Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа № 6 г. Холмска
муниципального образования «Холмский городской округ» Сахалинской области

ЕСТЕССТВЕННО-НАУЧНОЕ НАПРАВЛЕНИЕ

ТЕМА ПРОЕКТНОЙ РАБОТЫ

«Формула для нахождения корней кубического уравнения. Уравнения четвертой степени и методы их решения»

Автор:
Ли Алина Кенчеровна,
10-А класс

Руководитель проекта:
Агранович Геннадий Владиславович,
учитель математики

г. Холмск, 2022

РЕЦЕНЗИЯ

Проект ученицы 10* класса МАОУ СОШ №6 Ли Алины является самостоятельным исследованием в области математики. Работа содержит в себе сведения актуальные для выпускников средних школ, ориентированных на сдачу ЕГЭ по математике профильного уровня, но также содержит полезные сведения и для учеников. которые будут сдавать базовый экзамен.

В проекте содержится исследование методов решения уравнений высших степеней, которое обращается к материалам, изучаемым в курсе алгебры и начала анализа в 10-11 классах, но помимо этого, включает в себя изучение решений выходящих за рамки курса математики средней школы.

Материалы проекта могут быть полезны как для самостоятельной работы учеников, так и для совместной работы учеников и учителей, что позволит поднять уровень подготовки выпускников ЕГЭ по математике.

Продуктом проекта стал урок математики в 11* классе МАОУ СОШ №6 по теме для подготовки к выпускному экзамену решение уравнений и неравенств, сводящихся к решению уравнений высших степеней. К урокам была сделана серьезная подготовка: был подготовлен план-конспект урока, была сделана презентация и задания для самостоятельной работы. Урок прошел под наблюдением учителя математики Аграновича Г. В. и был позитивно воспринят учениками одиннадцатого класса.

Помимо указанного материала, в работе содержатся краткие биографии великих математиков прошлого Джероламо Кардано и Лодовико Феррари, что расширяет диапазон общих знаний и может быть интересно для всех, серьезно увлекающихся наукой вообще и математикой в частности. В проете освещена актуальность, ясно сформулирована цель, задачи и гипотеза. В заключении работы, представлены доказательства выдвинутой гипотезы.

Считаю, что работа Ли Алины заслуживает высокой оценки и может быть интересна, как для учеников выпускных классов, таки для учителей.

Учитель математики высшей категории **Агранович Геннадий Владиславович**

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Введение ... 3
Глава I. Аналитические методы решения уравнений высших степеней ... 5
1.1. Метод Кардано для решения уравнений третьей степени ... 5
1.2. Метод Феррари для решения уравнений четвертой степени ... 7
Глава II. Влияние знаний аналитических методов решения уравнений высших степеней, и умений их применять на практике на подготовку к профильному ЕГЭ по математике ... 10
2.1. Задачи профильного егэ по математике, в которых востребованы знания, умения и навыки решения уравнений высших степеней ... 10
2.2. Практическое применение методов решения уравнений третьей, четвертой степени для заданий профильного ЕГЭ по математике ... 11
2.3. Практическая реализация методов решений уравнений высших степеней при проведении урока математики по подготовке к ЕГЭ в 11ом классе ... 15
Заключение ... 17
Список литературы ... 18
Приложение ... 19
Приложение 1. План-конспект урока «Решение уравнений высших степеней» ... 19
Приложение 2. Фотоколлаж урока ... 22

ВВЕДЕНИЕ

Всё чаще в наши дни встречаются востребованные профессии, связанные со знанием математики, умением вести расчеты. Для примера возьмём профессии: инженер во всех своих отраслях, архитектор, строитель. На плечах людей, работающих в этой отрасли, лежит огромная ответственность. Очень важно быть внимательным при создании эскизов для построений. Ведь разрабатывая новые сооружения, все расчеты, по которым будут реализовывать проект, должны быть абсолютно безошибочными, идеальными, чтобы при строительстве не возникало вопросов по неустойчивости объекта [2].

Решение уравнений высших степеней необходимо в современном проектировании дорог, скоростных трасс, подвесных мостов, виадуков, галерей, торговых центров. Они применяются в прочностных расчетах в сопротивлении материалов и строительной механике.

Сегодня в век всеобщей цифровизации даже современные дипломированные специалисты все чаще прибегают к помощи электронных контентов для выполнения необходимых расчетов, не вникают в их суть. Очень немногие способны выполнить проектирование самостоятельно.

