НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики»
Научный руководитель Л.Г. Петерсон

МАТЕМАТИКА БАЗОВАЯ И МАТЕМАТИКА УГЛУБЛЕННАЯ:

методика обучения решению уравнений с двумя переменными, систем уравнений



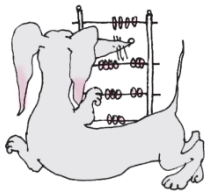
***Петерсон Людмила Георгиевна*,**
доктор педагогических наук, профессор,
автор образовательной системы «Учусь учиться»,
научный руководитель Института СДП

www.peterson.institute

ЦЕЛЬ ВСТРЕЧИ:

1. Методика введения понятий:
    - «уравнение с двумя переменными»
    - «система уравнений с двумя переменными»
    - «решение уравнения с двумя переменными»
    - «решение системы двух уравнений с двумя переменными».
    - «уравнения высших степеней»
2. Методика введения способов решения:
    - уравнений с двумя переменными
    - систем уравнений.
3. Методы решения уравнений высших степеней.





МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ ПОНЯТИЙ

Уравнение с двумя переменными

Решите задачу и ответьте на вопросы к ней:
Задумали два натуральных числа. Если первое число увеличить в 6 раз, второе в 5 раз и сложить полученные значения, то получится число 45. Какие числа задумали?

1) Какое уравнение было получено при решении задачи? Запишите в общем виде этот тип уравнений.

x и y – задуманные числа

$6x + 5y = 45$

$ax + by = c$

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ ПОНЯТИЙ

Уравнение с двумя переменными

Решите задачу и ответьте на вопросы к ней:
Задумали два натуральных числа. Если первое число увеличить в 6 раз, второе в 5 раз и сложить полученные значения, то получится число 45. Какие числа задумали?
1) Какое уравнение было получено при решении задачи? Запишите в общем виде этот тип уравнений.

x и y – задуманные числа

$6x + 5y = 45$

$ax + by = c$

Линейным уравнением с двумя переменными x и y называется уравнение вида $ax + by = c$, где a, b и c – некоторые числа.

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ ПОНЯТИЙ

Система уравнение с двумя переменными

5 класс

На экскурсию едут 252 ученика школы. Для них заказаны несколько одинаковых автобусов. Однако выяснилось, что если заказать автобусы, вмещающие на 6 человек больше, то автобусов потребуется на один меньше. Сколько больших автобусов надо заказать, если в обоих случаях предполагается заполнить все автобусы без свободных мест?

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ ПОНЯТИЙ

Система уравнение с двумя переменными

5 класс

На экскурсию едут 252 ученика школы. Для них заказаны несколько одинаковых автобусов. Однако выяснилось, что если заказать автобусы, вмещающие на 6 человек больше, то автобусов потребуется на один меньше. Сколько больших автобусов надо заказать, если в обоих случаях предполагается заполнить все автобусы без свободных мест?

$$\begin{cases} xy = 252 \\ (x + 1)(y - 6) = 252 \end{cases}$$

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ ПОНЯТИЙ

Система уравнение с двумя переменными

5 класс

На экскурсию едут 252 ученика школы. Для них заказаны несколько одинаковых автобусов. Однако выяснилось, что если заказать автобусы, вмещающие на 6 человек больше, то автобусов потребуется на один меньше. Сколько больших автобусов надо заказать, если в обоих случаях предполагается заполнить все автобусы без свободных мест?

$$\begin{cases} xy = 252 \\ (x + 1)(y - 6) = 252 \end{cases}$$

Системой двух линейных уравнений с двумя переменными x и y называется система уравнений вида:

$$a_1x + b_1y = c_1;$$
$$a_2x + b_2y = c_2.$$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 – некоторые числа.

7 класс

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ ПОНЯТИЙ

Решение уравнений с двумя переменными

Решите задачу и ответьте на вопросы к ней:
Задумали два натуральных числа. Если первое число увеличить в 6 раз, второе в 5 раз и сложить полученные значения, то получится число 45. Какие числа задумали?
1) Какое уравнение было получено при решении задачи? Запишите в общем виде этот тип уравнений.
2) Какие значения могут принимать переменные в уравнении данной задачи? Какой метод был использован для решения уравнения данной задачи?

