$;

2) $\dfrac{b - 4}{b^3 - b} : \left(\dfrac{b - 1}{2b^2 + 3b + 1} - \dfrac{1}{b^2 - 1} \right)$;

3) $\left(\dfrac{c + 2}{c^2 - c - 6} - \dfrac{2c}{c^2 - 6c + 9} \right) : \dfrac{c^2 + 3c}{(2c - 6)^2}$;

4) $\left(\dfrac{3}{m - 4} + \dfrac{2m}{m + 1} + \dfrac{4m - 6}{m^2 - 3m - 4} \right) \cdot \dfrac{4m - 16}{2m - 3}$.

35.11. Докажите, что при всех допустимых значениях a значение выражения не зависит от значения переменной:

1) $\dfrac{25a^2 - 36}{10a^2 - 9a + 2} : \dfrac{5a + 6}{5a - 2} + \dfrac{9a - 8}{1 - 2a}$;

2) $\left(\dfrac{2a}{a + 3} + \dfrac{1}{a - 1} - \dfrac{4}{a^2 + 2a - 3} \right) : \dfrac{2a + 1}{a + 3}$.

35.12. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 1}$; 2) $y = \dfrac{3x^2 - 10x + 3}{x - 3} - \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$.

35.13. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$; 2) $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1} - \dfrac{x^2 - x - 30}{x + 5}$.

◆ ◆ ◆

35.14. Разложите на множители многочлен:

1) $x^2 - 6xy + 5y^2$; 3) $3m^2 - 8mn - 3n^2$;

2) $a^2 + 5ab - 36b^2$; 4) $4x^2 - 5xy + y^2$.

35.15. Разложите на множители многочлен:

1) $a^2 - 14ab + 40b^2$;

2) $12b^2 + bc - 6c^2$.

35.16. Сократите дробь:

1) $\dfrac{2a^2 + ab - 15b^2}{-2a^2 + 9ab - 10b^2}$; 2) $\dfrac{6x^2 - 13xy - 5y^2}{12x^2 - 5xy - 3y^2}$.

35.17. Сократите дробь:

1) $\dfrac{3n^2 + mn - 4m^2}{8m^2 + 18mn + 9n^2}$; 2) $\dfrac{12u^2 - 4ut - 5t^2}{-5t^2 + 21ut - 18u^2}$.

35.18. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых $(x; y)$ удовлетворяют равенству:

1) $8x^2 - 6xy + y^2 = 0$;

2) $4x^2 - 4xy - 3y^2 - 2x + 7y - 2 = 0$.

35.19. Для каждого значения параметра a решите уравнение:

1) $(a^2 - a - 6)x = a^2 - 9$;

2) $(a^2 - 8a + 7)x = 2a^2 - 13a - 7$.

35.20. Для каждого значения параметра a решите уравнение $(a^2 + 7a - 8)\,x = a^2 + 16a + 64$.

35.21. При каких значениях параметра a неравенство выполняется при всех x:

1) $(a - 1)x^2 - x + 2 > 0$;

2) $ax^2 - (2a - 1)x + a + 1 < 0$?

35.22. Квадратный трёхчлен $x^2 + ax + b$ имеет целые корни, большие чем 2. Докажите, что число $a + b + 1$ — составное.

35.23. Один из корней уравнения $x^{12} - abx + a^2 = 0$ больше 2. Докажите, что $|b| > 64$.

35.24. Решите уравнение $x^3 - (\sqrt{2} + 1)x^2 + 2 = 0$.

35.25. Решите уравнение $x^4 - 2\sqrt{3}x^2 + x + 3 - \sqrt{3} = 0$.

Упражнения для повторения

35.26. Сократите дробь:

1) $\dfrac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$; 3) $\dfrac{2 - \sqrt{6}}{\sqrt{6} - 3}$; 5) $\dfrac{9a - b^2}{9a + 6b\sqrt{a} + b^2}$;

2) $\dfrac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{10} - 5\sqrt{2}}$; 4) $\dfrac{4a - 2}{2\sqrt{a} + \sqrt{2}}$; 6) $\dfrac{a\sqrt{a} - 8}{a + 2\sqrt{a} + 4}$.

35.27. Какой из графиков, представленных на рисунке 35.1, является графиком движения пешехода, который шёл с постоянной скоростью? Определите скорость движения этого пешехода.

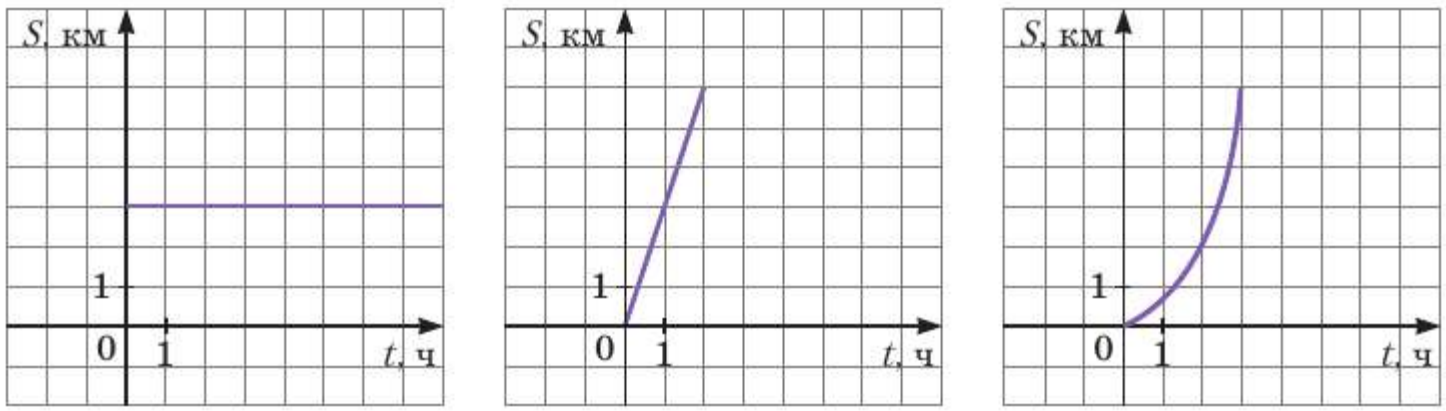


Рис. **35.1**

35.28. Смешали 2 л молока жирностью 8 % и 3 л молока жирностью 6 %. Какова жирность полученного молока?

35.29. Для каждого значения параметра a решите неравенство:

1) $|x^2 - 4x + 3|(x - a) \geqslant 0$;

2) $|x^2 + 3x + 2|(x - a) < 0$.

§36 Решение уравнений, сводящихся к квадратным уравнениям

Пример 1. Решите уравнение $\dfrac{x^2 + 2x}{x - 6} = \dfrac{5x + 18}{x - 6}$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2 + 2x = 5x + 18, \\ x - 6 \neq 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 18 = 0, \\ x \neq 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -3; \\ x = 6, \end{array}\right. \quad \text{Отсюда } x = -3. \\ x \neq 6. \end{cases}$$

Ответ: -3.

Пример 2. Решите уравнение $\frac{5}{x^2-4x+4}-\frac{4}{x^2-4}=\frac{1}{x+2}$.

Решение. Имеем: $\frac{5}{(x-2)^2}-\frac{4}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x+2}=0;$

$$\frac{5(x+2)-4(x-2)-(x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)}=0.$$

Следовательно, данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}5(x+2)-4(x-2)-(x-2)^2=0,\\ x\neq 2,\\ x\neq -2.\end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases}5x+10-4x+8-x^2+4x-4=0,\\ x\neq 2,\\ x\neq -2;\end{cases}$

$$\begin{cases}x^2-5x-14=0,\\ x\neq 2,\\ x\neq -2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=7,\\ x=-2,\end{array}\right.\\ x\neq 2,\\ x\neq -2.\end{cases}$$ Отсюда $x=7$.

Ответ: 7.

Пример 3. Для каждого значения параметра a решите уравнение

$$1-\frac{3}{x+a-1}=\frac{5a}{(x+a-1)(x+1)}.$$

Решение. $\frac{(x+a-1)(x+1)-3(x+1)-5a}{(x+a-1)(x+1)}=0$. Это уравнение равносильно системе $\begin{cases}(x+a-1)(x+1)-3(x+1)-5a=0,\\ x\neq 1-a,\\ x\neq -1.\end{cases}$

Отсюда $\begin{cases}x^2+x(a-3)-4a-4=0,\\ x\neq 1-a,\\ x\neq -1.\end{cases}$

Квадратное уравнение системы имеет два корня: $x_1 = 4$, $x_2 = -a - 1$. Эти значения переменной будут корнями исходного уравнения только при выполнении следующих условий: $x_1 \neq 1 - a$, $x_1 \neq -1$, $x_2 \neq 1 - a$, $x_2 \neq -1$. Очевидно, что условия $4 \neq -1$ и $-a - 1 \neq 1 - a$ выполняются при любых значениях a.

Если $x_1 = 1 - a$, т. е. $4 = 1 - a$, то $a = -3$. Следовательно, при $a = -3$ корень x_1 является посторонним. Вместе с тем для $a = -3$ получаем $x_2 = -a - 1 = 2$, и $x_2 = 2$ является корнем исходного уравнения.

Если $x_2 = -1$, т. е. $-a - 1 = -1$, то $a = 0$. Следовательно, при $a = 0$ корень x_2 является посторонним, а $x_1 = 4$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: если $a = -3$, то $x = 2$; если $a = 0$, то $x = 4$; если $a \neq 0$ и $a \neq -3$, то $x = 4$ или $x = -a - 1$.

Пример 4. Найдите все значения параметра b, при которых уравнение $\dfrac{x^2 - (3b - 1)x + 2b^2 - 2}{x^2 - 3x - 4} = 0$ имеет единственный корень.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - (3b - 1)x + 2b^2 - 2 = 0, \\ x \neq 4, \\ x \neq -1. \end{cases}$$

Решив квадратное уравнение системы, получаем $x_1 = 2b - 2$, $x_2 = b + 1$.

Сначала рассмотрим случай, когда квадратное уравнение системы имеет единственный корень. Для этого надо, чтобы $x_1 = x_2$, т. е. $2b - 2 = b + 1$. Отсюда $b = 3$. Однако при $b = 3$ получаем, что $x_1 = x_2 = 4$, т. е. квадратное уравнение имеет единственный корень, но он не принадлежит области определения исходного уравнения.

Теперь рассмотрим случай, когда корни квадратного уравнения системы различны. Для того чтобы x_1 и x_2 были корнями данного уравнения, должны выполняться такие условия: $x_1 \neq 4$, $x_1 \neq -1$, $x_2 \neq 4$, $x_2 \neq -1$. Поэтому, чтобы исходное уравнение имело единственное решение, в области определения исходного уравнения должен оставаться только один корень: x_1 или x_2. Отсюда:

1) $\begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 \neq 4, \\ x_2 \neq -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 \neq 4, \\ x_2 \neq -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_2 = 4, \\ x_1 \neq 4, \\ x_1 \neq -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_2 = -1, \\ x_1 \neq 4, \\ x_1 \neq -1. \end{cases}$

Легко определить (убедитесь в этом самостоятельно), что первая и третья системы решений не имеют, а из второй и четвёртой соответственно получаем $b = \frac{1}{2}$, $b = -2$.

Ответ: $b = \frac{1}{2}$ или $b = -2$.

Упражнения

36.1. Решите уравнение:

1) $\frac{x^2 + 3x - 4}{x + 1} = 0$;

2) $\frac{3x^2 - x - 2}{1 - x} = 0$;

3) $\frac{x^2 - 14}{x + 2} = \frac{5x}{x + 2}$;

4) $\frac{x^2 + 4x}{x - 5} - \frac{9x + 50}{x - 5} = 0$;

5) $\frac{x^2 - 6x}{x - 3} + \frac{15 - 2x}{x - 3} = 0$;

6) $\frac{5x + 18}{x - 2} = x$;

7) $x + 1 = \frac{6}{x}$;

8) $5 - \frac{8}{x^2} = \frac{18}{x}$.

36.2. Решите уравнение:

1) $\frac{x^2 - 5x - 6}{x - 6} = 0$;

2) $\frac{4x^2 - 7x - 2}{x - 2} = 0$;

3) $\frac{2x^2 + 6}{x + 8} = \frac{13x}{x + 8}$;

4) $\frac{x^2 + 4x}{x + 7} = \frac{5x + 56}{x + 7}$;

5) $\frac{x^2 + 12x}{x + 4} - \frac{5x - 12}{x + 4} = 0$;

6) $\frac{x^2 - 3x}{x + 6} = 6$;

7) $\frac{2 - 33y}{y - 4} = 7y$;

8) $y - \frac{39}{y} = 10$.

36.3. Решите уравнение:

1) $\frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - 9} = 0$;

2) $\frac{3x^2 - 14x - 5}{3x^2 + x} = 0$;

3) $\frac{x^2 - 12x + 35}{x^2 - 10x + 25} = 0$;

4) $\frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 + 2x - 3} = 0$.

36.4. Решите уравнение:

1) $\frac{x^2 - 9x - 10}{x^2 - 1} = 0$;

2) $\frac{x^2 + 5x - 14}{x^2 - 6x + 8} = 0$.

36.5. Решите уравнение:

1) $\frac{2y}{y-3} = \frac{3y+3}{y}$;

2) $\frac{3x+4}{x-3} = \frac{2x-9}{x+1}$;

3) $\frac{5x+2}{x-1} = \frac{4x+13}{x+7}$;

4) $\frac{2x^2-3x+1}{x-1} = 3x-4$.

36.6. Найдите корни уравнения:

1) $\frac{2x-13}{x-6} = \frac{x+6}{x}$;

2) $\frac{3x^2-4x-20}{x+2} = 2x-5$.

36.7. Найдите корни уравнения:

1) $\frac{x-1}{x+3} + \frac{x+1}{x-3} = \frac{2x+18}{x^2-9}$;

2) $\frac{1}{x} - \frac{10}{x^2-5x} = \frac{3-x}{x-5}$;

3) $\frac{4x}{x^2+4x+4} - \frac{x-2}{x^2+2x} = \frac{1}{x}$;

4) $\frac{6}{x^2-36} - \frac{3}{x^2-6x} + \frac{x-12}{x^2+6x} = 0$;

5) $\frac{x}{x+7} + \frac{x+7}{x-7} = \frac{63-5x}{x^2-49}$;

6) $\frac{4}{x^2-10x+25} - \frac{1}{x+5} = \frac{10}{x^2-25}$.

36.8. Решите уравнение:

1) $\frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{16}{x^2-4}$;

2) $\frac{2y+3}{2y+2} - \frac{y+1}{2y-2} + \frac{1}{y^2-1} = 0$;

3) $\frac{3x}{x^2-10x+25} - \frac{x-3}{x^2-5x} = \frac{1}{x}$;

4) $\frac{x-20}{x^2+10x} + \frac{10}{x^2-100} - \frac{5}{x^2-10x} = 0$.

◆ ◆

36.9. Решите уравнение:

1) $\frac{2x-10}{x^3+1} + \frac{4}{x+1} = \frac{5x-1}{x^2-x+1}$;

2) $\frac{6}{x^2-4x+3} + \frac{5-2x}{x-1} = \frac{3}{x-3}$;

3) $\frac{4x-6}{x+2} - \frac{x}{x+1} = \frac{14}{x^2+3x+2}$;

4) $\frac{x}{x^2-4} - \frac{3x-1}{x^2+x-6} = \frac{2}{x^2+5x+6}$.

36.10. Решите уравнение:

1) $\frac{3x+2}{x^2+2x+4} + \frac{x^2+39}{x^3-8} = \frac{5}{x-2}$;

2) $\frac{x}{x-1} + \frac{x+1}{x+3} = \frac{8}{x^2+2x-3}$.

36.11. Решите уравнение:

1) $\frac{2x-1}{x+1}+\frac{3x-1}{x+2}=\frac{x-7}{x-1}+4;$

2) $\frac{x^2+4x+4}{x+4}-\frac{2x+6}{x+2}=\frac{x^2+x+1}{x+1}-\frac{2x+9}{x+3};$

3) $\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-2}{x+3}=\frac{x-4}{x+5}-\frac{x-5}{x+6}.$

36.12. Решите уравнение:

1) $\frac{x+4}{x-1}+\frac{x-4}{x+1}=\frac{x+8}{x-2}+\frac{x-8}{x+2};$

2) $\frac{x-1}{x+1}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{x-3}{x+3}-\frac{x-4}{x+4};$

3) $\frac{x^2+2x+2}{x+1}+\frac{x^2+8x+20}{x+4}=\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+6x+12}{x+3}.$

36.13. Для каждого значения параметра a решите уравнение:

1) $\frac{x^2-8x+7}{x-a}=0;$

2) $\frac{x-a}{x^2-8x+7}=0;$

3) $\frac{x^2-(3a+2)x+6a}{x-6}=0;$

4) $\frac{a(x-a)}{x+3}=0.$

36.14. Для каждого значения параметра a решите уравнение:

1) $\frac{x}{2a}+\frac{2}{x-2}=\frac{3x-2a}{2(x-2)};$

2) $\frac{x}{x-a}-\frac{2a}{x+a}=\frac{8a^2}{x^2-a^2};$

3) $\frac{1}{x+2}-\frac{2a-1}{x^2-2x+4}=\frac{6-4a}{x^3+8};$

4) $\frac{x}{x+a}-\frac{a-2}{x-a}=\frac{4a-2a^2}{x^2-a^2};$

5) $\frac{2a^2+x^2}{a^3-x^3}-\frac{2x}{ax+a^2+x^2}+\frac{1}{x-a}=0.$

36.15. Для каждого значения параметра a решите уравнение:

1) $\frac{x+2}{a+1}=\frac{2x-a-1}{x-2};$

2) $\frac{x^2+(3a+1)x+2a+2a^2}{(x-1)(x+2)}=0;$

3) $\frac{x^2-(2a+1)x+a+a^2}{x(x-2)}=0;$

4) $\frac{(a-2)x}{a-1}-1=\frac{a+2}{a-1}-\frac{2x^2+a+1}{(a-1)x}.$

36.16. При каких значениях параметра a имеет единственный корень уравнение:

1) $\dfrac{x^2 - ax + 5}{x - 1} = 0$;

2) $\dfrac{x^2 - (3a + 1)x + 2a^2 + 3a - 2}{x^2 - 6x + 5} = 0$;

3) $\dfrac{x^2 - (a + 4)x + 3a + 3}{\sqrt{x - 2}} = 0$?

36.17. При каких значениях параметра a имеет единственный корень уравнение:

1) $\dfrac{x^2 - ax + 1}{x + 3} = 0$;

2) $\dfrac{x^2 + (3 - 2a)x + 4a - 10}{x^2 - 4x + 3} = 0$;

3) $\dfrac{x^2 - ax + a - 1}{\sqrt{x + 1}} = 0$?

Упражнения для повторения

36.18. Верно ли утверждение, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения

$$(a - 1)^2 \left(\frac{1}{a^2 - 1} + \frac{1}{a^2 - 2a + 1} \right) + \frac{2}{a + 1}$$

является положительным числом?

36.19. Каким числом, рациональным или иррациональным, является значение выражения $\dfrac{\sqrt{6} + 2}{\sqrt{6} - 2} - \dfrac{\sqrt{6} - 2}{\sqrt{6} + 2}$?

36.20. Постройте график функции $y = \begin{cases} -\dfrac{8}{x}, \text{ если } x < -2, \\ x^2, \text{ если } x \geqslant -2. \end{cases}$

36.21. Решите уравнение $\dfrac{|x + 1| - |x - 1|}{x} = 1$.

§ 37 Решение уравнений методом замены переменной

Пример 1. Решите уравнение $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Решение. Пусть $x^2 = t$. Тогда $x^4 = t^2$. Подставив в исходное уравнение вместо x^2 и x^4 соответственно t и t^2, получим квадратное уравнение с переменной t:

$$t^2 - 13t + 36 = 0.$$

Решая это уравнение, находим: $t_1 = 4$, $t_2 = 9$. Поскольку $t = x^2$, то решение исходного уравнения сводится к решению совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = 4, \\ x^2 = 9. \end{array}\right.$$

Отсюда $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$, $x_4 = 3$.

Ответ: -3; -2; 2; 3.

Определение

Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где x — переменная, a, b и c — параметры, причём $a \neq 0$, называют биквадратным уравнением.

Заменой $x^2 = t$ биквадратное уравнение сводится к квадратному уравнению $at^2 + bt + c = 0$. Такой способ решения уравнений называют **методом замены переменной.**

Метод замены переменной можно использовать не только при решении биквадратных уравнений.

Пример 2. Решите уравнение $(2x - 1)^4 + (2x - 1)^2 - 2 = 0$.

Решение. Выполним замену $(2x - 1)^2 = t$. Тогда исходное уравнение сводится к квадратному уравнению $t^2 + t - 2 = 0$.

Отсюда $t_1 = -2$, $t_2 = 1$.

С учётом замены запишем совокупность, равносильную исходному уравнению:

$$\left[\begin{array}{l} (2x - 1)^2 = -2, \\ (2x - 1)^2 = 1. \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности корней не имеет. Из второго уравнения получаем:

$$\left[\begin{array}{l} 2x - 1 = -1, \\ 2x - 1 = 1. \end{array}\right.$$

Отсюда $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Ответ: 0; 1. ■

Пример 3. Решите уравнение $6x + 5\sqrt{x} + 1 = 0$.

Решение. Пусть $\sqrt{x} = t$. Тогда $x = t^2$. Получаем: $6t^2 + 5t + 1 = 0$.

Отсюда $t_1 = -\frac{1}{3}$, $t_2 = -\frac{1}{2}$.

Запишем совокупность, равносильную исходному уравнению:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = -\frac{1}{3}, \\ \sqrt{x} = -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Так как $\sqrt{x} \geqslant 0$, то эта совокупность решений не имеет, а следовательно, и исходное уравнение корней не имеет.

Ответ: корней нет. ■

Пример 4. Решите уравнение $\dfrac{x^2-3x-6}{x} - \dfrac{8x}{x^2-3x-6} = -2.$

Решение. Пусть $\dfrac{x^2-3x-6}{x} = t$. Тогда $\dfrac{8x}{x^2-3x-6} = \dfrac{8}{t}$. Получаем уравнение $t - \dfrac{8}{t} = -2$. Это уравнение равносильно системе $\begin{cases} t^2+2t-8=0, \\ t \neq 0. \end{cases}$

Отсюда $t_1 = -4$, $t_2 = 2$.

Теперь решение исходного уравнения сводится к решению совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-3x-6}{x} = -4, \\ \dfrac{x^2-3x-6}{x} = 2. \end{array}\right.$$

Решите эту совокупность самостоятельно.

Ответ: -3; -1; 2; 6. ■

Пример 5. Решите уравнение $(2x^2+3x-1)^2 - 10x^2 - 15x + 9 = 0$.

Решение. Преобразуем это уравнение так:

$$(2x^2+3x-1)^2 - 10x^2 - 15x + 5 + 4 = 0;$$
$$(2x^2+3x-1)^2 - 5(2x^2+3x-1) + 4 = 0.$$

Пусть $2x^2+3x-1 = t$. Тогда $t^2 - 5t + 4 = 0$.

Отсюда $t_1 = 1$, $t_2 = 4$.

Получаем совокупность, равносильную исходному уравнению:

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2+3x-1=1, \\ 2x^2+3x-1=4. \end{array}\right.$$

Решив её, получим ответ.

Ответ: $-\dfrac{5}{2}$; -2; $\dfrac{1}{2}$; 1.

Пример 6. Решите уравнение $(x-1)x(x+1)(x+2) = 24$.

Решение. При решении уравнений такого вида надо найти удобный способ группировки множителей, позволяющий с помощью замены переменной свести исходное уравнение к квадратному. В этом примере он будет таким: $((x-1)(x+2))(x(x+1)) = 24$.

Действительно, имеем: $(x^2 + x - 2)(x^2 + x) = 24$. Выполним замену $x^2 + x = t$. Тогда $t(t - 2) = 24$; $t^2 - 2t - 24 = 0$; $t_1 = -4$, $t_2 = 6$. Получаем:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + x = -4, \\ x^2 + x = 6. \end{array}\right.$$

Решите эту совокупность самостоятельно.

Ответ: -3; 2.

Рассмотренное уравнение имеет вид:

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = f,$$

где $a + d = b + c$.

Это уравнение можно записать так:

$$(x^2 + (a + d)\,x + ad)(x^2 + (b + c)\,x + bc) = f,$$

а далее выполнить замену $x^2 + (a + d)\,x = t$, которая приведёт к квадратному уравнению.

Пример 7. Решите уравнение $x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 4x - 2 = 0$.

Решение. Выделим в левой части уравнения квадрат двучлена:

$$x^4 - 8x^3 + 16x^2 - x^2 + 4x - 2 = 0;$$

$$(x^2 - 4x)^2 - (x^2 - 4x) - 2 = 0.$$

Выполнив замену $x^2 - 4x = t$, получаем уравнение $t^2 - t - 2 = 0$. Отсюда $\left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = -1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2 - 4x = 2, \\ x^2 - 4x = -1. \end{array}\right.$

Ответ: $2 + \sqrt{6}$; $2 - \sqrt{6}$; $2 + \sqrt{3}$; $2 - \sqrt{3}$.

Пример 8. Решите уравнение $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$.

Решение. С помощью проверки легко убедиться, что число 0 не является корнем данного уравнения. Тогда, разделив обе части данного уравнения на x^2, перейдём к равносильному уравнению:

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{x} \cdot \frac{2x^2 + 5x + 1}{x} = 9.$$

Отсюда $\left(2x - 3 + \frac{1}{x}\right)\left(2x + 5 + \frac{1}{x}\right) = 9$.

Произведём замену: $2x + \frac{1}{x} - 3 = t$. Тогда $t(t + 8) = 9$. Отсюда $t_1 = 1$, $t_2 = -9$.

С учётом замены получаем совокупность, равносильную исходному уравнению:

$$\left[\begin{array}{l} 2x+\dfrac{1}{x}-3=1, \\ 2x+\dfrac{1}{x}-3=-9. \end{array}\right.$$

Решите эту совокупность самостоятельно.

Ответ: $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$; $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$; $\dfrac{-3-\sqrt{7}}{2}$; $\dfrac{-3+\sqrt{7}}{2}$.

Рассмотренное уравнение имеет вид $(ax^2+bx+c)(ax^2+dx+c)=kx^2$. Если $c\neq 0$, то оно равносильно уравнению $\left(ax+\dfrac{c}{x}+b\right)\left(ax+\dfrac{c}{x}+d\right)=k$, для решения которого можно воспользоваться заменой $ax+\dfrac{c}{x}=t$.

Пример 9. Решите уравнение $7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=9$.

Решение. Пусть $x+\dfrac{1}{x}=t$. Тогда $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=t^2$. Отсюда $x^2+2+\dfrac{1}{x^2}=t^2$; $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$.