Одним из необходимых навыков для работы в сфере конструирования является умение решений уравнений высших степеней. Но это также необходимо для выяснений множеств вопросов, касающихся физики, например, задачи с равноускоренным движением. Вдобавок это умение может сильно пригодится для учеников 9-11 классов для подготовки и написания ОГЭ и ЕГЭ по математики, в состав которого входят задания такого плана. Но главным является развитие математических компетенций и расширение представления о математике, как науке и ее возможностей для использования во всех сферах жизни современного человека. Хоть мы и не задумываемся, но всё действительное вокруг нас уже «от и до» заполнено математическими алгоритмами. Правда в том, что лишь меньшая часть людей осознаёт этот факт, остальные же нет. Отталкиваясь от этого, у меня появилось желание, которое стало целью данного проекта. Знания в сфере подобных уравнений помогут улучшить навыки анализировать, которые зачастую могут пригодиться в нашей жизни.

Актуальность, изложенная выше, позволило сформулировать тему исследования: «Формула для нахождения корней кубического уравнения. Уравнения четвертой степени и методы их решения».

Объект исследования: уравнение высших степеней.

Предмет исследования: решения уравнений высших степеней с использованием методов обеспечивающих оптимальное время решения с использованием различных способов в курсе подготовке к ОГЭ и ЕГЭ.

Целью исследования является обобщение знаний методов решения уравнений высших степеней и определение оптимальных способов решения для задач ОГЭ и ЕГЭ по математике.

Для осуществления цели стало необходимым решить следующие задачи:

1. Исследовать и раскрыть сущность метода Кардано для решения уравнений третьей степени.
2. Исследовать и раскрыть сущность метода Феррари для решения уравнений четвертой степени.
3. Исследовать задания профильного ЕГЭ по математике и выявить знания, умения и навыки, требуемые для успешного решения этих задач.
4. Проверить на практике выявленные ЗУН при решении реальных задач профильного ЕГЭ по математике и заданий второй части ОГЭ по математике.
5. Реализовать полученные знания в ходе проведения специального урока по подготовке к решению заданий ЕГЭ по математике в 11 классе.

Поставленные задачи позволили определить гипотезу исследования: подготовка к решению заданий, содержащих уравнений высших степеней в ОГЭ и ЕГЭ по математике будет эффективной при соблюдении следующих условий:

- тщательная подготовка учащихся к решению квадратных уравнений, которая заключается в знании формулы корней квадратных уравнений с использованием дискриминанта; знании теоремы Виета для нахождения корней квадратного уравнения; владении методом переброски;
- при условии знания теоремы Безу для нахождения корней многочлена;
- знание и умение применять метод Горнера для решения уравнений высших степеней;
- знание формулы Кардано для решения уравнений третьей степени при отсутствии рациональных корней у такого уравнения;
- знание формулы Феррари для решения уравнений четвёртой степени при отсутствии рациональных корней у такого уравнения;
- при условии регулярной тренировки обучающихся в решении уравнений и неравенств различной степени сложности.

При проведении исследования использовался метод анализа литературы по методам решения уравнений высших степеней, помимо этого, метод синтеза при реализации практической части исследования и эксперимента с участием одиннадцатиклассников.

Практическая значимость исследования состоит в подготовке выпускников 9-ых и 11-ых классов к решению реальных экзаменационных заданий ОГЭ и ЕГЭ по математике, требующих ЗУН решений уравнений высших степеней.

ГЛАВА I. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

1.1. Метод Кардано для решения уравнений третьей степени

Джероламо Кардано родился 24 сентября 1501 года в семье юриста. Отец обратил внимание на интерес сына к знаниям и научил чтению, письму и арифметике. В 1520 году Джероламо поступил в университет Павии на врача, но окончил учёбу в Падуанском университете. В 1526 году получил диплом доктора. Работал по специальности в Милане и входил в состав Миланской коллегии врачей. Имел репутацию одного из лучших врачей Европы. В 1570 провел несколько месяцев в заключении по обвинению в ереси.

Кардано внес важный вклад в развитие алгебры. Первый в Европе начал применять корни уравнений с отрицательными знаками. Формула для нахождения корней кубических уравнений называется «формула Кардано». Однако он признается, что не сам открыл этот алгоритм, а узнал его от Никколо Тартальи, пообещав держать его в секрете. Через 6 лет, не сдержав своего слова, опубликовал формулу. Джероламо написал книгу с новыми открытиями, в которой упоминалось решение Тартальи, а также решение уравнения четвертой степени, к которому он пришел со своим учеником, Лодовико Феррари. Кардано выявил, что в кубическом уравнении возможно три корня (этот факт упоминался в работах Омара Хайяма), сумма этих корней всегда равна коэффициенту при x^2 с противоположным знаком. Джероламо параллельно изучал технику, теорию вероятности и др. науки. Умер 21 сентября 1576 года [3].