$6x + 5y = 45$

Если $x = 1$, $y = 2$, то $6 + 10 = 45$ (Н)

Если $x = 5$, $y = 3$, то $30 + 15 = 45$ (В)

Решением линейного уравнения $ax + by = c$ называется пара чисел $(x; y)$, которая обращает это уравнение в верное числовое равенство.

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ ПОНЯТИЙ

Решение уравнений с двумя переменными

Решите задачу и ответьте на вопросы к ней:
Задумали два натуральных числа. Если первое число увеличить в 6 раз, второе в 5 раз и сложить полученные значения, то получится число 45. Какие числа задумали?
1) Какое уравнение было получено при решении задачи? Запишите в общем виде этот тип уравнений.
2) Какие значения могут принимать переменные в уравнении данной задачи? Какой метод был использован для решения уравнения данной задачи?

$$6x + 5y = 45$$

$$\left(x; \frac{45-6x}{5}\right) \quad \left(\frac{45-5y}{6}; y\right)$$

Общим решением линейного уравнения с двумя переменными называется множество всех пар (x; y) его решений.

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ ПОНЯТИЙ

Решение систем двух уравнений с двумя переменными

На экскурсию едут 252 ученика школы. Для них заказаны несколько одинаковых автобусов. Однако выяснилось, что если заказать автобусы, вмещающие на 6 человек больше, то автобусов потребуется на один меньше. Сколько больших автобусов надо заказать, если в обоих случаях предполагается заполнить все автобусы без свободных мест?

$$\begin{cases} xy = 252 \\ (x + 1)(y - 6) = 252 \end{cases}$$

$x = 6$, $y = 42$

Множеством **решений системы двух линейных уравнений с двумя переменными** x и y является множество пар $(x; y)$, которые удовлетворяют каждому из уравнений системы.

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ ПОНЯТИЙ

Уравнения высших степеней

9 класс

Уравнением n-й степени ($n \in N$) называется уравнение вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $a_0 \neq 0$.

$$x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$$

Возвратным уравнением 4-го порядка называется уравнение $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, где $a \neq 0$.

$$x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 1 = 0$$

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ ПОНЯТИЙ

Однородное уравнение с двумя переменными

9 класс

333 1) Какое из данных уравнений можно считать «лишним»?

а) $2x^2 + 3xy + 4y^2 = 0$; б) $x^2 + 3xy - y^2 = 0$; в) $0{,}2x^2 - xy - 4y^2 = 0$; г) $2x^2 + y = 0$.

Запишите в обобщенном виде остальные уравнения. Познакомьтесь с их названием на с. 101.

Уравнение с двумя переменными $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$ называется однородным уравнением второй степени относительно x, y. Если при этом $A \neq 0$ и $C \neq 0$, то уравнение называется полным однородным уравнением второй степени относительно x, y.

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ

Уравнение с двумя переменными

Решить линейное уравнение с двумя переменными – значит найти его общее решение.

7 класс

Выразите из данной формулы каждую переменную через остальные:

а) $C = an$;

б) $P = 2(a + b)$;

в) $a = bc + r$;

г) $V = abc$.

Является ли пара чисел (4; –1) решением уравнения:

а) $2x – 3y = 11$;

б) $–3x + 5y = 17$?

Запишите по два решения для каждого из этих уравнений.

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ

Уравнение с двумя переменными

Решить линейное уравнение с двумя переменными – значит найти его общее решение.

Коэффициенты			Уравнение	Общее решение
$a \neq 0$	$b \neq 0$	c – любое число	$ax + by = c \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = -y\frac{b}{a} + \frac{c}{a} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$	$\left(-\frac{b}{a}y + \frac{c}{a}; y\right)$, где y – любое число, или $\left(x; -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}\right)$, где x – любое число
$a = 0$	$b \neq 0$	c – любое число	$0x + by = c \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y = \frac{c}{b}$	$\left(x; \frac{c}{b}\right)$, где x – любое число
$a \neq 0$	$b = 0$	c – любое число	$ax + 0y = c \Leftrightarrow x = \frac{c}{a}$	$\left(\frac{c}{a}; y\right)$, где y – любое число
$a = 0$	$b = 0$	$c = 0$	$0x + 0y = 0$ (истинно)	$(x; y)$, где x, y – любые числа
$a = 0$	$b = 0$	$c \neq 0$	$0x + 0y = c$ (ложно)	$\varnothing$

Алгоритм решения линейного уравнения с двумя переменными $ax + by = c$

1. Если оба коэффициента при переменных не равны нулю ($ab \neq 0$), выразить одну из переменных через другую и записать ответ.
2. Если один из коэффициентов при переменных равен нулю, а второй – нет ($ab = 0$, но $a \neq 0$ или $b \neq 0$), решить данное линейное уравнение с одной переменной и записать ответ.
3. Если оба коэффициента при переменных равны нулю ($a = b = 0$), определить, истинно или ложно данное равенство, и записать ответ.

