Домашняя контрольная работа

1. Выбрать индивидуальный тест.
2. Выполнить задание на двойном листе.

Критерии оценивания:
B1 - B12 - 1 балл
C1-C3 - 2 балла
C4-C6 - 3 балла

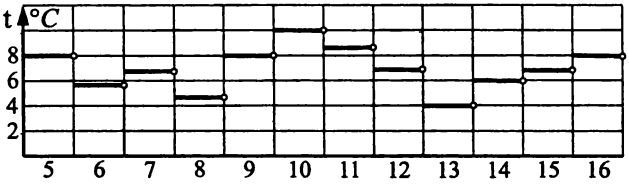
"3" - 8 б
"4" - 10 б
"5" - 13 б

Тест №2

Часть 1

B1 На электрический подъёмник разрещается класть не более 80 кг груза. Какое наибольшее количество деталей весом 3 кг 400 г каждое можно поднять за один раз на этом подъёмнике?

B2 На рисунке изображен график среднесуточной температуры в г. Рязани в период с 5 по 16 апреля 1999 г. На оси абсцисс откладываются числа, на оси ординат – температура в градусах Цельсия. Определите по графику наименьшую среднесуточную температуру за весь рассматриваемый период.



B3 Найдите корень уравнения $x = \frac{21 + 5x}{x + 1}$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе укажите больший из них.

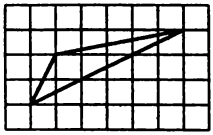
B4 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC $\cos \angle A = \frac{2}{5}$, а высота, проведенная к основанию, равна $2\sqrt{21}$. Найдите AB.

B5 В таблице даны условия банковского вклада в трёх различных банках. Предполагается, что клиент кладёт на счёт 12000 руб. на срок 1 год. В каком банке к концу года вклад окажется наибольшим? В ответе укажите сумму этого вклада в рублях.

Банк	Обслуживание счета	Процентная ставка (% годовых)
A	40 руб. в год	2,5
B	11 руб. в месяц	3,1
C	Бесплатно	2,2

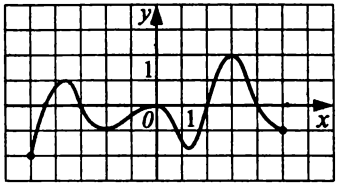
B6 Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге

с размером клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



B7 Найдите значение выражения $6^9 \cdot 3^8 : 18^7$

B8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, заданной на промежутке $[-5; 5]$. Пользуясь этим рисунком, найдите максимальную длину промежутка, на котором производная этой функции отрицательна.



B9 Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 3. Найдите объём параллелепипеда.

B10 Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$. При каком минимальном значении температуры нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не меньше 50%, если температура холодильника $T_2 = 450$?

B11 Найдите наибольшее значение функции $y = 5\cos x - 10x + 1$ на отрезке $[0; \pi]$.

B12 Турист должен прийти из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 10 км, в назначенный срок. Пройдя половину пути турист подсчитал, что опоздает на 45 минут, если продолжит движение с прежней скоростью, а если увеличит скорость на 1,5 км/ч, то окажется в пункте B точно в назначенный срок. Какова была первоначальная скорость туриста?

Часть 2

C1 Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + 3 - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 1{,}5(x + 4), \\ 2\sqrt{2}\cos y = x. \end{cases}$$

C2 Точка O — точка пересечения диагоналей основания $ABCD$ правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Боковое ребро призмы равно $\sqrt{2}$, а сторона основания равна $2\sqrt{7}$. Найдите косинус угла между прямой A_1O и плоскостью боковой грани ABB_1A_1.

C3 Решите неравенство $3\log_{x-2}(8-x)+1 \geqslant \frac{1}{4}\log^2_{x-2}(x^2-10x+16)^2$

C4 В треугольнике ABC на стороне AB взята такая точка D, что $AD:BD = 1:8$. Известно, что $\angle BAC = 60°$, $AB = 9$. Какую длину может иметь сторона AC, если известно, что окружность, проходящая через точки B, D и касающаяся прямой AC, касается также прямой BC?

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $9x - 6\cdot|3x-4| \geqslant |x-|5x+a||$ выполнено хотя бы для одного целого значения x.

C6 Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, что если число a возвести в квадрат и к полученному числу приписать справа десятичную запись числа b, то получится число, большее произведения чисел a и b ровно в три раза.

Тест №3

C1 Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3 - 8x^2y - 9x + 72y = 0, \\ x^2 - 4y^2 = 15. \end{cases}$$

C2 На ребре DC правильной треугольной пирамиды $ABCD$ с вершиной D взята точка M так, что $CM:MD = 1:3$. Высота DH пирамиды равна 16, а расстояние между прямыми DH и AB равно 2. Найдите тангенс угла между плоскостью ABM и плоскостью основания пирамиды.

C3 Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{4^x - 5\cdot 2^{x+1} + 16}}{10^{2x+1} - 1001\cdot 10^x + 100} \leqslant 0.$

C4 Радиус вписанной окружности треугольника равен 1, а точка касания вписанной окружности с одной из сторон треугольника делит эту сторону на отрезки длины 7 и 3. Найдите площадь данного треугольника.

C5 Найдите все значения параметра a, при которых для любого x из отрезка $[-2;2]$ справедливо неравенство $|ax+8|x|+5| \geqslant 3$.

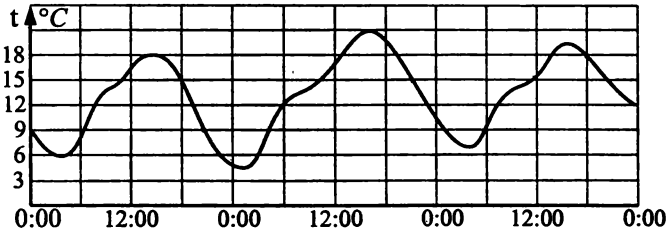
C6 Найдите все пары натуральных чисел m и n, для которых выполнено равенство $3^m + 7 = 2^n$.

Тест № 4

Часть 1

B1 Тетрадь стоит 30 руб. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 650 руб. после понижения цены на 15%?

B2 На графике показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток, начиная с 0 часов 21 сентября. На оси абсцисс отмечается время суток, на оси ординат — значение температуры в градусах. Определите по графику, до какой наибольшей температуры прогрелся воздух 22 сентября. Ответ дайте в градусах Цельсия.



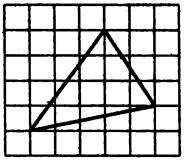
B3 Найдите корень уравнения $\sqrt{8x-3} = 2x$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе укажите меньший из них.

B4 В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AB = 4\sqrt{13}$, $\operatorname{tg}\angle A = 1{,}5$. Найдите длину стороны AC.

B5 Своему постоянному клиенту компания сотовой связи предоставила на выбор одну из скидок. Либо скидку 6% на звонки абонентам других сотовых компаний в своём регионе, либо скидку 18% на звонки в другие регионы, либо 25% на услуги мобильного интернета.