Формула Кардано применяется для решения кубических уравнений, не имеющих рациональных корней. Для применения формулы Кардано уравнение третьей степени приводится к виду[6]:

$A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3 = 0,$ разделив на старший коэффициент, если он не равен единице. $a, b, c \in Z$. Необходимо найти $B_1 = \frac{A_1}{A_0}, B_2 = \frac{A_2}{A_0}, B_3 = \frac{A_3}{A_0}$

После чего $P = -\frac{B_1^0}{3} + B_2$ и $q = \frac{2B_1^3}{27} - \frac{B_1B_2}{3} + B_3$. Полученные p и q в формуле Кардано. Получим, что

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{9^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Подбор кубических корней должен удовлетворять на выходе значению $-\frac{p}{3}$. Тогда корни исходного уравнения $x = y - \frac{B_1}{3}$. Рассмотрим решение уравнения, используя формулу Кардано[8].

Пример решения кубического уравнения

Пример. Решить уравнение

$x^3 - 6x^2 - 6x - 2 = 0.$ (13)

Решение. Сначала приведем уравнение (13) к трехчленному виду. Для этого в соответствии с формулой X = Y – a сделаем в уравнении (13) замену

$x = y + 2.$ (14)

Тогда получим

$$x^3 - 6x^2 - 6x - 2 = (y+2)^3 - 6(y+2)^2 - 6(y+2) - 2 = y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - 6y^2 - 24y - 24 - 6y - 12 - 2 = y^3 - 18y - 30.$$

Следовательно, уравнение (13) принимает вид

$y^3 - 18y - 30 = 0.$ (15)

Теперь в соответствии с формулой (6) сделаем в уравнении (15) еще одну замену

$$y = \sqrt[3]{t} + \frac{6}{\sqrt[3]{t}}. \qquad (16)$$

Тогда поскольку

$$\left(\sqrt[3]{t} + \frac{6}{\sqrt[3]{t}}\right)^3 - 18\left(\sqrt[3]{t} + \frac{6}{\sqrt[3]{t}}\right) - 30 = t + 18\sqrt[3]{t} + \frac{108}{\sqrt[3]{t}} + \frac{216}{t} - 18\sqrt[3]{t} - \frac{108}{\sqrt[3]{t}} - 30 = t + \frac{216}{t} - 30,$$

то уравнение (15) примет вид

$$t + \frac{216}{t} - 30 = 0. \qquad (17)$$

Далее из (17) получаем:

$$t^2 - 30t + 216 = 0 \Leftrightarrow t_{1,2} = 15 \pm \sqrt{225 - 216} = 15 \pm 3 \Leftrightarrow t_1 = 18,\ t_2 = 12.$$

Отсюда по формуле (16) получаем:

$$y = \sqrt[3]{t_1} + \frac{6}{\sqrt[3]{t_1}} = \sqrt[3]{18} + \frac{6}{\sqrt[3]{18}} = \sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{\frac{6^3}{18}} = \sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{12}. \qquad (18)$$

Заметим, что такое же, как и в формуле (18), значение получилось бы, если бы мы использовали формулу

$$y = \sqrt[3]{t_2} + \frac{6}{\sqrt[3]{t_2}},$$

или использовали формулу

$$y = \sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2}.$$

Далее из равенства (18) в соответствии с (14) получаем:

$$x = y + 2 = \sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{12} + 2.$$

Таким образом, мы нашли у уравнения (13) вещественный корень

$$x = \sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{12} + 2.$$

У уравнения (13) других вещественных корней нет [7].

В параграфе был рассмотрен Метод Кардано для решения уравнений третьей степени. Применение этого метода требует знаний замены переменной, теоремы Безу, схемы Горнера, умения преобразовывать многочлены и решать квадратные уравнения. Метод Кардано, как видно из рассмотренного примера, является сложным для запоминания и практического применения. Однако. Владение им необходимо для решения уравнений третьей степени, не имеющих рациональных корней.

Все перечисленные выше навыки служат подготовке учеников 10-11 классов к профильному ЕГЭ по математике.

1.2. Метод Феррари для решения уравнений четвертой степени

Лодовико (Луджи) Феррари родился 2 февраля 1522 года в Болонье. Был наделён способностями в сфере математики. Обучался у Джероламо Кардано. Нашел аналогичное решение уравнений 4 степени, отталкиваясь от формулы Кардано. Алгоритм Феррари опубликован в книге своего учителя «Высокое искусство». В восемнадцатилетнем возрасте Луджи начал преподавать в качестве профессора в Миланском университете. Вернувшись на Родину, всё также был профессором математики. Из-за ранней смерти не смог опубликовать ни единого математического сочинения[5].