Такая замена позволяет записать исходное уравнение следующим образом:

$$7t-2(t^2-2)=9;$$
$$2t^2-7t+5=0.$$

Отсюда $t_1=1$, $t_2=\dfrac{5}{2}$.

Тогда исходное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}=1, \\ x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}. \end{array}\right.$$

Решив эту совокупность, получаем ответ.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$; 2.

Метод, с помощью которого решено это уравнение, применим к уравнению вида $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$, где $a\neq 0$. В этом уравнении коэффициенты одночленов ax^4 и a, bx^3 и bx равны. Такое уравнение называют **возвратным уравнением четвёртой степени**. Поскольку $a\neq 0$, то число 0 не является его корнем. Поэтому оно равносильно уравнению

$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$. Отсюда $a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$. Замена $x + \frac{1}{x} = t$ позволяет свести это уравнение к квадратному: $a(t^2 - 2) + bt + c = 0$.

Пример 10. Решите уравнение $x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16 = 0$.

Решение. Очевидно, что число 0 не является корнем данного уравнения. Тогда, разделив обе части уравнения на x^2, получим уравнение, равносильное данному:

$$x^2 - 3x - 8 + \frac{12}{x} + \frac{16}{x^2} = 0;$$

$$x^2 + \frac{16}{x^2} - 3\left(x - \frac{4}{x}\right) - 8 = 0.$$

Пусть $x - \frac{4}{x} = t$. Тогда $x^2 + \frac{16}{x^2} = t^2 + 8$. Отсюда $t^2 + 8 - 3t - 8 = 0$;

$t(t - 3) = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t = 3. \end{array}\right.$ Далее $\left[\begin{array}{l} x - \frac{4}{x} = 0, \\ x - \frac{4}{x} = 3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2 - 4 = 0, \\ x^2 - 3x - 4 = 0. \end{array}\right.$

Ответ: -2; 2; -1; 4.

Уравнение, решённое в примере 10, является уравнением вида $ax^4 + bx^3 + cx^2 + kbx + k^2a = 0$. Его называют **обобщённым возвратным уравнением четвёртой степени**. Оно сводится к квадратному уравнению с помощью замены $x + \frac{k}{x} = t$.

Пример 11. Решите уравнение $(x^2 - 2x + 2)^2 + 3x(x^2 - 2x + 2) = 10x^2$.

Решение. Выполнив проверку, можно убедиться, что число 0 не является корнем данного уравнения. Тогда уравнение

$$\frac{(x^2 - 2x + 2)^2}{x^2} + \frac{3(x^2 - 2x + 2)}{x} = 10,$$

полученное в результате деления обеих частей исходного уравнение на x^2, равносильно исходному. Замена $\frac{x^2 - 2x + 2}{x} = t$ приводит к квадратному уравнению $t^2 + 3t - 10 = 0$.

Завершите решение самостоятельно.

Ответ: $2 - \sqrt{2}$; $2 + \sqrt{2}$; -1; -2.

Разъясним, почему деление обеих частей уравнения $(x^2 - 2x + 2)^2 + 3x(x^2 - 2x + 2) = 10x^2$ на x^2 позволило свести это уравнение к квадратному.

Если в рассмотренном уравнении выполнить замены $x^2 - 2x + 2 = u$, $x = v$, то получим уравнение

$$u^2 + 3uv - 10v^2 = 0.$$

Степень всех одночленов, стоящих в левой части этого уравнения, равна 2. Правая часть этого уравнения равна нулю. Такое уравнение называют **однородным уравнением второй степени** относительно переменных u и v.

Сначала надо проверить, какие решения уравнения $v = 0$ являются корнями уравнения $(x^2 - 2x + 2)^2 + 3x(x^2 - 2x + 2) = 10x^2$. Мы установили, что $x = 0$ не является его корнем.

Далее рассматриваем случай, когда $v \neq 0$. Разделив обе части уравнения $u^2 + 3uv - 10v^2 = 0$ на v^2, получим такое уравнение:

$$\left(\frac{u}{v}\right)^2 - 3\frac{u}{v} - 10 = 0.$$

Замена $\frac{u}{v} = t$ сводит это уравнение к квадратному.

Умение выявлять однородные уравнения вам не раз понадобится при решении задач из разных разделов математики.

Пример 12. Решите уравнение $(x + 1)^4 + (x + 5)^4 = 32$.

Решение. Пусть $t = x - \frac{-1 + (-5)}{2}$, т. е. $x = t - 3$. Тогда $x + 1 = t - 2$, $x + 5 = t + 2$, а исходное уравнение принимает вид:

$$(t - 2)^4 + (t + 2)^4 = 32.$$

После возведения двучленов в четвёртую степень и приведения подобных слагаемых получаем уравнение $t^4 + 24t^2 = 0$. Отсюда $t^2(t^2 + 24) = 0$. Это уравнение имеет единственный корень $t = 0$. С учётом замены получаем, что $x = -3$.

Ответ: -3.

Заметим, что уравнение вида $(x - a)^4 + (x - b)^4 = c$ с помощью замены $t = x - \frac{a + b}{2}$ можно свести к уравнению вида $(t - m)^4 + (t + m)^4 = c$, которое, в свою очередь, преобразовывается в биквадратное уравнение относительно t.

Пример 13. Решите уравнение $\dfrac{2x}{x^2-4x+2}+\dfrac{3x}{x^2+x+2}=-\dfrac{5}{4}$.

Решение. С помощью проверки легко установить, что число 0 не является корнем данного уравнения. Поэтому, разделив числитель и знаменатель каждой из дробей левой части уравнения на x, получим уравнение, равносильное данному:

$$\frac{2}{x-4+\dfrac{2}{x}}+\frac{3}{x+1+\dfrac{2}{x}}=-\frac{5}{4}.$$

Выполнив замену $x+\dfrac{2}{x}=t$, получим уравнение: $\dfrac{2}{t-4}+\dfrac{3}{t+1}+\dfrac{5}{4}=0.$

Отсюда $\dfrac{t^2+t-12}{4(t-4)(t+1)}=0;$ $\begin{cases}t^2+t-12=0,\\(t-4)(t+1)\neq 0;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}t=-4,\\t=3.\end{array}\right.$

Получаем совокупность, равносильную исходному уравнению:

$$\left[\begin{array}{l}x+\dfrac{2}{x}=-4,\\x+\dfrac{2}{x}=3.\end{array}\right.$$ Отсюда $\left[\begin{array}{l}x^2+4x+2=0,\\x^2-3x+2=0.\end{array}\right.$

Ответ: $-2+\sqrt{2};\ -2-\sqrt{2};\ 1;\ 2.$

Пример 14. Решите уравнение $x^2+\dfrac{81x^2}{(x+9)^2}=40.$

Решение. Выделим квадрат разности в левой части уравнения:

$$x^2-\frac{18x^2}{x+9}+\frac{81x^2}{(x+9)^2}+\frac{18x^2}{x+9}=40;$$

$$\left(x-\frac{9x}{x+9}\right)^2+\frac{18x^2}{x+9}=40.$$

$$\text{Отсюда}\quad \left(\frac{x^2}{x+9}\right)^2+\frac{18x^2}{x+9}=40.$$

Пусть $\dfrac{x^2}{x+9}=t$. Тогда $t^2+18t-40=0$, откуда $t=-20$ или $t=2$.

Получаем совокупность, равносильную исходному уравнению:

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{x+9}=-20,\\\dfrac{x^2}{x+9}=2.\end{array}\right.$$ Отсюда $\left[\begin{array}{l}x^2+20x+180=0,\\x^2-2x-18=0.\end{array}\right.$

Ответ: $1+\sqrt{19};\ 1-\sqrt{19}.$

Может возникнуть вопрос: почему в примерах 2, 4–6, 8, 9, 11–14 мы не пробовали упростить уравнения с помощью тождественных преобразований?

Дело в том, что использование тождественных преобразований привело бы к необходимости решать уравнение вида $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ (вы можете убедиться в этом самостоятельно). При $a \neq 0$ такое уравнение называют **уравнением четвёртой степени**, при $a = 0$ и $b \neq 0$ — **уравнением третьей степени**. Частным случаем этого уравнения при $b = 0$ и $d = 0$ является биквадратное уравнение.

В общем случае для решения уравнений третьей и четвёртой степеней необходимо знать формулы нахождения их корней. С историей открытия этих формул вы можете ознакомиться на с. 322.

Упражнения

37.1. Решите уравнение:

1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;
2) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$;
3) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$;
4) $x^4 + 14x^2 - 32 = 0$;
5) $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$;
6) $3x^4 + 8x^2 - 3 = 0$.

37.2. Решите уравнение:

1) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$;
2) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$;
3) $x^4 - 2x^2 - 24 = 0$;
4) $x^4 + 3x^2 - 70 = 0$;
5) $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$;
6) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$.

37.3. Решите уравнение:

1) $(x + 3)^4 - 3(x + 3)^2 - 4 = 0$;
2) $(2x + 1)^4 - 10(2x + 1)^2 + 9 = 0$;
3) $(6x - 7)^4 + 4(6x - 7)^2 + 3 = 0$;
4) $(x - 4)^4 + 2(x - 4)^2 - 8 = 0$.

37.4. Решите уравнение:

1) $(3x - 1)^4 - 20(3x - 1)^2 + 64 = 0$;
2) $(2x + 3)^4 - 24(2x + 3)^2 - 25 = 0$.

37.5. Решите уравнение:

1) $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$;
2) $x - \sqrt{x} - 12 = 0$;
3) $8\sqrt{x} + x + 7 = 0$;
4) $8x - 10\sqrt{x} + 3 = 0$.

37.6. Решите уравнение:

1) $x - 6\sqrt{x} + 8 = 0$;
2) $x - 5\sqrt{x} - 50 = 0$;
3) $2x - 3\sqrt{x} + 1 = 0$.

37.7. Решите уравнение, используя метод замены переменной:

1) $(x^2 - 2)^2 - 8(x^2 - 2) + 7 = 0$;
2) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0$;
3) $(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x + 3) = 3$;
4) $(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x - 4) = -5$.

37.8. Решите уравнение, используя метод замены переменной:

1) $\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2 - \frac{6(2x-1)}{x} + 5 = 0$;

2) $\frac{3x-1}{x+1} + \frac{x+1}{3x-1} = 3\frac{1}{3}$.

37.9. Решите уравнение:

1) $(x^2-6x)^2 + (x^2-6x) - 56 = 0$;

2) $(x^2+8x+3)(x^2+8x+5) = 63$;

3) $\frac{x^4}{(x-2)^2} - \frac{4x^2}{x-2} - 5 = 0$;

4) $\frac{x+4}{x-3} - \frac{x-3}{x+4} = \frac{3}{2}$.

◆ ◆

37.10. Решите уравнение:

1) $\frac{x^2-x}{x^2-x+1} - \frac{x^2-x+2}{x^2-x-2} = 1$;

2) $\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2} + \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3} = \frac{7}{6}$;

3) $\frac{x^2+2x+7}{x^2+2x+3} = 4 + 2x + x^2$;

4) $\frac{3x^2-9x}{2} - \frac{12}{x^2-3x} = 3$;

5) $\frac{1}{x(x+2)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{12}$.

37.11. Решите уравнение:

1) $\frac{1}{x^2-2x+2} + \frac{2}{x^2-2x+3} = \frac{6}{x^2-2x+4}$;

2) $\frac{24}{x^2+2x-8} - \frac{15}{x^2+2x-3} = 2$;

3) $\frac{3}{1+x+x^2} = 3 - x - x^2$;

4) $\frac{x^2+x-3}{2} - \frac{3}{2x^2+2x-6} = 1$;

5) $\frac{6}{(x+1)(x+2)} + \frac{8}{(x-1)(x+4)} = 1$.

37.12. Решите уравнение:

1) $(8x^2-3x+1)^2 = 32x^2 - 12x + 1$;

2) $(x^2-5x+7)(x-2)(x-3) = 2$.

37.13. Решите уравнение:

1) $(x^2+x+1)^2 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$;

2) $(x^2-5x)(x+3)(x-8) + 108 = 0$.

37.14. Решите уравнение:

1) $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = 1680$;

2) $x\,(x+3)(x+5)(x+8) = 100$.

37.15. Решите уравнение:

1) $(x-4)(x+2)(x+8)(x+14) = 1204$;

2) $(x+3)(x+1)(x+5)(x+7) = -16$.

37.16. Решите уравнение:

1) $x^4 + 8x^3 + 10x^2 - 24x + 5 = 0$;

2) $x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 28x - 15 = 0$;

3) $10x^2(x-2)^2 = 9(x^2 + (x-2)^2)$.

37.17. Решите уравнение:

1) $(2x^2 - 5x + 2)(2x^2 + 7x + 2) = -20x^2$;

2) $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2$.

37.18. Решите уравнение:

1) $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12) - 3x^2 = 0$;

2) $(x-4)(x+5)(x+10)(x-2) = 18x^2$.

37.19. Решите уравнение:

1) $4x^2 + 12x + \dfrac{12}{x} + \dfrac{4}{x^2} = 47$;

2) $2\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{x^2}{18} + \dfrac{4}{3}$;

3) $12x^2 + \dfrac{1}{3x^2} + 10\left(2x + \dfrac{1}{3x}\right) + 11 = 0$;

4) $\dfrac{x(x-1)^2}{(x^2 - x + 1)^2} = \dfrac{2}{9}$;

5) $x^4 - 2x^3 - 18x^2 - 6x + 9 = 0$.

37.20. Решите уравнение:

1) $3x^2 + 5x + \dfrac{5}{x} + \dfrac{3}{x^2} = 16$;

2) $x^2 + \dfrac{36}{x^2} = \dfrac{112}{5}\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{x}\right)$;

3) $\dfrac{(x^2+1)^2}{x(x+1)^2} = \dfrac{625}{112}$;

4) $4x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 8x + 4 = 0$.

37.21. Решите уравнение:

1) $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x-1)^2 = 13(x^3 - 1)$;

2) $20\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2 + 48\dfrac{x^2-4}{x^2-1} = 0$.

37.22. Решите уравнение:

1) $x^4 + 5x^2(x+1) = 6(x+1)^2$;

2) $(x^2 - 3x + 1)^2 + 3(x-1)(x^2 - 3x + 1) = 4(x-1)^2$.

37.23. Решите уравнение:

1) $(x+3)^4 + (x+1)^4 = 16$;

2) $x^4 + (x-1)^4 = 97$.

37.24. Решите уравнение:

1) $(x-2)^4 + (x-3)^4 = 1$;

2) $(x+6)^4 + (x+4)^4 = 82$.

37.25. Решите уравнение:

1) $\dfrac{4x}{4x^2-8x+7}+\dfrac{3x}{4x^2-10x+7}=1;$

2) $\dfrac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\dfrac{4x}{x^2-12x+15};$

3) $\dfrac{x^2-3x+1}{x}+\dfrac{2x}{x^2-2x+1}=\dfrac{7}{2}.$

37.26. Решите уравнение:

1) $\dfrac{3x}{x^2+1-4x}-\dfrac{2x}{x^2+1+x}=\dfrac{8}{3};$

2) $\dfrac{2x}{x^2-2x+5}+\dfrac{3x}{x^2+2x+5}=\dfrac{7}{8};$

3) $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-7x+4}+\dfrac{x^2-x+4}{x^2+x+4}+\dfrac{13}{3}=0.$

37.27. Решите уравнение:

1) $x^2+\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2=8;$

2) $x^2+\left(\dfrac{x}{2x-1}\right)^2=2;$

3) $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2=90;$

4) $x^2+\dfrac{25x^2}{(5+2x)^2}=104.$

37.28. Решите уравнение:

1) $x^2+\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2=3;$

2) $\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2+\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^2=\dfrac{40}{9};$

3) $x^2+\dfrac{4x^2}{(x+2)^2}=5.$

Упражнения для повторения

37.29. Найдите область определения выражения $\dfrac{1}{x-\dfrac{2}{x-1}}.$

37.30. Решите систему неравенств $\begin{cases}\dfrac{2x}{3}-1<1+4x,\\ 3x-6>-2(1-x),\\ 3(2x-1)>1-2x.\end{cases}$

37.31. Решите уравнение $|x-4|+|x+1|=5.$

37.32. Постройте график уравнения $\dfrac{y^2-x^4}{x^2-1}=0.$

Тайное оружие Сципиона дель Ферро

Вы легко решите каждое из следующих уравнений третьей степени:

$$x^3 - 8 = 0,\ x^3 + x^2 = 0,\ x^3 - x = 0.$$

Все они являются частными случаями уравнения вида $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, где x — переменная, a, b, c и d — параметры, причём $a \neq 0$. Вывести формулу его корней — задача сложная. Недаром появление этой формулы считают выдающимся математическим открытием XVI в.



Никколо Тарталья

Первым открыл способ решения уравнения вида $x^3 + px = q$, где p и q — положительные числа, итальянский математик Сципион дель Ферро (1465–1526). Найденную формулу он хранил в секрете. Это было обусловлено тем, что карьера учёного тех времён во многом зависела от его выступлений в публичных математических турнирах. Поэтому было выгодно хранить открытия в тайне, рассчитывая использовать их в математических соревнованиях как секретное оружие.



Джироламо Кардано

После смерти дель Ферро его ученик Фиоре, владея секретной формулой, вызвал на математическую дуэль талантливого математика-самоучку Никколо Тарталью (1499–1557). За несколько дней до турнира Тарталья сам вывел формулу корней уравнения третьей степени. Диспут, на котором Тарталья одержал убедительную победу, состоялся 20 февраля 1535 г.

Впервые секретная формула была опубликована в книге известного итальянского учёного Джироламо Кардано (1501–1576) «Великое искусство». В этой работе также описан метод решения уравнения четвёртой степени, открытый Лудовико Феррари (1522–1565).



Нильс Хенрик Абель

В XVII–XVIII вв. усилия многих ведущих математиков были сосредоточены на поиске формулы для решения уравнений пятой степени. Результат был получен в работах итальянского математика

Паоло Руффини (1765–1822) и норвежского математика Нильса Хенрика Абеля (1802–1829). Сам результат оказался полностью неожиданным: было доказано, что не существует формулы, с помощью которой можно выразить корни любого уравнения пятой степени и выше через коэффициенты уравнения, используя лишь четыре арифметических действия и действие извлечения корня.

§ 38 Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций

В § 11 вы уже познакомились с задачами, в которых рациональные уравнения служили математическими моделями реальных ситуаций. Теперь, когда вы научились решать квадратные уравнения, можно существенно расширить класс задач подобного рода.

Пример 1. Из пункта A выехал велосипедист, а через 45 мин после этого в том же направлении выехал грузовик, догнавший велосипедиста на расстоянии 15 км от пункта A. Найдите скорость велосипедиста и скорость грузовика, если скорость грузовика на 18 км/ч больше скорости велосипедиста.

Решение. Пусть скорость велосипедиста равна x км/ч, тогда скорость грузовика составляет $(x + 18)$ км/ч. Велосипедист проезжает 15 км за $\frac{15}{x}$ ч, а грузовик — за $\frac{15}{x+18}$ ч. Разность $\frac{15}{x} - \frac{15}{x+18}$ показывает, на сколько часов грузовик проезжает 15 км быстрее, чем велосипедист. Поскольку грузовик проехал 15 км на 45 мин, т. е. на $\frac{3}{4}$ ч, быстрее, чем велосипедист, то получаем уравнение $\frac{15}{x} - \frac{15}{x+18} = \frac{3}{4}$.

Решим это уравнение:

$$\frac{15}{x} - \frac{15}{x+18} = \frac{3}{4};$$

$$\frac{5}{x} - \frac{5}{x+18} = \frac{1}{4};$$

$$\frac{20x + 360 - 20x - x^2 - 18x}{4x(x+18)} = 0;$$

$$\begin{cases} x^2 + 18x - 360 = 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq -18. \end{cases}$$

Решив квадратное уравнение системы, получим $x = 12$ или $x = -30$.

Корень -30 не удовлетворяет условию задачи.

Следовательно, скорость велосипедиста равна 12 км/ч, а скорость грузовика составляет $12 + 18 = 30$ (км/ч).

Ответ: 12 км/ч, 30 км/ч.

Пример 2. Одна бригада выполняла ремонт дороги 7 ч, после чего к ней присоединилась вторая бригада. Через 2 ч их совместной работы ремонт был завершён. За какое время может отремонтировать дорогу каждая бригада, работая самостоятельно, если первой для этого требуется на 4 ч больше, чем второй?

Решение. Пусть первая бригада может самостоятельно отремонтировать дорогу за x ч, тогда второй для этого нужно $(x - 4)$ ч. За 1 ч первая бригада ремонтирует $\frac{1}{x}$ часть дороги, а вторая — $\frac{1}{x-4}$ часть дороги. Первая бригада работала 9 ч и отремонтировала $\frac{9}{x}$ дороги, а вторая бригада работала 2 ч и отремонтировала соответственно $\frac{2}{x-4}$ дороги. За 9 ч работы было отремонтировано $\frac{9}{x} + \frac{2}{x-4}$ дороги. Поскольку в результате была отремонтирована вся дорога, то $\frac{9}{x} + \frac{2}{x-4} = 1$.

Полученное уравнение имеет два корня $x_1 = 12$ и $x_2 = 3$ (убедитесь в этом самостоятельно). Второй корень не удовлетворяет условию задачи, поскольку тогда вторая бригада должна была бы отремонтировать дорогу за $3 - 4 = -1$ (ч), что не имеет смысла.

Следовательно, первая бригада может отремонтировать дорогу за 12 ч, а вторая — за 8 ч.

Ответ: 12 ч, 8 ч.

Пример 3. Водный раствор соли содержал 120 г воды. После того как в раствор добавили 10 г соли, его концентрация увеличилась на 5 %. Сколько граммов соли содержал раствор первоначально?

Решение. Пусть исходный раствор содержал первоначально x г соли. Тогда его масса была равна $(x + 120)$ г, а концентрация соли составляла $\frac{x}{x+120}$. После того как в раствор добавили 10 г соли, её масса в растворе составила $(x + 10)$ г, а масса раствора — $(x + 130)$ г. Теперь концен-

трация соли составляет $\frac{x+10}{x+130}$ часть раствора, что на 5 %, т. е. на $\frac{1}{20}$, больше чем $\frac{x}{x+120}$. Отсюда получаем, что $\frac{x+10}{x+130}-\frac{x}{x+120}=\frac{1}{20}$.

Полученное уравнение имеет два корня: $x_1=30$ и $x_2=-280$ (убедитесь в этом самостоятельно), из которых второй корень не удовлетворяет условию задачи.

Следовательно, раствор содержал первоначально 30 г соли.

Ответ: 30 г.

Упражнения

38.1. Первые 150 км дороги из города A в город B автомобиль проехал с некоторой скоростью, а остальные 240 км — со скоростью на 5 км/ч большей. Найдите первоначальную скорость автомобиля, если на весь путь из города A в город B он потратил 5 ч.

38.2. Первый мотоциклист проезжает 90 км на 18 мин быстрее второго, поскольку его скорость на 10 км/ч больше скорости второго мотоциклиста. Найдите скорость каждого мотоциклиста.

38.3. Из одного города в другой, расстояние между которыми равно 240 км, выехали одновременно автобус и автомобиль. Автобус двигался со скоростью на 20 км/ч меньшей, чем автомобиль, и прибыл в пункт назначения на 1 ч позже автомобиля. Найдите скорость автомобиля и скорость автобуса.

38.4. Поезд опаздывал на 10 мин. Чтобы прибыть на станцию назначения вовремя, он за 80 км до этой станции увеличил свою скорость на 16 км/ч. Найдите первоначальную скорость поезда.

38.5. Из села Вишнёвое в село Яблоневое, расстояние между которыми равно 15 км, всадник проскакал с некоторой скоростью, а возвращался со скоростью на 3 км/ч большей и потратил на 15 мин меньше, чем на путь из Вишнёвого в Яблоневое. Найдите первоначальную скорость всадника.

38.6. Наборщик должен был за некоторое время набрать 180 страниц текста. Однако он выполнил эту работу на 5 ч раньше срока, так как набирал за 1 ч на 3 страницы больше, чем планировал. Сколько страниц в час он набирал?

38.7. Первый насос перекачивает 90 м^3 воды на 1 ч быстрее, чем второй 100 м^3. Сколько воды за 1 ч перекачивает каждый насос, если первый перекачивает за 1 ч на 5 м^3 воды больше, чем второй?

38.8. Рабочий должен был за определённое время изготовить 72 детали. Однако ежедневно он изготавливал на 4 детали больше, чем плани-

ровал, и закончил работу на 3 дня раньше срока. За сколько дней он выполнил работу?

38.9. Катер прошёл 16 км по течению реки и 30 км против течения, затратив на весь путь 1 ч 30 мин. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки составляет 1 км/ч.

38.10. Лодка проплыла 15 км по течению реки и вернулась назад, затратив на обратный путь на 1 ч больше. Найдите скорость лодки по течению реки, если скорость течения составляет 2 км/ч.

38.11. По течению реки от пристани отплыл плот. Через 4 ч от этой пристани в том же направлении отчалила лодка, догнавшая плот на расстоянии 15 км от пристани. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость лодки составляет 12 км/ч.

38.12. Катер прошёл 45 км по течению реки и 28 км против течения, затратив на весь путь 4 ч. Найдите скорость течения, если собственная скорость катера составляет 18 км/ч.

38.13. Турист проплыл $\frac{5}{8}$ всего пути на катере, а остальную часть проехал на автомобиле. Скорость автомобиля на 20 км/ч больше скорости катера. На автомобиле он ехал на 1 ч 30 мин меньше, чем плыл на катере. Найдите скорость автомобиля и скорость катера, если всего турист преодолел 160 км.

38.14. Междугородный автобус должен был проехать 72 км. После того как он проехал 24 км, его задержали на железнодорожном переезде на 12 мин. Потом он увеличил скорость на 12 км/ч и прибыл в пункт назначения с опозданием на 4 мин. Найдите первоначальную скорость автобуса.

38.15. Группа школьников выехала на экскурсию из города A в город B на автобусе, а вернулась в город A по железной дороге, затратив на обратный путь на 30 мин больше, чем на путь в город B. Найдите скорость поезда, если она на 20 км/ч меньше скорости автобуса, длина шоссе между городами A и B составляет 160 км, а длина железной дороги — 150 км.

38.16. Турист проплыл на байдарке 4 км по озеру и 5 км по течению реки за то же время, за которое он проплыл бы 6 км против течения. С какой скоростью турист плыл по озеру, если скорость течения реки равна 2 км/ч?

38.17. Теплоход прошёл 16 км по озеру, а затем 18 км по реке, берущей начало из этого озера, за 1 ч. Найдите скорость теплохода в стоячей воде, если скорость течения реки составляет 4 км/ч.

38.18. Знаменатель обыкновенной дроби на 3 больше её числителя. Если числитель этой дроби увеличить на 4, а знаменатель — на 8, то по-

лученная дробь будет на $\frac{1}{6}$ больше исходной. Найдите исходную дробь.