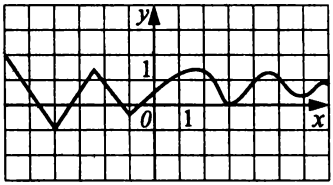
Клиент рассмотрел распечатку своих звонков и выяснил, что за месяц он потратил 800 руб. на звонки абонентам других компаний в своём регионе, 250 руб. на звонки в другие регионы и 185 руб. на мобильный интернет. Клиент предполагает, что в следующем месяце затраты будут такими же и, исходя из этого, выбирает наиболее выгодную для себя скидку. Какую скидку выбрал клиент? В ответе запишите, сколько рублей составит эта скидка.

B6 Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



B7 Найдите значение выражения $\sqrt{100^2 - 80^2} - \sqrt{290^2 - 200^2}$.

B8 На рисунке изображён участок графика функции $y = f(x)$. Пользуясь этим рисунком, найдите количество точек из промежутка $[-5; 5]$, в которых производная данной функции равна нулю.



B9 В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 20 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если её перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания в 2 раза меньше, чем у первого? (Ответ выразите в сантиметрах.)

B10 При температуре $0°C$ рельс имеет длину $l_0 = 20$ м. При прокладке путей между рельсами оставили зазор в 2,4 мм. При возрастании температуры будет происходить тепловое расширение рельса, и его длина будет меняться по закону $l(t°) = l_0(1 + \alpha \cdot t°)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}(°C)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, $t°$ — температура (в градусах Цельсия). При какой минимальной температуре между рельсами исчезнет зазор? (Ответ выразите в градусах Цельсия.)

B11 Найдите наименьшее значение функции $y = -4\sin x + 14x + 4$ на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

B12 Группа туристов прошла первую половину маршрута со скоростью на 30% больше запланированной. Определите максимальное число процентов, на которое туристы могут сбавить скорость на второй половине маршрута, чтобы закончить поход к запланированному времени.

Часть 2

C1 Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^4 - 2x^3y - 8x + 16y = 0, \\ \sqrt{x - 4y} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{2y - 1}. \end{cases}$$

C2 Точка M — середина ребра SC правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S. Высота SH пирамиды равна 12, а расстояние между прямыми SH и AB равно 4. Найдите тангенс угла между плоскостью ABM и плоскостью основания пирамиды.

C3 Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x^2}}{81^x - 28 \cdot 3^{2x+1} + 243} \geqslant 0.$

C4 Окружность, радиус которой равен 14, касается одной из сторон треугольника и продолжений двух других сторон этого треугольника. Точка касания окружности со стороной треугольника делит эту сторону на отрезки длины 7 и 8. Найдите площадь данного треугольника.

C5 Найдите все значения параметра a, при которых для любого x из отрезка $[-5; 5]$ справедливо неравенство $|a \cdot |x| - 6x + 12| \geqslant 2$.

C6 Найдите все пары натуральных чисел m и n, для которых выполнено равенство $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$.

Тест № 5

C1 Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{\pi \cdot (2\pi + x + y)} - \sqrt{2{,}5\pi^2 - 4(x + y)^2} = 0, \\ \sin x \cdot (\sin y + \cos y) + \cos x \cdot (\sin y - \cos y) = 0. \end{cases}$$

C2 Основанием прямой призмы является ромб, длина стороны которого равна 2, а больший из углов равен 120°. Найдите длину меньшей диагонали призмы, если известно, что объём призмы равен 12.

C3 Решите неравенство $\dfrac{\log_2 \log_4 (x+1)}{x^2-6x+8} \cdot \left(25^x - 130 \cdot 5^x + 625\right) \geqslant 0.$

C4 Окружность радиуса 12 вписана в равнобедренную трапецию. Точка касания окружности с боковой стороной трапеции делит эту сторону в отношении 1 : 4. Найдите периметр трапеции.

C5 При каких значениях параметра m уравнение $16 \cdot 4^x - 15 = 3m + m \cdot 4^{x+3}$ имеет хотя бы один корень?

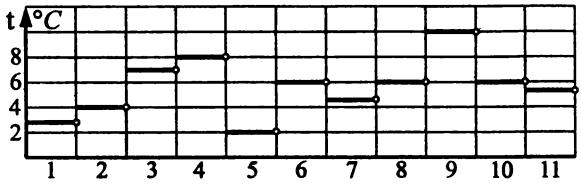
C6 Найдите все такие натуральные числа n, что десятичная запись каждого из чисел $\dfrac{1}{n}$ и $\dfrac{1}{n+1}$ содержит конечное число знаков.

Тест № 6

Часть 1

B1 В магазине 1 кг клубники стоит 110 руб. Мама купила 1 кг 600 г клубники. Сколько рублей сдачи она должна получить с 500 руб.?

B2 На рисунке изображен график среднесуточной температуры в г. Орске в период с 1 по 11 марта 2001 г. На оси абсцисс откладываются числа, на оси ординат – температура в градусах Цельсия. Определите по графику, сколько дней из указанного периода среднесуточная температура была в пределах от $4°C$ до $8°C$ (включительно).



B3 Найдите корень уравнения $5^{5x+1,5} = 25$.

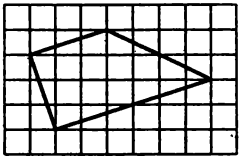
B4 В треугольнике ABC: $\angle C = 90°$, $BC = 2$, $AC = 2\sqrt{3}$. Найдите $\cos \angle B$.

B5 Стоимость работ по кладке кафельной плитки в 2005 г. приведена в таблице.

место кладки	цена в руб. за 1 м^2 (в зависимости от площади)		
	до 15 м^2	от 15 до 30 м^2	свыше 30 м^2
стена	400	350	300
пол	300	250	200

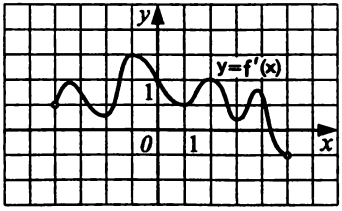
Определите, какова будет стоимость работ по кладке стен площадью 45 м^2 и пола площадью 25 м^2 в 2009 г., если за прошедший период стоимость работ по кладке стен повысилась на 20%, по кладке полов — на 10%.

B6 Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



B7 Найдите значение выражения $\dfrac{x^{12} \cdot x^{-1}}{x^9}$ при $x = 2$.

B8 Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4; 5)$. На данном ниже рисунке изображён график её производной. Найдите число касательных к графику функции $y = f(x)$, которые параллельны оси абсцисс.



B9 Цилиндр и конус имеют общее основание и высоту. Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 15.

B10 Для одного предприятия-монополиста зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от ее цены p (в тыс. руб.) задаётся формулой: $q = 450 - 25p$. Определите максимальный уровень цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ будет составлять не менее 1125 тыс. руб.