Четвёртая степень для алгебраических уравнений является наивысшей, при которой существует аналитическое решение в радикалах в общем виде (то есть при любых значениях коэффициентов)

Решение Феррари [1]:

Уравнение четвёртой степени — в математике алгебраическое уравнение вида:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Если y_1- произвольный корень кубического уравнения

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y - a^2d + 4bd - c^2 = 0$$

(резольвенты основного уравнения), то четыре корня исходного уравнения находятся как корни двух квадратных уравнений

$$x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y_1}{2} = \pm\left(\frac{a^2}{4} - b + y_1\right)x^2 + \left(\frac{a}{2}y_1 - c\right)x + \frac{y_1^2}{4} - d$$

где подкоренное выражение в правой части является полным квадратом. Отметим, что дискриминанты исходного уравнения (1) четвёртой степени и уравнения (2) совпадают.

Представим уравнение четвёртой степени в виде:

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

Его решение может быть найдено из следующих выражений:

$$\alpha = -\frac{3B^2}{8A^2} + \frac{C}{A}$$
$$\beta = \frac{B^3}{8A^3} - \frac{BC}{2A^2} + \frac{D}{A}$$
$$\gamma = -\frac{3B^4}{256A^4} + \frac{B^2C}{16A^3} - \frac{BD}{4A^2} + \frac{E}{A}$$

если

$\beta = 0$, *тогда, решив* $u^4 + \alpha u^2 + \gamma = 0$ *и, сделав подстановку* $x = u - \frac{B}{4A}$, *найдем корни*:

$x = -\frac{B}{4A} \pm_s \sqrt{\frac{-\alpha \pm_t \sqrt{\alpha^2 - 4\gamma}}{2}}, \beta = 0.$

$P = -\frac{\alpha^2}{12} - \gamma,$

$Q = -\frac{\alpha^3}{108} + \frac{\alpha\gamma}{3} - \frac{\beta^2}{8},$

$R = -\frac{Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}$,(любой знак квадратного корня подойдет)

$U = \sqrt[3]{R}$, три комплексных корня, один из которых подойдет

$y = -\frac{5}{6}\alpha + U + \begin{cases} U = 0 \to -\sqrt[3]{Q} \\ U \neq 0 \to \frac{-P}{3U} \end{cases},$

$W = \sqrt{\alpha + 2y}$

$x = -\frac{B}{4A} + \frac{\pm_s W \pm_t \sqrt{-(3\alpha + 2y \pm_s \frac{2\beta}{W})}}{2}.$

Здесь $\pm_s$ и $\pm_t$ — два независимых параметра, каждый из которых равен либо +, либо -. Количество возможных пар их значений равно четырём, и каждая пара производит один из четырёх корней изначального уравнения четвёртой степени. В случае, если какой-то из корней является кратным, количество дающих его пар значений $\pm_s$ и $\pm_t$ равно степени его кратности. В зависимости от выбора *U* (при взятии кубического корня возникает неоднозначность) корни будут соответствовать парам в разном порядке.

Пусть имеется уравнение канонического вида:

$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$

Обозначим корни уравнения как x_1, x_2, x_3, x_4. Для корней уравнения в канонической форме будет выполняться соотношение

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$:

Это уравнение будет иметь по меньшей мере два недействительных корня, которые будут сопряженными друг другу. Будем считать, что это

$x_3 = -W + iV$

$x_4 = -W - iV$

Причём W, V — действительные числа. Тогда два других корня можно записать как

$x_1 = W + iK$

$x_2 = W - iK$

Здесь K может быть либо действительным, либо чисто мнимым числом[4].

В параграфе был рассмотрен метод Феррари для решения уравнений четвертой степени. Для успешного осуществления этого метода требуются знания Бинома Ньютона, формул сокращенного умножения, формулы корней квадратного уравнения и теоремы Виета. А также умения: раскладывать многочлены на множители, производить замену переменной, находить корни многочлена, понижать степень многочлена. Для этого требуется успешное освоение курса математики 10-11 классов.

ГЛАВА II. ВЛИЯНИЕ ЗНАНИЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ, И УМЕНИЙ ИХ ПРИМЕНЯТЬ НА ПРАКТИКЕ НА ПОДГОТОВКУ К ПРОФИЛЬНОМУ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

2.1. Задачи профильного ЕГЭ по математике, в которых востребованы знания, умения и навыки решения уравнений высших степеней

В тестовой части Единого государственного экзамена по профильной математике 2022 года первое задание «Простейшие уравнения» содержит уравнения: линейные, квадратные, кубические, рациональные целые и дробные, иррациональные, показательные, логарифмические и тригонометрические. За исключением линейных и целых рациональных уравнений любой другой их тип может свестись к решению уравнений высших степеней.

Четвертое задание профильного ЕГЭ по математике «Вычисления и преобразования» хотя напрямую и не связано с решением уравнений высших степеней, но требует тех же умений и навыков для преобразований: числовых рациональных выражений, алгебраических выражений и дробей, числовых иррациональных выражений, буквенных иррациональных выражений.