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ

Уравнение с двумя переменными

Алгоритм решения линейного уравнения с двумя переменными $ax + by = c$

1. Если оба коэффициента при переменных не равны нулю ($ab \neq 0$), выразить одну из переменных через другую и записать ответ.
2. Если один из коэффициентов при переменных равен нулю, а второй – нет ($ab = 0$, но $a \neq 0$ или $b \neq 0$), решить данное линейное уравнение с одной переменной и записать ответ.
3. Если оба коэффициента при переменных равны нулю ($a = b = 0$), определить, истинно или ложно данное равенство, и записать ответ.

$x - 6y = -3$

$x = 6y - 3$ или $y = \dfrac{x+3}{6}$

Ответ: $(6y - 3; y)$ или $(x; \dfrac{x+3}{6})$

y – любое x - любое

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ

Уравнение с двумя переменными

Алгоритм решения линейного уравнения с двумя переменными $ax + by = c$

1. Если оба коэффициента при переменных не равны нулю ($ab \neq 0$), выразить одну из переменных через другую и записать ответ.
2. Если один из коэффициентов при переменных равен нулю, а второй – нет ($ab = 0$, но $a \neq 0$ или $b \neq 0$), решить данное линейное уравнение с одной переменной и записать ответ.
3. Если оба коэффициента при переменных равны нулю ($a = b = 0$), определить, истинно или ложно данное равенство, и записать ответ.

$x - 6y = -3$

$x = 6y - 3$ или $y = \dfrac{x+3}{6}$

Ответ: $(6y - 3; y)$ или $(x; \dfrac{x+3}{6})$

y – любое x - любое

$4x + 0y = 13$

$x = 3{,}25$

Ответ: $(3{,}25; y)$ y – любое

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ

Система уравнений с двумя переменными

а) Как графики уравнений могут помочь в решении этой системы?

б) Можно ли утверждать, что найденное при помощи графиков решение является точным? Как можно выполнить проверку найденного результата?

в) Вспомните, как могут располагаться прямые на плоскости. Подойдёт ли способ, который вы использовали при решении этой системы, для решения всех систем?

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ

Система уравнений с двумя переменными

а) Как графики уравнений могут помочь в решении этой системы?

б) Можно ли утверждать, что найденное при помощи графиков решение является точным? Как можно выполнить проверку найденного результата?

в) Вспомните, как могут располагаться прямые на плоскости. Подойдёт ли способ, который вы использовали при решении этой системы, для решения всех систем?

Алгоритм графического решения систем линейных уравнений с двумя переменными

1. Построить графики каждого уравнения в одной координатной плоскости.
2. Если прямые параллельны, нужно записать, что система не имеет решения.
3. Если прямые совпадают, нужно записать в ответ общее решение одного из уравнений.
4. Если прямые пересекаются, нужно найти координаты точки пересечения, сделать проверку и записать их в ответ.

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ

Система уравнений с двумя переменными

1) Можно ли решить данную систему, используя графики:

$$\begin{cases} x + 200y = 70; \\ 2x - 10y = 99? \end{cases}$$

2) Найдите другой способ решения этой системы. Для этого выразите переменную x из первого уравнения. Как можно использовать полученное равенство при решении системы?

Алгоритм решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки

1. В одном из уравнений выразить одну переменную через другую.
2. Подставить вместо этой переменной полученное выражение в другое уравнение системы.
3. Решить полученное во втором пункте уравнение с одной переменной.
4. Воспользовавшись найденным значением одной переменной, вычислить значение второй переменной.
5. Записать ответ.