38.19. Числитель обыкновенной дроби на 5 меньше её знаменателя. Если числитель этой дроби уменьшить на 3, а знаменатель увеличить на 4, то полученная дробь будет на $\frac{1}{3}$ меньше исходной. Найдите исходную дробь.

38.20. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить производственное задание за 20 дней. За сколько дней может выполнить это задание каждый из них, работая самостоятельно, если одному для этого требуется на 9 дней больше, чем другому?

38.21. Одному маляру требуется на 5 ч больше, чем другому, чтобы покрасить фасад дома. Когда первый маляр проработал 3 ч, а потом его сменил второй, проработавший 2 ч, то оказалось, что покрашено 40 % фасада. За какое время может покрасить фасад каждый маляр, работая самостоятельно?

38.22. В первый день тракторист работал на вспашке поля 6 ч. На следующий день к нему присоединился второй тракторист, и через 8 ч совместной работы они вспахали всё поле. За какое время может вспахать это поле каждый тракторист, работая самостоятельно, если первому для этого надо на 3 ч меньше, чем второму?

38.23. В раствор, содержавший 20 г соли, добавили 100 г воды, после чего концентрация соли уменьшилась на 10 %. Сколько граммов воды первоначально содержал раствор?

38.24. Кусок сплава меди и цинка, содержавший 10 кг цинка, сплавили с 10 кг меди. Полученный сплав содержит на 5 % меди больше, чем исходный. Сколько килограммов меди содержал исходный кусок сплава?

◆ ◆

38.25. Через 2 ч 40 мин после отправления плота от пристани A по течению реки навстречу ему от пристани B отошёл катер. Найдите скорость течения реки, если плот и катер встретились на расстоянии 14 км от пристани A, скорость катера в стоячей воде равна 12 км/ч, а расстояние между пристанями A и B равно 32 км.

38.26. К бассейну подведены две трубы. Через одну трубу бассейн наполняют водой, а через другую сливают, причём для слива бассейна требуется на 1 ч больше, чем для его наполнения. Если же открыть обе трубы одновременно, то бассейн наполнится водой за 30 ч. За сколько часов можно наполнить пустой бассейн водой через первую трубу?

38.27. Для наполнения бассейна через первую трубу требуется столько же времени, как и для наполнения через вторую и третью трубы одновременно. Через первую трубу бассейн наполняется на 2 ч быстрее, чем через вторую, и на 8 ч быстрее, чем через третью. Сколько времени требуется для наполнения бассейна через каждую трубу?

38.28. Автобус должен был проехать расстояние между двумя городами, равное 400 км, с некоторой скоростью. Проехав 2 ч с запланированной скоростью, он остановился на 20 мин и, чтобы прибыть в пункт назначения вовремя, увеличил скорость движения на 10 км/ч. С какой скоростью автобус должен был проехать расстояние между городами?

38.29. Рабочий должен был за некоторое время изготовить 360 деталей. Первые 5 дней он ежедневно изготавливал запланированное количество деталей, а потом ежедневно изготавливал на 4 детали больше, и уже за день до срока изготовил 372 детали. Сколько деталей ежедневно должен был изготавливать рабочий по плану?

Упражнения для повторения

38.30. Сократите дробь $\dfrac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 4x + 3}$.

38.31. Решите неравенство $(x + 1)^2(x - 2) \geqslant 0$.

38.32. Решите уравнение $|x + 2| - |x - 1| = 3$.

38.33. Упростите выражение $\dfrac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - b)} + \dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \dfrac{\sqrt{ab}}{a - b}$.

§ 39 Деление многочленов

Вы умеете складывать, вычитать и умножать многочлены. В этом параграфе мы введём действие деления многочленов.

Вы знаете, что по определению целое число a делится нацело на целое число b ($b \neq 0$), если существует такое целое число c, что $a = bc$. Примем аналогичное определение для многочленов.

Определение

Говорят, что многочлен $A(x)$ делится нацело на тождественно не равный нулю многочлен $B(x)$, если существует такой многочлен $Q(x)$, что для любого $x \in R$ выполняется равенство $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$.

Многочлен $A(x)$ называют **делимым**, многочлен $B(x)$ — **делителем**, многочлен $Q(x)$ — **частным**.

Если многочлен $A(x)$ делится нацело на многочлен $B(x)$, то это обозначают так: $A(x) \vdots B(x)$.

Рассмотрим несколько примеров.

Многочлен $x^3 + 1$ делится нацело на многочлен $x + 1$. Действительно, $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$. Здесь делимым является многочлен $x^3 + 1$, делителем — многочлен $x + 1$, частным — многочлен $x^2 - x + 1$.

Многочлен $6x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x$ делится нацело на многочлен $2x^2 - x + 1$. Действительно, $6x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x = (2x^2 - x + 1)(3x^2 - x)$.

Заметим, что если делимое — это нулевой многочлен, то он делится нацело на любой многочлен, тожественно не равный нулю. При этом частное равно нулевому многочлену.

Поиск частного от деления двух многочленов можно осуществлять по алгоритму деления «уголком», аналогично тому, как это делают при делении чисел:

$$\begin{array}{l|l} 6x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x & 2x^2 - x + 1 \\ \underline{-\,6x^4 - 3x^3 + 3x^2} & \overline{3x^2 - x} \\ -2x^3 + x^2 - x & \\ \underline{-\,-2x^3 + x^2 - x} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 0x^2 + 0x + 1 & x + 1 \\ \underline{-\,x^3 + x^2} & \overline{x^2 - x + 1} \\ -x^2 + 0x & \\ \underline{-\,-x^2 - x} & \\ -x + 1 & \\ \underline{-\,-x + 1} & \\ 0 & \end{array}$$

Если $A(x) \vdots B(x)$, т. е. существует такой многочлен $Q(x)$, что для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$, и многочлен $A(x)$ ненулевой, то ненулевыми являются многочлены $B(x)$ и $Q(x)$, причём степень многочлена $A(x)$ равна сумме степеней многочленов $B(x)$ и $Q(x)$. Поэтому для того, чтобы ненулевой многочлен $A(x)$ делился нацело на ненулевой многочлен $B(x)$, необходимо, чтобы степень делимого была не меньше степени делителя. Однако это условие не является достаточным. Так, многочлен $x^3 + 1$, степень которого равна 3, не делится нацело на многочлен $x - 1$, степень которого равна 1. Действительно, если бы существовал многочлен $Q(x)$ такой, что для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполня-

лось бы равенство $x^3 + 1 = (x - 1)\,Q\,(x)$, то при $x = 1$ получили бы неверное равенство $1^3 + 1 = 0$.

Теорема 39.1

Для любого многочлена $A\,(x)$ и ненулевого многочлена $B\,(x)$ существует единственная пара многочленов $Q\,(x)$ и $R\,(x)$ таких, что

$$A\,(x) = B\,(x) \cdot Q\,(x) + R\,(x),$$

где степень многочлена $R\,(x)$ меньше степени многочлена $B\,(x)$ или $R\,(x)$ — нулевой многочлен.

В этом равенстве многочлен $Q\,(x)$ называют **неполным частным**, а многочлен $R\,(x)$ — **остатком**.

Доказательство этой теоремы выходит за пределы рассматриваемого курса.

Рассмотрим многочлены $A\,(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - 1$ и $B\,(x) = x^2 - 3x + 2$. Найдём для этих многочленов неполное частное и остаток. Это можно сделать с помощью деления «уголком»:

$$\begin{array}{l|l} 2x^4 - x^3 + x^2 - 1 & x^2 - 3x + 2 \\ \underline{-\,(2x^4 - 6x^2 + 4x^2)} & \underline{\qquad\qquad} \\ -5x^3 - 3x^2 - 1 & 2x^2 + 5x + 12 \text{ (неполное частное)} \\ \underline{-\,(-5x^3 - 15x^2 + 10x)} & \\ -12x^2 - 10x - 1 & \\ \underline{-\,(-12x^2 - 36x + 24)} & \\ 26x - 25 \text{ (остаток)} & \end{array}$$

Теперь можно записать:

$$2x^4 - x^3 + x^2 - 1 = (x^2 - 3x + 2)(2x^2 + 5x + 12) + 26x - 25. \qquad (1)$$

Рассмотрим рациональную дробь $\dfrac{2x^4 - x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$. Используя равенство (1), можно записать:

$$\frac{2x^4 - x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = 2x^2 + 5x + 12 + \frac{26x - 25}{x^2 - 3x + 2}.$$

Правая часть этого равенства является суммой многочлена и рациональной дроби. В числителе дроби записан многочлен, степень которого меньше степени многочлена, записанного в знаменателе. Такую дробь называют **правильной рациональной дробью**. Представление рациональной дроби в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби называют **выделением целой части из рациональной дроби**.

1. В каком случае говорят, что многочлен $A\,(x)$ делится нацело на многочлен $B\,(x)$?

2. Каково необходимое условие деления нацело одного ненулевого многочлена на другой ненулевой многочлен?
3. Сформулируйте теорему о делении многочленов с остатком.
4. Как называют многочлены $Q(x)$ и $R(x)$ в записи $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$, если степень многочлена $R(x)$ меньше степени многочлена $B(x)$ или $R(x)$ — нулевой многочлен?
5. Представление в каком виде рациональной дроби называют выделением целой части из рациональной дроби?

Упражнения

39.1. Докажите, что многочлен $A(x)$ делится нацело на многочлен $B(x)$:
1) $A(x) = x^2 - 7x + 6$, $B(x) = x - 6$;
2) $A(x) = x^4 - 1$, $B(x) = x^3 + x^2 + x + 1$;
3) $A(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 3x - 1$, $B(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.

39.2. Докажите, что многочлен $A(x)$ делится нацело на многочлен $B(x)$:
1) $A(x) = x^3 - 1$, $B(x) = x^2 + x + 1$;
2) $A(x) = 4x^3 - 8x^2 + 5x - 1$, $B(x) = 2x^2 - 3x + 1$;
3) $A(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 1$, $B(x) = x^2 - x + 1$.

39.3. Разделив «уголком» многочлен $A(x)$ на многочлен $B(x)$, найдите неполное частное и остаток:
1) $A(x) = 2x^5 + 5x^3 + 6x - 7$, $B(x) = x^3 + x$;
2) $A(x) = x^4 + x + 1$, $B(x) = x^2 + x + 1$;
3) $A(x) = x^4 + x^2 + 1$, $B(x) = x + 5$.

39.4. Разделив «уголком» многочлен $A(x)$ на многочлен $B(x)$, найдите неполное частное и остаток:
1) $A(x) = x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4$, $B(x) = x^2 - x + 1$;
2) $A(x) = x^7 - 1$, $B(x) = x^3 + x + 1$;
3) $A(x) = x^3 + 5x^2 - 6x - 6$, $B(x) = x - 2$.

39.5. Докажите, что многочлен $A(x)$ не делится нацело на многочлен $B(x)$:
1) $A(x) = x^2 + 1$, $B(x) = x - 1$;
2) $A(x) = x^3 + x - 1$, $B(x) = x + 1$;
3) $A(x) = 2x^4 - 3x^3 - x + 1$, $B(x) = x^2 - 3x + 2$.

39.6. Докажите, что $(x^n - a^n) \vdots (x^k - a^k)$, если $n \vdots k$, $n \in \boldsymbol{N}$, $k \in \boldsymbol{N}$.

39.7. Выделите целую часть из рациональной дроби:
1) $\dfrac{x^3 - x + 2}{x^2 + 1}$;
2) $\dfrac{2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 1}{x^2 - 1}$;
3) $\dfrac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x + 1}{x^2 + x - 2}$.

39.8. Выделите целую часть из рациональной дроби:

1) $\dfrac{2x^4+x^3-5x^2-x+1}{x^2-x}$;

2) $\dfrac{5x^4-3x^5+3x-1}{x+1-x^2}$;

3) $\dfrac{x^5-3x^3+x^2+2x-1}{x^2+x-1}$.

Упражнения для повторения

39.9. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{4}+\dfrac{x+1}{3}\geqslant\dfrac{4x+1}{4}, \\ \dfrac{5x-2}{2}+\dfrac{x-8}{3}\leqslant x. \end{cases}$

39.10. Найдите все натуральные значения n, при которых является целым числом значение выражения $\dfrac{n^3-3n^2+2n-3}{n^2+2}$.

39.11. Докажите, что при любом натуральном значении n значение выражения $\dfrac{n}{3}+\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n^3}{6}$ является натуральным числом.

39.12. Для каждого значения параметра a решите уравнение $(a-1)\sqrt{x-3}=0$.

§ 40 Корни многочлена. Теорема Безу

Определение

Число α называют корнем многочлена $A(x)$, если $A(\alpha)=0$.

Корень многочлена $A(x)$ — это корень уравнения $A(x)=0$.

Легко найти множество корней уравнения

$$(3x-7)(5x+1)(2x-9)(x+1)=0.$$

Однако если левую часть этого уравнения представить в виде многочлена $30x^4-169x^3+75x^2+337x+63$, то задача поиска его корней становится непростой.

Поэтому при решении уравнений вида $A(x)=0$, где $A(x)$ — ненулевой многочлен, важно научиться выделять в многочлене линейный множитель, т. е. представлять многочлен в виде произведения: $A(x)=(x-a)B(x)$, где $B(x)$ — некоторый многочлен, степень которого на 1 меньше степени многочлена $A(x)$.

Этому будут способствовать следующие теоремы.

Теорема 40.1

(Теорема Безу)

Остаток от деления многочлена $A(x)$ на двучлен $x - \alpha$ равен $A(\alpha)$.

Доказательство.

Поскольку степень делителя (двучлена $x - \alpha$) равна 1, то степень остатка должна быть равна нулю или остаток должен быть нулевым многочленом, т. е. искомый остаток — это некоторое число r. Для любого $x \in \boldsymbol{R}$ имеем:

$$A(x) = (x - \alpha)\,Q(x) + r.$$

Положив в этом равенстве $x = \alpha$, получим:

$$A(\alpha) = (\alpha - \alpha)\,Q(\alpha) + r.$$

Отсюда $A(\alpha) = r$. ■

Этьен Безу́ (1730–1783)

Французский математик, основные труды которого относятся к высшей алгебре. Преподавал математику в училище гардемаринов, Королевском артиллерийском корпусе. Автор шеститомного труда «Курс математики».



Теорема 40.2

Число α является корнем многочлена $A(x)$ тогда и только тогда, когда многочлен $A(x)$ делился нацело на двучлен $x - \alpha$.

Доказательство.

Пусть $A(\alpha) = 0$. Докажем, что $A(x) \vdots (x - \alpha)$.

По теореме Безу $A(\alpha)$ является остатком от деления многочлена $A(x)$ на двучлен $x - \alpha$. Но $A(\alpha) = 0$, следовательно, $A(x) \vdots (x - \alpha)$.

Пусть теперь $A(x) \vdots (x - \alpha)$. Докажем, что $A(\alpha) = 0$.

Поскольку $A(x) \vdots (x - \alpha)$, то остаток от деления многочлена $A(x)$ на двучлен $x - \alpha$ равен 0, т. е. $A(\alpha) = 0$. ■

Следствие 1

Если $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ — множество корней многочлена $A(x)$, то $A(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n) \cdot Q(x)$, где $Q(x)$ — некоторый многочлен.

Доказательство.

Если α_1 — корень многочлена $A(x)$, то по теореме 40.2 $A(x) \vdots (x - \alpha_1)$, т. е. $A(x) = (x - \alpha_1) Q_1(x)$, где $Q_1(x)$ — некоторый многочлен. Положим в этом равенстве $x = \alpha_2$. Получим $(\alpha_2 - \alpha_1) Q_1(\alpha_2) = 0$. Следовательно, α_2 — корень многочлена $Q_1(x)$. Тогда можно записать: $Q_1(x) = (x - \alpha_2) Q_2(x)$. Получаем, что $A(x) = (x - \alpha_1) Q_1(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) Q_2(x)$.

Проводя аналогичные рассуждения для корней α_3, α_4, ..., α_n, получим, что $A(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n) \cdot Q_n(x)$. ■

Следствие 2

Множество корней многочлена степени n содержит не более n элементов.

Доказательство.

Предположим, что множество корней многочлена $A(x)$ степени n содержит больше чем n элементов. Пусть $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+k}\}$ — множество корней многочлена $A(x)$. Тогда, используя следствие 1, можно записать:

$$A(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_{n+k}) \cdot Q(x).$$

Однако это равенство не является верным, так как в левой части записан многочлен степени n, а в правой — многочлен, степень которого больше чем n. Следовательно, предположение, что множество корней многочлена степени n содержит больше чем n элементов, неверно. ■

Следствие 3

Если множество корней многочлена $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ содержит более n элементов, то $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$, т. е. этот многочлен тождественно равен нулю.

Доказательство.

Если предположить, что данный многочлен ненулевой, то его степень не превосходит n. Тогда множество его корней не может содержать более n элементов. Следовательно, данный многочлен является нулевым. ■

Пример 1. Докажите, что многочлен $A(x) = (x - 2)^{100} + (x - 1)^{50} - 1$ делится нацело на многочлен $x^2 - 3x + 2$.

Решение. Запишем: $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$. Имеем: $A(1) = A(2) = 0$. По теореме 40.2 многочлен $A(x)$ делится нацело на двучлен $x - 1$. Тогда можно записать $A(x) = (x - 1) Q(x)$. Легко показать (сделайте это самостоятельно), что число 2 является корнем многочлена $Q(x)$, т. е.

$Q(x) = (x - 2)\,Q_1(x)$. Отсюда $A(x) = (x - 1)(x - 2)\,Q_1(x)$. Следовательно, многочлен $A(x)$ делится нацело на многочлен $x^2 - 3x + 2$. ■

Пример 2. Остатки от деления многочлена $P(x)$ на двучлены $x - 2$ и $x - 3$ соответственно равны 5 и 7. Найдите остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $x^2 - 5x + 6$.

Решение. Так как степень многочлена $x^2 - 5x + 6$ равна 2, то степень искомого остатка не больше 1 или остаток является нулевым многочленом. Поэтому остаток — это многочлен вида $ax + b$.

Имеем: $P(x) = (x^2 - 5x + 6)\,Q(x) + ax + b$. Отсюда

$$P(x) = (x - 2)(x - 3)\,Q(x) + ax + b.$$

Подставим по очереди в это равенство $x = 2$ и $x = 3$. Получаем:

$$P(2) = 2a + b,\ P(3) = 3a + b.$$

С учётом условия и теоремы Безу $P(2) = 5$ и $P(3) = 7$. Тогда получаем систему $\begin{cases} 2a + b = 5, \\ 3a + b = 7. \end{cases}$

Отсюда $a = 2$, $b = 1$. Следовательно, искомым остатком является многочлен $2x + 1$.

Ответ: $2x + 1$.

Пример 3. При каких натуральных n многочлен $f(x) = x^n + a^n$ делится нацело на двучлен $x + a$?

Решение. Имеем: $x + a = x - (-a)$. По теореме 40.2 многочлен $f(x)$ делится нацело на двучлен $x - (-a)$ тогда и только тогда, когда $f(-a) = 0$. Получаем: $(-a)^n + a^n = 0$. Очевидно, что это равенство выполняется только при всех нечётных n. ■

Пример 4. Докажите тождество:

$$\frac{(x - b)(x - c)}{(a - b)(a - c)} + \frac{(x - c)(x - a)}{(b - c)(b - a)} + \frac{(x - a)(x - b)}{(c - a)(c - b)} - 1 = 0.$$

Решение. Очевидно, что $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$. Отметим, что выражение $f(x)$, записанное в левой части доказываемого равенства, тождественно равно или нулевому многочлену, или многочлену, степень которого не превышает 2.

Предположим, что многочлен $f(x)$ ненулевой. Легко проверить, что $f(a) = f(b) = f(c) = 0$. Тогда ненулевой многочлен $f(x)$ степени не выше 2 имеет три различных корня. Получили противоречие. Следовательно, многочлен $f(x)$ тождественно равен нулю. ■

1. Что называют корнем многочлена?

2. Сформулируйте теорему Безу.

3. Сформулируйте необходимое и достаточное условие, при котором число a является корнем многочлена $A(x)$.

4. Какое наибольшее количество элементов может содержать множество корней многочлена n-й степени?

Упражнения

40.1. Найдите остаток от деления многочлена $A(x)$ на двучлен $B(x)$:

1) $A(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$, $B(x) = x - 1$;

2) $A(x) = 2x^4 - 4x^3 - x - 1$, $B(x) = x + 2$.

40.2. Найдите остаток от деления многочлена $A(x)$ на двучлен $B(x)$:

1) $A(x) = 2x^3 - 7x^2 + x + 3$, $B(x) = x - 4$;

2) $A(x) = 6x^4 - 5x^3 - 53x^2 + 45x - 9$, $B(x) = x + 1$.

40.3. Докажите, что многочлен $A(x)$ делится нацело на двучлен $B(x)$:

1) $A(x) = 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$, $B(x) = x + 2$;

2) $A(x) = 3x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 5x - 2$, $B(x) = x - 2$;

3) $A(x) = 5x^5 - 6x^4 - x^2 + x + 1$, $B(x) = x - 1$;

4) $A(x) = x^6 - 3x^5 - x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x - 3$, $B(x) = x - 3$.

40.4. Докажите, что многочлен, тождественно равный выражению $(x + 1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$, где $n \in \mathbf{N}$, делится нацело на многочлен, тождественно равный выражению $x(x + 1)(2x + 1)$.

40.5. Докажите, что многочлен, тождественно равный выражению $(x^2 + x - 1)^{2n} + (x^2 - x + 1)^{2n} - 2$, где $n \in \mathbf{N}$, делится нацело на многочлен $x^2 - x$.

40.6. Докажите, что многочлен $A(x)$ делится нацело на многочлен $B(x)$:

1) $A(x) = x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 4x - 20$, $B(x) = x^2 - x - 2$;

2) $A(x) = x^4 - 9x^3 + 9x^2 + 41x - 42$, $B(x) = x^2 + x - 2$;

3) $A(x) = x^5 - 9x^4 + 26x^3 - 18x^2 - 27x + 27$, $B(x) = x^2 - 4x + 3$.

40.7. При каком значении параметра a остаток от деления многочлена:

1) $x^4 + ax^3 - 2x^2 + x - 1$ на двучлен $x - 1$ равен 5;

2) $2x^4 - 3x^3 - ax^2 - x - 2$ на двучлен $x + 1$ равен 3?

40.8. При каких значениях параметра b многочлен $x^3 + 3x^2 - bx + 6$ делится нацело на двучлен $x + 2$?

40.9. При каких значениях параметров a и b многочлен $A(x)$ делится нацело на многочлен $B(x)$:

1) $A(x) = 2x^3 - x^2 + ax + b$, $B(x) = x^2 - 1$;

2) $A(x) = 6x^4 - x^3 + ax^2 + bx + 4$, $B(x) = x^2 - 4$?

40.10. При каких значениях параметров a и b многочлен $A(x) = 3x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + 10$ делится нацело на многочлен $B(x) = x^2 + x - 2$?

40.11. При каких значениях параметров a, b и c многочлен $x^3 + ax^2 + bx + c$ делится нацело на двучлены $x - 1$ и $x + 2$, а при делении на двучлен $x + 1$ даёт в остатке 10?

40.12. При каких значениях параметров a и b многочлен $x^3 + ax^2 + bx + ab$ при делении на $x - 2$ даёт в остатке 15, а при делении на $x + 1$ даёт в остатке 0?

40.13. Остатки от деления многочлена $A(x)$ на двучлены $x - 3$ и $x - 1$ соответственно равны 6 и 4. Найдите остаток от деления многочлена $A(x)$ на многочлен $x^2 - 4x + 3$.

◆ ◆ ◆

40.14. Докажите, что выражение $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$ делится нацело на выражение $(a - b)(b - c)(c - a)$.

40.15. Докажите, что:

1) выражение $(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$ делится нацело на выражение $a + b$;

2) выражение $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ делится нацело на выражение $x + y + z$.

40.16. Докажите тождество:

1) $a\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x$;

2) $a^2\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c^2\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2$.

40.17. Степень многочлена $P(x)$ равна 100. Известно, что $P(-1) = P(1)$, $P(-2) = P(2)$, ..., $P(-50) = P(50)$. Верно ли, что для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $P(-x) = P(x)$?

Упражнения для повторения

40.18. Решите неравенство:

1) $|x - 2| < -2x$;

2) $|4x + 5| > x + 8$.

40.19. Решите уравнение $(x^2 + 3x - 4)(\sqrt{x} - 2) = 0$.

40.20. Упростите выражение $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} + \sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$.

40.21. При каких значениях параметра a сумма корней уравнения $x^2 - (a^2 + 2a)x - a = 0$ равна 3?

Определение

Уравнение вида $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, где x — переменная, a_0, a_1, ..., a_n — параметры, называют целым рациональным уравнением.

Параметры a_0, a_1, ..., a_n называют **коэффициентами** целого рационального уравнения, параметр a_0 — **свободным членом** этого уравнения.

Теорема 41.1

Если целое рациональное уравнение с целыми коэффициентами имеет целый корень, то он является делителем свободного члена.

Доказательство.

Пусть x_0 — целый корень уравнения

$$a_n x^n + a_{n-1} x_{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

где a_0, a_1, ..., a_n — целые числа. Тогда выполняется равенство

$$a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 = 0.$$

Отсюда $a_0 = -a_n x_0^n - a_{n-1} x_0^{n-1} - \ldots - a_1 x_0$;

$a_0 = x_0(-a_n x_0^{n-1} - a_{n-1} x_0^{n-2} - \ldots - a_1)$.

Следовательно, целое число a_0 равно произведению двух целых чисел, одно из которых равно x_0. Тогда $a_0 \vdots x_0$. ■

Замечание. Из доказанной теоремы не следует, что делитель свободного члена целого рационального уравнения с целыми коэффициентами обязательно является корнем уравнения. Теорема говорит только о том, что целые корни целого рационального уравнения с целыми коэффициентами следует искать среди делителей свободного члена.

Другими словами: для того чтобы целое число было корнем целого рационального уравнения с целыми коэффициентами, необходимо, чтобы оно было делителем свободного члена (рис. 41.1). Однако это условие не является достаточным.



Рис. 41.1

Например, числа –2 и 2 являются делителями свободного члена уравнения $3x^2 - 5x - 2 = 0$. Но только одно из них является корнем уравнения.

Также отметим, что теорема 41.1 помогает решать те целые рациональные уравнения с целыми коэффициентами, которые имеют целые корни.

Пример. Решите уравнение $2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - x - 6 = 0$.

Решение. Чтобы проверить наличие целых корней у этого уравнения, выпишем все делители его свободного члена: –1; 1; –2; 2; –3; 3; –6; 6.

Проверкой устанавливаем, что $x = -1$ является корнем данного уравнения. Следовательно, многочлен $f(x)$, стоящий в левой части уравнения, делится нацело на двучлен $x + 1$, т. е. $f(x) = (x + 1)\,g(x)$.