B11 Найдите наименьшее значение функции $y = 20\operatorname{tg} x - 20x - 5\pi + 25$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

B12 Бассейн можно наполнять через четыре трубы. Если открыты вторая, третья и четвёртая трубы, то бассейн наполняется за 1 час, если первая, третья и четвёртая — за 1 ч. 15 мин, а если только первая и вторая — за 1 ч. 40 мин. За сколько минут наполнится бассейн, если открыть все четыре трубы?

Часть 2

C1 Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{2\pi^2 - x^2} - \sqrt{\pi^2 - 2y^2} = 0, \\ \sin(x - y) - \sin(x + y) = 0. \end{cases}$$

C2 Основанием прямой призмы является параллелограмм, стороны которого равны 3 и $2\sqrt{3}$, а один из углов равен 30°. Найдите объём призмы, если известно, что её меньшая диагональ равна $\sqrt{6}$.

C3 Решите неравенство $\dfrac{\log_9 \log_3 (x-1)}{x^2 - 9x + 20} \cdot \left(4^x - 2^{x+2} - 32\right) < 0$.

C4 Внутри трапеции $ABCD$ расположена окружность радиуса 3, касающаяся обоих оснований трапеции и её боковой стороны AB в точке P. Найдите расстояние от центра этой окружности до середины стороны CD, если известно, что площадь трапеции $ABCD$ равна 51, а $BP : PA = 4 : 9$.

C5 При каких значениях параметра n уравнение $10 \cdot 5^x - 9 = 6n - n \cdot 5^{x+2}$ не имеет корней?

C6 Найдите все такие натуральные числа n, что десятичная запись каждого из чисел $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n+4}$ содержит конечное число знаков.

Тест №7

C1 Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} y = 4\cos x - 3\sin x, \\ \operatorname{ctg} y = \sin x. \end{cases}$$

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 5, а высота равна $5\sqrt{2}$. Найдите расстояние от вершины A до плоскости BDM, где M – середина ребра CC_1.

C3 Решите неравенство $\lg^2 \frac{(x-3)^2 \cdot (x-2)}{18} > \lg^2 \frac{x-2}{2}$.

C4 В трапеции $ABCD$ продолжения боковых сторон AB и CD пересекаются в точке P, Q – точка пересечения диагоналей этой трапеции, $AD = 3BC$. Найдите отношение площади треугольника ADQ к площади треугольника BCP.

C5 Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $\cos 2x - 4 = p \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x)$ имеет хотя бы один корень.

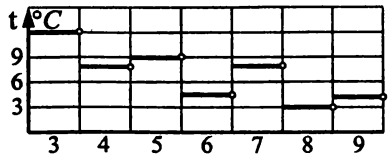
C6 Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, что $a \leqslant b$ и выполнено равенство $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{10}$.

Тест №8

Часть 1

B1 Стоимость женского костюма была повышена на 22% и составила 3050 руб. Сколько рублей стоил костюм до повышения цены?

B2 На рисунке изображен график среднесуточной температуры в г. Воронеже в период с 3 по 9 марта 1978 г. На оси абсцисс откладываются числа, на оси ординат – температура в градусах Цельсия. Определите по графику разность между максимальной и минимальной среднесуточными температурами в период с 4 по 9 марта 1978 г.

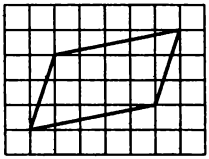


B3 Найдите корень уравнения $0{,}1^{34-4x}=\frac{1}{10000}$.

B4 В равнобедренном треугольнике ABC: $AB=BC=8$, $\sin\angle B=\frac{\sqrt{7}}{4}$, AH – высота. Найдите BH.

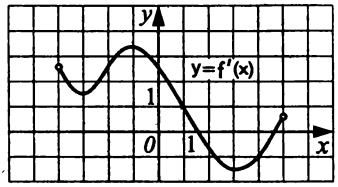
B5 Для строительства дачи можно использовать один из двух вариантов фундамента: бетонный или фундамент из пеноблоков. Для фундамента из пеноблоков необходимо 4 кубометра пеноблоков и 5 мешков цемента. Для бетонного фундамента необходимо 3,5 тонны щебня и 22 мешка цемента. Кубометр пеноблоков стоит 2600 руб., щебень – 800 руб. за тонну, а мешок цемента – 400 руб. Сколько рублей стоит самый дешевый вариант?

B6 Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



B7 Найдите значение выражения $(9x-10)(9x-10)-81x^2+200x-90$ при $x=0{,}5$.

B8 Функция $y=f(x)$ определена на интервале $(-4;5)$. На данном ниже рисунке изображён график её производной. Укажите количество точек, в которых угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ является целым числом.



B9 Объём конуса равен 40. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объём меньшего конуса.

B10 Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задается формулой $T(t) = T_0 + at + bt^2$, где $T_0 = 1500$ К, $a = 100$ К/мин, $b = -0{,}5$ К/мин^2. Известно, что при температуре нагревателя свыше 4700 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор. (Ответ выразите в минутах.)

B11 Найдите точку минимума функции $y = (x^2 - 11x - 25)e^{x-12}$

B12 Двое каменщиков, работая вместе, за 1 час могут выложить участок стены площадью 2м^2. Работая отдельно, второй каменщик выложит участок стены площадью 4,8м^2 на 2 часа быстрее, чем это сделает первый. За сколько часов, работая отдельно, первый каменщик выложит стену площадью 8м^2?

Часть 2

C1 Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\cos x - 9\sin x + \sin y = 0, \\ \sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos y} = 0. \end{cases}$$

C2 Высота правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 3, а сторона основания равна $4\sqrt{2}$. Найдите расстояние от вершины A до плоскости BDM, где M – середина бокового ребра SC.

C3 Решите неравенство $\ln^2 \frac{(x-2)^2 \cdot (x+3)}{3} < \ln^2 \frac{x+3}{12}$.

C4 В трапеции $ABCD$ продолжения боковых сторон AB и CD пересекаются в точке P, Q – точка пересечения диагоналей этой трапеции. Найдите отношение длины меньшего из оснований данной трапеции к длине большего из оснований, если площадь треугольника ABQ составляет $\frac{1}{4}$ от площади треугольника ACP.

C5 Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $\sin^4 x - 4\cos^3 x \cdot \sin x = (p-5) \cdot \cos^4 x$ не имеет корней.

C6 Найдите все такие тройки натуральных чисел a, b и c, что $a<b<c$ и выполнено равенство $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$.

Тест №9

C1 Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 5\sqrt{2x+3y-23}=2x+3y-17, \\ \dfrac{5x+4y-9}{27-2x-3y}=x-4y+0{,}8. \end{cases}$$

C2 Концы отрезка KM лежат на окружностях оснований цилиндра. Высота цилиндра равна 12, радиус основания равен 4, а расстояние от оси цилиндра до параллельной ей плоскости, проходящей через точки K и M, равно 2. Найдите тангенс угла между прямой KM и плоскостью основания цилиндра.

C3 Решите неравенство $\log_{x/3}\left(\log_3\frac{x-12}{x-10}\right)\geqslant 0$.