В седьмое задание «Задачи с прикладным содержанием» входят типы задач, которые сводятся к решениям: квадратных и степенных уравнений и неравенств, рациональных уравнений и неравенств, иррациональных уравнений и неравенств, показательных уравнений и неравенств, логарифмических уравнений и неравенств.

Развернутая часть экзамена заключает в себе тринадцатое задание «Уравнения». В него входят уравнения тех же типов, что и в первое задание тестовой части, но более высокого уровня сложности.

Успешное выполнение четырнадцатого задания развернутой части «Неравенства» неразрывно связано с умением решать уравнения высших степеней.

Следует отметить, что в задания развернутой части «Уравнения» и «Неравенства» входят уравнения и неравенства смешанного типа, которые отсутствуют в тестовой части. Они часто сводятся к решению уравнений высших степеней.

Решение пятнадцатого задания «Финансовая математика» также нередко сводится к решениям уравнений, среди которых могут оказаться уравнения третьей и четвертой степеней.

Одна из самых сложных задач профильного ЕГЭ по математике - «Задача с параметром» неразрывно связана с решением различных уравнений, неравенств и систем уравнений, в том числе высших степеней.

Решение уравнений третьей и четвертой степеней по методам Кардано и Феррари не входят в школьный курс математики. Тем не менее, их знание может оказать серьезную помощь выпускнику в подготовке к профильному ЕГЭ по математике и успешной его сдаче.

В параграфе перечислены основные задания, в которых могут быть использованы навыки решений уравнений третьей и четвертой степени. На этом основании можно утверждать, что овладение методами Кардано и

Феррари положительно скажется на подготовке к сдаче профильного ЕГЭ по математике. Отсутствие такой подготовки скажется на результате экзамена, который будет заметно ниже уровня, требуемого для поступления в вузы технической, инженерной, математической направленности.

2.2. Практическое применение методов решения уравнений третьей, четвертой степени для заданий профильного ЕГЭ по математике

Для примера возьму задание (кодификатор ФИПИ, 2.1.2 Рациональные уравнения)

$$\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{18}{(x-2)^2}=7\left(\frac{x-2}{2}-\frac{3}{x-2}\right)+10$$

$x-2\neq 0$

$x\neq 2$

Заменим

$x-2=t$

Перепишем с получившейся заменой

$$\frac{t^2}{2}+\frac{18}{t^2}=7\left(\frac{t}{2}-\frac{3}{t}\right)+10$$

$$\frac{t^4+36}{2t^2}=7\left(\frac{t^2-6}{2t}\right)+10$$

$$\frac{t^4+36}{2t^2}=\frac{7(t^2-6)}{2t}+\frac{20t}{2t}$$

$$\frac{t^4+36}{2t^2}=\frac{7t^2-42+20t}{2t}$$

$2t^2\neq 0$

$t^2\neq 0$

$t\neq 0$

После раскрытия скобок избавляемся от знаменателя, умножив обе части уравнения на $2t^2$

$$t^4+36=7t^3-42t+20t^2$$

Переносим все члены в левую часть

$$t^4-7t^3-20t^2+42t+36=0$$

Следующий этап- разложение на простые множители

36	2
18	2
9	3
3	3
1	1

Получаем целочисленные делители свободного члена

$(1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 3;\ -3)$
$t = 1\colon 1 - 7 - 20 + 42 + 36 \neq 0$
$t = -1\colon 1 + 7 - 20 - 42 + 36 \neq 0$
$t = 2\colon 16 - 56 - 80 + 84 + 36 = 0$

Методом подбора находим t=2

$x - 2 = 2$
$x_1 = 4$

Далее для понижения степени обратимся к теореме Безу

Наше уравнение 4 степени делим на $t - 2$

$$t^4 - 7t^3 - 20t^2 + 42t + 36 \mid \frac{t - 2}{t^3 - 5t^2 - 30t - 18}$$

$$\begin{array}{r} -t^4 - 2t^3 \\ \hline -5t^3 + 20t^2 \\ --5t^3 + 10t^2 \\ \hline -30t^2 + 42\mathrm{t} \\ -\quad -30t^2 + 60t \\ \hline -18t + 36 \\ --18t + 36 \\ \hline 0 \end{array}$$

Когда пришли к нулевому остатку, можем переписывать готовое уравнение уже в 3 степени

$t^3 - 5t^2 - 30t - 18 = 0$

Еще раз находим целочисленные делители свободного члена разложением на простые множители

18	2
9	3
3	3
1	1

$(1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 3;\ -3)$
$t = 1\colon 1 - 5 - 30 - 18 \neq 0$
$t = -1\colon\ -1 - 5 + 30 - 18 \neq 0$
$t = 2\colon 8 - 20 - 60 - 18 \neq 0$
$t = -2\colon\ -8 - 20 + 60 - 18 \neq 0$
$t = -3\colon\ -27 - 45 + 90 - 18 = 0$