Многочлен $g(x)$ можно найти, выполнив деление «уголком» многочлена $f(x)$ на двучлен $x + 1$:

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4 - 5x^3 - 2x^3 - x - 6 & x + 1 \\
\cline{2-2}
2x^4 + 2x^3 & 2x^3 - 7x^2 + 5x - 6 \\
\cline{1-1}
-7x^3 - 2x^2 & \\
-7x^3 - 7x^2 & \\
\cline{1-1}
-5x^2 - x & \\
-5x^2 + 5x & \\
\cline{1-1}
-6x + 6 & \\
-6x + 6 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Однако существует и другой способ, позволяющий найти многочлен $g(x)$.

Представим многочлен $f(x)$ в виде суммы двучленов, каждый из которых делится нацело на $x + 1$. Имеем:

$$2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - x - 6 = 2x^4 + \underbrace{2x^3 - 7x^3}_{-5x^3} \underbrace{-7x^2 + 5x^2}_{-2x^2} + \underbrace{5x - 6x}_{-x} - 6 =$$

$$= (2x^4 + 2x^3) + (-7x^3 - 7x^2) + (5x^2 + 5x) + (-6x - 6).$$

Далее можно записать $f(x) = 2x^3(x + 1) - 7x^2(x + 1) + 5x(x + 1) - 6(x + 1) = (x + 1)(2x^3 - 7x^2 + 5x - 6)$.

Следовательно, $g(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5x - 6$.

Выясним, имеет ли целые корни уравнение $2x^3 - 7x^2 + 5x - 6 = 0$. Выпишем делители свободного члена: –1; 1; –2; 2; –3; 3; –6; 6.

Проверкой устанавливаем, что число 3 является корнем этого уравнения. Тогда $g(x) = (x - 3)h(x)$. Найдём многочлен $h(x)$. Для этого пред-

ставим многочлен $g(x)$ в виде суммы двучленов, каждый из которых делится нацело на $x - 3$:

$$2x^3 - 7x^2 + 5x - 6 = 2x^3 \underbrace{-6x^2 - x^2}_{-7x^2} + \underbrace{3x + 2x}_{5x} - 6 = (2x^3 - 6x^2) + (-x^2 + 3x) + (2x - 6).$$

Далее можно записать $g(x) = 2x^2(x - 3) - x(x - 3) + 2(x - 3) = (x - 3)(2x^2 - x + 2)$.

Следовательно, $h(x) = 2x^2 - x + 2$.

Очевидно, что уравнение $h(x) = 0$ корней не имеет. Таким образом, исходное уравнение имеет два корня -1 и 3.

Ответ: -1; 3.

1. Какое уравнение называют целым рациональным?

2. Каким свойством обладают целые корни целого рационального уравнения с целыми коэффициентами?

3. Каково соотношение между множеством делителей свободного члена целого рационального уравнения с целыми коэффициентами и множеством его целых корней?

Упражнения

41.1. Решите уравнение:

1) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15 = 0$;
2) $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$;
3) $3x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$;
4) $5x^4 + 9x^3 - 2x^2 - 4x - 8 = 0$;
5) $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = 0$;
6) $x^5 + 8x^4 + 24x^3 + 35x^2 + 28x + 12 = 0$.

41.2. Решите уравнение:

1) $x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0$;
2) $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$;
3) $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0$;
4) $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x + 1 = 0$;
5) $x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 = 0$;
6) $3x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 9x + 10 = 0$.

41.3. Докажите, что если целое рациональное уравнение с целыми коэффициентами

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

имеет рациональный корень, то он является целым числом.

41.4. Докажите, что если целое рациональное уравнение с целыми коэффициентами

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

имеет рациональный корень $x_0 = \frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь, то p — делитель свободного члена a_0, q — делитель старшего коэффициента a_n.

Упражнения для повторения

41.5. Постройте график функции $y = \dfrac{x-1}{|x-1|+1-x}$.

41.6. Для каждого значения параметра a решите неравенство $ax + a^2 \geqslant 2x + 4$.

41.7. Упростите выражение $a : \left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right) + b : \left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)$.

41.8. Докажите, что при всех натуральных значениях n дробь $\dfrac{2n^2+5n+3}{3n^2+10n+8}$ несократима.

Итоги главы 6

Квадратное уравнение

Квадратным уравнением называют уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b, c — параметры, причём $a \neq 0$.

Решение неполного квадратного уравнения

Значения коэффициентов b и c квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$	Неполное квадратное уравнение	Корни неполного квадратного уравнения
$b = c = 0$	$ax^2 = 0$	$x = 0$
$b \neq 0$, $c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$
$b = 0$, $-\frac{c}{a} < 0$	$ax^2 + c = 0$	Корней нет
$b = 0$, $-\frac{c}{a} > 0$	$ax^2 + c = 0$	$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Решение квадратного уравнения

- Если $D < 0$, то квадратное уравнение корней не имеет.
- Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет один корень $x = -\frac{b}{2a}$.
- Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a},\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Теорема Виета

Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Теорема, обратная теореме Виета

Если числа α и β таковы, что $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ и $\alpha\beta = \frac{c}{a}$, то эти числа являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Квадратный трёхчлен

Квадратным трёхчленом называют многочлен вида $ax^2 + bx + c$, где x — переменная, a, b и c — параметры, причём $a \neq 0$.

Корень квадратного трёхчлена

Корнем квадратного трёхчлена называют значение переменной, при котором значение квадратного трёхчлена равно нулю.

Разложение квадратного трёхчлена на множители

Если дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ положителен, то данный трёхчлен можно разложить на линейные множители: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена.

Биквадратное уравнение

Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где x — переменная, a, b и c — параметры, причём $a \neq 0$, называют биквадратным уравнением.

Деление нацело многочленов

Говорят, что многочлен $A(x)$ делится нацело на тождественно не равный нулю многочлен $B(x)$, если существует такой многочлен $Q(x)$, что для любого $x \in R$ выполняется равенство $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$.

Деление многочленов с остатком

Для любого многочлена $A(x)$ и ненулевого многочлена $B(x)$ существует единственная пара многочленов $Q(x)$ и $R(x)$ таких, что $A(x) = R(x) \cdot Q(x) + R(x)$, где степень многочлена $R(x)$ меньше степени многочлена $B(x)$ или $R(x)$ — нулевой многочлен. В этом равенстве многочлен $Q(x)$ называют неполным частным, а многочлен $R(x)$ — остатком.

Корень многочлена

Число α называют корнем многочлена $A(x)$, если $A(\alpha) = 0$.

Теорема Безу

Остаток от деления многочлена $A(x)$ на двучлен $x - \alpha$ равен $A(\alpha)$.

Необходимое и достаточное условие делимости многочлена на линейный двучлен

Число α является корнем многочлена $A(x)$ тогда и только тогда, когда многочлен $A(x)$ делится нацело на двучлен $x - \alpha$.

Целое рациональное уравнение

Уравнение вида $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, где x — переменная, a_0, a_1, …, a_n — параметры, называют целым рациональным уравнением.

Свойство целых корней целого рационального уравнения

Если целое рациональное уравнение с целыми коэффициентами имеет целый корень, то он является делителем свободного члена.

Проектная работа

Эта рубрика адресована прежде всего тем, кто хочет научиться приобретать знания самостоятельно, творчески мыслить, формировать, выражать и отстаивать свою точку зрения, выдвигать гипотезы, находить наиболее рациональные и нестандартные решения.

Первым шагом, который может помочь в реализации этих целей, является участие в проектной работе.

Проект — это самостоятельное исследование по выбранной теме, которое может выполняться как индивидуально, так и группой учащихся.

Дадим несколько советов по организации работы над проектом и оформлению результатов исследования.

1. При выборе темы необходимо учитывать её актуальность, наличие источников информации в литературе и интернет-ресурсов. Здесь важно ваше желание проявить себя в качестве исследователя в работе именно над выбранной темой.
2. Работа начинается с составления предварительного плана, в котором отражаются замысел и этапы реализации задуманного. После знакомства с основными источниками и литературой при помощи руководителя проекта составляется окончательный план.
3. Важно чётко сформулировать цели исследования. Они могут быть записаны в такой форме: изучить, описать, проанализировать, доказать, сравнить и т. п.
4. Работа завершается подведением итогов исследования, делаются выводы, намечаются перспективы дальнейшего изучения темы.
5. Примерный объём работы — 10–15 страниц. Дополнительно может прилагаться иллюстративный материал.
6. Работа может быть оформлена в виде реферата, доклада, компьютерной презентации.

Ниже приводится рекомендуемый список тем, которые могут быть выбраны для проектной работы.

1. Российские женщины-математики

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

1) *Малинин В.В.* Софья Ковалевская — женщина-математик. Её жизнь и учёная деятельность. — ЦИТ СГГА, 2004.
2) Математики, механики. Биографический справочник. — М., 1983.
3) Энциклопедия для детей. Том 11. Математика. — М.: Аванта +, 2003.
4) http://ru.wikipedia.org/wiki/ Софья Ковалевская.
5) http://sheider.livejournal.com/118540.html Женщины-математики.

6) http://www.nanometer.ru/2011/02/02/1296599338437_254124.html Женщины в науке.

2. Леонард Эйлер — великий математик

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

1) *Белл Э.Т.* Творцы математики. — М.: Просвещение, 1979.
2) *Гиндикин С.Г.* Рассказы о физиках и математиках. — М.: МЦНМО, 2006.
3) *Делоне Б.Н.* Леонард Эйлер // Квант. — 1974. — № 5.
4) *Полякова Т.С.* Леонард Эйлер и математическое образование в России. — КомКнига, 2007.
5) Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. Сб. статей. — М.: Наука, 1988.
6) Энциклопедия для детей. Том 11. Математика. — М.: Аванта +, 2003.
7) http://school-collection.edu.ru/ Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов.
8) http://www.math.ru/lib/ Электронная библиотека книг по математике.
9) http://ru.wikipedia.org/wiki/ Леонард Эйлер.

3. Математические термины и символы. История возникновения и развития

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

1) *Глейзер Г.И.* История математики в школе. IX–X кл. — М.: Просвещение, 1993.
2) Энциклопедия для детей. Том 11. Математика. — М.: Аванта +, 2003.
3) http://www.math.ru/lib/ Электронная библиотека книг по математике.
4) http://ru.wikipedia.org/wiki Портал математика.

4. Алгоритм Евклида и линейные диофантовы уравнения

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

1) *Вагутен В.Н.* Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики // Квант. — 1972. — № 6.
2) *Галкин Е.В.* Нестандартные задачи по математике. — Челябинск: Взгляд, 2005.
3) *Гельфонд А.О.* Решение уравнений в целых числах. — М.: Наука, 1978. — (Популярные лекции по математике).
4) *Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В.* Ленинградские математические кружки. — Киров: АСА, 1984.
5) *Горбачёв Н.В.* Сборник олимпиадных задач по математике. — М.: МЦНМО, 2004.
6) *Михайлов И.* О диофантовом анализе // Квант. — 1980. — № 6.

7) Факультативный курс по математике. 7–9 / сост. И.Л. Никольская. — М.: Просвещение, 1991.
8) http://school-collection.edu.ru/ Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов.
9) http://mmmf.msu.ru/ Малый мехмат МГУ.

5. Парадоксы теории множеств

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

1) *Бурова И.Н.* Парадоксы теории множеств и диалектика. — М., 1976.
2) *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? — М.: МЦНМО, 2001.
3) *Ященко И.В.* Парадоксы теории множеств. — М.: МЦНМО, 2002.

6. Поиск инварианта

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

1) *Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В.* Ленинградские математические кружки. — Киров: АСА, 1984.
2) *Горбачёв Н.В.* Сборник олимпиадных задач по математике. — М.: МЦНМО, 2004.
3) *Курляндчик Л., Фомин Д.* Этюды о полуинварианте. Приложение к ж-лу «Квант». Математический кружок. Вып. 2. — М.: Бюро Квантум, 1998.
4) *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии. — М.: МСНМО, 2006.
5) *Толпыго А.* Инварианты. Приложение к ж-лу «Квант». Математический кружок. Вып. 2. — М.: Бюро Квантум, 1998.
6) *Фоминых Ю.Ф.* Инварианты // Математика в школе. — 1998. — № 5.
7) http://school-collection.edu.ru/ Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов.
8) http://www.kvant.info/ Научно-популярный физико-математический журнал для школьников и студентов «Квант».
9) http://mmmf.msu.ru/ Малый мехмат МГУ.
10) http://www.problems.ru/ Задачи из разных разделов математики.

7. Формула включений и исключений

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

1) *Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А.* Комбинаторика. — ФИМА, МЦНМО, 2006.
2) *Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В.* Ленинградские математические кружки. — Киров: АСА, 1984.
3) *Горбачёв Н.В.* Сборник олимпиадных задач по математике. — М.: МЦНМО, 2004.

4) *Яглом И.* Заплаты на кафтане // Квант. — 1974. — № 2.
5) http://ru.wikipedia.org/wiki/ Формула включений и исключений.
6) http://school-collection.edu.ru/ Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов.
7) http://www.problems.ru/ Задачи из разных разделов математики.

8. Функция Эйлера. Терема Эйлера

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

1) *Алфутова Н.Б., Устинов А.В.* Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических классов. М.: МЦНМО, 2002.
2) *Виноградов И.М.* Основы теории чисел. — М.: Наука, 1981.
3) *Галкин Е.В.* Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами. — Челябинск: Взгляд, 2005.
4) *Горбачёв Н.В.* Сборник олимпиадных задач по математике. — М.: МЦНМО, 2004.
5) *Заславский А.А. и др.* Математика в задачах. — М.: МЦНМО, 2009.
6) *Кириллов А.* О правильных многоугольниках, функции Эйлера и числа Ферма // Квант. — 1977. — № 6.
7) *Сендеров В., Спивак А.* Малая теорема Ферма // Квант. — 2000. — № 1, 3, 4.
8) *Спивак А.В.* Арифметика. — М.: Бюро Квантум, 2007.
9) *Эвнин А.Ю.* Задачи по дискретной математике. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011.
10) *Ядренко М.И.* Принцип Дирихле и его применение. — Киев: Вища школа, 1985.
11) http://www.problems.ru/ Задачи из разных разделов математики.

9. Целая и дробная части числа

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

1) *Апостолова Г.В.* и др. Целая и дробная часть числа. — Киев: Факт, 1996.
2) *Галкин Е.В.* Нестандартные задачи по математике. Алгебра. — Челябинск: Взгляд, 2004.
3) *Егоров А.* Целая и дробная части числа // Квант. — 2001. — № 5.
4) http://www.problems.ru/view_search_new.php Целая и дробная часть числа.

10. Китайская теорема об остатках

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

1) *Алфутова Н.Б., Устинов А.В.* Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических классов. — М.: МЦНМО, 2002.

2) *Виноградов И.М.* Основы теории чисел. — М.: Наука, 1981.
3) *Горбачёв Н.В.* Сборник олимпиадных задач по математике. — М.: МЦНМО, 2004.
4) *Заславский А.А.* и др. Математика в задачах. — М.: МЦНМО, 2009.
5) *Флейшман Д.* Китайская теорема об остатках и гипотеза Ченцова // Квант. — 1997. — № 3.
6) *Эвнин А.Ю.* Задачи по дискретной математике. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011.
7) http://www.problems.ru/ Задачи из разных разделов математики.
8) http://mmmf.msu.ru/archive/20062007/z9-10/1.html Китайская теорема об остатках.
9) http://zaba.ru/cgi-bin/tasks.cgi? tour=books.sms700.kitaj Китайская теорема об остатках.
10) http://pmpu.ru/vf4/modular/crt#источники Китайская теорема об остатках.

11. Алгебраические уравнения высших степеней

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

1) *Ерёмин М.А.* Уравнения высших степеней. — Арзамас, 2003.
2) *Курош А.Г.* Алгебраические уравнения произвольных степеней. — М.: Наука, 1975.
3) *Лоповок Л.М.* 1000 проблемных задач по математике. — М.: Просвещение, 1995.
4) *Шафаревич И.Р.* Популярные лекции по математике. О решении уравнений высших степеней. Вып. 15. — М.: Наука, 1954.
5) http://school-collection.edu.ru/ Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов.
6) http://www.problems.ru/ Задачи из разных разделов математики.
7) http://yrokityt.at.ua/publ/2-1-0-30 Уравнения высших степеней. (Каталог статей).
8) http://www.pm298.ru/mnog3.php Схема Горнера.

Дружим с компьютером

В курсе алгебры 7 класса вы уже использовали компьютер. Вы научились:

- пользоваться **калькулятором** для вычислений;
- набирать и оформлять несложные тексты в **текстовом редакторе** (например, Microsoft Word);
- составлять таблицы с помощью **редактора таблиц** (например, Microsoft Excel);
- рисовать с помощью **графического редактора** (например, Paint);
- пользоваться глобальной сетью **Интернет** и искать в ней информацию.

Все эти умения вы будете совершенствовать и далее.

Если вы хотите в будущем стать математиком, программистом, инженером, т. е. широко использовать математику в своей работе, то советуем вам осваивать специализированные математические пакеты, которые помогают школьникам и студентам выполнить техническую работу при решении задач. Это, например, MathLAB, MathCAD. Также полезно научиться работать с графическим редактором, с помощью которого можно работать с геометрическими фигурами и строить чертежи. Примерами таких редакторов могут быть CorelDraw, Visio и т. п. Если вы собираетесь выступить с докладом или интересным сообщением для товарищей, то сделать его более наглядным помогут **программы для построения презентаций** (например, PowerPoint).

Кроме того, существует много программ, созданных специально для школьников. Эти программы тоже помогают в изучении математики. Вот ссылки на некоторые из них:

http://www.pcmath.ru/?parent=1&page=1 Компьютерные программы по математике

http://obr.1c.ru/catalog.jsp?top=3 Образовательные программы по математике

http://school-collection.edu.ru/ Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов

Конечно же это далеко не всё, что есть на просторах Интернета. Ищите, интересуйтесь, общайтесь со своими сверстниками, и вы найдёте много интересного. А может, став постарше, вы и сами разработаете полезные программы для изучения математики?

Задания

В этом разделе приведены задания, которые вы сможете выполнять с помощью компьютера по мере изучения соответствующих тем. Большинство этих заданий — продолжение и развитие упражнений этого учебника, которые вы будете решать на уроках и дома (такие упражнения в тексте учебника отмечены знаком «»). В этом разделе указан номер соответствующего задания.

Задания, требующие использования калькулятора, выполняйте с помощью стандартной программы «Калькулятор», которая есть на вашем компьютере.

Для тех, кто интересуется и изучает программирование, предлагаем создавать алгоритмы и программы, в которых будут использоваться полученные математические знания.

Пока вы не изучили на нужном уровне какой-либо язык программирования, достаточно придумать алгоритм и записать его словами либо в виде блок-схемы. Умение составлять алгоритмы (последовательности действий) пригодится вам не только в программировании, но и в других областях деятельности.

К § 1 «Множество. Подмножества данного множества»

Найдите с помощью Интернета какие-нибудь интересные факты и опишите их, используя слова «множество», «элемент множества», «пустое множество». Задайте какие-либо множества с помощью перечисления элементов и с помощью задания характеристического свойства.

С помощью какой структуры данных в программировании удобно задавать числовое множество?

Пусть даны два числовых множества. Запишите алгоритм, который определяет: 1) равны ли данные множества; 2) является ли второе множество подмножеством первого.

К § 2 «Операции над множествами»

Задайте какое-либо сочетание слов и выполните поиск в Интернете по этому сочетанию. Выполните поиск по каждому слову из этого сочетания отдельно. Зафиксируйте количество выбранных результатов. Опишите характеристические свойства множеств, полученных в результате каждого поиска. Опишите в терминах операций над множествами, как соотносятся между собой результаты поиска в каждом из случаев. Сделайте выводы, насколько важно точно задавать условие поиска.

Пусть даны два числовых множества. Запишите алгоритм, который формирует множество, равное: 1) объединению данных множеств; 2) пересечению данных множеств; 3) разности первого и второго множеств.

К § 3 «Формула включения-исключения. Взаимно однозначное соответствие»

3.11, 3.12, 3.20, 3.21, 3.24. Запишите алгоритм для решения этой задачи методом перебора.

К § 4 «Равномощные множества. Счётные множества»

Какие задачи этого параграфа легко решить, пользуясь понятием о двоичной системе счисления?

К § 5 «Рациональные дроби»

Научитесь вычислять значения дробных выражений с помощью калькулятора. В каких случаях невозможно вычислить значение дробного выражения? Всегда ли можно получить точное значение дробного выражения?

К § 6 «Основное свойство рациональной дроби»

6.20, 6.21. Постройте график какой-либо из данных функций с помощью графического редактора.

К § 7 «Сложение и вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями»

7.7, 7.8. Выберите какой-либо пример из этих заданий. Найдите значение выражения дважды: сначала записанного в условии выражения, затем — предварительно упростив его. Вычисления выполняйте с помощью калькулятора либо специализированного математического пакета. Насколько сократилось количество нужных математических действий после упрощения выражения? Можно ли после упрощения выполнить вычисления устно?

К § 9 «Умножение и деление рациональных дробей. Возведение рациональной дроби в степень»

9.18, 9.19. Выполните какие-либо примеры из этих заданий с помощью калькулятора. Какой вывод можно сделать о вычислениях с дробями, сделанных с помощью компьютера?

К § 10 «Тождественные преобразования рациональных выражений»

10.25, 10.26. Докажите утверждение задачи 10.25, выполнив вычисления с помощью калькулятора. Какой путь доказательства оказался нагляднее? Можно ли этим же способом доказать утверждение задачи 10.26?

К § 11 «Равносильные уравнения. Уравнение-следствие. Рациональные уравнения»

11.18. Решите эту задачу с помощью калькулятора.

К § 13 «Степень с целым отрицательным показателем»

Существует ли в калькуляторе и в других программах, которыми вы пользуетесь для вычислений, способ представления числа в стандартном виде? Освойте этот инструмент.

13.34–13.36. Выполните какое-либо из этих заданий, создав таблицу в табличном редакторе. Используйте средства автоматической сортировки. Постройте на основании полученной таблицы диаграмму. Насколько наглядной она получилась? Почему?

К § 14 «Свойства степени с целым показателем»

14.1. Вычислите значения какого-либо выражения из примеров 5–8 этого задания, выполняя действия с помощью калькулятора в том порядке, в котором они записаны в примере (без предварительного упрощения). Получен ли тот же результат, что и при решении примера, не используя калькулятор? Почему результаты могут различаться? Какой вывод из этого можно сделать?

К § 15 «Функция $y = \frac{k}{x}$ и её график»

15.4, 15.5. Заполните искомую таблицу с помощью табличного редактора. Постройте с помощью средств табличного редактора график функции, которая является математической моделью задачи. Как надо усовершенствовать таблицу, чтобы график получился более точным?

К § 16 «Делимость нацело и её свойства»

Можно ли утверждать, что одно число делится нацело на другое, выполнив деление с помощью калькулятора? Почему?

Какие из задач этого параграфа можно решить методом перебора? Запишите алгоритмы для решения нескольких из этих задач.

К § 17 «Деление с остатком. Сравнения по модулю и их свойства»

Запишите алгоритм, входными данными для которого являются два натуральных числа, а выходными — неполное частное и остаток при делении первого числа на второе. Какие отдельные случаи надо рассмотреть? Как надо изменить этот алгоритм, если делимое является целым числом?

* Есть ли в выбранном вами языке программирования операция, позволяющая найти неполное частное и остаток при делении двух натуральных чисел?

17.40, 17.41. Запишите алгоритм для решения этих задач методом перебора.

17.42, 17.43. Благодаря какому свойству деления с остатком эти задачи можно решить методом перебора? Запишите алгоритм для решения одной из них.

К § 18 «Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух натуральных чисел. Взаимно простые числа»

Запишите алгоритм для определения того, является ли одно натуральное число делителем другого.

Запишите алгоритмы для определения наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного двух чисел. Рассмотрите два варианта: с использованием только определения и с использованием теорем этого параграфа.

Запишите алгоритм, определяющий, являются ли два числа взаимно простыми.

* 18.16. Напишите программу для решения этой задачи.

К § 19 «Признаки делимости»

Запишите алгоритмы, реализующие признаки делимости на 3, на 9, на 11. Проверяемое число задаётся такими исходными данными: количество цифр в этом числе и запись числа в виде последовательности цифр (массив либо переменная типа «строка»).

Запишите алгоритмы, реализующие признаки делимости на $2n$, $5n$, $10n$.

19.9–19.14. Запишите алгоритм для решения одной из этих задач методом перебора.

К § 20 «Простые и составные числа»

Запишите алгоритм определения того, является ли данное натуральное число простым.

Запишите алгоритм для получения канонического разложения составного числа на простые множители.

* Напишите программу для выдачи первых n простых чисел. Оцените временные характеристики её работы. Какое максимальное натуральное число может быть представлено в выбранном вами языке программирования и какие ограничения это накладывает на возможности вашей программы?
Найдите в сети Интернет информацию о простых числах, об истории составления таблиц простых чисел и о том, какие результаты достигнуты на текущий момент.

К § 21 «Числовые неравенства и их свойства»

Найдите в сети Интернет правила дорожного движения. Выберите из дорожных знаков те, которые задают предельно допустимые значения каких-либо числовых величин. Запишите соответствующие неравенства.
Нарисуйте с помощью графического редактора координатную прямую. Продемонстрируйте наглядно, что меньшее число находится на координатной прямой левее большего.
Сохраните рисунок координатной прямой для использования в следующих заданиях.

К § 22 «Сложение и умножение числовых неравенств. Оценивание значения выражения»

Каким образом наглядно проиллюстрировать теоремы о почленном сложении и умножении неравенств? Оценивание значения выражения? Создайте соответствующие изображения в графическом редакторе.

К § 23 «Неравенства с одной переменной. Числовые промежутки»

Найдите в графическом редакторе инструменты, с помощью которых удобно изображать числовые промежутки на координатной прямой.

23.8. Загрузите в графический редактор изображение координатной прямой, созданное при изучении § 21. Изобразите на этой координатной прямой множество решений какого-либо из неравенств этой задачи. Какие средства графического редактора вы будете использовать, чтобы изобразить числовой луч? Открытый числовой луч?

К § 24 «Системы и совокупности линейных неравенств с одной переменной»

Проиллюстрируйте с помощью графического редактора процесс решения системы неравенств; совокупности неравенств (на примере любо-

го задания этого параграфа). Какие средства графического редактора позволяют сделать иллюстрацию наглядной?

К § 26 «Функция $y = x^2$ и её график»

26.8–26.11. Выберите какую-либо функцию из этих заданий и постройте график этой функции двумя способами. Первый способ: определите, из каких геометрических фигур состоит этот график, и изобразите эти фигуры на координатной плоскости с помощью графического редактора. Второй способ: составьте таблицу, содержащую набор значений аргумента и соответствующих им значений функции, и постройте график на основании этой таблицы с помощью соответствующих инструментов автоматического построения графиков; для этого способа выберите внешний вид графика, в котором заданные точки соединяются отрезками. Какой график более точно изображает заданную функцию? Как надо учесть особенности этой функции при выборе набора аргументов для таблицы?