C4 Через одну из точек пересечения двух окружностей проведена прямая, пересекающая одну из этих окружностей в точке A, а другую — в точке B. Найдите наибольшее возможное значение длины отрезка AB, если расстояние между центрами данных окружностей равно d.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $25^{x^2+4x+2}+(a-16)\cdot 5^{x^2+6x+2}=(a^2+5a-64)\cdot 5^{4x}$ имеет четыре корня.

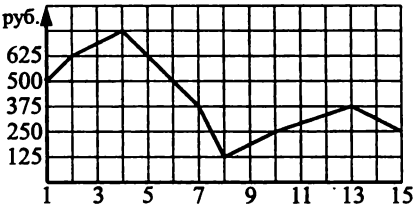
C6 Найдите наибольшее значение выражения $\dfrac{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}{x+y+z}$ при $x>0$, $y>0$, $z>0$.

Тест №10

Часть 1

B1 Саша купил месячный проездной билет на автобус. За месяц он сделал 48 поездок. Сколько рублей он сэкономил, если проездной билет стоит 790 руб., а разовая поездка стоит 23 руб.?

B2 На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций горнодобывающей компании в первой половине мая. 2 мая бизнесмен приобрёл 14 акций этой компании. 8 акций он продал 6 мая, а остальные акции продал 10 мая. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций?



B3 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3x-16} = 243^x$.

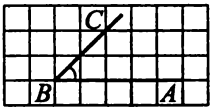
B4 В прямоугольном треугольнике ABC: $\angle C = 90°$, CH – высота, $BC = 20$, $BH = 5\sqrt{15}$. Найдите $\cos\angle A$.

B5 В таблице приведена стоимость ситца и бязи (в руб. за погонный метр), произведенных тремя фабриками: A, B и C.

вид ткани	фабрика A	фабрика B	фабрика C
ситец	15	18	16
бязь	30	25	27

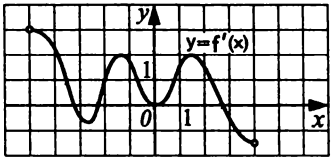
Определите минимальную стоимость 2000 метров ткани, из которой ситца не более 700 метров, если при покупке всей требуемой ткани у одной из фабрик (A, B или C) предоставляется скидка 5%.

B6 На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см изображен угол $\angle ABC$. Найдите площадь S пересечения угла $\angle ABC$ и круга с центром в точке B радиуса 6. В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.



B7 Найдите значение выражения $\log_{\frac{1}{5}}\sqrt{5} + \log_{\frac{1}{5}} 5\sqrt{5}$.

B8 Функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-5; 4)$. На данном ниже рисунке изображён график её производной. Укажите количество точек с целыми абсциссами, в которых функция $y = f(x)$ убывает.



B9 Два ребра прямоугольного параллелепипеда, равные 2 и 4, выходят из одной вершины. Площадь поверхности параллелепипеда равна 88. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.

B10 Мяч бросили вертикально вверх. Его высота над землей меняется по закону $h(t) = 3 + 15t - 6t^2$ м. Определите, сколько секунд мяч будет находиться на высоте более 9 метров.

B11 Найдите наименьшее значение функции $y = (x + 7)e^{x+8}$ на промежутке $[-9; -7]$.

B12 В химической лаборатории в двух сосудах содержится раствор борной кислоты различной концентрации. В первом сосуде содержится 3 литра раствора, а во втором — 5 литров. Если растворы, находящиеся в этих сосудах, смешать, то получится 44% раствор кислоты. А если смешать равные объёмы этих растворов, то получится 40% раствор. Какова концентрация (в процентах) раствора в первом сосуде?

Часть 2

C1 Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x - 6y + 1}{3x + y - 1} = 5 - x - 4y, \\ 10 \cdot 8^x \cdot 2^y - 16 = 4^{3x+y}. \end{cases}$$

C2 Концы отрезка KM лежат на окружностях оснований цилиндра. Высота цилиндра равна 24, радиус основания равен 13, а угол между прямой KM и плоскостью основания цилиндра равен 45°. Найдите расстояние между осью цилиндра и параллельной ей плоскостью, проходящей через точки K и M.

C3 Решите неравенство $\log_{0,5x-2}\left(\log_2 \frac{x-9}{x-7}\right) \geqslant 0$.

C4 Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена касательная к первой окружности, пересекающая вторую окружность в точке C, а через точку B проведена касательная ко второй окружности, пересекающая первую окружность в точке D. Укажите наименьшее значение, которое может иметь сумма длин отрезков AD и BC, если известно, что $AB = 1$.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $9^{x^2+x+5} + (a^2-10)\cdot 3^{x^2-2x+5} = (4-a^2)\cdot 3^{-6x}$ имеет ровно два корня.

C6 Найдите наименьшее значение выражения $\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy}$ при $x>0$, $y>0$, $z>0$.

Тест №11

C1 Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{2xy+4}{y-1} + 3 = 2x, \\ 2\log_3 \dfrac{x^3-49x-81}{6y+7} = 8 - \log_{\sqrt{3}}(4x-5). \end{cases}$$

C2 Высота конуса равна $\sqrt{6}$, а радиус основания равен $\sqrt{10}$. Образующие конуса SL и SP составляют угол в 60°. Найдите тангенс угла между плоскостью SLP и плоскостью основания конуса.

C3 Решите неравенство

$$\frac{|\log_2(x^2-6x+9) - 6\log_{x-3}4 + 2|}{\log_2(x^2-6x+9) - 6\log_{x-3}4 + 2} - \frac{|2x^2-21x+10|}{2x^2-21x+10} \leqslant 0.$$

C4 Площадь треугольника ABC равна $60\sqrt{2}$. Найдите длину AC, если длина AB равна 11 и она больше половины длины AC, а длина медианы BM равна 10.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4^{1-2x-x^2} + (3-a)\cdot 2^{1-2x-x^2} + a - 4 = 0$ имеет ровно два корня.

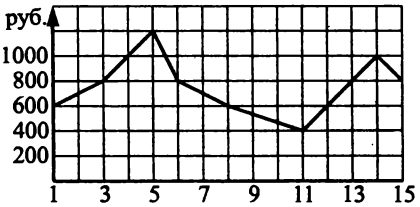
C6 Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $|x+1|\cdot(x-5)\leqslant(a+4)\cdot(|x-2|-3)$ содержит все члены некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом, равным 3,7, и положительным знаменателем.

Тест №12

Часть 1

B1 На день рождения полагается дарить букет из нечётного числа цветов. Тюльпаны стоят 40 руб. за штуку. У Вани есть 490 руб. Из какого наибольшего числа тюльпанов он может купить букет Лизе на день рождения?

B2 На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций нефтеперерабатывающей компании в первые две недели декабря. В первую неделю бизнесмен купил 15 акций, а потом продал их на второй неделе. Какую наибольшую прибыль он мог получить?



B3 Найдите корень уравнения $\log_3(x+3)=\log_3 15$.