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ
Система уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} 0{,}4x - \frac{1}{3}y = 1; \\ 1\frac{3}{5}x + \frac{1}{3}y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}4x + 1{,}6x = 1 + 3; \\ 1{,}6x + \frac{1}{3}y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 4; \\ 1{,}6x + \frac{1}{3}y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 4; \\ 1{,}6 \cdot 2 + \frac{1}{3}y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; \\ y = -0{,}6. \end{cases}$$

Алгоритм решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными способом алгебраического сложения

1. Умножить или разделить одно (или оба) уравнения системы на некоторое число, не равное 0, так, чтобы коэффициенты при одной из переменных в обоих уравнениях стали противоположными числами (или совпали).
2. Сложить (вычесть) уравнения.
3. Решить полученное во втором пункте уравнение с одной переменной.
4. Воспользовавшись найденным значением одной переменной, вычислить значение второй переменной.
5. Записать ответ.

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ
Система уравнений с двумя переменными

8 класс

1) Постройте графики уравнений системы и ответьте, сколько решений имеет система

$$\begin{cases} 4x - y = 4 \\ 12x + y = 6 \end{cases}.$$

Можно ли было выяснить, сколько решений имеет система, не решая систему?

2) Вспомните, от чего зависит расположение графиков линейных функций. Как это может помочь определить количество решений системы?

3) Постройте правило определения количества решений систем двух линейных уравнений с двумя переменными и сопоставьте его с правилом на с. 46.

Система двух линейных уравнений $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ с ненулевыми коэффициентами:

- имеет *единственное* решение, если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$,
- *не имеет* решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$,
- имеет *бесконечно много* решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ

Система уравнений с двумя переменными

Система двух линейных уравнений $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ с ненулевыми коэффициентами:

- имеет *единственное* решение, если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$,
- *не имеет* решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$,
- имеет *бесконечно много* решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Выяснить количество решений каждой из систем:

а) $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 6x - 9y = 10 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 3x + 6y = 9 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 7x - y = -6 \end{cases}$.

Решение:

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ

Система уравнений с двумя переменными

Система двух линейных уравнений $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ с ненулевыми коэффициентами:

- имеет *единственное* решение, если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$,
- *не имеет* решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$,
- имеет *бесконечно много* решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Выяснить количество решений каждой из систем:

а) $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 6x - 9y = 10 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 3x + 6y = 9 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 7x - y = -6 \end{cases}$.

Решение:

Решение:

а) $\frac{2}{6} = \frac{-3}{-9} \neq \frac{7}{10}$. *Ответ:* система не имеет решений.

б) $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$. *Ответ:* система имеет бесконечное множество решений.

в) $\frac{2}{7} \neq \frac{-3}{-1}$. *Ответ:* система имеет единственное решение.

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ

Система уравнений с двумя переменными

Система двух линейных уравнений $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ с ненулевыми коэффициентами:

- имеет *единственное* решение, если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$,
- *не имеет* решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$,
- имеет *бесконечно много* решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ

Система уравнений с двумя переменными

Система двух линейных уравнений $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ с ненулевыми коэффициентами:

- имеет *единственное* решение, если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$,
- *не имеет* решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$,
- имеет *бесконечно много* решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Выяснить, при каких значениях a система $\begin{cases} ax - y = a \\ -x + ay = -1 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений.

Решение:

Система двух линейных уравнений может иметь бесконечное число решений, если:

1) хотя бы одно из её уравнений имеет нули при обеих переменных;

2) нулевой коэффициент расположен в каждом уравнении при одной и той же переменной;

3) коэффициенты в системе отличны от нуля и пропорциональны.

Поскольку первые два условия не выполняются, то нам остаётся рассмотреть третий случай. На математическом языке данное условие можно записать так:

$$\frac{a}{-1} = \frac{-1}{a} = \frac{a}{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ 1 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1.$$

Ответ: система имеет бесконечное множество решений при $a \in \{-1; 1\}$.

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ

Система уравнений с двумя переменными

Решите уравнение $2|x| - 3x = 1$, пользуясь определением модуля.

1) Решите систему уравнений, содержащую переменную под знаком модуля:

$$\begin{cases} 4x + 6y = 2 \\ 2x - 3|y| = -5 \end{cases}$$

2) Подумайте, как свести данную систему к известному случаю.

3) Проанализируйте, как вы решали эту систему, и предложите свой способ решения систем уравнений, содержащих переменную под знаком модуля. Сравните его со способом, предложенным на с. 58 учебника.

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ

Система уравнений с двумя переменными

1.Найти в уравнениях все выражения, содержащиеся под знаком модуля.

2. Рассмотреть всевозможные комбинации случаев, когда каждое из этих выражений принимает неотрицательные и отрицательные значения.

3. Для каждого возможного случая «раскрыть» модули, используя определение модуля.