К § 27 «Квадратные корни. Арифметический квадратный корень»

Научитесь извлекать квадратный корень с помощью калькулятора и других программ, которыми вы пользуетесь для вычислений.

27.12. Выполните задание двумя способами: 1) упростив выражение, не используя калькулятор; 2) вычислив его значение с помощью калькулятора без предварительного упрощения. Сделайте выводы.

27.38. Выполните задание с помощью графического редактора. Какие новые инструменты для закраски части плоскости вы освоили?

К § 28 «Множество действительных чисел»

Для каждого из числовых множеств введите в калькуляторе несколько элементов этого множества. Любое ли рациональное число вы можете ввести со всеми его цифрами? Можно ли ввести иррациональное число? Насколько точно представляет калькулятор эти числа? Сделайте вывод.

Как в калькуляторе можно задать число π?

Придумайте пример выражения с переменными, заданными рациональными числами, которые можно задать точно, а результатом будет действительное или иррациональное число, которое калькулятор отображает приближённо. Вычислите значение этого выражения с помощью калькулятора.

28.6, 28.7. Выполните задание с помощью калькулятора и (или) других программ, которыми вы пользуетесь для вычислений.

К § 29 «Свойства арифметического квадратного корня»

29.19. Выполните вычисления примера 3 с помощью калькулятора, не упрощая предварительно выражение. Какой способ решения оказался проще — с использованием или без использования калькулятора?

К § 30 «Тождественные преобразования выражений, содержащих арифметические квадратные корни»

Вычислите значения выражений, приведённых в примерах 30.14, 30.15, 30.26, с помощью калькулятора без предварительного упрощения выражений. Будет ли получен точный результат?

К § 31 «Функция $y = \sqrt{x}$ и её график»

С помощью табличного редактора постройте таблицу, содержащую набор аргументов и соответствующих им значений функции $y = \sqrt{x}$. Постройте график на основании этой таблицы.

К § 32 «Квадратные уравнения. Решение неполных квадратных уравнений»

Запишите алгоритм для решения неполных квадратных уравнений в зависимости от их вида.

К § 33 «Формула корней квадратного уравнения»

Запишите алгоритм, который по коэффициентам a, b и c квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ находит его корни. Учтите все возможные случаи (включая неполное квадратное уравнение).

33.18, 33.19. Запишите алгоритмы для решения этих задач методом перебора. Какая информация в условиях этих задач позволяет сделать вывод, что можно применить метод перебора, в отличие от задач 33.22 и 33.23?

К § 34 «Теорема Виета»

Придумайте два числа, десятичная запись каждого из которых содержит несколько цифр до и после запятой. Используя следствие из теоремы, обратной теореме Виета, составьте квадратное уравнение, для которого данные числа являются корнями. Для вычислений используйте калькулятор.

34.44. Запишите алгоритм для решения этой задачи методом перебора.

К § 35 «Квадратный трёхчлен»

Запишите алгоритм для разложения квадратного трёхчлена с числовыми коэффициентами на линейные множители.

35.28. Создайте математическую модель для решения этой задачи в общем виде.

К § 37 «Решение уравнений методом замены переменной»

Запишите алгоритм для решения биквадратных уравнений. Можно использовать в качестве подпрограммы алгоритм, составленный вами для решения квадратного уравнения (см. задание к § 33).

Запишите алгоритм, который определяет, является ли уравнение биквадратным, возвратным уравнением четвёртой степени, обобщённым возвратным уравнением четвёртой степени, однородным уравнением второй степени, и в зависимости от этого выдаёт рекомендацию о способе его решения.

К § 38 «Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций»

Можно ли для различных задач из этого параграфа создать общую математическую модель? Найдите такие задачи и составите единый алгоритм для их решения.

К § 39 «Деление многочленов»

Запишите алгоритм для деления двух многочленов. Используйте способ представления многочленов и алгоритмы, созданные вами в курсе алгебры 7 класса при изучении темы «Сложение и вычитание многочленов».

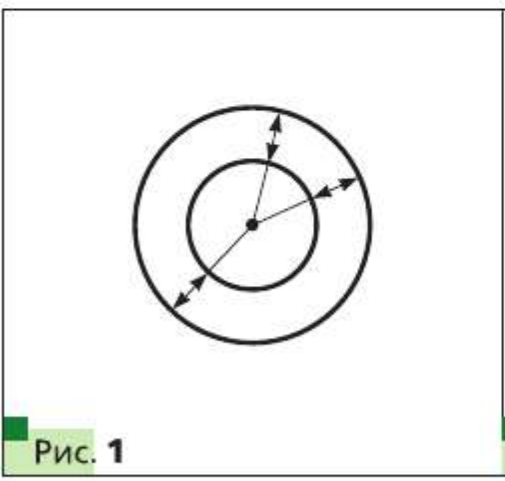
К § 41 «Целое рациональное уравнение»

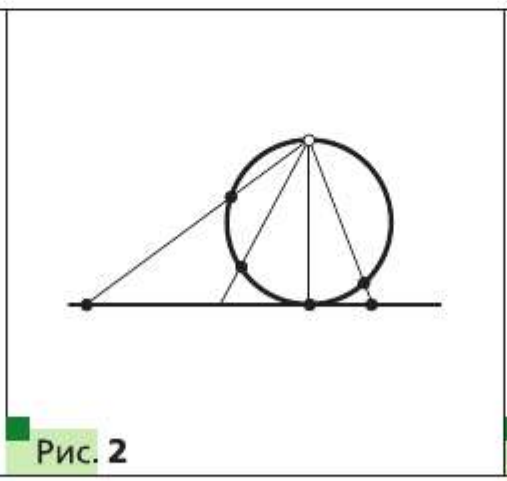
Запишите алгоритм для поиска целых корней целого рационального уравнения с целыми коэффициентами.

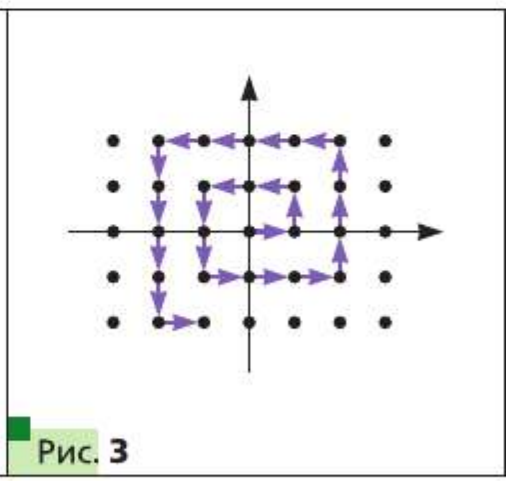
Ответы и указания

Глава 1. **1.8.** Если точки A, B и C не лежат на одной прямой, то искомое множество состоит из одной точки — центра описанной окружности треугольника ABC. Если точки A, B и C лежат на одной прямой, то искомое множество пустое. **1.15.** $A = C$. **1.29.** *Указание*. $3k - 1 = 3k - 1 + 3 - 3 = 3(k - 1) + 2$; $3n + 2 = 3n + 2 - 3 + 3 = 3(n + 1) - 1$. **2.12.** 2) Множество всех натуральных чисел, кроме 1; 3) множество, состоящее из всех нечётных чисел и числа 2. **2.19.** $A = C$, $B = \varnothing$. *Указание*. Подставьте в данное равенство вместо X множество C, а затем вместо X пустое множество. **3.4.** 6 дней. **3.11.** Больше тех чисел, все цифры которых нечётные. **3.12.** Больше тех, у которых цифры записаны в порядке убывания. **3.15.** Больше тех, у которых $a_2 < a_1$, $a_4 < a_3$, $a_6 < a_5$. **3.16.** Одинаковое количество. *Указание*. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством меньших сторон прямоугольников одного вида и множеством меньших сторон прямоугольников другого вида. **3.17.** *Указание*. Пусть $B \subset A$. Множеству B поставим в соответствие множество $C = A/B$. Очевидно, что числа $n(B)$ и $n(C)$ разной чётности. **3.18.** *Указание*. Рассмотрим элемент $a \in A$. Каждому подмножеству B множества A такому, что $a \notin B$, поставим в соответствие подмножество $C = B \cup \{a\}$. Понятно, что числа $n(B)$ и $n(C)$ разной чётности. Отметим, что это решение не зависит от чётности количества элементов множества A. Поэтому задачу 3.17 можно решить также и этим способом. **3.20.** Больше тех чисел, у которых вторая цифра меньше первой и третьей. *Указание*. Числа, у которых вторая цифра наибольшая, назовём числами первого вида, а те, у которых вторая цифра наименьшая, — числами второго вида. Понятно, что ни одно из чисел первого вида не начинается с цифры 9. Каждому числу $\overline{abc}$ первого вида поставим в соответствие число $999 - \overline{abc}$, являющееся числом второго вида. **3.21.** 1) *Указание*. «Счастливому» билету с номером $\overline{abcdef}$ поставьте в соответствие билет с номером $999999 - \overline{abcdef}$. Докажите, что он является также «счастливым». **3.22.** Одинаковое количество. *Указание*. Докажите, что длины сторон треугольников, периметр которых равен 1000, больше чем 1 и что треугольнику со сторонами a, b, c и периметром, равным 1000, соответствует треугольник со сторонами $a - 1$, $b - 1$, $c - 1$ и с периметром, равным 997. **3.23.** Многоугольников, содержащих вершину A_1, больше. *Указание*. Каждому n-угольнику с вершиной A_1 при $n \geqslant 4$ можно поставить в соответствие $(n - 1)$-угольник, полученный исключением точки A_1 из числа вершин. Таким образом можно получить все многоугольники, не содержащие вершину A_1. Однако для треугольников с вершиной A_1 соответствующих пар

не существует. **3.24.** Одинаковое количество. *Указание*. Каждому числу вида $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ такому, что $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$, поставьте в соответствие число $\overline{a_1(a_2-1)(a_3-2)(a_4-3)(a_5-4)}$. **3.25.** *Указание*. Если пара чисел $(x_0; y_0)$ является решением уравнения $x^2 + y^2 = n$, то пара $(x_0 - y_0; x_0 + y_0)$ — решение уравнения $x^2 + y^2 = 2n$. Если пара $(x_1; y_1)$ — решение уравнения $x^2 + y^2 = 2n$, то числа x_1 и y_1 одинаковой чётности, и пара $\left(\frac{x_1 + y_1}{2}; \frac{y_1 - x_1}{2}\right)$ является решением уравнения $x^2 + y^2 = n$. **3.27.** 1) $x^{n+5} - x^{n+1}$; 2) $x^{2n+2} - 7x$. **4.6.** Показателю степени числа 2^n можно поставить в соответствие количество нулей, использованных в записи десятичной дроби. **4.8.** Рисунок 1. **4.9.** *Указание*. Пронумеруем элементы заданного счётного множества. Пусть элементы данного подмножества имеют номера $i_1 < i_2 < i_3 < \ldots$. Множество этих номеров является либо конечным, либо счётным. **4.10.** Каждый из данных отрезков содержит по крайней мере одну точку с целой координатой, а поскольку отрезки не пересекаются, то все эти точки различны. Теперь можно воспользоваться результатом задачи 4.9. **4.11.** Рисунок 2. **4.12.** 1) Каждой точке $M(x_0)$ отрезка OA можно поставить в соответствие точку $N(5x_0)$ отрезка OB; 2) каждой точке $M(x_0)$ отрезка OA (кроме точки O) можно поставить в соответствие точку $N\left(\frac{1}{x_0}\right)$ луча AB. **4.14.** Схема нумерации элементов данного множества приведена на рисунке 3. **4.15.** *Указание*. Если ввести систему координат, то каждый из указанных квадратов будет содержать точку с целыми координатами. Поскольку квадраты не пересекаются, то эти точки различны. Далее воспользуйтесь результатами задач 4.14 и 4.9.


Рис. 1


Рис. 2


Рис. 3

Глава 2. **5.4.** 6) $D(y) = \{x \mid x \neq -1 \text{ и } x \neq 0\}$. **5.13.** На 31,6 %. **5.14.** 2 ч. **6.14.** 0,3. **6.15.** 5. **6.17.** $\frac{1}{32}$. **6.18.** 1) $-\frac{1}{8}$; 2) $-12{,}5$. **6.23.** 1) x — любое чис-

ло, кроме -1; 2) корней нет; 3) корней нет. **6.24.** 1) Корней нет; 2) -7. **6.25.** 1) Если $a = 0$, то корней нет; если $a \neq 0$, то $x = \frac{1}{a}$; 2) если $a = 0$, то x — любое число; если $a \neq 0$, то $x = 1$; 3) если $a = 6$, то x — любое число; если $a \neq 6$, то $x = a - 6$; 4) если $a = -2$, то корней нет; если $a = 2$, то x — любое число; если $a \neq -2$ и $a \neq 2$, то $x = \frac{1}{a+2}$. **6.26.** 1) Если $a = -3$, то корней нет; если $a \neq -3$, то $x = \frac{3}{a+3}$; 2) если $a = 0$, то корней нет; если $a = 9$, то x — любое число; если $a \neq 0$ и $a \neq 9$, то $x = \frac{a-9}{a}$. **6.30.** 3) *Указание.* Представьте числитель дроби в виде $b^3 + (b+1)^3$; 5) $a^2 - 2a + 2$; 9) $b^{24} + 1$. *Указание.* Умножим числитель и знаменатель дроби на $b - 1$. Имеем: $\frac{(b-1)(b^{47} + b^{46} + \ldots + b + 1)}{(b-1)(b^{23} + b^{22} + \ldots + b + 1)} = \frac{b^{48} - 1}{b^{24} - 1} = b^{24} + 1$. **6.31.** 4) $z^2 - z + 4$; 6) $a^{40} - a^{20} + 1$. **6.32.** *Указание.* Воспользуйтесь результатом задачи 6.29. **6.33.** 12. *Указание.* Покажите, что из первого равенства следует, что $(a - b)(a + b + c) = 0$. Также эту задачу можно решить, воспользовавшись результатом задачи 6.29. **6.34.** 12. *Указание.* Воспользуйтесь результатом задачи 6.29. **6.35.** 1) -1; 2) $\frac{1}{2}$. *Указание.* $2a^4 + 14a^2 - 17a + 3 = 2a(a^3 + 7a - 9) + a + 3$. **6.36.** $x^3 - x^2 + 1$. *Указание.* Представьте выражение $x^5 + x + 1$ в виде $(x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1)$. **6.37.** *Указание.* $a^8 + a^6 + a^4 + a^2 + 1 = \frac{a^{10} - 1}{a^2 - 1} = \frac{(a^5 - 1)(a^5 + 1)}{(a-1)(a+1)}$. **6.39.** -4 при $a = 2b$. **6.40.** 48 км/ч, 60 км/ч. **7.9.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{m+2}$; 3) $\frac{1}{1-k}$. **7.10.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{a-5}{a+5}$. **7.11.** 1) $\frac{1}{1-a}$; 2) $\frac{3}{b-2}$; 3) $\frac{m}{n-5}$; 4) 1. **7.12.** 1) $\frac{1}{(x-7)^2}$; 2) $\frac{a^2 + 2ab + 4b^2}{(a-2b)^2}$; 3) $\frac{y+6}{y+2}$. **7.20.** 2) 5; 3) $4\frac{1}{4}$. **7.21.** 2) -3; 3) $-4{,}5$. **7.22.** 1) $\{1, 2, 3, 6\}$; 2) $\{1, 2, 7, 14\}$; 3) $\{1, 2, 8\}$. **7.23.** 1) $\{1, 3, 9\}$; 2) $\{1, 2, 4, 8\}$; 3) $\{2\}$. **7.25.** 1) $\{-10, -4, -2, 4\}$; 2) $\{-15, 1, 3, 19\}$. **7.26.** 1) *Указание.* $n^3 - 2n + 1 = (n^3 + n^2 - n) - (n^2 + n - 1)$. **7.27.** *Указание.* $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2ab - 2bc - 2ac$. **7.28.** 15 км/ч, 12 км/ч. **8.11.** 6) $\frac{5}{p-5}$; 7) $\frac{16}{16y - y^3}$; 8) $\frac{2b+1}{12b-6}$. **8.12.** 5) $\frac{1}{x}$; 6) $\frac{8}{y+2}$. **8.15.** 2) 4. **8.18.** 2) $\frac{3}{b^2 - 3b + 9}$. **8.19.** 1) $\frac{2n^3}{9m^2 - n^2}$; 2) $\frac{2-2b}{8b^3 + 1}$. **8.21.** 1) $-\frac{a+b}{ab}$; 2) $\frac{1}{2x}$; 3) $\frac{100b^2}{(a^2 - 25b^2)^2}$; 4) $\frac{1}{y-2}$.

8.25. $\frac{35}{36}$. **8.27.** 1) $\frac{3}{(a-1)(a-4)}$. *Указание.* Представьте каждое из слагаемых в виде разности двух дробей. Например, $\frac{1}{(a-1)(a-2)} = \frac{1}{a-2} - \frac{1}{a-1}$; 2) $\frac{4}{a(a+12)}$. **8.28.** 1) $\frac{3}{(a-7)(a-1)}$; 2) $\frac{5}{x(x+5)}$. **8.32.** *Указание.* К каждой из дробей левой части равенства прибавьте 1, а к правой части прибавьте 3. **8.33.** *Указание.* Рассмотрите разность левой и правой частей данного равенства. **8.34.** *Указание.* Докажите, что выполняется одно из равенств $a + b = 0$, $b + c = 0$ или $c + a = 0$. **8.35.** 2. *Указание.* Можно записать $\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{xy+1} = \frac{1}{xy+1} - \frac{1}{y^2+1}$. Отсюда $\frac{x(y-x)}{(x^2+1)(xy+1)} = \frac{y(y-x)}{(y^2+1)(xy+1)}$. С учётом $x \neq y$ можно показать, что $xy = 1$. **8.36.** *Указание.* Докажите, что $\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} = -\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$. **8.37.** 1) $\frac{89}{60}$. *Указание.* Воспользовавшись результатом задачи 8.36, покажите, что $\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} = \frac{1}{30}$ (1), и вычтите из обеих частей этого равенства 3; 2) $\frac{91}{60}$. *Указание.* Прибавьте 3 к обеим частям равенства (1). **8.38.** $\frac{9}{4}$. *Указание.* Воспользуйтесь результатом задачи 8.23. **8.39.** *Указание.* $\frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} = \frac{abc}{c^3} + \frac{bca}{a^3} + \frac{cab}{b^3} = abc\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right)$. Далее воспользуйтесь тождеством $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$, доказанным в задаче 5.15. **8.40.** –1 или 8. *Указание.* К каждой части двойного равенства прибавьте 2. **8.41.** 1. *Указание.* $\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = \frac{1}{1+x+xy} + \frac{x}{x+xy+xyz} + \frac{xy}{xy+xyz+x^2yz}$. **8.43.** 270 км. **9.18.** 1) 0,9; 2) –5; 3) –3,2. **9.19.** 1) $\frac{40}{21}$; 2) $\frac{4}{11}$. **9.20.** 1) ac^3b; 2) $\frac{a^n - b^n}{a^{2n} - a^nb^n + b^{2n}}$. **9.21.** 1) $x^2y^{n+1}z^{n+1}$; 2) $\frac{x^n + 2y^n}{x^{2n} + 2x^ny^n + 4y^{2n}}$. **9.22.** 83. **9.23.** 10. **9.24.** 7 или –7. **9.25.** 2 или –2. **9.26.** 1) 1; 2) 1. **9.27.** 1) $\frac{(a-5)^2}{(a+5)^2}$; 2) 1. **9.30.** 1) $\frac{a+b-1}{a-b+1}$; 2) $\frac{(x+3)(x+7)}{(x-3)(x-7)}$. **9.31.** 1) $\left(\frac{n-3}{n+1}\right)^2$; 2) $a^2 - 1$. **10.1.** 1) $\frac{3}{1-a}$; 2) $\frac{2}{b-3}$; 3) $\frac{1}{a-2b}$; 4) $\frac{x-3}{x+3}$. **10.2.** 1) $\frac{2}{3-b}$; 2) $x + y$;

3) $\frac{a+2}{a-2}$. **10.3.** 1) $\frac{x+8}{x-8}$; 2) $\frac{1}{b}$; 3) $\frac{a-1}{a}$; 4) 2; 5) $a-2$. **10.4.** 1) $\frac{7+x}{7-x}$; 2) $c-5$; 3) -2; 4) $\frac{y+2}{6}$. **10.7.** 1) Не зависит; 2) зависит. **10.9.** 1) $\frac{1}{a}$; 2) $a-3$; 3) $\frac{a+1}{a}$; 4) $\frac{a+b}{a}$. **10.10.** 1) $\frac{a^2+b^2}{b^2}$; 2) $-a$. **10.11.** 1) $-\frac{a+b}{2ab}$; 2) $\frac{1}{a}$; 3) $a+b$. **10.12.** 1) $-y$; 2) $\frac{a+b}{a-b}$. **10.15.** 1) $\frac{a+2}{(a-2)(a-1)}$; 2) $\frac{1}{x+y}$; 3) $0{,}5a(a+c-b)$. **10.17.** $\frac{x+2}{2}$. **10.19.** $\frac{1}{a^3b^3}$. **10.20.** $\frac{b-a}{a^4b^4}$. **10.21.** 1,9. *Указание*. Рассмотрите произведение $(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$. **10.22.** *Указание*. Рассмотрите произведение $\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)$. **10.23.** *Указание*. Умножьте обе части данного равенства на $a+b+c$. **10.24.** 1. *Указание*. Искомая сумма имеет вид $\frac{1}{1+\frac{1}{1+a}}+\frac{1}{2+a}$. **11.8.** 3) Может сузиться на число -1, т. е. может быть утерян корень $x=-1$. Если $-1\notin D(f)$ или $f(-1)=1$, то множество корней не изменится; 4) если $-1\in D(f)\cap D(g)$ и $f(-1)=g(-1)$, то будет получен посторонний корень $x=-1$; если $-1\notin D(f)\cap D(g)$ или $f(-1)\neq g(-1)$, то множество корней не изменится. **11.9.** 1) $\frac{13}{4}$; 2) корней нет; 3) 7; 4) 0; -2; 5) корней нет; 6) -17; 7) 0; 8) корней нет. **11.10.** 1) 10; 2) $-0{,}5$; 3) -3; 4) -4; 4; 5) корней нет; 6) -5. **11.11.** 2 км/ч. **11.12.** 29 км/ч. **11.13.** 9 км/ч. **11.14.** 15 ч, 10 ч. **11.15.** 10 ч, 40 ч. **11.16.** 1) Корней нет; 2) 9; 3) 0. **11.17.** 1) 0,6; 2) 0. **11.18.** 70 000 жителей. **11.19.** 60 км. **12.1.** 1) Если $a=1$, то корней нет; если $a\neq 1$, то $x=a$; 2) если $a=-2$, то корней нет; если $a\neq -2$, то $x=-2$; 4) если $a=0$, то x — любое число, кроме 3; если $a\neq 0$ и $a\neq 3$, то $x=a$; если $a=3$, то корней нет; 6) если $a=0$, то x — любое число, кроме 0; если $a=4$, то решений нет; если $a\neq 0$ и $a\neq 4$, то $x=4$. **12.2.** 3) Если $b=-\frac{1}{2}$, то корней нет; если $b\neq -\frac{1}{2}$, то $x=3b$. **12.3.** 1) Если $a=1$, то $x=-1$; если $a=-1$, то $x=1$; если $a\neq 1$ и $a\neq -1$, то $x=1$ или $x=-1$; 2) если $a\neq -2$, то $x=a$ или $x=0$; если $a=-2$, то $x=0$; 3) если $a\neq 7$, то $x=a$ или $x=6$; если $a=7$, то $x=6$; 4) если $a\neq 4$ и $a\neq -2$, то $x=4$ или $x=-2$; если $a=4$, то $x=-2$; если $a=-2$,

то $x = 4$; 7) если $a = 5$ или $a = 0$, то корней нет; если $a \neq 5$ и $a \neq 0$, то $x = -a$; 8) если $a = 0$, то $x = 2$; если $a = 1$, то $x = 1$; если $a \neq 0$ и $a \neq 1$, то $x = a$ или $x = 2$. **12.4.** 2) Если $b = -4$ или $b = 1$, то корней нет; если $b \neq -4$ и $b \neq 1$, то $x = -b$; 4) если $b = 0$, то $x = 3$; если $b = 3$, то $x = -6$; если $b \neq 0$ и $b \neq 3$, то $x = 3$ или $x = -2b$. **12.5.** 1) Если $a = 2$, то корнем является любое число, кроме $x = 2$; если $a \neq 2$, то $x = a + 1$; 2) если $a = 2$ или $a = 3$, то корней нет; если $a \neq 2$ и $a \neq 3$, то $x = \frac{1}{3-a}$; 3) если $a = 3$ или $a = 7$, то корней нет; если $a \neq 3$ и $a \neq 7$, то $x = \frac{a-5}{2}$; 4) если $a = \frac{1}{3}$ или $a = 0$, то корней нет; если $a \uparrow \frac{1}{3}$ и $a \neq 0$, то $x = 3a$; 5) если $a = 0$ или $a = 1$, то корней нет; если $a = -3$, то корнем является любое число, кроме чисел -2 и -3; если $a \neq 0$, $a \neq 1$ и $a \neq -3$, то $x = a - 3$; 6) если $a = -2$, то x — любое число, кроме $x = 2$; если $a = 2$, или $a = \frac{5}{2}$, или $a = 1$, то корней нет; если $a \neq 2$, $a \uparrow \frac{5}{2}$, $a \neq 1$, $a \neq -2$, то $x = \frac{1}{a-2}$. **12.6.** 2) Если $b = \frac{1}{2}$ или $b = -\frac{5}{2}$, то корней нет; если $b \uparrow \frac{1}{2}$ и $b \neq -\frac{5}{2}$, то $x = \frac{4(b+1)}{3}$; 3) если $b = 0$, или $b = -3$, или $b = -1$, то корней нет; если $b \neq 0$, $b \neq -3$ и $b \neq -1$, то $x = \frac{b^2 - b}{b+1}$; 4) если $b = 3$, или $b = \frac{8}{3}$, или $b = \frac{13}{4}$, то корней нет; если $b = -3$, то x — любое число, кроме 3 и -4; если $b \neq 3$, $b \uparrow \frac{8}{3}$, $b \uparrow \frac{13}{4}$ и $b \neq -3$, то $x = \frac{1}{3-b}$. **12.7.** 3) $a = 0$, или $a = 3$, или $a = -1$; 4) $a = 1$, или $a = 0$, или $a = 2$; 5) $a = -3$ или $a = -\frac{1}{3}$; 6) $a = 1$, или $a = -1$, или $a = 2$, или $a = -2$, или $a = 0$. **12.8.** 1) $b = -8$ или $b = 3$; 2) $b = 0$, или $b = -1$, или $b = \frac{1}{2}$; 3) $b = -\frac{1}{2}$ или $b = -2$; 4) $b = -1$, или $b = \frac{3}{5}$, или $b = 0$, или $b = 5$, или $b = -3$. **12.9.** 2) $a = 0$ или $a = 2$; 3) $a = 0$ или $a = 3$; 5) $a = 1$; 6) $a = -1$; 7) $a = 0$; 8) $a = 0$ или $a = 1$. **12.10.** 1) $\{b \mid b \neq -4\}$; 2) $b = -1$ или $b = -3$; 3) $b = 0$; 4) $b = 2$; 5) таких значений b не существует. **13.21.** 1) 2,7; 2) $9\frac{47}{125}$. **13.30.** 5. **13.31.** 6. **13.37.** 31 болванка. **13.38.** 80 000 жителей. **14.5.** 4) $-\frac{1}{6}$; 5) $\frac{4}{9}$; 6) $\frac{4}{7}$. **14.6.** 5) 16; 6) 144. **14.15.** 8 мин. **14.16.** 5,34 кг. **14.17.** В 81 раз. **14.21.** 3) Рисунок 4; 5) рису-