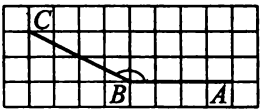
B4 В равнобедренном треугольнике ABC: $AB=BC=12$, $AC=6\sqrt{15}$. Найдите синус внешнего угла при вершине A.

B5 Сети магазинов по продаже канцелярских товаров требуется приобрести тетради. В таблице приведена стоимость тетрадей (в руб. за 1 шт.) в зависимости от цвета листов и производителей – заводов А и В.

цвет листов	завод А	завод В
белый	24	25
серый	16	18

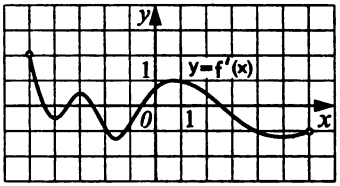
При покупке тетрадей, выпущенных заводом А на сумму от 250000 руб. предоставляется скидка 5%, а при покупке тетрадей, выпущенных заводом В на сумму от 300000 руб. – скидка 10%. Определите минимальную стоимость покупки (в рублях), состоящей из 20000 тетрадей, из которых не менее 5000 тетрадей должны быть с белыми листами.

B6 На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см изображен угол $\angle ABC$. Найдите площадь S пересечения угла $\angle ABC$ и круга с центром в точке B радиуса 6. В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.



B7 Найдите значение выражения $\log_5 17 \cdot \log_{17} 125$.

B8 Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 6)$. На данном ниже рисунке изображён график её производной. К графику функции $y = f(x)$ провели касательные во всех точках, абсциссы которых целые числа. Определите количество точек, в которых проведённые касательные имеют отрицательный угловой коэффициент.



B9 Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 3, а высота – 5.

B10 После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик определяет его, измеряя время падения t небольших камушков в колодец и рассчитывая уровень воды по формуле $h = L - 5t^2$, где L – глубина колодца. До дождя время падения камушков составляло 0,8 с. На какую минимальную высоту должен подняться уровень воды после дождя, чтобы

измеряемое время изменилось не меньше, чем на 0,3 с? (Ответ выразите в метрах.)

B11 Найдите наименьшее значение функции $y = 5x - \ln(x+5)^5$ на промежутке $(-5;0)$.

B12 Из бутыли, содержащей 750 граммов 9% раствора уксусной кислоты, отлили некоторое количество этого раствора и добавили такое же количество воды. Определите, сколько граммов раствора было отлито, если известно, что в результате получили 6%-ый раствор.

Часть 2

C1 Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3 \cdot \dfrac{3xy+2x+6}{y+1} - 2 = 9x, \\ \sqrt{3x-x^3+222} \cdot \sqrt{22-2y} = 3(x+2). \end{cases}$$

C2 Высота конуса равна $\sqrt{6}$, а образующая равна 6. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости, проходящей через две взаимно перпендикулярные образующие.

C3 Решите неравенство

$$\frac{|\lg^3 x - \lg x|}{\lg^3 x - \lg x} \cdot \frac{|\log_5 x - 4\log_x 5|}{\log_5 x - 4\log_x 5} - 1 < 0.$$

C4 Площадь треугольника ABC равна $12\sqrt{3}$. Длина AB равна 7, а длина медианы BM равна 3. Найдите длину AC, если известно, что она является целым числом.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $9^{6(x-1)-x^2} - (a+2)\cdot 3^{6x-4-x^2} - 81(a^2-1) = 0$ имеет четыре корня.

C6 Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $|x+2|\cdot(x-4) \leqslant (a^2-5)\cdot(|x-1|-3)$ содержит все члены некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом, равным 2,5, и положительным знаменателем.

Тест №13

C1 Решите уравнение $\sqrt{4^x - 5\cdot 2^{x+1} + 25} + \sqrt{4^x - 2^{x+3} + 7} = 2^x - 5$.

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ высота AA_1 в два раза длинее стороны основания. Найдите объём призмы, если расстояние между серединами рёбер AD и A_1B_1 равно $6\sqrt{2}$.

C3 Решите неравенство $\dfrac{\log_{4x}(2^x - 1)}{\log_{2x}(4^x - 1)} \geqslant 0$.

C4 Из вершины B параллелограмма $ABCD$ проведены его высоты BM и BN, H — точка пересечения высот треугольника BMN. Найдите длину отрезка BH, если известно, что $MN = 15$, $BD = 17$.

C5 Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены формулами $f(x) = 2^x - 7$, $g(x) = 1 + \sin\dfrac{\pi x}{2}$. Решите уравнение $f\big(g(x) + 1\big) - g\big(f(x)\big) = 1$.

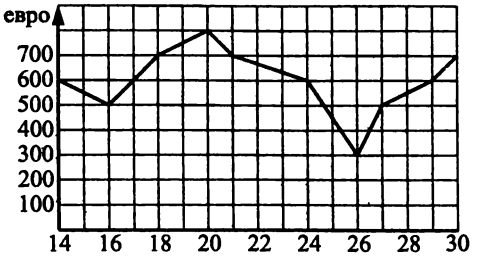
C6 Стороны прямоугольника равны 3 и 9. Прямая, пересекающая две соседние стороны прямоугольника, отсекает от него треугольник, периметр которого равен 12. Найдите наименьшее значение площади оставшейся части прямоугольника.

Тест №14

Часть 1

B1 Таксист за месяц проехал 8000 км. Стоимость 1 литра бензина — 22 руб. Средний расход бензина на 100 км составляет 9,5 литров. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?

B2 На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций золотодобывающей компании во второй половине августа. У бизнесмена было 160 акций. 25% акций он продал 17 августа, половину оставшихся акций — 21 августа, а оставшиеся акции — 24 августа. На сколько евро больше прибыли получил бы бизнесмен, если бы он продал все имеющиеся акции 20 августа?



B3 Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{27}}(4x+1) = -1$.

B4 В параллелограмме $ABCD$ угол A острый, высота, опущенная на сторону AD, равна 9, $AB = 15$. Найдите косинус угла B.

B5 В таблице приведена стоимость паркета трех видов – A, B, C.

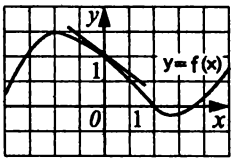
Вид паркета	Цена – руб. за 1 м^2	Дополнительные скидки (сумма заказа – скидка)
A	60	свыше 4500 руб. – 5%
B	45	свыше 2000 руб. – 2%
C	55	свыше 4000 руб. – 3%

Какова минимальная стоимость паркета, необходимого для укладки в три комнаты площадью 80 м^2, 60 м^2 и 40 м^2, если требуется, чтобы был использован паркет всех трёх видов, а в первой комнате был уложен паркет вида A или C?

B6 Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты (1;5), (3;6), (5;3), (5;−1).

B7 Найдите значение выражения $5 \cdot 13^{\log_{13} 15} - \sqrt{3} \cdot 14^{\log_{14} \sqrt{12}}$.