Методом подбора находим $t = -3$:

$x - 2 = -3$
$x_2 = -1$

Повторяем действия с понижением степени, деля уравнение на $t+3$

$$\begin{array}{r|l} t^3-5t^2-30t-18 & t+3 \\ \hline -t^3+3t^2 & t^2-8t-6 \\ \hline -8t^2-30t & \\ -\ \ -8t^2-24t & \\ \hline -6t-18 & \\ --6t-18 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Понизив уравнение до второй степени, решаем его с помощью дискриминанта

$t^2-8t-6=0$
$D=64+24=88$
$\sqrt{D}=\sqrt{88}=\sqrt{4}\times 22=2\sqrt{22}$
$t_1=\frac{8-2\sqrt{22}}{2}=\frac{2(4-\sqrt{22})}{2}=4-\sqrt{22}$
$t_2=4+\sqrt{22}$

Получив два корня находим x

$x-2=4-\sqrt{22}$
$x_3=6-\sqrt{22}$
$x-2=4+\sqrt{22}$
$x_4=6+\sqrt{22}$

Получаем 4 корня

$x_1=4$
$x_2=-1$
$x_3=6-\sqrt{22}$
$x_4=6+\sqrt{22}$

Для следующего примера возьмем задание 2.2.2. рациональные уравнения и неравенства, 2.2.9. метод интервалов

$$\frac{x^2-6x+8}{x-1}-\frac{x-4}{x^2-3x+2}\leq 0$$

$x-1\neq 0$
$x\neq 1$
$x^2-3x+2\neq 0$
$x\neq 1$
$x\neq 2$

Умножим обе части уравнения на общий знаменатель $(x-1)(\ x^2-3x+2)$

$(x^2-6x+8)(\ x^2-3x+2)$- $(x-4)\ (x-1)\leq 0$
$x^4-3x^3+2x^2-6x^3+18x^2-12x+8x^2-24x+16-x^2+5x-4\leq 0$
$x^4-9x^3+27x^2-31x+12=0$

Применяем разложение на простые множители

12	2
6	3
2	2
1	1

(1;-1;2;-2;3;-3)- целочисленные делители свободного члена

x=3: 81-243+243-93+12=0

Методом подбора находим x_1=3

В этот раз воспользуемся схемой Горнера для понижения степени

	1	-9	27	-31	12
3	1	3*1-9=-6	3*-6+27=9	3*9-31=-4	3*-4+12=0

Переписываем с пониженной до третьей степени уравнение

$x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$

Далее разложение на простые множители и нахождение целочисленных делителей свободного члена

4	2
2	2
1	1

(2;-2;1-;1)

$x = 2: -8 - 24 + 18 - 4 \neq 0$

$x = -1: \ -1 - 6 - 9 + 4 \neq 0$

$x = 1: 1 - 6 + 9 - 4 = 0 \qquad \emptyset$

$x = 4: 64 - 96 + 36 - 4 = 0$

$x_2 = 4$

Понижаем степень по теореме Безу

$x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ столбиком делим на x-4

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + 9x - 4 & x - 4 \\ \hline -x^3 - 4x^2 & x^2 - 2x + 1 \\ \hline -2x^2 + 9x & \\ -2x^2 + 8x & \\ \hline x - 4 & \\ -x - 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$(x - 4)(x^2 - 2x + 1)$

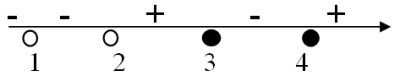
Решаем квадратное уравнение по теореме Виета

$x_1 + x_2 = 2$
$x_1 \times x_2 = 1$
$x_1 = 1$
$\emptyset$
$x_2 = 1$

Выписываем найденные корни

$x_1 = 3$
$x_2 = 4$
$x_3 = 1$ - не действительный

Чертим прямую и переходим к методу интервалов. Подставляем интервальные значения к $(x-4)(x^2-2x+1)$



Так как уравнение ≤ 0, выбираем интервалы со знаком «-»

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup [3; 4]$

В параграфе рассмотрено применение решений уравнений высших степеней для выполнения заданий профильного ЕГЭ по математике. Выявлены основные закономерности и принципы решения этих уравнений, которые будут использоваться в дальнейшей подготовке к ЕГЭ, а также на самом экзамене.

2.3. Практическая реализация методов решений уравнений высших степеней при проведении урока математики по подготовке к ЕГЭ в 11ом классе

Урок проводится автором данного проекта Ли Алиной ученицей 10 класса МАОУ СОШ №6 г. Холмск под руководством учителя математики высшей категории Аграновича Г.В..