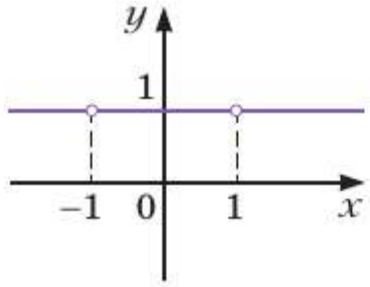


Рис. 4

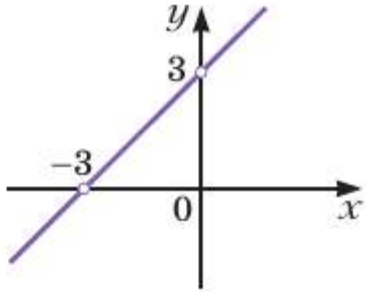


Рис. 5

нок 5. **14.25.** 1) –3; 2) –5; 3) –2; 4) –7; 5) 0; 6) 2. **14.26.** 1) 4; 2) 1; 3) –1; 4) 6. **14.27.** 1) $\frac{1}{a+b}$; 2) $-4b^2$; 3) $15c^3+5$; 4) $-\frac{1}{m^4}$; 5) $\frac{a}{a+b}$. **14.28.** 1) $\frac{2a^2}{3a^2-1}$; 2) $\frac{1-6b}{2}$; 3) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$. **14.29.** 1) –1 или 0; 2) 3 или 4; 3) 4 или 5; 4) 2 или 3. **14.30.** 1) 6 или 7; 2) 4 или 5; 3) 4 или 5; 4) 4 или 5. **14.32.** 28; 8. **14.33.** 5 ч 45 мин. **14.34.** Да, надо 5 монет по 5 р. и 3 монеты по 2 р. **15.20.** 1) 2; 2) –1; 3; 3) корней нет. **15.21.** 1) 2; 4; 2) –1; 1; 3) корней нет. **15.28.** Если $a=0$, то корней нет; если $a\neq 0$, то уравнение имеет единственный корень. **15.34.** 3) Рисунок 6. **15.35.** 3) Рисунок 7. **15.36.** *Указание*. Функция f та-

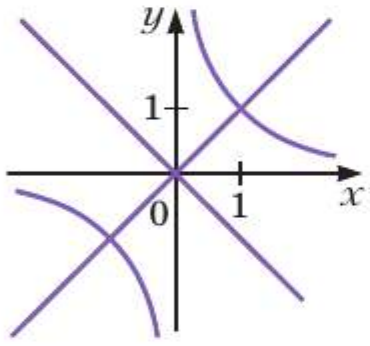


Рис. 6

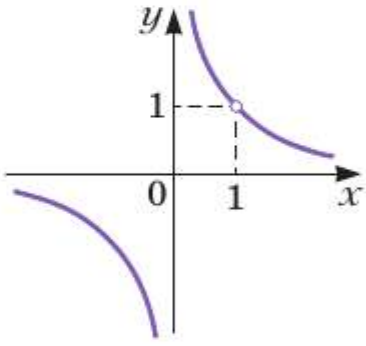


Рис. 7

кова, что $f\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}$. **15.39.** $f(x)=-\frac{2}{x}$. *Указание*. Заменив в данном равенстве x на $-x$, получим $3f(-x)+2f(x)=\frac{2}{x}$; $f(-x)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}-2f(x)\right)$. Теперь можно найденное выражение для $f(-x)$ подставить в равенство, данное в условии. Выполните проверку. **15.40.** $f(x)=-\frac{3}{x}$. **15.42.** Корней нет.

Глава 3. **16.11.** *Указание*. Воспользуйтесь задачей 16.7. **16.14.** 1) Решений нет; 2) (1; 5), (9; –3), (–1; –3), (–9; 5), (3; 1), (–3; 1); 3) (2; 1), (5; –2), (0; –2), (–3; 1); 4) (0; 1), (0; –1), (–4; –1), (4; 1). *Указание*. $x^2-4xy+3y^2=$

$= (x - y)(x - 3y)$; 5) (4; –1), (–4; 1), (3; 1), (–3; –1); 6) (4; –3), (–11; –3), (3; –1), (–6; –1). *Указание.* $x^2 - 2xy - 3y^2 + x + y = (x + y)(x - 3y) + (x + y) = (x + y)(x - 3y + 1)$. **16.15.** 1) (3; 1), (3; –1), (–3; 1), (–3; –1); 2) (5; 1), (1; 3), (1; –5), (5; –15); 3) решений нет; 4) (0; 1), (0; –1), (–1; 1), (1; –1). **16.16.** Не существует. *Указание.* Если предположить, что такой многочлен P существует, то $(P(9) - P(1)) \vdots (9 - 1)$ (см. пример 5 § 16), а это не так. **16.17.** 1) (0; 0), (2; 2). *Указание.* Представьте уравнение в виде $(x - 1)(y - 1) = 1$; 2) (9; 2), (–5; 0), (3; 8), (1; –6). **16.18.** (2; 0), (1; –2). **16.19.** *Указание.* Запишите данное выражение в виде $(1^n + 9^n) + (2^n + 8^n) + (3^n + 7^n) + (4^n + 6^n) + 5^n$. **16.21.** *Указание.* $19(x + y) - 2(3x + 8y) = 13x + 3y$. **16.23.** *Указание.* $(ab - mn) - (am - bn) = (a + n)(b - m)$. **16.25.** *Указание.* $(3x + 10y) + (3y + 10x) = 13(x + y) \vdots 13$. Отсюда следует, что $(3y + 10x) \vdots 13$. **16.26.** *Указание.* Из условия следует, что $n^3 \vdots (m + n)$. Заметим, что $(m^3 + n^3) \vdots (m + n)$. **16.28.** *Указание.* $(\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}) \vdots 37$. **16.29.** *Указание.* $\overline{aba} = 101a + 10b = 10(a + b) + 91a$. **16.30.** 2^2. *Указание.* $3^{2n+1} + 1 = 4(3^{2n} - 3^{2n-1} + \ldots - 3 + 1)$. Следует заметить, что в скобках имеем сумму нечётного количества нечётных слагаемых, равную нечётному числу. **16.31.** *Указание.* Все делители числа n^2, кроме одного, равного n, можно разбить на пары вида $\left(d; \frac{n^2}{d}\right)$, где $d \uparrow \frac{n^2}{d}$. **16.32.** *Указание.* Рассмотрите разность $P(7) - P(2)$ и $P(7) - P(5)$ и примените ключевую задачу 5 из § 16. **16.33.** *Указание.* $10A - B = 99999a$. Убедитесь, что $99999 \vdots 41$. **16.34.** *Указание.* Докажите, что $(10A - B) \vdots 37$. **16.35.** *Указание.* Докажите, что в записи данного числа есть три одинаковые цифры. Тогда можно зачеркнуть остальные 16 цифр. **16.36.** *Указание.* Предположим, что $x_0 \in \boldsymbol{Z}$ таково, что $P(x_0) = 0$. Тогда $P(x_0) - P(a) = P(x_0) - P(b) = P(x_0) - P(c) = 1$. Отсюда три разных числа $x_0 - a$, $x_0 - b$, $x_0 - c$ являются делителями числа 1. А это число имеет только два целых делителя. **16.39.** 1) (–2; 2), (1; 1); 2) (1; –1), (3; 3); 3) (1; 1), (–3; 3). **17.10.** 0, 6, 12. **17.12.** 9. **17.14.** 0, 1, 2. **17.21.** *Указание.* $(2n + 1)^2 = 4n(n + 1) + 1$. Покажите, что $4n(n + 1) \equiv 0 \pmod 8$. **17.28.** Все уравнения решений не имеют. *Указание.* Воспользуйтесь результатами задач 17.19, 17.20, 17.22, 17.23 соответственно. **17.29.** Все уравнения решений не имеют. *Указание.* Воспользуйтесь соответственно результатами задач 17.19, 17.20, 17.22 и примера 3 из § 17. **17.32.** 1) 2. *Указание.* $5^2 \equiv 1 \pmod 3$; 2) 1; 3) 5; 4) 0. **17.33.** 1) 4; 2) 1; 3) 1. **17.34.** 2, 5, 8. *Указание.* $n = 3k_1 + r_1$, $n = 6k_2 + r_2$, $n = 9k_3 + r_3$, где $r_1 \leqslant 2$, $r_2 \leqslant 5$, $r_3 \leqslant 8$. Отсюда $r_1 + r_2 + r_3 \leqslant 15$. С учётом того, что $r_1 + r_2 + r_3 = 15$, получаем $r_1 = 2$, $r_2 = 5$, $r_3 = 8$. **17.35.** *Указание.* $4^n + 4^m \equiv 2 \pmod 3$. Далее

воспользуйтесь результатами задачи 17.19. **17.36.** *Указание*. Воспользуйтесь результатами задачи 17.20. **17.37.** *Указание*. Если предположить, что все числа нечётны, то из задачи 17.21 следует, что $m^2 + n^2 + p^2 + q^2 + r^2 \equiv 5 \pmod 8$. **17.38.** *Указание*. Воспользуйтесь примером 3 из § 17. **17.39.** *Указание*. $1 + n + n^2 + n^3 = (1 + n)(1 + n^2)$, но $1 + n^2$ не делится нацело на 3. **17.40.** 665. *Указание*. Делитель равен 9. **17.41.** 233. **17.42.** 30; 60. *Указание*. $n = 9q_1 + q_1 = 10q_1$, $q_1 \leqslant 8$, $n = 14q_2 + q_2 = 15q_2$, $q_2 \leqslant 13$. Отсюда $n \leqslant 80$ и $n \vdots 30$. **17.43.** 270; 540. **17.44.** *Указание*. Каждое из выражений m^3 и n^3 при делении на 7 может дать один из остатков: 0, 1, 6 (ключевая задача 13.22). Тогда значение выражения $m^3 + n^3$ при делении на 7 может дать один из остатков: 0, 1, 2, 6. Следовательно, например, ни одно из чисел вида $7k + 3$ не может быть представлено в виде $m^3 + n^3$. Рассмотрите, например, числа вида $7n + 3$ и воспользуйтесь результатом задачи 17.22. **17.45.** *Указание*. Рассмотрите, например, числа вида $9n + 5$. **17.46.** *Указание*. Рассмотрите числа 1, 11, 111, ..., $\underbrace{11\ldots1}_{n+1 \text{ единица}}$. Какие-то два их них дают при делении на n равные остатки. **17.47.** *Указание*. Рассмотрите числа 2, 2^2, 2^3, ..., 2^{1002}. **17.50.** 1) (8; 6); 2) (–5; –4). **17.51.** 1) (–3; –4); 2) (2; –2). **18.1.** 1) 23; 2) 47. **18.2.** 1) 29; 2) 67. **18.5.** 1) 1 или 2; 2) 1 или 3. **18.13.** 2) Не существуют. *Указание*. $(a^3 - a) \vdots 6$. **18.14.** 3) *Указание*. Представьте числитель дроби в виде $(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$. **18.16.** 3 мм. *Указание*. Длина стороны последнего квадрата равна НОД (324; 141). **18.17.** *Указание*. Среди выбранных чисел есть два последовательных. **18.18.** *Указание*. Так как НОК $(a; b) = 2^4 \cdot$ НОД $(a; b)$, то $a = 2^k \cdot$ НОД $(a; b)$, $b = 2^m \cdot$ НОД $(a; b)$. **18.20.** $x = 54$, $y = 2$ или $x = 24$, $y = 8$. *Указание*. Так как НОД $(y; (y + 1)^2) = 1$, то $\dfrac{243}{(y+1)^2}$ — целое число. **18.21.** *Указание*. $\dfrac{n^4 + 4n^2 + 3}{n^4 + 6n^2 + 8} = \dfrac{(n^2 + 1)(n^2 + 3)}{(n^2 + 2)(n^2 + 4)}$. НОД $(n^2 + 1; n^2 + 2) =$ НОД $(n^2 + 3; n^2 + 2) =$ НОД $(n^2 + 3; n^2 + 4) = 1$. Так как $(n^2 + 4) - (n^2 + 1) = 3$, то НОД $(n^2 + 1; n^2 + 4) \leqslant 3$. Однако числа $n^2 + 1$ и $n^2 + 4$ разной чётности и $n^2 + 1$ не делится нацело на 3. **18.22.** $m = 2$, $n = 6$ или $m = 6$, $n = 2$. *Указание*. Так как $mn =$ НОК $(m; n) \cdot$ НОД $(m; n)$, то НОК $(m; n)$ – НОД $(m; n) = \dfrac{\text{НОК } (m; n)\ \text{НОД } (m; n)}{3}$. Обозначив НОК $(m; n) = x$, НОД $(m; n) = y$, рассмотрите уравнение $3x - 3y = xy$. **18.23.** Нет. *Указание*. Указанные операции сохраняют НОД записанных на карточке чисел. **18.26.** 1) *Указание*. $x^4 - 8x^2 + 4 = x^4 - 4x^2 + 4 - 4x^2$. **19.14.** 2 834 645. **19.17.** 51. **19.18.** 1 023 457 896. **19.20.** *Указание*. Это число кратно 3, но не кратно 9. **19.21.** Не может. *Указание*. Воспользуйтесь результатом задачи 19.2. **19.23.** 1. *Указание*. $28^{101} \equiv 1 \pmod 9$.

19.24. 1) 977. *Указание.* $S(n) \leqslant 27$. Докажите, что $n \equiv 2 \pmod 3$ и $S(n) \equiv 2 \pmod 3$; 2) решений нет. *Указание.* Докажите, что $n^2 \equiv 1 \pmod 3$ и $(S(n))^2 \equiv 1 \pmod 3$ или $n^2 \equiv 0 \pmod 3$ и $(S(n))^2 \equiv 0 \pmod 3$. **19.25.** 1) 982, 1000; 2) решений нет. *Указание.* $n + S(n) + S(S(n)) \equiv 0 \pmod 3$. **19.26.** *Указание.* $S(5n) \equiv 5n \pmod 9$, $S(n) \equiv n \pmod 9$, следовательно, $4n \equiv 0 \pmod 9$. **19.27.** *Указание.* Число $n^2 + 1$ не кратно 9. **19.28.** Нет. *Указание.* Пусть $n = \overline{a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$ — искомое число. $|P(n)| = |(a_0 + a_2 + a_4) - (a_1 + a_3 + a_5)| \leqslant$ $\leqslant |(4 + 5 + 6) - (1 + 2 + 3)| = 9$. Докажите также, что $P(n)$ — нечётное число. **19.29.** *Указание.* Докажите, что данное число делится нацело на 11. **19.30.** 1, 3 и 9. *Указание.* Рассмотрите числа $a = \underbrace{111\ldots12}_{n\text{ – 2 цифры}}$ и $b = \underbrace{111\ldots121}_{n\text{ – 3 цифры}}$, $S(a) = S(b) = n$, а поэтому по условию каждое из этих чисел кратно n. Тогда разность $b - a = 9$ также кратна n. **19.33.** $\dfrac{4}{x(x+16)}$. **20.10.** 1. **20.11.** 2. **20.12.** 1) 2; 2) 2. *Указание.* $4n^2 + 5n - 21 = (4n - 7)(n + 3)$; 3) 1. **20.13.** 1) 1; 2) 2; 3) 1. **20.14.** *Указание.* Воспользуйтесь результатом задачи 20.9. **20.16.** 3. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что числа p, $p + 26$ и $p + 28$ дают разные остатки при делении на 3. **20.17.** 3. **20.18.** *Указание.* Из условия следует, что $56(a + b) = 12 + b$. Так как НОД (56, 121) = 1, то $(a + b) \vdots 121$. **20.20.** *Указание.* $a^2 + 9ab + b^2 = (a - b)^2 + 11ab$. **20.22.** 3. **20.23.** 3. **20.25.** *Указание.* $8\underbrace{00\ldots0}_{10\text{ нулей}}27 = (2 \cdot 10^4)^3 + 3^3$. **20.26.** *Указание.* $999\,999\,973 = (10^3)^3 - 3^3$. **20.27.** 1. *Указание.* $n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2$. **20.29.** *Указание.* $p + q + r = 2(m + n + k)$ — чётное число. Это означает, что среди чисел p, q и r есть по крайней мере одно чётное число. **20.30.** *Указание.* Согласно следствию из малой теоремы Ферма число $(a^{13} - a) + (b^{13} - b) + (c^{13} - c)$ кратно 13. **20.34.** *Указание.* $24^{24} - 1 = (24^6)^4 - 1 = (24^4)^6 - 1$. **20.36.** $p = 3$, $q = 2$. *Указание.* Если $p > 3$, то $p^2 \equiv 1 \pmod 3$ (ключевая задача 20.14). Тогда из равенства $p^2 - 1 = 2q^2$ при $p > 3$ следует, что $q = 3$. В этом случае $p^2 = 19$, что невозможно. Остаётся рассмотреть случаи $p = 2$ и $p = 3$. **20.37.** $p = 3$, $q = 11$. *Указание.* Если $p \neq 3$, то $(p^2 + 2) \vdots 3$. **20.38.** 2. *Указание.* Пусть $4p + 1 = m^2$. Докажите, что число $m^2 - 1$ делится нацело на 8. **20.39.** 5. *Указание.* Число $2(n + 12) - (2n - 1) = 25$ кратно p. **20.40.** 7. **20.41.** 3. *Указание.* $p^2 + 11 = (p^2 - 1) + 12$. Если $p > 3$, то $((p^2 - 1) + 12) \vdots 12$ (см. задачу 20.14), а следовательно, имеет более шести делителей. **20.42.** Все простые числа, большие 11. *Указание.* Проверкой устанавливаем, что числа 2, 3, 5, 7, 11 в виде суммы двух составных чисел представить нельзя. Если простое число $p \geqslant 13$, то можно записать $p = (p - 9) + 9$.

20.43. *Указание.* Значение каждого из выражений $42^{47}+1$ и $47^{42}-1$ кратно 43. **20.44.** *Указание.* Каждое из чисел p^q-p и q^p-q делится нацело на pq. **20.46.** $\dfrac{2(1-3y)}{(3y+1)(2x+7)}$.

Глава 4. **21.19.** 3) Сравнить невозможно. **21.31.** a^2-a+5. **21.32.** $\dfrac{x^2+xy+y^2}{y-2}$. **22.17.** 1) $a\geqslant 1$; 2) $a\leqslant 2$; 3) $-1\leqslant a\leqslant 1$. **22.20.** $x^{48}+x^{24}+1$. **23.17.** 2) $(-\infty;\ -5]$; 3) $\left(-\infty;\ \dfrac{6}{11}\right]$; 4) $(-\infty;\ 7{,}5]$; 5) $(-\infty;\ +\infty)$; 6) $\varnothing$; 7) $(-\infty;\ +\infty)$; 8) $(-\infty;\ 0)$. **23.18.** 1) $[-6;\ +\infty)$; 2) $\varnothing$; 3) $(-\infty;\ +\infty)$; 4) $(-3{,}5;\ +\infty)$. **23.19.** 1) -8; 2) -1. **23.20.** 1) -6; 2) -3. **23.21.** 5 решений. **23.22.** 8 решений. **23.25.** 12 км. **23.26.** Таких чисел не существует. **23.27.** 18 шариков. **23.28.** 21. **23.36.** 3) При $a>-1$ и $a\neq 1$. **23.37.** 2) При $m<7$ и $m\neq 0$. **23.38.** 1) $a=3$; 2) $a=-1$. **23.39.** 1) $a=-7$; 2) $a=-4$ и $a=4$. **23.40.** 1) Если $a>0$, то $x>0$; если $a<0$, то $x<0$; если $a=0$, то решений нет; 2) если $a>0$, то $x<\dfrac{1}{a}$; если $a<0$, то $x>\dfrac{1}{a}$; если $a=0$, то x — любое число; 3) если $a>0$, то $x\geqslant 1$; если $a<0$, то $x\leqslant 1$; если $a=0$, то x — любое число; 4) если $a>2$, то $x>a+2$; если $a<2$, то $x<a+2$; если $a=2$, то решений нет; 5) если $a>-3$, то $x\leqslant a-3$; если $a<-3$, то $x\geqslant a-3$; если $a=-3$, то x — любое число; 6) если $a<2$, то $x<-2$; если $a>2$, то $x>-2$; если $a=2$, то решений нет. **23.41.** 1) Если $a\neq 0$, то $x\leqslant 0$; если $a=0$, то x — любое число; 2) если $a>-4$, то $x>\dfrac{1}{a+4}$; если $a<-4$, то $x<\dfrac{1}{a+4}$; если $a=-4$, то решений нет; 3) если $a>-1$, то $x<\dfrac{2-a}{a+1}$; если $a<-1$, то $x>\dfrac{2-a}{a+1}$; если $a=-1$, то x — любое число. **23.42.** 1) $a\leqslant\dfrac{6}{5}$; 2) $a\leqslant\dfrac{12}{5}$; 3) $a<-1$; 4) $a\leqslant 0$; 5) $a\geqslant 0$. **23.43.** 1) $a=\dfrac{6}{5}$; 2) таких значений a не существует; 3) $a=-\dfrac{3}{2}$; 4) $a=3$; 5) $a=0$; 6) $a=0$ или $a=\dfrac{2}{3}$. **23.46.** $\dfrac{(a+b+c)^2}{2bc}$. **24.14.** 1) $\left(\dfrac{1}{7};\ \dfrac{13}{10}\right)$; 2) $(-\infty;\ -4{,}2)$; 3) $[-2;\ 3]$; 4) $[-0{,}8;\ +\infty)$; 5) $\dfrac{5}{7}$; 6) $(-\infty;\ -4]$; 7) $\varnothing$; 8) $(-\infty;\ +\infty)$. **24.15.** 1) $\left(-\dfrac{1}{2};\ -\dfrac{3}{8}\right)$; 2) $[-10;\ +\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty;\ +\infty)$. **24.16.** 1) -3; -2; -1; 0; 2) 7; 8; 9; 10; 11. **24.17.** 1) 4 решения; 2) 6 решений. **24.18.** 1) $-0{,}5<x<6{,}5$; 2) $14\leqslant x\leqslant 17$. **24.19.** 1) $-1{,}5\leqslant x<2{,}5$; 2) $0\leqslant x<\dfrac{1}{3}$. **24.20.** 2) $(1{,}5;\ 7)$;

3) $(-\infty; -2)$. **24.21.** 1) $\varnothing$; 2) $(1; 3)$. **24.25.** $(-\infty; +\infty)$. **24.27.** 1) $(-2; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) $[-2; +\infty)$; 3) $[2; +\infty) \cup \{0\}$; 4) $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$; 5) $(-\infty; -2] \cup \{0\}$; 6) $(-\infty; 2]$. **24.28.** 1) $(-3; 1) \cup (1; +\infty)$; 2) $[-3; +\infty)$; 3) $\{1\} \cup [3; +\infty)$; 4) $(-\infty; 1) \cup (1; 3)$; 5) $(-\infty; -3] \cup \{1\}$; 6) $(-\infty; 3]$. **24.29.** 1) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$; 2) $[0; 1) \cup (1; +\infty)$. **24.30.** 1) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$; 2) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0]$. **24.31.** 1) При $a > 3$; 2) при $a \leqslant 3$. **24.32.** 1) При $a \leqslant 4$; 2) при $a > 1$. **24.33.** 1) При $a \leqslant -1$; 2) при $a = 1$. **24.34.** Если $a < 2$, то $x \leqslant a$, если $a \geqslant 2$, то $x < 2$. **24.35.** Если $a < -3$, то $a < x < -3$; если $a \geqslant -3$, то решений нет. **24.36.** При $10 < a \leqslant 11$. **24.37.** При $1 < b \leqslant 2$. **24.38.** При $8 \leqslant a < 9$. **24.39.** При $-6 \leqslant b < -5$. **24.40.** $a = 1$. **24.41.** $a = 6$. **24.42.** 1) Если $a > 1$, то $(1; a) \cup (a; +\infty)$; если $a \leqslant 1$, то $(1; +\infty)$; 2) если $a \geqslant 1$, то $[1; +\infty)$; если $a < 1$, то $[1; +\infty) \cup \{a\}$; 3) если $a \leqslant 1$, то $(-\infty; a)$; если $a > 1$, то $(-\infty; 1) \cup (1; a)$; 4) если $a < 1$, то $(-\infty; a] \cup \{1\}$; если $a \geqslant 1$, то $(-\infty; a]$. **24.43.** 1) Если $a \geqslant 1$, то $(-1; +\infty)$; если $a < 1$, то $(-1; -a) \cup (-a; +\infty)$; 2) если $a \leqslant 1$, то $[-1; +\infty)$; если $a > 1$, то $[-1; +\infty) \cup \{-a\}$; 3) если $a \geqslant 1$, то $(-\infty; -a)$; если $a < 1$, то $(-\infty; -1) \cup (-1; -a)$; 4) если $a \leqslant 1$, то $(-\infty; -a]$; если $a > 1$, то $(-\infty; -a] \cup \{-1\}$. **24.44.** 1. **24.45.** 2. **24.46.** Не существуют. *Указание*. Воспользуйтесь тем, что значение выражения $5^n + 1$ не кратно 4. **24.47.** 6. **25.12.** *Указание*. Воспользуйтесь геометрической интерпретацией. **25.13.** 1) 4; 2) 5. **25.14.** Решений нет. *Указание*. Запишите первое уравнение системы в виде $|x - 3 + y - 1| = \pi$. **25.15.** 1) -4; 0; 4; 2) решений нет. **25.16.** 1) -4; -2; 2; 4; 2) 0. **25.17.** 1) -3; $-\frac{1}{5}$; 2) 2; $\frac{1}{3}$. **25.18.** 1) 1; 2) решений нет; 3) $-\frac{2}{5}$. **25.19.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) 0; 1; 3) 2. **25.20.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $[0; 2]$; 3) $(-\infty; +\infty)$; 4) $(-\infty; 3] \cup [5; +\infty)$. **25.21.** 1) $(3; +\infty)$; 2) $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 3) $\left(-\infty; \frac{1}{5}\right] \cup [3; +\infty)$; 4) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$. **25.22.** 1) $\frac{3}{2}$; $\frac{9}{2}$; 2) $\frac{11}{5}$; 7; 3) 1; 4) решений нет; 5) -1; $\frac{2}{3}$; 6) $[0; 6]$; 7) $[3; +\infty)$; 8) $\left[\frac{3}{7}; +\infty\right)$; 9) $(2; +\infty)$; 10) $[0; 1)$. **25.23.** 1) -8; 12; 2) $\frac{2}{3}$; 3) -1; 4) -4; 4; 5) $[-5; 8]$; 6) $[2; +\infty)$; 7) $\left(-\infty; \frac{11}{7}\right]$; 8) $[3; 6)$; 9) $(0; 2]$. **25.24.** 1) $(-\infty; -1)$; 2) $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$; 3) $[-1; 1]$; 4) $(-\infty; +\infty)$. **25.25.** 1) $(-\infty; -6) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; 2) $\varnothing$; 3) $[-3; 1]$; 4) $(-\infty; -4] \cup [-1; +\infty)$. **25.28.** 1) Если $a < -\frac{4}{3}$, то решений нет; если $a = -\frac{4}{3}$, то одно решение; если $a > -\frac{4}{3}$, то два решения. *Указание*. Запишите уравнение в виде

$|3x - 4| - x = a$ и постройте график функции $y = |3x - 4| - x$; 2) если $a \neq 1$, то одно решение; если $a = 1$, то бесконечно много решений. **25.29.** 1) Если $a < 2$, то решений нет; если $a = 2$, то бесконечно много решений; если $a > 2$, то два решения; 2) если $a < -4$ или $a > 4$, то решений нет; если $a = -4$ или $a = 4$, то бесконечно много решений; если $-4 < a < 4$, то одно решение. **25.30.** $-2 < a \leqslant -1$. *Указание*. Воспользуйтесь геометрической интерпретацией. **25.31.** $4 \leqslant a < 6$.