B8 На рисунке изображены участки графика функции $y = f(x)$ и касательной к нему в точке с абсциссой $x = 0$. Известно, что данная касательная параллельна прямой, проходящей через точки графика с абсциссами $x = -2$ и $x = 2$. Используя это, найдите значение производной $f'(0)$.



B9 Площадь большого круга шара равна 3. Найдите площадь поверхности шара.

B10 Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 18$ м/с и тормозящий с постоянным ускорением $a = 4$ м/с^2, за t секунд после начала торможения проходит путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$. Определите наименьшее время (в секундах), прошедшее от момента начала торможения, если за это время автомобиль проехал не менее 36 метров.

B11 Найдите наибольшее значение функции $y = -7x + \ln(7x) + 70$ на промежутке $(0; 7)$.

B12 Стоимость туристической путёвки складывается из суммарной стоимости авиабилетов и проживания в отеле. В связи с тем, что авиабилеты подорожали на 30%, а проживание в отеле подорожало на 15%, стоимость путёвки увеличилась на 18%. Сколько процентов от стоимости путёвки составляла стоимость авиабилетов до подорожания?

Часть 2

C1 Решите уравнение $\sqrt{36^x - 3 \cdot 6^{x+1} + 81} + \sqrt{9^x - 11 \cdot 3^x + 18} = 9 - 6^x$.

C2 На ребре A_1B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка P так, что $A_1P : PB_1 = 3 : 1$, а на ребре DD_1 взята такая точка K, что $DD_1 = 3DK$. Найдите длину ребра куба, если известно, что $PK = 34$.

C3 Решите неравенство $\dfrac{\log_x(2x+1) \cdot \log_{2x}(4x-2)}{\log_{3x}(5x-2)} \leqslant 0$.

C4 Из вершины B параллелограмма $ABCD$ проведены его высоты BM и BN. Известно, что $\angle A = 60°$, точки M и N лежат на сторонах параллелограмма, $DM = 4$, $DN = 2$. Найдите площадь треугольника BMN.

C5 Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены формулами $f(x) = 3^x + x - 3$, $g(x) = \cos \pi x - 3$. Решите уравнение $f\big(g(x) + 2\big) - g\big(f(x)\big) = 2$.

C6 Стороны прямоугольника равны 16 и 20. Прямая, пересекающая две соседние стороны прямоугольника, отсекает от него треугольник, периметр которого равен 40. Укажите все значения, которые может принимать площадь оставшейся части прямоугольника.

Тест №15

C1 Решите уравнение $5x - |x| \cdot \sqrt{25 - \frac{60}{x+4}} + 6 = 0$.

C2 Дана призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которой лежит квадрат, а боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом в 60°. Боковая грань AA_1D_1D перпендикулярна плоскости основания, а её площадь равна $3\sqrt{3}$. Найдите площадь боковой грани AA_1B_1B.

C3 Решите неравенство $3^{x^2-4x-5} + \log_3 \frac{x-3}{6} \leqslant 0$.

C4 В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 20$, $BC = 8$ на стороне AB взята точка L так, что $AL = 4$. На стороне AD взяты такие точки M и N, что $AM = 3$, $DN = 1$. Найдите площадь треугольника MNP, где P – точка пересечения отрезков LN и CM.

C5 Найдите все положительные значения параметра a, при которых в области определения функции $y = \left(a^{2x} - a^{ax-1}\right)^{-0,5}$ есть положительные целые числа, но нет ни одного двузначного натурального числа.

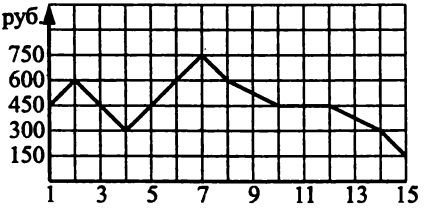
C6 В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 32$ на сторонах AD и CD взяты соответственно точки M и N, такие, что площадь треугольника DMN равна 1. Укажите все значения, которые может принимать площадь треугольника BMN.

Тест №16

Часть 1

B1 В пачке бумаги 500 листов бумаги формата А4. За день в офисе расходуется 1350 листов. Какое наименьшее количество пачек бумаги нужно купить в офис на 5 дней?

B2 На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций нефтедобывающей компании в первой половине декабря. 4 декабря бизнесмен приобрёл пакет акций, а 9 декабря продал его. В результате этих операций его прибыль составила 4500 руб. Сколько акций было в пакете?



B3 Найдите корень уравнения $\log_7\left(\frac{3x+8}{7}\right) = 5\log_7 2$.

B4 Большее основание равнобедренной трапеции равно $5+4\sqrt{105}$. Боковая сторона равна $10\sqrt{5}$. Синус острого угла равен 0,4. Найдите меньшее основание.

B5 Семья из трех человек едет из Волгограда в Челябинск. Можно ехать или поездом, или на своей машине. Билет на поезд стоит 960 руб. на одного человека. Автомобиль расходует 13 литров бензина на 100 км пути. Расстояние по шоссе равно 950 км, а цена бензина равна 21 руб. за литр. Сколько рублей придется заплатить за наиболее дешевую поездку на троих?

B6 Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты $(-2;0)$, $(-3;5)$, $(3;4)$, $(4;-1)$.

B7 Найдите значение выражения $\dfrac{\log_3 2}{\log_{81} 2} - \dfrac{\lg \sqrt[5]{28}}{\lg 28}$.

B8 Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = f(x)$ в точке B, абсцисса которой равна 3. Найдите ординату точки B, если известно, что $f'(3) = 1{,}5$.

B9 Найдите боковое ребро правильной четырехугольной призмы, если сторона её основания равна 6, а площадь всей поверхности равна 168.

B10 В боковой стенке высокого цилиндрического бака вблизи дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, рассчитывается по формуле $H(t)=H_0-\sqrt{2gH_0}\,kt+\frac{g}{2}k^2t^2$, где t – прошедшее время (в секундах), $H_0=45$ м – начальная высота столба воды, $k=\frac{1}{250}$ – отношение площадей поперечных сечений крана и бака, $g=10\,\text{м/с}^2$ – ускорение свободного падения. Через сколько секунд в баке останется не более чем девятая часть первоначального объема?

B11 Найдите наибольшее значение функции $y=x^2-14x+12\ln x+4$ на отрезке $\left[\frac{17}{18};\frac{19}{18}\right]$.

B12 Магазин выставил на продажу товар с наценкой 60% от закупочной цены. После продажи 3/4 всего товара магазин снизил назначенную цену на 40% и распродал оставшийся товар. Сколько процентов от закупочной цены товара составила прибыль магазина?

Часть 2

C1 Решите уравнение $2x-|x|\sqrt{4-\frac{16}{x+6}}+4=0$.

C2 Дана призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которой лежит квадрат, а боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом в 45°. Отрезок A_1D перпендикулярен плоскости основания. Найдите длину этого отрезка, если площадь поверхности призмы равна $8\sqrt{2}+16$.