План урока:

1. Организационный момент: вступительное слово учителя, в котором он подчеркивает значение материала изученной темы, сообщает цель и план урока(1мин.)

2. Актуализация опорных знаний (8 мин.):

- повторение теории о многочленах: многочлены от одной переменной;
- многочлены от нескольких переменных (демонстрация слайдов);

3. Фронтальная работа “Устно” (3 мин.)

На уроке демонстрируется методы Кардано и Феррари для нахождения корней уравнений третьей и четвёртой степени при условии отсутствия рациональных корней.

Совместно с учениками 11-ого класса вспоминаются формулы корней квадратных уравнений с использованием дискриминанта; знании теоремы Виета для нахождения корней квадратного уравнения; владении методом переброски.

Также выясняется владение учениками 11-ого класса методом замены переменной при решении уравнений. При необходимости напоминается этот метод.

Демонстрируется решения уравнения:

$$\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{18}{(x-2)^2} = 7\left(\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2}\right) + 10$$

4. Решение задач (25 мин.):

Предложить решить самостоятельно рациональное неравенство:

$$\frac{x^2-6x+8}{x-1}-\frac{x-4}{x^2-3x+2}\leq 0$$

I этап: алгебраические уравнения от одной переменной;

II этап: алгебраические уравнения от нескольких переменных;

а) работа в группах;

б) работа у доски;

5. Самостоятельная работа учащихся (5 мин.)

$$x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 9x + 30=0$$

6. Подведение итогов урока. Рефлексия (2 мин.)

7. Задание на дом, инструкция о его выполнении (1 мин.)

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^4 + y^4 = 17 \end{cases}$$

Проведённый урок служит доказательством пользы изучения методов решений уравнений высших степеней для подготовки будущих выпускников к экзаменам по математике.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В проекте были рассмотрены различные методы решения высших степеней. На основании изученного материала сделаны следующие выводы:

1. Для успешного решения уравнений высших степеней ученики 10-11 классов должны обладать твердыми навыками решения квадратных уравнений.
2. Для решения уравнений третьей и четвертой степеней должны быть тщательно изучены теорема Безу и метод Кардано (при наличии хотя бы одного рационального корня).
3. В случае отсутствия у уравнений третьей и четвертой степеней рациональных корней необходимо применить метод Кардано и Феррари соответственно.
4. Уравнение пятой степени и более высоких степеней не имеют аналитического решения.
5. Проведённый в 11-ом классе урок показал необходимость овладения учащимися умениями: делить многочлен на многочлен (теорема Безу), применять метод Горнера, производить замену переменой.

Таким образом выполнены все задачи проекта.

Гипотеза подтверждена с учетом результатов, показанных одиннадцатиклассниками, при проведении урока математики по теме «Решение уравнений высших степеней». Знания, умения и навыки будущих выпускников ещё требуют усовершенствования.

Цель, поставленная в проекте, достигнута. Об этом свидетельствуют знания, полученные в результате анализа различных методов решений высших степеней. На основе синтеза получены умения сочетать разные методы, находить оптимальные и получать верные результаты решений уравнений и неравенств высших степеней, составляющих значительную часть профильного ЕГЭ по математике.

Автору проекта удалось усовершенствовать собственные знания по предмету математика, расширить кругозор в поиске альтернативных решений уравнений данной категории, а также поделиться своими знаниями с учащимися 11-ого класса, которым предстоит сдавать экзамен по математике в этом году.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. http://www.cleverstudents.ru/equations/quartic_equations.html
2. https://infourok.ru/uravnenie-visshih-stepeney-rabota-polezna-studentam-i-nachinayuschim-trudovyu-deyatelnost-pedagogam-1166182.html
3. https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B0%D1%80%D0%B4%D0%B0%D0%BD%D0%BE,_%D0%94%D0%B6%D0%B5%D1%80%D0%BE%D0%BB%D0%B0%D0%BC%D0%BE
4. https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D1%87%D0%B5%D1%82%D0%B2%D1%91%D1%80%D1%82%D0%BE%D0%B9_%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BF%D0%B5%D0%BD%D0%B8
5. https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B5%D1%80%D1%80%D0%B0%D1%80%D0%B8,_%D0%9B%D0%BE%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D0%BA%D0%BE
6. https://studwork.org/spravochnik/matematika/reshenie-uravneniy-3-y-i-4-y-stepeni
7. https://www.resolventa.ru/spr/algebra/cardano.htm
8. https://zaochnik.com/spravochnik/matematika/systems/reshenie-kubicheskih-uravnenij/

Приложение 1. План-конспект урока «Решение уравнений высших степеней»

Предмет: Алгебра и начала анализа (профильный уровень)

Авторы учебника: С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин.