Глава 5. **26.4.** 1) Корней нет; 2) -1; 3; 3) 2. **26.5.** 1) -3; -1; 2) корней нет; 3) -1. **26.15.** $k = -3{,}5$. **26.21.** График состоит из двух точек: (0; 0) и (1; 1). **26.22.** График состоит из двух точек: (0; 0) и (–2; –4). **26.24.** 4. **26.26.** 5 км/ч, 3 км/ч. **27.11.** 1) -10; 2) 25; 3) $-23{,}8$; 4) 13; 5) -20. **27.12.** 1) 13,4; 2) 21; 3) -20. **27.13.** 1) $(-\infty; 0]$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $\{0\}$; 6) $(-\infty; +\infty)$. **27.14.** 2) $(-\infty; 0]$; 3) $[0; +\infty)$; 4) $(-\infty; 0]$; 5) $\{0\}$; 6) $(0; +\infty)$. **27.15.** 2) $[3; +\infty)$; 3) $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$; 5) $\{3\}$. **27.16.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 3) $[4; 4{,}5) \cup (4{,}5; +\infty)$. **27.17.** 6) -10; 10. **27.18.** 4) -7; 7. **27.21.** 1) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$; 2) $(-\infty; 8) \cup (8; +\infty)$; 3) $[0; 9) \cup (9; +\infty)$; 4) $[0; +\infty)$; 5) $\{0\}$; 6) $\varnothing$; 7) $\{0\}$; 8) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 11) $\{0\}$. **27.22.** 1) $[0; 1) \cup (1; +\infty)$; 2) $[0; +\infty)$; 3) $(-\infty; +\infty)$; 4) $\{2\}$. **27.23.** 4) $(-\infty; +\infty)$; 6) $[-5; 2)$. **27.24.** 1) $[-7; 7]$; 2) $(-3; -2] \cup [2; +\infty)$. **27.25.** 1) 167; 2) 2116; 3) корней нет. **27.26.** 1) 4900; 2) корней нет. **27.27.** *Указание*. $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$. **27.28.** *Указание*. $-x^2 + 6x - 12 = -(x - 3)^2 - 3$. **27.29.** Выражение 2. **27.30.** 1) 0; 2) $[0; +\infty)$; 3) 0; 4) корней нет; 5) 1; 6) -2; 7) -1; 1; 8) 1; 9) 2; 10) 2; 1; 11) -1; 12) -1. **27.31.** 1) 0; 2) 0; 3) $[0; +\infty)$; 4) корней нет; 5) 1; 6) 3; 7) 1; 8) 1; 9) 3; 4; 10) -2; -1. **27.32.** 1) $[-0{,}5; +\infty)$; 2) $\{-0{,}5\}$; 3) $\varnothing$; 4) $(0; +\infty)$; 5) $[0; +\infty)$; 6) $\{0\}$. **27.33.** 1) $[1; +\infty)$; 2) $\varnothing$; 3) $\{1\}$. **27.34.** 3) Рисунок 8; 6) рисунок 9; 8) рисунок 10. **27.36.** 5) (5; 4); (5; –4); (–5; 4); (–5; –4).

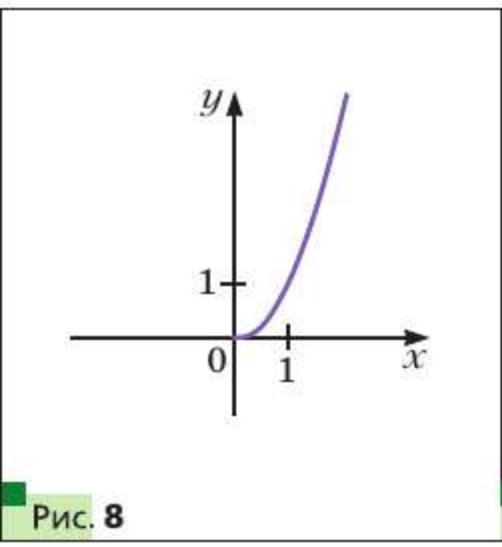


Рис. 8

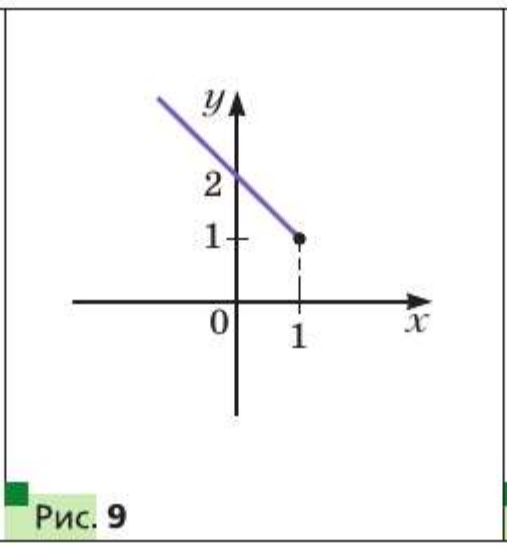


Рис. 9

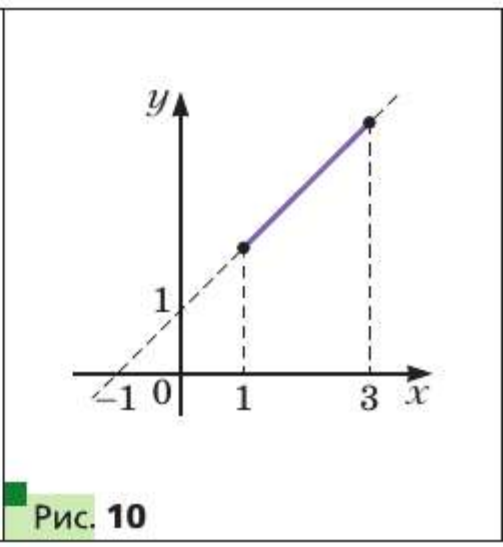


Рис. 10

27.38. 3) Координатные оси и все точки I и III четвертей; 4) координатные оси и все точки I и II четвертей. **27.39.** 1) Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то a и b — числа одного знака; если $a = 0$, то b — любое число; если $b = 0$, то a — любое число; 3) если $b \neq 0$, то $a \geqslant 0$; если $b = 0$, то a — любое число; 5) если $a \neq 0$, то $b \leqslant 0$; если $a = 0$, то b — любое число. **27.40.** 1) $(0; +\infty)$; 2) $[0; +\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $\{0\}$; 5) $(0; +\infty)$; 6) $[0; +\infty)$; 7) $(-1; 0)$; 8) $(-1; 0]$. **27.41.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $[1; +\infty) \cup \{0\}$; 3) $(0; 1)$; 4) $[0; 1]$; 5) $(1; +\infty)$; 6) $(1; +\infty)$; 7) $\varnothing$; 8) $\varnothing$. **27.42.** Рисунок 11. *Указание.* $D(y) = \{0\} \cup [1; +\infty)$. **27.43.** Рисунок 12. **27.44.** 1) $a < 0$; 2) $a < 0$ или $a = 1$. **27.45.** 1) $a > 0$; 2) $a \leqslant 1$.

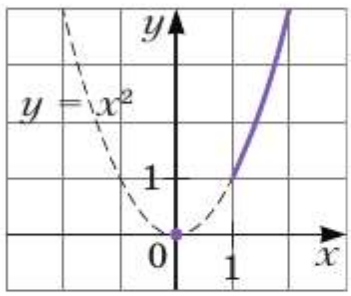


Рис. **11**

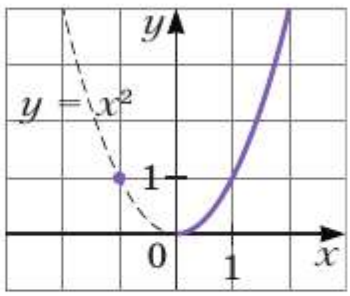


Рис. **12**

27.46. $0 \leqslant a < 4$ или $a > 4$. **27.47.** 1) $a = -9$ или $a > 0$; 2) $a \leqslant 0$ или $a = 1$; 3) $a = 0$ или $a \geqslant 1$. **27.48.** $a < 0$ или $a = 16$. **27.49.** 1) Если $a = 0$, то $x \geqslant 1$; если $a \neq 0$, то $x = 1$; 2) если $a = 1$, то x — любое число; если $a \neq 1$, то $x = 0$; 3) если $a = 0$, то $x \geqslant 1$; если $a \neq 0$, то $x = 2$; 4) если $a < 0$, то корней нет; если $a \geqslant 0$, то $x = a^2 + 2$; 5) если $a < 1$, то $x = 1$ или $x = a$; если $a \geqslant 1$, то $x = a$; 6) если $a = 2$, то $x \geqslant 2$; если $a \neq 2$, то $x = 2$. **27.50.** 13. **27.51.** $\frac{a+10}{5-a}$.

27.52. 27 купюр по 100 р., 4 купюры по 500 р. **28.13.** *Указание.* Пусть $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ — данные рациональные числа. Тогда их сумма равна $\frac{mq+np}{nq}$, т. е. является числом вида $\frac{s}{t}$, где $s \in \boldsymbol{Z}$, $t \in \boldsymbol{N}$. **28.14.** *Указание.* Если предположить, что данная сумма является рациональным числом, то из этого следует, что данное иррациональное число можно представить в виде разности двух рациональных чисел. **28.15.** 1) Нет, например, $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$; 2) нет, например, $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 = 3$; 3) нет, например, $\sqrt{3} \cdot 0 = 0$. **28.17.** $a \in \boldsymbol{Q}$, $b = 0$. **28.18.** 1) $a = 11$, $b = -6$; 2) $a = 7$, $b = 4$. **28.22.** *Указание.* Покажите, что выполняется равенство $\sqrt{2}(a - b) = a - c$. **28.23.** $p = -2$, $q = -1$. *Указание.* Покажите, что выполняется равенство

$\sqrt{2}(2+p) = -p - q - 3$. **28.25.** *Указание*. Из равенства $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ следует, что число $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ — рациональное. **28.26.** *Указание*. Пусть $a < b$, $a \in \boldsymbol{Q}$, $b \in \boldsymbol{Q}$. Рассмотрите числа $\dfrac{a+b}{2}$ и $a + \dfrac{b-a}{\sqrt{2}}$. **28.27.** Нет. *Указание*. Пусть $x + \sqrt{2} = a$, $a \in \boldsymbol{Q}$. Отсюда $x = a - \sqrt{2}$. Покажите, что $x^3 + \sqrt{2} = a^3 + 6a - (3a^2 + 1)\sqrt{2}$, и воспользуйтесь тем, что $3a^2 + 1 \neq 0$. **28.28.** 1) Существует, например, $x = 2 - \sqrt{3}$; 2) не существует. *Указание*. Пусть $x + \sqrt{3} = n$, $\dfrac{1}{x} + \sqrt{3} = m$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $m \in \boldsymbol{Z}$. Тогда $x = n - \sqrt{3}$ и $\dfrac{1}{x} = m - \sqrt{3}$. Отсюда $\left(n - \sqrt{3}\right)\left(m - \sqrt{3}\right) = 1$. Докажите, что при целых m и n полученное равенство противоречиво. **28.29.** *Указание*. Рассмотрите систему координат, началом координат которой является произвольный узел сетки, а координатные оси направлены по линиям сетки. В качестве единичного отрезка возьмите длину стороны квадрата сетки. Тогда каждый узел сетки будет иметь целые координаты. Рассмотрите прямую $y = \sqrt{2}x$. **28.30.** В третьем подъезде на шестом этаже. **28.32.** 18 л. **29.23.** 4) $5 - 2\sqrt{3}$. **29.24.** 3) $-\sqrt{2}$. **29.25.** 0; –1. *Указание*. Левая и правая части этого уравнения принимают только неотрицательные значения. **29.34.** 1) Корней нет; 2) 3; 3) –1; 3. **29.35.** 1) 2; 2) –4. **29.38.** 3) Искомое множество точек — это объединение двух лучей: положительной полуоси ординат и отрицательной полуоси абсцисс, включая начало координат. **29.39.** 1) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$, если $a > 0$ и $b > 0$; $-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$, если $a < 0$ и $b < 0$; 2) $\sqrt{-a} - \sqrt{-b}$. **29.40.** 1) $2 - a$; 2) $b + 4$; 3) $-2b - 1$, если $b < -\dfrac{1}{2}$; $2b + 1$, если $b \geqslant -\dfrac{1}{2}$. **29.41.** 1) $5 - a$, если $1 < a < 5$; $a - 5$, если $a \geqslant 5$; 2) $-3b - 1$, если $b < -\dfrac{1}{3}$; $3b + 1$, если $b \geqslant -\dfrac{1}{3}$. **29.42.** –4. **29.43.** 120 га. **29.44.** 25; 76. *Указание*. Искомое число n таково, что число $(n^2 - n)$ кратно 100. Далее воспользуйтесь тем, что НОД $(n; n-1) = 1$. **30.22.** 1) $11\sqrt{2}$; 2) $9\sqrt{5a}$; 3) $-a\sqrt{ab}$; 4) 0. **30.23.** 1) $-6\sqrt{3}$; 2) $6\sqrt{7b}$; 3) $10a^3\sqrt{a}$. **30.25.** 1) $16 + \sqrt{3}$; 2) $-10\sqrt{5} - 5$; 3) 1; 4) 1; 5) 4. **30.26.** 1) $10 - 4\sqrt{2}$; 2) 74; 3) 4; 4) 32. **30.33.** 1) $\sqrt{a} - 2$; 2) $\dfrac{6}{m - 2\sqrt{m}}$; 3) $\dfrac{4}{\sqrt{xy}}$; 4) $\dfrac{4\sqrt{a}}{16 - a}$; 5) $\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{b}}$; 6) $\dfrac{\sqrt{ab}}{2}$; 7) $\dfrac{3\sqrt{c}}{\sqrt{c} + 5}$; 8) $\sqrt{a} - 1$; 9) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$; 10) $\sqrt{x}$. **30.34.** 1) $\dfrac{4}{a + \sqrt{a}}$; 2) $-\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$;

3) $\frac{3}{\sqrt{y}}$; 4) $\sqrt{\frac{n}{m}}$; 5) $\sqrt{x}$; 6) $\frac{22}{9-a}$. **30.35.** 1) $m^4\sqrt{-m}$; 3) $a^2b^6\sqrt{b}$; 4) $-2x^3\sqrt{y}$; 6) $m^3n^3\sqrt{mn}$; 7) $-3xy^7\sqrt{5x}$; 8) $8ab^4\sqrt{b}$; 9) $-11m^5b^9\sqrt{2m}$; 10) $mnp^7\sqrt{-p}$. **30.36.** 1) $-m^9\sqrt{-m}$; 3) $a^{11}b^{12}\sqrt{a}$; 4) $-7a\sqrt{b}$; 6) $a^4b^4\sqrt{ab}$; 7) $-3x^7y^{17}\sqrt{3x}$; 8) $-2c^3n^3p^3\sqrt{-2p}$. **30.37.** 2) Так как из условия следует, что $b \leqslant 0$, то $b\sqrt{-b} = -\sqrt{-b^3}$; 3) $\sqrt{c^7}$; 5) $-\sqrt{x^3y^5}$; 13) $\sqrt{a^3b^3}$. **30.38.** 2) $-\sqrt{54n^2}$; 3) $\sqrt{p^5}$; 9) $-\sqrt{-5a^9b}$. **30.40.** 1) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; 2) $\sqrt{a}$; 3) $-\sqrt{ab}$; 4) $\frac{a-b+\sqrt{ab}}{a-b}$; 5) $\frac{\sqrt{a-b}}{b}$; 6) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$. **30.41.** $\frac{2\sqrt{a}}{a}$. **30.42.** $a+b$. **30.43.** 1) $\sqrt{2}+1$; 2) $\sqrt{3}+2$; 3) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$; 4) $\sqrt{7}-\sqrt{3}$; 5) $5-2\sqrt{3}$; 6) $3\sqrt{3}-1$. **30.44.** 1) $\sqrt{7}+1$; 2) $\sqrt{6}+3$; 3) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{5}-1$; 5) $\sqrt{15}+\sqrt{3}$; 6) $5\sqrt{3}-4$. **30.45.** 1) 9; 2) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **30.48.** 1) $4+\sqrt{2}$; 2) $3\sqrt{3}+1$; 3) -2. **30.52.** 1) $\sqrt{a-1}+1$; 2) $\sqrt{a-3}+2$; 3) $\frac{\sqrt{x}}{2}+1$; 4) $\sqrt{x+1}-$ $-\sqrt{x-1}$; 5) 1; 6) 2; 7) $\sqrt{a+2}$. **30.53.** 1) $\sqrt{a-4}+2$; 2) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2}$; 3) $\frac{\sqrt{a}}{2}+\frac{1}{2}$; 7) $\sqrt{2a-1}+\sqrt{a}$. **31.7.** 1) 0; 1; 2) 0; 1; 3) корней нет; 4) 1. **31.14.** Если $a \geqslant 0$, то один корень; если $a < 0$, то корней нет. **31.15.** $2\sqrt{a}+1$ при $a > 1$; 3 при $0 \leqslant a \leqslant 1$. **31.16.** 12 при $a > 36$; $2\sqrt{a}$ при $0 \leqslant a \leqslant 36$. **31.17.** 1) $\sqrt{x+1}$; 2) если $4 < x < 8$, то $\frac{4-\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-4}}$; если $x \geqslant 8$, то 1; 3) если $2 \leqslant x \leqslant 4$, то $2\sqrt{x-2}$; если $x > 4$, то $2\sqrt{2}$; 4) если $0 \leqslant a < 1$, то 1; если $a \geqslant 1$, то $\sqrt{a}$. **31.18.** 1) Если $3 \leqslant a \leqslant 7$, то $2-\sqrt{a-3}$; если $a > 7$, то $\sqrt{a-3}-2$; 3) если $0 \leqslant x \leqslant 4$, то 2; если $x > 4$, то $\sqrt{x}$. **31.19.** 1) 4; 2) $[-1; 0]$. **31.20.** 15.

Глава 6. **32.10.** 6; 7. **32.11.** 9; 10. **32.12.** 1) 0; 14; 2) корней нет. **32.13.** 1) 0; $\frac{4}{3}$; 2) $-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$. **32.18.** -3; -2 или 3; 4. **32.19.** -1; 0 или 0; 1. **32.20.** 1) 4; 2) 0; -8; 3) -9; 9. **32.25.** 1) 0; -3; 3; 2) 0; 1; 3) 1; 4) -2; 2; 5) 0; 6) корней нет. **32.26.** 1) 0; 7; -7; 2) 0; 5; -7; 3) $-1{,}5$; $1{,}5$; 4) -3. **32.27.** 1) 2; 2) 3; 3) 0,5; -2; 4) такого значения не существует. **32.28.** 1) $a = 4$, $x_2 = -4$; 2) $a = 0$, $x_2 = 2$ или $a = -1$, $x_2 = \frac{9}{4}$; 3) $a = 3$, $x_2 = -2$. **32.29.** 1) $a = 2$, $x_1 = -2$,

$x_2 = 2$; 2) $a = -6$, $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$; 3) такого значения не существует. **32.32.** 35. **33.6.** 1) 1; $-\frac{7}{6}$; 2) 1; 9; 3) $\frac{3-\sqrt{21}}{2}$; $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$. **33.7.** 1) 2; $-\frac{7}{3}$; 2) -3; $\frac{1}{7}$. **33.8.** 1) 4; $-3{,}5$; 2) 1; $-\frac{1}{25}$; 3) 2; $\frac{4}{3}$; 4) $-3-\sqrt{15}$; $-3+\sqrt{15}$; 5) 3; 6; 6) $\frac{3-\sqrt{21}}{6}$; $\frac{3+\sqrt{21}}{6}$. **33.9.** 1) 3; 9; 2) $\frac{-2-\sqrt{14}}{2}$; $\frac{-2+\sqrt{14}}{2}$; 3) корней нет. **33.10.** 1) -1; $\sqrt{6}$; 2) 6; $-\frac{2}{3}$; 3) -1; $\frac{31}{22}$; 4) 6; $-4{,}5$. **33.11.** 1) $-\sqrt{2}$; $-2\sqrt{2}$; 2) 2; $\sqrt{3}$; 3) 1; $\frac{3}{8}$; 4) 1; $-\frac{14}{3}$. **33.12.** -20; 4. **33.13.** 1; $-\frac{4}{3}$. **33.15.** 7. **33.16.** 38 см. **33.17.** 6 и 14 или -14 и -6. **33.18.** 10; 11. **33.19.** 13; 14. **33.20.** 8 см. **33.21.** 6 см или 12 см. **33.22.** 9; 11; 13. **33.23.** 4; 6; 8; 10. **33.24.** 9 команд. **33.25.** 15 сторон. **33.26.** 1) $b = -2$; 2) $b = -12$ или $b = 12$. **33.27.** 1) $b = 13{,}5$; 2) $b = -8$ или $b = 8$. **33.28.** 1) -8; -7; 0; 1; 2) -2; 3; $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$; $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$; 3) -7; 7; 4) -1; 1; 0,6; $-0{,}6$; 5) $-3+\sqrt{14}$; 6) -2; 2; 7) корней нет; 8) $\frac{-1-\sqrt{41}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{41}}{2}$; 9) 2; 10) 3; 5; -3; -5; 11) 2; -2; 12) 0; 2; 4; 6; $3-\sqrt{7}$; $3+\sqrt{7}$; $3-\sqrt{3}$; $3+\sqrt{3}$. **33.29.** 1) -12; 2; -2; -8; 4) 3; 5) 1; 15; $-8-\sqrt{79}$; 6) $\frac{2}{3}$; $-\frac{2}{3}$; 7) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; -6; 6; 8) 15; $-7-\sqrt{34}$; $-7+\sqrt{34}$; 9) 9; -9; 10) корней нет; 11) 0; -1; 12) $-2-2\sqrt{3}$; $-2+2\sqrt{3}$; $4+2\sqrt{2}$. **33.30.** 1) -10; 2) 3; 3) 1,5; 4) -7; 7. **33.31.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 3; 3) 7. **33.32.** 1) -2; 2) 8. **33.33.** 1) 1; 2) -3; 3) -6. **33.34.** 1) 4; 2) 0; 25; 4. **33.35.** 9; 3. **33.40.** 1) $\sqrt{3}$; 1; 2) $\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$; 1; 3) -1; 2; 4) $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$; -1. **33.41.** 1) $-\sqrt{3}$; 1; 2) 0; 6. **33.42.** 1) $x = -2a - 1$ или $x = -a$; 2) $x = 2a$ или $x = 4$; 3) если $a \neq 0$, то $x = \frac{25}{a}$ или $x = -\frac{1}{a}$; если $a = 0$, то корней нет; 4) если $a = \frac{1}{2}$, то $x = \frac{1}{3}$; если $a \neq \frac{1}{2}$, то $x = \frac{1}{3}$ или $x = \frac{1}{2a-1}$. **33.43.** 1) $x = 3a - 5$ или $x = -a$; 2) $x = -3a$ или $x = 4$; 3) если $a = 0$, то $x = 1$; если $a \neq 0$, то $x = 1$ или $x = \frac{1}{a}$. **33.44.** 1) $b = 0$ или $b = -\frac{9}{7}$; 2) $b = -5$, или $b = 2\sqrt{6}$, или $b = -2\sqrt{6}$; 3) $b = 19$; 4) $b = 2$. **33.45.** 1) $b = 0$, или $b = -0{,}5$, или $b = 0{,}5$;