C3 Найдите все целые значения x, удовлетворяющие неравенству
$$\log_2\left(2+\left(\sqrt[10]{5}\right)^{x^2-11x}+\log_2\frac{x-5}{12}\right)\leqslant 1.$$

C4 В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB=6$, $BC=14$ на стороне AD взята точка M так, что $AM:DM=3\ \ 4$, точка L – середина стороны AB. На отрезке DM взята точка N, P – точка пересечения отрезков LN и CM. Найдите длину отрезка MN, если известно, что площадь треугольника MNP равна 0,5.

C5 Найдите все положительные значения параметра a, при которых в области определения функции $y = \left(a^{3x} - a^{ax+999}\right)^{-0,1}$ есть положительные числа, но нет ни одного трёхзначного натурального числа.

C6 В квадрате $ABCD$, длина стороны которого равна 2, на сторонах AD и CD взяты соответственно точки M и N, такие, что периметр треугольника DMN равен 1. Укажите все значения, которые может принимать площадь треугольника BMN.

Тест №17

C1 Решите уравнение $\sqrt{25 + \frac{12}{\log_x 9}} = 10 \cdot \log_9\left(\frac{1}{3}\sqrt[5]{x^3}\right)$.

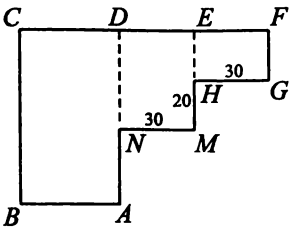
C2 Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC. Сфера с центром в точке O, лежащей на ребре AA_1, пересекает ребро A_1B_1 в точке M и касается плоскостей ABC и BCC_1. Найдите длину стороны основания призмы, если $A_1O : AO = 3 : 5$ и $A_1M = 2\sqrt{3}$.

C3 Решите неравенство $\frac{3\log_2(x+10) - 2}{\log_2(x+10) + 1} \geqslant \frac{3\log_2(60-x) - 2}{\log_2(60-x) + 1}$.

C4 Точка O_1 – центр вписанной окружности треугольника ABC, а точка O_2 – центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Найдите расстояние между точками O_1 и O_2, если радиус описанной окружности треугольника ABC равен 6, а $\sin\angle BO_1C = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

C5 Найдите все положительные значения параметра a, при которых область определения функции $y = \lg\left(a^{x+2} + a^{5+2\log_a x} - x^{2+x\log_x a} - a^7\right)$ содержит ровно три целых числа.

C6 Требуется разметить на земле участок площадью 3700 м^2, который состоит из трёх прямоугольных частей и имеет форму многоугольника $ABCFGHMN$, изображённого на рисунке. Для размеров участка должны быть выполнены условия: $MN = GH = 30$ м, $MH = 20$ м, $GF \leqslant 10$ м. Найдите наименьшее значение периметра такого участка и какие-либо значения длин BC, CF и GF, при которых периметр является наименьшим.

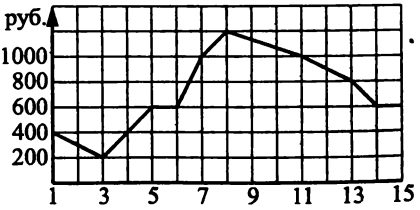


Тест №18

Часть 1

B1 Для приготовления маринада для помидоров на 1 литр воды требуется 14 г лимонной кислоты. Хозяйка готовит 11 литров маринада. В магазине продаются пачки лимонной кислоты по 10 г. Какое наименьшее число пачек нужно купить хозяйке для приготовления маринада?

B2 На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций горнодобывающей компании в первые две недели июня. У бизнесмена было 30 акций этой компании. 8 июня он продал 90% своих акций, и на все полученные деньги 14 июня купил ещё акций. Сколько всего акций оказалось у бизнесмена?



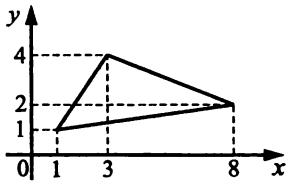
B3 Решите уравнение $\sin\dfrac{\pi(2x+3)}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

B4 Окружность с центром в точке O описана вокруг треугольника ABC. $\angle AOC = 80°$, $\angle AOB = 70°$. Найдите градусную меру угла A.

B5 Гостинице необходимо закупить 120 спальных гарнитуров на одной из трех оптовых баз. В таблице приведены цены и условия сборки (за один гарнитур). Найдите разность (в рублях) между самой выгодной и самой невыгодной покупкой с учетом стоимости сборки и дополнительных условий (сумма заказа подсчитывается без стоимости сборки).

Оптовая база	Стоимость гарнитура	Стоимость сборки	Дополнительные скидки (сумма заказа — скидка)
A	8000	1100	Свыше 900000 руб. — 3% на сумму заказа
B	7500	1050	Свыше 1100000 руб. — 50% на сборку
C	8200	1000	

B6 Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке.



B7 Найдите значение выражения $\dfrac{14\sin 187^\circ \sin 97^\circ}{\sin 374^\circ}$.

B8 Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = -7$ проходит через точки $A(-1;1)$ и $B(7;7)$. Вычислите значение функции $f(x)$ при $x = -7$.

B9 Правильная треугольная призма описана около цилиндра, радиус основания которого равен $2\sqrt{3}$, а высота равна 3. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

B10 Чайник выключается при температуре воды $100°C$. Затем температура воды в градусах Цельсия меняется по закону $T = 20 + 80 \cdot 2^{-kt}$, где t — прошедшее время в минутах, а k — некоторая постоянная величина.

Через 10 минут температура воды составляла $80°C$. Определите температуру воды в чайнике через 20 минут после выключения. (Ответ выразите в градусах Цельсия.)

B11 Дана функция $y = 4 - \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2\pi}{3} - 2x + \frac{4\sqrt{3}}{3}\cos x$. Найдите её наибольшее значение на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

B12 От пристани A к пристани B, расстояние между которыми 5 км, отправился плот, двигаясь по течению реки со скоростью, равной скорости течения. Одновременно с этим от пристани B к пристани A отправилась моторная лодка. Лодка проплыла мимо плота через 30 минут и прибыла к пристани A на 1 час 20 минут раньше, чем плот прибыл к пристани B. Определите скорость течения.

Часть 2

C1 Решите уравнение $\sqrt{10 - \frac{12}{\log_x 25}} = 4 \cdot \log_5(0{,}2 \cdot \sqrt{x^3})$

C2 Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC. Сфера, центр которой лежит на ребре AA_1, пересекает ребро A_1B_1 в точке M и касается ребра BB_1 и плоскости ABC. Найдите объём призмы, если $A_1M : MB_1 = 4\ \ 1$ и $AA_1 = 16$.