4. Решить все полученные системы.

5. Для каждого случая отобрать те решения системы, которые ему удовлетворяют.

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ

Система уравнений с двумя переменными

1.Найти в уравнениях все выражения, содержащиеся под знаком модуля.

2. Рассмотреть всевозможные комбинации случаев, когда каждое из этих выражений принимает неотрицательные и отрицательные значения.

3. Для каждого возможного случая «раскрыть» модули, используя определение модуля.

4. Решить все полученные системы.

5. Для каждого случая отобрать те решения системы, которые ему удовлетворяют.

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ

Система уравнений с двумя переменными

1.Найти в уравнениях все выражения, содержащиеся под знаком модуля.

2. Рассмотреть всевозможные комбинации случаев, когда каждое из этих выражений принимает неотрицательные и отрицательные значения.

3. Для каждого возможного случая «раскрыть» модули, используя определение модуля.

4. Решить все полученные системы.

5. Для каждого случая отобрать те решения системы, которые ему удовлетворяют.

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ

Система уравнений с двумя переменными

1.Найти в уравнениях все выражения, содержащиеся под знаком модуля.

2. Рассмотреть всевозможные комбинации случаев, когда каждое из этих выражений принимает неотрицательные и отрицательные значения.

3. Для каждого возможного случая «раскрыть» модули, используя определение модуля.

4. Решить все полученные системы.

5. Для каждого случая отобрать те решения системы, которые ему удовлетворяют.

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ
Уравнения высших степеней

8 класс

Учащиеся уточняют и систематизируют имеющиеся у них знания о решении уравнений высших степеней:

- биквадратные уравнения;
- неполные уравнения n-ой степени вида $a_0x^n + a_1 = 0$;
- применение разложения на множители;
- замена переменной

$3x^4 + 8x^2 - 11 = 0$

$x^3 - 125 = 0$

$x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 1 = 0$

$x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ
Уравнения высших степеней

9 класс

Учащиеся знакомятся с новыми методами:

метод понижения порядка уравнения с применением следствия теоремы Безу

$$2x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x - 1 = 0$$

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ

Уравнения высших степеней

$$2x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x - 1 = 0$$

1. По возможности угадать один из корней α_1 многочлена $P(x)$. $x_1 = 1$

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ

Уравнения высших степеней

$$2x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x - 1 = 0$$

1. По возможности угадать один из корней α_1 многочлена $P(x)$. $x_1 = 1$

2. Разделить многочлен $P(x)$ на двучлен $x - \alpha_1$. $(2x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x - 1) : (x - 1) = 2x^3 - 2x^2 - 3x + 1$

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ

Уравнения высших степеней

$$2x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x - 1 = 0$$

1. По возможности угадать один из корней α_1 многочлена $P(x)$. $x_1 = 1$

2. Разделить многочлен $P(x)$ на двучлен $x - \alpha_1$. $(2x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x - 1) : (x - 1) = 2x^3 - 2x^2 - 3x + 1$

3. Представить исходное уравнение в виде $(x - \alpha_1)\,P_1(x) = 0$, где $P_1(x)$ – частное от деления $P(x)$ на $(x - \alpha_1)$. $(x - 1)(2x^3 - 2x^2 - 3x + 1) = 0$

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ
Уравнения высших степеней

$$2x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x - 1 = 0$$

1. По возможности угадать один из корней α_1 многочлена $P(x)$. $x_1 = 1$

2. Разделить многочлен $P(x)$ на двучлен $x - \alpha_1$. $(2x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x - 1) : (x - 1) = 2x^3 - 2x^2 - 3x + 1$

3. Представить исходное уравнение в виде $(x - \alpha_1)\,P_1(x) = 0$, где $P_1(x)$ – частное от деления $P(x)$ на $(x - \alpha_1)$. $(x - 1)(2x^3 - 2x^2 - 3x + 1) = 0$

4. По возможности угадать один из корней α_2 многочлена $P_1(x)$. $x_2 = -1$

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ
Уравнения высших степеней

$$2x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x - 1 = 0$$

1. По возможности угадать один из корней α_1 многочлена $P(x)$. $x_1 = 1$

2. Разделить многочлен $P(x)$ на двучлен $x - \alpha_1$. $(2x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x - 1) : (x - 1) = 2x^3 - 2x^2 - 3x + 1$