Тема урока "Решение уравнений высших степеней"

Цели:

Обобщить и систематизировать теорию о многочленах от одной переменной, многочленах от нескольких переменных, приемы решения целых алгебраических уравнений в стандартных и нестандартных ситуациях.

Задачи:

Образовательные:

- повторить деление многочлена на многочлен с остатком, теорему Безу и следствие, теорему о целом корне многочлена, схему Горнера;
- сформировать у учащихся умения и закрепить навыки решения алгебраических уравнений;
- научить применять ключевые задачи не только в знакомой, но в модифицированной и незнакомой ситуациях.

Развивающие

- развить умения самостоятельного решения уравнений и задач, связанных с преобразованием многочленов;
- содействовать развитию устойчивого интереса к математике с помощью математической строгости умозаключения;
- ознакомить с логическими приемами мышления.

Воспитательные:

- воспитать чувство ответственности, формировать навыки самооценки;
- содействовать желанию расширить и углубить знания, полученные на уроке,
- воздействовать на мотивацию к учению с помощью историко-математического материала;
- содействовать повышению грамотности устной и письменной речи учащихся.

Тип урока: урок обобщения и систематизации знаний

Оборудование: “Разложить на множители”, “Решить уравнения”.

Форма организации учебной деятельности: Индивидуальная, фронтальная, групповая, самопроверка.

План урока:

1. Организационный момент: вступительное слово учителя, в котором он подчеркивает значение материала изученной темы, сообщает цель и план урока (1 мин.)
2. Актуализация опорных знаний (8 мин.):
   - повторение теории о многочленах: многочлены от одной переменной;
   - многочлены от нескольких переменных (демонстрация слайдов);
3. Фронтальная работа “Устно” (3 мин.)
4. Решение задач (25 мин.):

   I этап: алгебраические уравнения от одной переменной;

   II этап: алгебраические уравнения от нескольких переменных;

   а) работа в группах;

   б) работа у доски;
5. Самостоятельная работа учащихся (5 мин.)
6. Подведение итогов урока. Рефлексия (2 мин.)
7. Задание на дом, инструкция о его выполнении (1 мин.)

Ход урока:

1.Организационный момент – ставятся цели и задачи урока.

Вступительное слово учителя

(На доске тема, цели и задачи урока.)

- умение делить “углом” многочлен на многочлен,
- теорема Безу, следствие теоремы Безу,
- использование схемы Горнера при решении уравнений высших степеней

2. Актуализация опорных знаний самими учащимися.

3. Подготовка к работе (устно)

“Схема Горнера”:

Применение схемы Горнера:

разделить ($x^7-2x^4+27x+3$) на ($x+2$), используя схему Горнера

	1	0	0	-2	0	0	27	3
-2	1	-2	4	-10	20	-40	107	-211

$x^7 - 2x^4 + 27x + 3 = (x+2)(x^6 + 2x^5 + 4x^4 - 10x^3 + 20x^2 - 40x + 107) - 211$

1. Разложить на множители:

$x^3 - 3x^2 + 3x - 9$

$3x^3 - x^2 + 27x - 9$

2. Решить уравнение: (работают у доски два ученика)

1. $x^3 - 7x + 6 = 0$ (ответ: x = 1, x = -3, x = 2)

2. $x^3 - 19x - 30 = 0$

Решение: x = - 2 – корень уравнения $x^3 - 19x - 30$ среди делителей 30

$x^3 - 19x - 30 = (x + 2)(x^2 - 2x - 15)$ $(x + 2)(x^2 - 2x - 15) = 0$

Ответ: x = -2; x= -3; x = 5

4. Самостоятельная работа (5 мин.)

Решить уравнение:

1. $x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 9x + 30 = 0$

2.Разложить на множители:

$8a^3 + 36a^2в + 54ав^2 + 27в^3$

Решение: $8a^3 + 36a^2в + 54ав^2 + 27в^3 = 8a^3 + 27в^3 + 36a^2в + 54ав^2 = 8a^3 + 27в^3 + 18ав(2a + 3в) = (2a)^3 + (3в)^3 + 18ав(2a + 3в) = (2a + 3в)(4a^2 - 6ав + 9в^2) + 18ав(2a + 3в) = (2a + 3в)(4a^2 - 6ав + 9в^2 + 18ав) = (2a + 3в)(4a^2 + 9ав + 9в^2) = (2a + 3в)^3$

Ответ: $(2a + 3в)^3$

5. Подведение итогов урока. Рефлексия

6. Задание на дом, инструкция о его выполнении

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^4 + y^4 = 17 \end{cases}$$

При каких значениях параметра а многочлен

$(x^2 + (2a + 1)x + 2a)(x^2 - (a + 2)x + 2a)(x - 1)$ имеет кратные корни? Найдите эти корни

Приложение 2. Фотоколлаж урока