2) $b = -3$ или $b = -5$; 3) $b = 5$. **33.46.** $a < 0$ или $0 < a < \frac{4}{3}$. **33.48.** 9. **34.8.** $x_2 = 10$, $q = -20$. **34.9.** $x_2 = -6$, $p = -1$. **34.10.** $x_2 = 2$, $b = 14$. **34.11.** $x_2 = 1{,}6$, $m = -1{,}28$. **34.12.** $-20{,}5$. **34.13.** -7. **34.18.** $x_1 = 1$, $x_2 = 9$, $c = 9$. **34.19.** $x_1 = -14$, $x_2 = -6$, $a = 84$. **34.20.** $x_1 = 9$, $x_2 = -2$, $m = -18$. **34.21.** $x_1 = 1$, $x_2 = -5$, $n = -5$. **34.22.** 1) 1,5; 2) 69. *Указание.* $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$; 3) 57; 4) 414; 5) 567. **34.23.** 1) 80; 2) $-\frac{57}{16}$; 3) $\sqrt{89}$. *Указание.* $|x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}$. **34.24.** $x^2 + 12x + 17 = 0$. **34.25.** $x^2 - 18x + 49 = 0$. **34.26.** $6x^2 - 14x + 3 = 0$. **34.27.** $x^2 - 15x + 8 = 0$. **34.28.** При $a = 2$ или $a = -2$. **34.29.** $a = 6$ или $a = -6$. **34.31.** 1) 7; -7; 5; -5; 2) -11; 11; -1; 1; -4; 4. **34.32.** 1) -9; 9; -6; 6; 2) -17; 17; -7; 7; -3; 3. **34.33.** $b = c = 0$ или $b = 1$, $c = -2$. **34.34.** $a = -3$. **34.35.** $a = 5$. **34.36.** $a = 2$. **34.37.** $a = 6$. **34.38.** $a = 9$ или $a = -1$. **34.39.** 1) $a = 2$; 2) такого значения a не существует. **34.40.** $a = 2$. **34.41.** $a = 0$. **34.42.** $a = 0$. **34.43.** *Указание.* Так как НОК $(m; n) \cdot$ НОД $(m; n) = mn$, то НОД $(m; n)$ и НОК $(m; n)$ — корни уравнения $x^2 - (m + n)x + mn = 0$. **34.44.** 4 ряда по 12 деревьев. **34.46.** 18 %. **34.47.** $m = 4$, $n = 6$. *Указание.* При $m \geqslant 5$ последняя цифра десятичной записи числа $m! + 12$ равна 2. **35.3.** 2) $\frac{2a-3}{a-6}$; 3) $\frac{b-3}{2b-1}$; 4) $\frac{m^2+m+1}{m+10}$; 5) $-\frac{x+4}{x+8}$; 6) $\frac{1-4n}{5n+1}$. **35.4.** 3) $\frac{4x-3}{x-1}$; 4) $\frac{2y+5}{y-1}$; 5) $\frac{a+1}{a-5}$; 6) $\frac{3-b}{b-1}$. **35.5.** 3) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$; 4) $\{1\}$. **35.7.** 1) $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$; 2) $\boldsymbol{R}$. **35.8.** 1) -3; 2) -2; 3) $\frac{4}{3}$. **35.9.** 1) -4; 2) -14. **35.10.** 1) 1; 2) $\frac{2b+1}{b^2}$; 3) $-\frac{4}{c}$; 4) 4. **35.14.** 1) $(x - y)(x - 5y)$; 2) $(a + 9b)(a - 4b)$; 3) $(3m + n)(m - 3n)$; 4) $(4x - y)(x - y)$. **35.15.** 1) $(a - 4b)(a - 10b)$; 2) $(3b - 2c)(4b + 3c)$. **35.16.** 1) $\frac{a+3b}{2b-a}$. **35.17.** 2) $\frac{2u+t}{t-3u}$. **35.18.** 1) Объединение прямых $y = 2x$ и $y = 4x$; 2) объединение прямых $2x - 3y + 1 = 0$ и $2x + y - 2 = 0$. *Указание.* Запишите уравнение в виде: $4x^2 - (4y + 2)x - 3y^2 + 7y - 2 = 0$. **35.19.** 1) Если $a = 3$, то x — любое число; если $a = -2$, то корней нет; если $a \neq 3$ и $a \neq -2$, то $x = \frac{a+3}{a+2}$; 2) если $a = 7$, то x — любое число; если $a = 1$, то корней нет; если $a \neq 7$ и $a \neq 1$, то $x = \frac{2a+1}{a-1}$. **35.20.** Если $a = -8$, то x — любое число; если $a = 1$, то корней нет; если $a \neq -8$ и $a \neq 1$, то $x = \frac{a+8}{a-1}$. **35.21.** 1) $a > \frac{9}{8}$; 2) таких a не существует. **35.22.** *Указание.* Можно запи-

сать $x^2 + ax + b = (x - x_1)(x - x_2)$, где $x_1, x_2 \in N$, $x_1 > 2$, $x_2 > 2$. Отсюда $1 + a + b = (1 - x_1)(1 - x_2)$. **35.23.** *Указание.* Пусть x_0 — корень данного уравнения и $x_0 > 2$. Имеем: $x_0^{12} - abx_0 + a^2 = 0$. Рассмотрим это равенство как квадратное уравнение с переменной a. Дискриминант этого уравнения — неотрицательное число. **35.24.** $\sqrt{2}$; $\frac{1 - \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2}$; $\frac{1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2}$. *Указание.* Имеем: $\left(\sqrt{2}\right)^2 - x^2\sqrt{2} + x^3 - x^2 = 0$. Рассмотрите левую часть уравнения как квадратный трёхчлен относительно $\sqrt{2}$. **35.25.** $\frac{1 - \sqrt{4\sqrt{3} - 3}}{2}$; $\frac{1 + \sqrt{4\sqrt{3} - 3}}{2}$; $\frac{-1 - \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}}{2}$; $\frac{-1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}}{2}$. **35.28.** 6,8 %. **35.29.** 1) Если $a \leqslant 1$, то $x \geqslant a$; если $1 < a \leqslant 3$, то $x \geqslant a$ или $x = 1$; если $a > 3$, то $x \geqslant a$, или $x = 1$, или $x = 3$. **36.1.** 1) –4; 1; 2) $-\frac{2}{3}$; 3) 7; 4) –5; 10; 5) 5; 6) –2; 9; 7) –3; 2; 8) 4; –0,4. **36.2.** 1) –1; 2) –0,25; 3) 0,5; 6; 4) 8; 5) –3; 6) –3; 12; 7) –1; $\frac{2}{7}$; 8) –3; 13. **36.3.** 1) 6; 2) 5; 3) 7; 4) 6. **36.4.** 1) 10; 2) –7. **36.5.** 1) $3 - 3\sqrt{2}$; $3 + 3\sqrt{2}$; 2) –23; 1; 3) –27; –1; 4) 3. **36.6.** 1) 4; 9; 2) 5. **36.7.** 1) –2; 2) –3; 3) 2; 4) 9; 5) 1; 6) 9. **36.8.** 1) –3; 2) 2; 3) –20; 2; 4) 15. **36.9.** 1) –5; 2) корней нет; 3) $3\frac{1}{3}$; 4) 1. **36.10.** 1) –15; 1; 2) 1,5. **36.11.** 1) $-\frac{5}{4}$; 5; 2) 0; $\frac{-5 - \sqrt{3}}{2}$; $\frac{-5 + \sqrt{3}}{2}$; 3) –4; $-\frac{1}{2}$. **36.12.** 1) 0; 2) $-\frac{5}{2}$; 0; 3) $-\frac{5}{2}$; 0. **36.13.** 1) Если $a = 1$, то $x = 7$; если $a = 7$, то $x = 1$; если $a \neq 1$ и $a \neq 7$, то $x = 1$ или $x = 7$; 2) если $a \neq 1$ и $a \neq 7$, то $x = a$; если $a = 1$ или $a = 7$, то корней нет; 3) если $a \neq 2$ и $a \uparrow \frac{2}{3}$, то $x = 3a$ или $x = 2$; если $a = 2$ или $a = \frac{2}{3}$, то $x = 2$; 4) если $a = 0$, то x — любое число, отличное от –3; если $a = -3$, то корней нет; если $a \neq 0$ и $a \neq -3$, то $x = a$. **36.14.** 1) Если $a \neq 1$ и $a \neq 0$, то $x = 2a$ или $x = a + 2$; если $a = 1$, то $x = 3$; если $a = 0$, то уравнение не определено; 2) если $a \neq 0$, то $x = 3a$ или $x = -2a$; если $a = 0$, то корней нет; 3) если $a \neq -1{,}5$, то $x = 0$ или $x = 2a + 1$; если $a = -1{,}5$, то $x = 0$; 4) если $a \neq 1$, то $x = a - 2$; если $a = 1$, то корней нет; 5) если $a \neq 0$, то $x = \frac{a}{2}$; если $a = 0$, то корней нет. **36.15.** 1) Если $a \neq 3$, $a \neq -1$, то $x = a + 3$ или $x = a - 1$; если $a = 3$, то $x = 6$; если $a = -1$, то уравнение не определено; 2) если $a \neq -2$, $a \neq -0{,}5$, $a \neq 1$, то $x = -2a$ или $x = -a - 1$; если $a = -2$, то $x = 4$; если $a = -0{,}5$, то $x = -0{,}5$; если $a = 1$, то решений нет;

3) если $a \neq -1$, $a \neq 1$, $a \neq 0$, $a \neq 2$, то $x = a$ или $x = a + 1$; если $a = -1$, то $x = -1$; если $a = 0$ или $a = 1$, то $x = 1$; если $a = 2$, то $x = 3$; 4) если $a \neq 0$, $a \neq -1$, $a \neq 1$, то $x = \frac{a+1}{a}$ или $x = 1$; если $a = 0$ или $a = -1$, то $x = 1$; если $a = 1$, то уравнение не определено. **36.16.** 1) $a = 2\sqrt{5}$, $a = -2\sqrt{5}$, $a = 6$; 2) $a = -1$, $a = 1$; 3) $a = 2$, $a \leqslant 1$. **36.17.** 1) $a = -2$, $a = 2$, $a = -\frac{10}{3}$; 2) $a = 3$, $a = 4$, $a = \frac{7}{2}$; 3) $a \leqslant 0$, $a = 2$. **36.21.** 2; –2. **37.7.** 1) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; –3; 3; 2) –6; –4; –1; 1; 3) 0; 3; 4) –1; –3; 1. **37.8.** 1) $-\frac{1}{3}$; 1; 2) 0,5. **37.9.** 1) –1; 7; 2; 4; 2) –6; –2; $-4 - 2\sqrt{5}$; $-4 + 2\sqrt{5}$; 3) –2; 1; 4) $-\frac{5}{3}$; 10. **37.10.** 1) 0; 1; 2) 0; –2; 3) –1; 4) –1; 1; 2; 4; 5) –3; 1. **37.11.** 1) 1; 2) 0; –2; $\frac{-2-\sqrt{54}}{2}$; $\frac{-2+\sqrt{54}}{2}$; 3) –2; –1; 0; 1; 4) –3; –2; 1; 2; 5) –3; 0; $\frac{-3-\sqrt{73}}{2}$; $\frac{-3+\sqrt{73}}{2}$. **37.12.** 1) 0; $\frac{3}{8}$; $\frac{3-\sqrt{73}}{16}$; $\frac{3+\sqrt{73}}{16}$; 2) $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$. **37.13.** 1) –1; 0; $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; 2) –1; 6; $\frac{5-\sqrt{97}}{2}$; $\frac{5+\sqrt{97}}{2}$. **37.14.** 1) –1; 12; 2) $-4 - \sqrt{21}$; $-4 + \sqrt{21}$. **37.15.** 1) $-5 - \sqrt{95}$; $-5 + \sqrt{95}$; 2) $-4 - \sqrt{5}$; $-4 + \sqrt{5}$. **37.16.** 1) –5; $-2 - \sqrt{5}$; $-2 + \sqrt{5}$; 1; 2) –5; –1; 3; 3) –1; 3. *Указание*. Выполните замену $x^2 - 2x = t$. **37.17.** 1) –2; $-\frac{1}{2}$; 2) –6; –4; $\frac{-15-\sqrt{129}}{2}$; $\frac{-15+\sqrt{129}}{2}$. **37.18.** 1) –8; $-\frac{15}{2}$; $\frac{-35-\sqrt{265}}{4}$; $\frac{-35+\sqrt{265}}{4}$; 2) –4; 5; $-5 - 3\sqrt{5}$; $-5 + 3\sqrt{5}$. **37.19.** 1) $\frac{1}{2}$; 2; $\frac{-11-\sqrt{105}}{4}$; $\frac{-11+\sqrt{105}}{4}$; 2) $-3 - \sqrt{15}$; $-3 + \sqrt{15}$; 3) –1; $-\frac{1}{6}$; 4) 2; $\frac{1}{2}$; $2 - \sqrt{3}$; $2 + \sqrt{3}$; 5) –1; –3; $3 - \sqrt{6}$; $3 + \sqrt{6}$. **37.20.** 1) 1; $\frac{-11-\sqrt{85}}{6}$; $\frac{-11+\sqrt{85}}{6}$; 2) $5 - \sqrt{31}$; $5 + \sqrt{31}$; $\frac{3-\sqrt{159}}{5}$; $\frac{3+\sqrt{159}}{5}$; 3) 7; $\frac{1}{7}$; 4) $\frac{1}{2}$; 2. **37.21.** 1) 2; 4; –1; $-\frac{1}{2}$; 2) 3; $\frac{2}{3}$. **37.22.** 1) $-3 - \sqrt{3}$; $-3 + \sqrt{3}$; $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; 2) $2 - \sqrt{2}$; $2 + \sqrt{2}$; $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$. **37.23.** 1) –3;

-1; 2) -2; 3. **37.24.** 1) 2; 3; 2) -3; -7. **37.25.** 1) $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{2}$; 2) 3; 5; $9-\sqrt{66}$; $9+\sqrt{66}$; 3) $\frac{1}{2}$; 2; $3-2\sqrt{2}$; $3+2\sqrt{2}$. **37.26.** 1) $\frac{5-\sqrt{21}}{2}$; $\frac{5+\sqrt{21}}{2}$; 2) 1; 5; 3) 1; 4. **37.27.** 1) 2; $-1-\sqrt{3}$; $-1+\sqrt{3}$; 2) 1; $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\frac{\sqrt{5}}{2}$; $-\frac{3\sqrt{11}}{11}$; $\frac{3\sqrt{11}}{11}$. **37.28.** 1) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; 2) -1; 3; $\frac{11-\sqrt{55}}{11}$; $\frac{11+\sqrt{55}}{11}$; 3) -1; 2. **37.30.** $(4; +\infty)$. **37.31.** $[-1; 4]$. **38.1.** 75 км/ч. **38.2.** 60 км/ч, 50 км/ч. **38.3.** 80 км/ч, 60 км/ч. **38.4.** 80 км/ч. **38.5.** 12 км/ч. **38.6.** 12 страниц. **38.7.** 30 м^3, 25 м^3. **38.8.** 6 дней. **38.9.** 31 км/ч. **38.10.** 10 км/ч. **38.11.** 3 км/ч. **38.12.** 2 км/ч или 2,25 км/ч. **38.13.** 60 км/ч, 40 км/ч. **38.14.** 60 км/ч. **38.15.** 60 км/ч. **38.16.** 8 км/ч. **38.17.** 32 км/ч. **38.18.** $\frac{1}{4}$. **38.19.** $\frac{7}{12}$. **38.20.** 45 дней, 36 дней. **38.21.** 15 ч, 10 ч. **38.22.** 21 ч, 24 ч. **38.23.** 80 г. **38.24.** 30 кг. **38.25.** 3 км/ч. **38.26.** 5 ч. **38.27.** 4 ч, 6 ч, 12 ч. **38.28.** 80 км/ч. **38.29.** 24 детали. **38.31.** $[2; +\infty) \cup \{-1\}$. **38.33.** 1. **39.9.** $\{2\}$. **39.10.** 1. **39.12.** Если $a = 1$, то $x \geqslant 3$; если $a \neq 1$, то $x = 3$. **40.6.** 1) *Указание.* $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$. Докажите, что числа 2 и -1 являются корнями многочлена $A(x)$. **40.7.** 1) $a = 6$. **40.8.** $b = -5$. **40.9.** 1) $a = -2$, $b = 1$; 2) $a = -25$, $b = 4$. **40.10.** $a = -9$, $b = -9$. **40.11.** $a = -3$, $b = -6$, $c = 8$. **40.12.** $a = 1$, $b = 1$ или $a = 3$, $b = -1$. **40.13.** $x + 3$. **40.14.** *Указание.* Рассмотрите данное выражение как многочлен относительно a с параметрами b и c. Покажите, что b является корнем этого многочлена. **40.17.** Верно. *Указание.* Рассмотрим многочлен $P(x) - P(-x)$. Его степень не превосходит 99. Однако этот многочлен имеет не менее ста корней. Следовательно, он является нулевым многочленом. **40.19.** 1; 4. **40.20.** 6. **40.21.** $a = 1$. **41.1.** 1) -1; -3; -5; 2) -1; 2; $-\frac{1}{2}$; 3) 1; -1; $-\frac{2}{3}$; 4) 1; -2; 5) 2; -1; $\frac{1-\sqrt{33}}{4}$; $\frac{1+\sqrt{33}}{4}$; 6) -2; -3. **41.2.** 1) 1; $-\sqrt{3}-1$; $\sqrt{3}-1$; 2) 2; -3; 3) -1; -2; 4) 1; -1; $-\sqrt{5}-2$; $\sqrt{5}-2$; 5) 1; 2; $\frac{-\sqrt{17}-5}{2}$; $\frac{\sqrt{17}-5}{2}$; 6) 1; -2; $-\frac{5}{3}$. **41.6.** 2) Если $a = 2$, то x — любое число; если $a > 2$, то $x \geqslant -a - 2$; если $a < 2$, то $x \leqslant -a - 2$. **41.7.** $2ab$. **41.8.** *Указание.* $\frac{2n^2+5n+3}{3n^2+10n+8} = \frac{(n+1)(2n+3)}{(n+2)(3n+4)}$. Докажите, что НОД $(n+1; n+2) = 1$, НОД $(n+1; 3n+4) = 1$, НОД $(2n+3; n+2) = 1$, НОД $(2n+3; 3n+4) = 1$.

Алфавитно-предметный указатель

Алгоритм Евклида 133
Арифметический квадратный корень из числа 217

Бесконечные периодические десятичные дроби 231

Вершина параболы 213
Ветви гиперболы 106
— параболы 213
Взаимно однозначное соответствие 20
Внесение множителя под знак корня 250
Возведение рациональной дроби в степень 62
Вынесение множителя из-под знака корня 250
Выражения дробные 34
— рациональные 34
— тождественно равные 39
Вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями 48
— — — с разными знаменателями 53

Гипербола 106
Графический метод решения уравнений 108

Диаграммы Эйлера-Венна 6
Дискриминант квадратного трёхчлена 297
— — уравнения 279
Деление рациональных дробей 60
Делитель числа 117

Каноническое разложение составного числа на простые множители 147
Квадратный корень из числа 217
— трёхчлен 296
Корень квадратного трёхчлена 297
— многочлена 332

Малая теорема Ферма 147
Метод замены переменной 311
Множества равномощные 26
Множество 4
— бесконечное 18
— действительных чисел 232
— конечное 18
— натуральных чисел 4
— рациональных чисел 4
— счётное 26
— целых чисел 4
Модуль числа 201

Наибольший общий делитель 131
Необходимое и достаточное условие сравнимости чисел 124
— существования корня многочлена 333
Неравенство линейное с одной переменной 178
— нестрогое 162
— — следствие 178
— строгое 162

Область определения выражения 35
— — уравнения 73
Обратная пропорциональность 103
Объединение множеств 12
Освобождение от иррациональности в знаменателе дроби 252
Основная теорема арифметики 145
Основное свойство рациональной дроби 39
Основные свойства делимости нацело 117
— — сравнений 124
— — числовых неравенств 162, 163, 164

Парабола 212
Пересечение множеств 10
Период дроби 230
Подкоренное выражение 218
Подмножество 6
— собственное 7
Порядок числа 91
Признак делимости на 3 139
— — на 9 138
— — на 11 139

Равносильные неравенства 175
Радикал 217
Разложение квадратного трёхчлена на линейные множители 304
Разность множеств 14
Решение неравенства 174
— системы неравенств с одной переменной 185

Свойства арифметического квадратного корня 240, 241, 243
— модуля 196
— наибольшего общего делителя и общего кратного 133, 134, 135
— простых чисел 145
— степени с целым показателем 97, 98
— уравнений 75
— функции $y = x^2$ 213
— функции $y = \frac{k}{x}$ 107
— функции $y = \sqrt{x}$ 265
— целых корней целого рационального уравнения 338
Свойство рациональной дроби 39
— характеристическое 5
Следствие уравнения 76
Сложение рациональных дробей с одинаковыми знаменателями 48
— — — с разными знаменателями 53
Сложение числовых неравенств 168
Сравнимые по модулю числа 124
Стандартный вид числа 91
Степень с нулевым показателем 90
— с целым отрицательным показателем 90

Теорема Безу 333
— Виета 296
— обратная теореме Виета 289
— о делении с остатком 122
Теоремы о решении неравенств 175

— об уравнениях, содержащих знак модуля 197
— о неравенствах, содержащих знак модуля 200, 201, 202
Тождество 38

Умножение рациональных дробей 60
— числовых неравенств 173, 174
Уравнение биквадратное 311
— второй степени 273
— квадратное 273
— — неполное 273
— — приведённое 273
— обобщённое возвратное четвёртой степени 315
— рациональное 78
— — с параметром 83
— третьей степени 318
— целое рациональное 338
— четвёртой степени 318
Уравнения равносильные 74

Формула включения-исключения 19
— корней квадратного уравнения 279
Функция вида $y = \frac{k}{x}$ 104
— $y = \sqrt{x}$ 263

Числа взаимно простые 134
— иррациональные 231
— простые 143
— составные 144

Оглавление

Глава 1 Множества и операции над ними

§ 1. Множество. Подмножества данного множества 4
§ 2. Операции над множествами 11
§ 3. Формула включения-исключения. Взаимно однозначное соответствие 18
§ 4. Равномощные множества. Счётные множества 25
• «Я вижу это, но никак не могу этому поверить!» 29
Итоги главы 1 33

Глава 2 Рациональные выражения

§ 5. Рациональные дроби 34
§ 6. Основное свойство рациональной дроби 38
§ 7. Сложение и вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями 48
§ 8. Сложение и вычитание рациональных дробей с разными знаменателями 53
§ 9. Умножение и деление рациональных дробей. Возведение рациональной дроби в степень 60
§ 10. Тождественные преобразования рациональных выражений 67
§ 11. Равносильные уравнения. Уравнение-следствие. Рациональные уравнения 73
§ 12. Рациональные уравнения с параметрами 83
§ 13. Степень с целым отрицательным показателем 89
§ 14. Свойства степени с целым показателем 97
§ 15. Функция $y = \frac{k}{x}$ и её график 103
Итоги главы 2 114

Глава 3 Основы теории делимости

§ 16. Делимость нацело и её свойства 117
§ 17. Деление с остатком. Сравнения по модулю и их свойства .. 122
§ 18. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух натуральных чисел. Взаимно простые числа 131
§ 19. Признаки делимости 138
§ 20. Простые и составные числа 143
• О проблемах, связанных с простыми числами 152
Итоги главы 3 158

Глава 4 **Неравенства**
§ 21. Числовые неравенства и их свойства ... 161
§ 22. Сложение и умножение числовых неравенств. Оценивание значения выражения ... 168
§ 23. Неравенства с одной переменной. Числовые промежутки 174
§ 24. Системы и совокупности линейных неравенств с одной переменной ... 185
§ 25. Уравнения и неравенства, содержащие знак модуля ... 196
Итоги главы 4 ... 207

Глава 5 **Квадратные корни. Действительные числа**
§ 26. Функция $y = x^2$ и её график ... 211
§ 27. Квадратные корни. Арифметический квадратный корень 217
• Растут ли в огороде радикалы? ... 228
§ 28. Множество действительных чисел ... 229
• Когда тайное становится явным ... 237
• О счётности числовых множеств ... 239
§ 29. Свойства арифметического квадратного корня ... 240
§ 30. Тождественные преобразования выражений, содержащих арифметические квадратные корни ... 250
§ 31. Функция $y = \sqrt{x}$ и её график ... 263
Итоги главы 5 ... 270

Глава 6 **Квадратные уравнения**
§ 32. Квадратные уравнения. Решение неполных квадратных уравнений ... 272
§ 33. Формула корней квадратного уравнения ... 278
§ 34. Теорема Виета ... 289
§ 35. Квадратный трёхчлен ... 296
§ 36. Решение уравнений, сводящихся к квадратным уравнениям ... 304
§ 37. Решение уравнений методом замены переменной ... 310
• Тайное оружие Сципиона дель Ферро ... 322
§ 38. Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций ... 323
§ 39. Деление многочленов ... 328
§ 40. Корни многочлена. Теорема Безу ... 332
§ 41. Целое рациональное уравнение ... 338
Итоги главы 6 ... 342

Проектная работа ... 345
Дружим с компьютером ... 350
Ответы и указания ... 359
Алфавитно-предметный указатель ... 380

Таблица простых чисел

2	79	191	311	439	577	709	857
3	83	193	313	443	587	719	859
5	89	197	317	449	593	727	863
7	97	199	331	457	599	733	877
11	101	211	337	461	601	739	881
13	103	223	347	463	607	743	883
17	107	227	349	467	613	751	887
19	109	229	353	479	617	757	907
23	113	233	359	487	619	761	911
29	127	239	367	491	631	769	919
31	131	241	373	499	641	773	929
37	137	251	379	503	643	787	937
41	139	257	383	509	647	797	941
43	149	263	389	521	653	809	947
47	151	269	397	523	659	811	953
53	157	271	401	541	661	821	967
59	163	277	409	547	673	823	971
61	167	281	419	557	677	827	977
67	173	283	421	563	683	829	983
71	179	293	431	569	691	839	991
73	181	307	433	571	701	853	997

Свойства степени с целым показателем

Для любых $a \neq 0$ и $b \neq 0$ и любых целых m и n выполняются равенства:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (основное свойство степени);

$(a^m)^n = a^{mn}$;

$(ab)^n = a^n b^n$;

$a^m : a^n = a^{m-n}$;

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Свойства арифметического квадратного корня

Для любого действительного числа a выполняется равенство $\sqrt{a^2} = |a|$.

Для любого действительного числа a и натурального числа n выполняется равенство $\sqrt{a^{2n}} = |a^n|$.

Для любых действительных чисел a и b таких, что $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, выполняется равенство $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Для любых действительных чисел a и b таких, что $a \geqslant 0$ и $b > 0$, выполняется равенство

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Если $a > b \geqslant 0$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

Если $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, то $a > b$.

Формула корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Теорема Виета

Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Таблица квадратов натуральных чисел от 10 до 99

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Основные свойства числовых неравенств

Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

Если $a > b$ и c — любое число, то $a + c > b + c$.

Если $a < b$ и c — любое число, то $a + c < b + c$.

Если $a > b$ и c — положительное число, то $ac > bc$.

Если $a > b$ и c — отрицательное число, то $ac < bc$.

Сложение и умножение числовых неравенств

Если $a > b$ и $ab > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

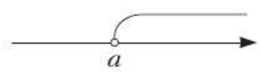
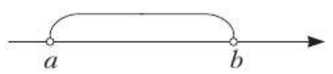
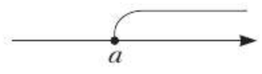
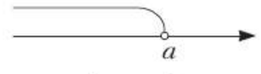
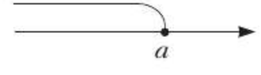
Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.

Если $a > b$, $c > d$ и a, b, c, d — положительные числа, то $ac > bd$.

Если $a < b$, $c < d$ и a, b, c, d — положительные числа, то $ac < bd$.

Числовые промежутки

 $(a; +\infty)$	 $(a; b)$
 $[a; +\infty)$	 $[a; b)$
 $(-\infty; a)$	 $(a; b]$
 $(-\infty; a]$	 $[a; b]$