3. Представить исходное уравнение в виде $(x - \alpha_1)\,P_1(x) = 0$, где $P_1(x)$ – частное от деления $P(x)$ на $(x - \alpha_1)$. $(x - 1)(2x^3 - 2x^2 - 3x + 1) = 0$

4. По возможности угадать один из корней α_2 многочлена $P_1(x)$. $x_2 = -1$

5. Разделить многочлен $P_1(x)$ на $(x - \alpha_2)$. $(2x^3 - 2x^2 - 3x + 1) : (x + 1) = 2x^2 - 4x + 1$

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ
Уравнения высших степеней

$$2x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x - 1 = 0$$

1. По возможности угадать один из корней α_1 многочлена $P(x)$. $x_1 = 1$

2. Разделить многочлен $P(x)$ на двучлен $x - \alpha_1$. $(2x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x - 1) : (x - 1) = 2x^3 - 2x^2 - 3x + 1$

3. Представить исходное уравнение в виде $(x - \alpha_1)\,P_1(x) = 0$, где $P_1(x)$ – частное от деления $P(x)$ на $(x - \alpha_1)$. $(x - 1)(2x^3 - 2x^2 - 3x + 1) = 0$

4. По возможности угадать один из корней α_2 многочлена $P_1(x)$. $x_2 = -1$

5. Разделить многочлен $P_1(x)$ на $(x - \alpha_2)$. $(2x^3 - 2x^2 - 3x + 1) : (x + 1) = 2x^2 - 4x + 1$

6. Представить исходное уравнение в виде $(x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2)\,P_2(x) = 0$, где $P_2(x)$ –частное от деления $P_1(x)$ на $(x - \alpha_2)$. $(x - 1)(x + 1)\,(2x^2 - 4x + 1) = 0$

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ
Уравнения высших степеней

9 класс

Учащиеся знакомятся с новыми методами:
применение формул сокращенного умножения высших степеней.

Зафиксируем *формулы сокращенного умножения высших степеней*.

1. *Степень суммы (разности)*:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

Здесь коэффициенты C_n^k вычисляются по треугольнику Паскаля (при этом формула для $(a-b)^n$ аналогична $(a+b)^n$, но её первый коэффициент положителен, второй отрицателен и далее знаки коэффициентов чередуются).

2. *Разность степеней*:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2 b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

3. *Сумма нечётных степеней*:

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 - a^{2k-3}b^3 + \ldots - ab^{2k-1} + b^{2k}).$$

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ
Уравнения высших степеней

9 класс

Учащиеся знакомятся с новыми методами:
применение формул сокращенного умножения высших степеней.

1. *Степень суммы (разности)*:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

$$(x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1)(x - 3) = 0$$

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ
Уравнения высших степеней

9 класс

Учащиеся знакомятся с новыми методами:
применение формул сокращенного умножения высших степеней.

1. *Степень суммы (разности)*:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

$$(x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1)(x - 3) = 0$$

$$(x - 1)^5 (x - 3) = 0$$

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ

Системы нелинейных уравнений с двумя переменными

9 класс

1) Найдите значение отношения $\frac{x}{y}$ из уравнения $x^2 + xy - 6y^2 = 0$.

2) Попробуйте решить систему:

$$\begin{cases} x^2 + xy - 6y^2 = 0; \\ x^2 - 5xy + 2y^2 = -4. \end{cases}$$

Сопоставьте ход своего решения этой системы с решением на с. 101–102.

3) Подойдет ли использованный способ для решения всех систем с полным однородным уравнением второй степени относительно x, y?

4) Составьте алгоритм решения подобных систем. Сопоставьте его с алгоритмом, изложенным на с. 102. Какие случаи могут возникнуть при выполнении шага 1 этого алгоритма? Уточните алгоритм.

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ

Системы нелинейных уравнений с двумя переменными

9 класс

Алгоритм решения системы с полным однородным уравнением второй степени относительно *x, y.*

1. Проверить, является ли решение полного однородного уравнения
(0; 0) решением системы.
2. При условии $y \neq 0$, разделить однородное уравнение на y^2 .
3. Обозначить отношение неизвестным и решить полученное квадратное уравнение.
4. Найдя значение отношения , выразить из этого равенства x через y.
5. Подставить выражение x через y во второе уравнение.
6. Решить систему, пользуясь полученным уравнением с одним неизвестным.