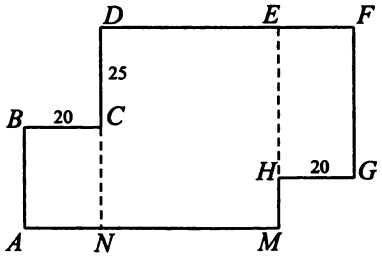
C3 Решите неравенство $\frac{2\log_3(x+4)+1}{\log_3(x+4)-1} \geqslant \frac{2\log_5(30-x)+1}{\log_5(30-x)-1}$

C4 Точка O_1 – центр вписанной окружности треугольника ABC, а точка O_2 – центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Найдите длину BC, если $O_1O_2 = 12$, а $\sin\angle BO_2C = \frac{1}{3}$.

C5 Найдите все положительные значения параметра a, при которых область определения функции $y = \log_a\left(a^5 - a^{x-1} + x^{x\log_x a - 1} - \frac{a^6}{x}\right)$ содержит ровно два целых числа.

C6 Требуется разметить на земле участок площадью 4200 м^2, который состоит из трёх прямоугольных частей и имеет форму многоугольника $ABCDFGHM$, изображённого на рисунке. Для размеров участка должны быть выполнены условия: $BC = GH = 20$ м, $CD = 25$ м, $MH \geqslant 10$ м.

Найдите наименьшее значение периметра такого участка и какие-либо значения длин DF, FG и MH, при которых периметр является наименьшим.



Тест №19

C1 Решите уравнение $\log_{\sin x}\left(\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin 2x-2\sin^2 x\right)=2$.

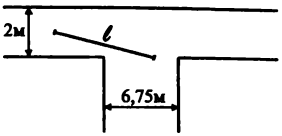
C2 В шар вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Прямая AB_1 образует с плоскостью BCC_1 угол 30°. Найдите объём призмы, если площадь поверхности шара равна 120π.

C3 Решите неравенство $2^{x-x^2}\geqslant x$.

C4 В треугольнике ABC $\cos\angle ABC=\frac{1}{3}$, $AB=4$, $BC=3$. Точки A_1, B_1, C_1 – основания высот треугольника ABC. Найдите радиус описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых оба числа $1-\sin 2a$ и $6-2\sqrt{2}\cos a-2\sin^2 a$ являются корнями уравнения $2^{x+|x|}-(7\operatorname{tg}a+1)\cdot 2^{|x|}+(4\operatorname{tg}a-5)\cdot 2^x=28\operatorname{tg}^2 a-31\operatorname{tg}a-5$.

C6 Два коридора шириной 2м и 6,75м пересекаются под прямым углом (см. рисунок). Определите наибольшую длину балки – l, при которой её можно перенести (горизонтально) из одного коридора в другой (толщиной балки при вычислениях пренебречь).

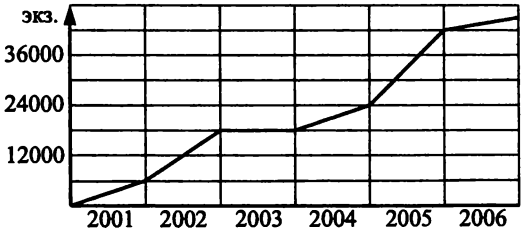


Тест № 20

Часть 1

B1 Билет в аквапарк стоит 250 руб. Стоимость билета учащегося составляет 60% стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 8 учащихся и 3 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

B2 На рисунке изображен график выпуска печатной продукции книжным издательством в период с 2001 г. по 2006 г. На оси абсцисс откладываются годы, на оси ординат — количество выпущенных экземпляров. Определите по графику наибольший суммарный прирост выпуска печатной продукции за два последовательных года.



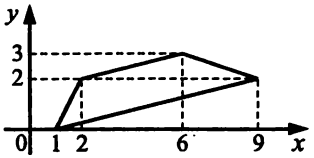
B3 Найдите корень уравнения $\cos\dfrac{\pi(5x+1)}{15} = -1$. В ответе запишите наименьший положительный корень.

B4 Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O радиуса 4. $\angle A = 40°$, $\angle C = 65°$. Найдите площадь треугольника AOC.

B5 В стране с 1 января по 1 февраля этого года было произведено 17 кг кондитерских изделий на душу населения, а с 1 января по 1 апреля этого же года — 31 кг. Известно, что зависимость между массой произведённых кондитерских изделий и числом месяцев, прошедших с начала года, имеет линейный характер. Сколько килограммов кондитерских изделий на душу

населения выпустили в период с 1 января рассматриваемого года по 1 января следующего года?

B6 Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на рисунке.



B7 Найдите значение выражения $\dfrac{1-2\cos^2 330^\circ}{\sin^2 390^\circ}$.

B8 Известно, что прямая $y = 2x + 3$ является касательной к параболе $y = 2x^2 + c$. Найдите значение коэффициента c данной параболы.

B9 Дана правильная четырёхугольная пирамида со стороной основания, равной 12. Боковые ребра пирамиды равны 10. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

B10 На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на большие глубины. Конструкция имеет сферическую форму, и сила Архимеда, действующая на аппарат, определяется по формуле: $F_A = \rho g \frac{\pi}{6} D^3$, где D – диаметр аппарата в метрах, $\rho = 1000$ кг/м^3 – плотность воды, $g = 9{,}8$ Н/кг – ускорение свободного падения. Какое максимальное целое число дециметров (дм) может составлять диаметр аппарата, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении не будет превосходить 138474 Н? (Для справки, 1 дм $= 0{,}1$ м, а точное значение числа π заключено в интервале $(3{,}14; 3{,}15)$.)

B11 Дана функция $y = 4\sin x - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{2} + 2$. Найдите её наименьшее значение на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

B12 В городе имеется три завода по выпуску рыбных консервов. Первый завод может переработать 50 тонн рыбы за трое суток, второй – 45 тонн за двое суток, а третий – 95 тонн за шесть суток. Определите минимальное время (в сутках), за которое на этих заводах можно переработать 110 тонн рыбы.

Часть 2

C1 Решите уравнение $\log_{\cos x}(\cos 2x - \sin x) = 0$.

C2 В шар радиуса 3 вписана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$. Основанием призмы является прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, один из острых углов которого равен 60°. Найдите объём призмы, если известно, что прямая AB_1 образует с плоскостью ACC_1 угол 45°.

C3 Решите неравенство $0{,}5^{\frac{1}{x}} + 25^x \geqslant 5^{\frac{1}{x}} + 0{,}25^x$

C4 Длины сторон треугольника ABC равны 4, 5 и 6. Точки A_1, B_1, C_1 – основания высот этого треугольника. Найдите длину радиуса вписанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых оба числа $\dfrac{2a+8}{a+1}$ и $2^{a+1} - 0{,}5 \cdot 4^a + 2$ являются корнями уравнения
$6^x - (\sin^2(\pi a) + 16) \cdot 3^x + (\sin^2(\pi a) - 9) \cdot 2^x + 7\cos^2(\pi a) = \sin^4(\pi a) - 137.$

C6 Два коридора шириной по 1,5 м каждый пересекаются под углом в 120°, (см. рисунок). Определите наибольшую длину балки – l, при которой её можно перенести (горизонтально) из одного коридора в другой (толщиной балки при вычислениях пренебречь).