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ

Системы нелинейных уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 3y^2 = 80; \\ x^2 + xy - 2y^2 = -56 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14x^2 - 21xy + 21y^2 = 560; \\ 10x^2 + 10xy - 20y^2 = -560 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 24x^2 - 11xy + y^2 = 0; \quad : x^2 \quad x \neq 0 \\ x^2 + xy - 2y^2 = -56 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 24 - 11\dfrac{y}{x} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 = 0; \\ x^2 + xy - 2y^2 = -56 \end{cases}$$

$y = 2x \qquad y = 8x$

Алгоритм решения системы с полным однородным уравнением второй степени относительно *x, y.*

1. Проверить, является ли решение полного однородного уравнения

(0; 0) решением системы.

2. При условии $y \neq 0$, разделить однородное уравнение на y^2.

3. Обозначить отношение неизвестным и решить полученное квадратное уравнение.

4. Найдя значение отношения , выразить из этого равенства *x* через *y.*

5. Подставить выражение *x* через *y* во второе уравнение.

6. Решить систему, пользуясь полученным уравнением с одним неизвестным.

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ

Симметрические системы уравнений*

$$\begin{cases} xy + 2x + 2y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 + 3x + 3y - 8 = 0 \end{cases}$$

Систему двух уравнений называют ***симметрической***, если она имеет вид $\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}$, где $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ – симметрические функции.

$$u = x + y,\ v = xy$$

$$\begin{cases} xy + 2(x + y) - 5 = 0 \\ (x + y)^2 - 2xy + 3(x + y) - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v + 2u - 5 = 0 \\ u^2 - 2v + 3u - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} v = 5 - 2u \\ u^2 - 2(5 - 2u) + 3u = 8 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 5 - 2u \\ u^2 + 7u - 18 = 0 \end{cases}$$

Итак, для *решения симметрических систем* будем применять следующий способ:

1. Сделать замену $u = x + y$, $v = xy$.
2. Решить известными способами полученную систему относительно u и v.
3. Вернуться к «старым» переменным, указав значения $x + y$ и xy.
4. Воспользоваться теоремой, обратной теореме Виета, для нахождения x и y.

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ СПОСОБОВ РЕШЕНИЙ
Системы нелинейных уравнений с двумя переменными

Метод решения системы нелинейных уравнений с двумя переменными

1. Способ подстановки.

2. Способ сложения.

3. При решении систем можно использовать все известные нам методы решения нелинейных уравнений, включая введение новой переменной и разложение на множители.

4. Полученное в ходе решения уравнение с одной переменной степени выше двух может иметь несколько корней или «распадаться» на несколько уравнений более низких степеней, тогда в ходе решения рассматриваются две (и более) систем, на которые «распадается» исходная.

Алгоритм решения системы с полным однородным уравнением второй степени относительно *x*, *y*

НОУ ДПО «ИНСТИТУТ СИСТЕМНО-ДЕЯТЕЛЬНОСТНОЙ ПЕДАГОГИКИ»

ИМС «УЧУСЬ УЧИТЬСЯ»

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»

АНОНС СОБЫТИЙ

Дистанционные курсы:

13.11.2023 - 29.12.2023

Организация образовательной деятельности учащихся в условиях реализации ФГОС ООО (на примере непрерывного курса математики «Учусь учиться» Л.Г.Петерсон) (72 часа)

13.11.2023 - 29.12.2023

Проектирование современного урока в технологии деятельностного метода обучения в условиях реализации ФГОС (образовательная система Л.Г. Петерсон «Учусь учиться») (72 часа)



НОУ "Институт системно-деятельностной педагогики"

ОБУЧАЮЩИЙ ОНЛАЙН-МАРАФОН
ДЛЯ ПЕДАГОГОВ

«Организация устного счета на уроках математики от вопроса "Зачем" к ответу "Как"» (5–6 классы)





1 февраля – 29 февраля 2024

ПРИСОЕДИНЯЙТЕСЬ!

Шаг за шагом Ваши ученики
придут к уверенному устному счету!

Институт системно-деятельностной педагогики
ПЕТЕРСОН

НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики»

ИННОВАЦИОННАЯ МЕТОДИЧЕСКАЯ СЕТЬ «УЧУСЬ УЧИТЬСЯ»



МЫ ВМЕСТЕ, А ЗНАЧИТ, У НАС ВСЕ ПОЛУЧИТСЯ!



info@sch2000.ru +7 (495) 797–89–77 www.peterson.institu Адрес: г. Москва, 5-я ул. Ямского Поля, д. 9